École Doctorale de Physique de la région parisienne

Institut d'Astrophysique de Paris

THÈSE de DOCTORAT de l'Université Paris VI

présentée par

Cyril PITROU

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de L'Université Paris VI

Spécialité : Physique Théorique

Dynamique non-linéaire et anisotropie primordiale en cosmologie

---

soutenue le 29 mai 2008 devant le jury composé de

Mme	Ruth DURRER	Rapporteur
Mr	David LANGLOIS	Rapporteur
Mr	David SPERGEL	Examinateur
Mr	Jean-Philippe UZAN	Directeur de thèse
Mr	Filippo VERNIZZI	Examinateur
Mr	Jean-Bernard ZUBER	Président

Résumé

La grande précision des mesures du fond diffus cosmologique nécessitent de comprendre avec finesse la physique sous-jacente afin d'en tirer des conclusions pertinentes sur la phase primordiale de l'univers. Dans cette thèse nous étudions la théorie des perturbations non-linéaires dans le cadre de la relativité générale. Notre but est de déterminer le transfert des perturbations de la métrique ainsi que des perturbations du contenu matériel, entre la phase primordiale de l'univers et les observations réalisées aujourd'hui. Nous nous plaçons tout d'abord dans l'approximation fluide afin d'appréhender les comportements généraux attendus. Ensuite nous étudions la théorie cinétique au second ordre, nécessaire pour obtenir le transfert radiatif non-linéaire, dans le but de déterminer la non-gaussianité dans le fond diffus cosmologique. Nous étudions également la théorie des perturbations linéaires autour d'espaces anisotropes. Nous élaborons la théorie des perturbations invariantes de jauge autour d'un espace de Bianchi I, puis nous étudions les signatures observationnelles d'une phase primordiale d'inflation possédant cette symétrie.
Mots Clés : Cosmologie, inflation, perturbations, anisotropie, CMB, non-gaussianité, Bianchi.

Abstract

Non-linear dynamics and primordial anisotropy in cosmology

The high accuracy in the measurements of the cosmic microwave background requires to understand in details the underlying physics in order to draw relevant conclusions for the primordial phase of the universe. In this thesis, we study the theory of non-linear perturbations in the framework of general relativity. Our goal is to determine the transfer of the metric perturbations together with the matter content perturbations, between the inflationary primordial phase of the universe and the observations performed today. We first consider the fluid approximation in order to extract the general leading behaviours. We then turn to the kinetic theory at second order, which is necessary in order to obtain the non-linear transfer function for radiation, in order to determine the non-Gaussianity in the cosmic microwave background. We also study the linear perturbation theory around anisotropic universes. We set up the gauge invariant perturbation theory around a Bianchi I space-time, and we study the observational signatures of a model of inflation having this symmetry.
Key Words : Cosmology, inflation, perturbations, anisotropy, CMB, non-Gaussianity, Bianchi.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Philippe Uzan, mon directeur de thèse, pour avoir accepté d'encadrer cette thèse et m'avoir fait confiance après un simple café. Je lui dois une disponibilité sans faille doublée d'une bonne humeur permanente qui m'ont permis d'effectuer ces recherches dans les meilleures conditions. Il ne reste plus qu'à attendre 2035 pour devenir des amis de 30 ans.

Je tiens également à remercier le jury de thèse, Jean-Bernard Zuber, Filippo Vernizzi, David Spergel et plus particulièrement Ruth Durrer et David Langlois pour avoir accepté d'être rapporteurs.

Merci aux collaborateurs de ces trois années, Peter Dunsby, Chris Clarkson, Bob Osano, Francis Bernardeau, Raul Abramo, et Thiago Pereira, ce dernier étant devenu par ailleurs un ami et professeur de portugais, pour qui j'aurai beaucoup de mal à rendre la qualité de l'accueil qu'il m'a fait au Brésil.

Je remercie les membres de l'Institut d'Astrophysique de Paris, pour les discussions pas uniquement techniques que j'ai eues avec eux, plus particulièrement Guillaume Faye pour m'avoir éclairé sur l'utilisation des ordinateurs, Gilles Esposito-Farez pour des déjeuners tardifs, ainsi que Carlo Schimd et Simon Prunet pour m'avoir rassuré face aux difficultés d'une thèse. Je remercie également José M. Martín-García, qui sera bientôt à l'IAP, pour son aide sur le calcul tensoriel informatisé.

Je remercie l'équipe PLANET et plus précisément Jean-Philippe Beaulieu, John Greenhill et Stefan Dieters, pour avoir accepté de me faire découvrir l'astronomie et les marsupiaux.

Je remercie les thésards et ex-thésards, notamment ceux qui supportent et supportaient de près mes calculs bruyants, Frank Genêt, Andrew Fox, Marc Lilley et Yuko Kakazu.

On arrive à une thèse après une scolarité assez longue et la liste des professeurs à qui je suis redevable est très longue. Je ne peux donc être exhaustif mais je remercie Mr Souquet, Mr Quibel, Mr Ranty, Mr Palet, et Pierre Salati. Je remercie également Antony Carrington, Pierre Rodière, George Smoot et Jodi Lamoureux pour m'avoir initié à la recherche.

Je remercie toute ma famille qui a toujours respecté tous mes choix, notamment ma mère qui a subitement montré beaucoup d'intérêt pour la cosmologie. Cette thèse ne serait pas sans mon père qui m'a transmis le goût de la physique et expliqué le calcul différentiel avec persévérance quand mes expériences balistiques estivales le nécessitaient.

Merci à tous mes amis, mes compagnons de route et de randonnée, Sébastien, David, Etienne, Jean et Béatrice, les Orléanais, Pierre, Claire, Mathieu, Jean-Yves, Toto et Céline, les Lyonnais, Sophie, Hélène, Samuel, Elise, Mickael, Anne et Stéphane, les musiciens des "Spiders", Yann, Julien, David, Pierre et Neko.

Enfin toute ma reconnaissance va à ma très chère Lucie pour son soutien permanent et sa compréhension sans limite des besoins intemporels de la recherche.

Introduction

En 2003, alors que je terminais mon DEA, les résultats du satellite WMAP sur la mesure du fond cosmologique ont fait passer la cosmologie dans une ère de grande précision, en complétant significativement les résultats similaires du satellite COBE parus en 1992. Le modèle standard du big-bang comporte certes encore beaucoup d'inconnues, notamment pour son contenu matériel sombre, mais il devenait ainsi capable de quantifier précisément ce qu'il n'expliquait pas. Depuis ce moment là, le modèle de l'*inflation* a également été admis et a été adjoint au modèle du big-bang chaud pour former le modèle standard de la cosmologie. L'inflation permet d'expliquer l'origine des fluctuations à partir desquelles les structures astrophysiques se sont formées par effondrement gravitationnel. Cependant cette phase primordiale d'expansion accélérée se situe à des échelles d'énergie inaccessibles en laboratoire, et constitue donc une fenêtre sur la physique des très hautes énergies qui reste à découvrir. Sa description reste pour l'heure phénoménologique et un grand nombre de modèles d'inflation ont été construits, avec pour la plupart une motivation issue de la théorie des cordes. Les mesures les plus anciennes que nous pouvons obtenir de cette époque sont à chercher soit dans le fond diffus cosmologique soit dans les ondes gravitationnelles primordiales. Cependant l'univers ayant été opaque après l'inflation, le fond diffus cosmologique ne constitue pas une fenêtre directe sur l'inflation et seule l'étude détaillée de la dynamique des perturbations permet de remonter à la phase primordiale de l'univers. Quant aux ondes gravitationnelles primordiales, en principe elles témoignent directement de l'inflation mais leur détection directe reste encore un objectif à long terme.

L'étude de la dynamique des perturbations se fait généralement en perturbant linéairement les équations d'Einstein autour d'un espace homogène et isotrope, dit espace de fond. Cette théorie linéaire n'offre que très peu de prise pour différencier les modèles d'inflation. Les équations d'Einstein étant intrinsèquement non-linéaires, des effets fins sont attendus lorsque l'on prend en compte les perturbations au delà de l'ordre linéaire. Ceci peut notamment être à l'origine d'effets *non-gaussiens* qui pourront éventuellement être détectés par le satellite *Planck*, qui est la prochaine mission d'observation du fond diffus dont le lancement est prévu en octobre 2008. Pour cela il faudra nécessairement comprendre tous les effets d'évolution afin de contraindre la non-gaussianité héritée de l'inflation. La dynamique des perturbations de la métrique, c'est-à-dire de l'espace temps, est donnée par les équations d'Einstein. La dynamique du contenu matériel est soit envisagée dans l'approximation fluide, soit dans le cadre plus précis de la théorie cinétique par l'équation de Boltzmann. Par ailleurs le fait de supposer que l'espace est globalement isotrope pour dériver les équations d'évolution doit être testé si l'on

souhaite que le modèle repose sur un minimum d'hypothèses. Comme on peut montrer que cette isotropie décroît, cette interrogation concerne essentiellement la phase primordiale de l'univers. Pour cela, il faut développer toutes les prédictions d'une éventuelle anisotropie afin d'obtenir des prédictions génériques qui pourront être contraintes par les observations. Afin d'étudier ces deux aspects, ma thèse s'est focalisée sur la théorie non-linéaire autour d'un espace de fond homogène et isotrope ainsi que sur la théorie linéaire autour des espaces anisotropes.

Dans la première partie de cette thèse nous rappelons les résultats du modèle standard du big-bang en le reformulant éventuellement d'une manière nouvelle dans le but de l'étendre. Le premier chapitre rappelle les grandes lignes de la description de l'espace de fond en rappelant les principaux résultats du big-bang chaud. Le second chapitre passe en revue la théorie des perturbations linéaires dans un cadre simplifié. Nous étudions ainsi le cas idéal d'un mélange de radiation et de matière noire froide afin d'étudier les propriétés essentielles des perturbations de la métrique. Nous étudions ensuite dans l'approximation fluide la dynamique du mélange couplé de baryons et de radiation. Nous y présentons également le formalisme $1 + 3$ qui peut être utilisé comme une formulation alternative pour étudier la dynamique des perturbations. Dans le chapitre 3, nous exposons la physique du fond diffus cosmologique ainsi que la théorie cinétique qui constitue une bien meilleure description que l'approximation fluide. Nous avons essayé d'utiliser une formulation basée sur l'utilisation de tétrades afin de rendre plus transparent la microphysique. Dans le chapitre 4 nous exposons le modèle standard de l'inflation en insistant principalement sur le mécanisme de génération des fluctuations primordiales. Nous présentons comment cette dérivation peut être transposée au formalisme $1 + 3$. Ceci a donné lieu à une publication en collaboration avec Jean-Philippe Uzan dans *Physical Review D*.

Dans la seconde partie nous étudions les perturbations jusqu'au second ordre. Dans le chapitre 5, nous commençons d'abord par étudier la dépendance de jauge inhérente aux perturbations. Nous rappelons d'abord comment s'en affranchir en construisant des variables invariantes de jauge pour les quantités tensorielles, puis nous présentons comment cette méthode peut être généralisée à la théorie cinétique. Ceci a fait l'objet d'une publication dans *Classical and Quantum Gravity*. Nous exposons également comment les perturbations des quantités tensorielles peuvent être déterminées informatiquement, et nous exposons les grandes lignes du programme utilisé tout au long de cette thèse. Dans le chapitre 6 nous résumons les équations du second ordre et nous donnons autant que possible les solutions analytiques. Nous suivons pour cela la même démarche qu'au premier ordre en considérant d'abord les cas simplifié d'un mélange de matière noire et de radiation dans l'approximation fluide. Puis nous étudions la dynamique des baryons couplés à la radiation et enfin présentons partiellement les résultats obtenus pour la théorie cinétique. Dans le chapitre 7 nous étudions certains aspects de la dynamique non-linéaire pendant l'inflation concernant la génération d'ondes gravitationnelles. Ceci a fait l'objet d'une publication en collaboration avec Bob Osano, Peter Dunsby, Jean-Philippe Uzan et Chris Clarkson dans *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. Nous rappelons également les prédictions génériques du modèle d'inflation standard, puis nous abordons les signatures observationnelles qui peuvent en être déduites sans prendre en compte les effets d'évolution.

Dans la troisième partie nous étudions la théorie des perturbations dans les espaces aniso-

tropes, plus précisément pour des espaces de Bianchi I. Dans le chapitre 8 nous exposons la construction formelle des perturbations invariantes de jauge ainsi que les équations dynamiques qu'elles satisfont. Ceci a donné lieu à une publication en collaboration avec Thiago Pereira et Jean-Philippe Uzan dans *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. Dans le chapitre 9 nous appliquons cette théorie à un modèle simple d'inflation afin d'en déterminer les signatures observationnelles. Ceci permet également d'évaluer la robustesse du modèle standard de l'inflation isotrope. Ces résultats ont également été publiés avec les mêmes auteurs dans le même journal.

Table des matières

Résumé iii

Abstract v

Remerciements vii

Introduction ix

I Introduction au modèle standard du Big-Bang 1

1 Cadre Général 3
1.1 Hypothèses . . . 3
1.2 L'univers homogène et isotrope . . . 4
1.2.1 Métrique . . . 4
1.2.2 Loi de Hubble et décalage vers le rouge . . . 5
1.2.3 Tenseur énergie-impulsion . . . 6
1.2.4 Les équations de Friedmann . . . 7
1.2.5 Notion d'horizon et de causalité . . . 7
1.3 Le big-bang chaud . . . 8
1.3.1 Dynamique de l'univers . . . 8
1.3.2 Histoire thermique . . . 10
1.3.3 Problèmes du big-bang chaud . . . 11

2 Théorie des perturbations linéaires 13
2.1 Quantités perturbées . . . 14
2.1.1 Décomposition SVT . . . 14
2.1.2 Perturbations de la métrique et du tenseur énergie-impulsion . . . 15
2.1.3 Equations d'évolution des perturbations linéaires . . . 17
2.2 Dynamique au premier ordre . . . 19
2.2.1 Ère de radiation . . . 19
2.2.2 Ère de matière . . . 21
2.2.3 Transition radiation-matière . . . 21

2.2.4 Loi de conservation . . . 26
2.2.5 Intéractions baryons-photons . . . 27
2.3 Le formalisme 1+3 . . . 30
2.3.1 Principe général . . . 30
2.3.2 Utilisation de la dérivée de Lie . . . 32
2.3.3 Comparaison des approches Bardeen et 1+3 . . . 33

3 Théorie cinétique et physique du fond diffus cosmologique 35
3.1 Effet Sachs-Wolfe . . . 35
3.2 Multipôles . . . 37
3.2.1 Prédictions statistiques multipôlaires . . . 37
3.2.2 Approximation du ciel plat . . . 38
3.2.3 Epaisseur de la surface de dernière diffusion . . . 38
3.3 Théorie cinétique . . . 40
3.3.1 Description statistique d'un ensemble de particules . . . 40
3.3.2 Perturbations de tétrades . . . 43
3.3.3 Equation des géodésiques . . . 44
3.3.4 Terme de Liouville . . . 46
3.3.5 Terme de collision pour la radiation . . . 47
3.3.6 Hiérarchie de Boltzmann et lien avec les observations du fond diffus . . . 48
3.3.7 La limite fluide de l'équation de Boltzmann . . . 49
3.3.8 Conclusion . . . 50

4 L'inflation standard 51
4.1 Phénoménologie . . . 52
4.2 Quantification de l'inflaton et spectre primordial . . . 53
4.3 La variable de Mukhanov-Sasaki en formalisme 1+3 (article) . . . 57

II Dynamique au delà de l'approximation linéaire et non-gaussianité 59

5 La théorie des perturbations dans le régime non-linéaire 63
5.1 Problématique . . . 63
5.2 La théorie des perturbations : tenseurs et fonction de distribution (article) . . . 66
5.3 Traitement informatique des perturbations . . . 66
5.3.1 xAct . . . 66
5.3.2 Algorithme de perturbation . . . 67
5.3.3 Un exemple simple : la perturbation au premier ordre du scalaire de Ricci 71

6 Dynamique au second ordre 75
6.1 État des lieux . . . 75
6.2 Approximation fluide . . . 76
6.2.1 Équations d'évolution des perturbations . . . 76
6.2.2 Loi de conservation . . . 78
6.2.3 Ère de radiation . . . 79
6.2.4 Ère de matière . . . 82

6.2.5 Transition radiation-matière . . . 83
6.2.6 Intéractions baryons-photons . . . 85
6.2.7 Physique du fond diffus cosmologique . . . 85
6.3 Théorie cinétique au second ordre . . . 87
6.3.1 Équation des géodésiques . . . 87
6.3.2 Terme de Liouville . . . 88
6.3.3 Hiérarchie de Boltzmann et lien avec les observations . . . 89
6.3.4 Limite fluide de l'équation de Boltzmann . . . 90

7 L'inflation au delà de l'ordre linéaire et signature à grande échelle 91
7.1 Généralités . . . 91
7.2 Ondes gravitationnelles générées par des effets de second-ordre pendant l'inflation (article) . . . 92
7.3 Le formalisme in-in . . . 92
7.4 Perturbations scalaires générées au second ordre . . . 93
7.5 Les signatures observationnelles . . . 94
7.5.1 Statistiques sur des champs . . . 94
7.5.2 Le bispectre aux grandes échelles . . . 96

III Cosmologie dans un univers anisotrope 99

8 Théorie des perturbations autour d'un espace de Bianchi *I* 101
8.1 Variables invariantes de jauge dans le cas d'un espace de Bianchi quelconque . . 102

9 Modèle d'inflation anisotrope et signatures observationnelles (article) 105

Conclusion et perspectives de recherche 107

Appendices 109
A Commutation des dérivées covariantes . . . 109
B Quantités géométriques . . . 110
B.1 Symboles de Christoffel . . . 110
B.2 Connections affines . . . 111
B.3 Tenseur d'Einstein . . . 112
C Perturbations de la matière . . . 114
C.1 Vitesse . . . 114
C.2 Tenseur énergie-impulsion . . . 115
D Équations au second ordre dans le cas plat . . . 116
D.1 Équations de conservation . . . 116
D.2 Équations d'Einstein dans le cas d'un fluide parfait avec $c_s^2 \neq w$ . . . 116
E Conservation de la perturbation de courbure comobile au second ordre . . . 117

Bibliographie 120

Première partie

Introduction au modèle standard du Big-Bang

Chapitre 1

Cadre Général

Sommaire

1.1 Hypothèses . . . 3
1.2 L'univers homogène et isotrope . . . 4
1.2.1 Métrique . . . 4
1.2.2 Loi de Hubble et décalage vers le rouge . . . 5
1.2.3 Tenseur énergie-impulsion . . . 6
1.2.4 Les équations de Friedmann . . . 7
1.2.5 Notion d'horizon et de causalité . . . 7
1.3 Le big-bang chaud . . . 8
1.3.1 Dynamique de l'univers . . . 8
1.3.2 Histoire thermique . . . 10
1.3.3 Problèmes du big-bang chaud . . . 11

1.1 Hypothèses

La cosmologie est le domaine de la physique consacré à l'étude de l'univers (observable) à grande échelle, c'est-à-dire de sa structure et de son contenu matériel. Sa structure est décrite par une variété différentielle quadridimensionnelle qui modélise l'espace-temps, et son contenu matériel est décrit par des champs vivant dans cette variété. La relation entre ces deux éléments de la théorie est fournie par la relativité générale (RG). De plus, le principe de covariance implique que l'interaction des champs matériels est donnée par la physique de la relativité restreinte. Le fait que la relativité générale soit locale rend nécessaire une hypothèse supplémentaire (à tester) sur la topologie de l'univers, au moins dans sa partie observable [Luminet *et al.* 03]. De plus, la relativité générale n'a été validée expérimentalement qu'à des échelles bien inférieures aux échelles cosmologiques, si bien que son utilisation aux échelles cosmologiques constitue une extrapolation dont la validité doit être testée. Cette théorie est plus communément remise en cause lorsqu'elle rentre en conflit avec la physique des particules, c'est-à-dire aux grandes énergies. Ceci ne manque pas d'arriver lorsqu'on s'intéresse plus précisément aux origines de l'univers. La cosmologie se résume donc principalement à la résolution des équations d'Einstein pour notre

univers en tant que système physique. Cependant, les observations nécessaires pour réaliser cette tâche souffrent de limitations qui la rendent impossible en pratique. D'une part, les observations cosmologiques consistent le plus souvent en la mesure de rayonnement électromagnétique si bien que l'on accède uniquement à une partie de notre cône de lumière passé. Une manière de s'affranchir de cette dégénerescence pourrait être d'observer le rayonnement après un ou plusieurs changements de direction, par diffusion sur les nuages de poussière [Goodman 95]. Une autre possibilité serait de tirer parti de notre évolution temporelle pour utiliser la superposition des cônes de lumières aussi mince soit elle [Uzan *et al.* 07a]. La mise en oeuvre des deux tests reste néanmoins improbable pour le moment. On introduit donc une hypothèse supplémentaire appelée *principe cosmologique*, qui consiste à supposer que l'univers est homogène et isotrope à grande échelle, ce qui implique que tous les points de l'univers sont équivalents, et permet de lever la dégénerescence. Idéalement il faudra revenir sur cette hypothèse et la tester [Uzan *et al.* 07b]. Par ailleurs, d'un point de vue expérimental nous ne disposons que d'un seul univers, le nôtre, si bien qu'il n'existe pas de reproductibilité de l'expérience [1]. Etant donné que bien souvent nous compensons la finitude de notre intelligence face à un problème complexe en développant des théories statistiques, la cosmologie également est un domaine dans lequel les prédictions sont statistiques. Cependant la théorie de l'inflation, qui permet d'expliquer l'origine des fluctuations primordiales, est de nature intrinsèquement statistique ce qui justifie plus fondamentalement le traitement statistique de l'évolution de l'univers.

1.2 L'univers homogène et isotrope

1.2.1 Métrique

Dans toute cette thèse nous utiliserons les unités pour lesquelles $c = \hbar = 1$. La métrique la plus générale compatible avec le principe cosmologique est de la forme (dite de Friedmann-Lemaître)

$$\bar{g}_{\mu\nu} = -(\mathrm{d}t)_\mu(\mathrm{d}t)_\nu + a^2(t)\gamma_{ij}(\mathbf{x})(\mathrm{d}x^i)_\mu(\mathrm{d}x^j)_\nu, \tag{1.1}$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle, x^i sont les coordonnées spatiales comobiles avec $i = 1, 2, 3$, t est le temps cosmique et γ_{ij} est la métrique des sections spatiales de temps constant qui doit satisfaire les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie. Les notations $(\mathrm{d}t)_\mu$, $\left(\mathrm{d}x^i\right)_\mu$ correspondent aux formes associées aux coordonnées, les indices grecs allant de 0 à 4. On peut montrer [Wald 84] que cette hypothèse contraint le tenseur de Riemann et les tenseurs associés correspondant à la métrique γ_{ij} à être de la forme

$$^{(3)}R_{ijkl} = K\gamma_{k[i}\gamma_{j]l} \quad \Rightarrow \quad ^{(3)}R_{ij} = 2K\gamma_{ij} \quad \Rightarrow \quad ^{(3)}R = 6K, \tag{1.2}$$

où K est une constante caractérisant la courbure des sections spatiales de l'univers. Selon que K est positif, nul, ou négatif, ces sections sont respectivement sphériques, euclidiennes, ou hyperboliques. Le temps t est parfois aussi appelé temps physique car il correspond au temps propre d'un observateur de quadrivecteur vitesse $(\mathrm{d}t)_\mu$, c'est-à-dire d'un observateur comobile puisque

1. C'est également le cas de la paléontologie ou de la géologie et celles ci peuvent être considérées comme une cosmologie, au sens étymologique du terme, restreinte à la ligne d'univers de la Terre qui est une autre partie de l'espace-temps accessible aux mesures. Néanmoins la recherche d'exoplanètes et l'exobiologie ouvrent ces domaines à la reproductibilité de la mesure [Ellis 75, Bondi 61].

les coordonnées spatiales x^i d'un tel observateur sont constantes. Il peut souvent être pratique d'introduire le temps conforme η défini par l'équation différentielle

$$a\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

La métrique (1.1) se récrit alors

$$\bar{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta)\left[-(\mathrm{d}\eta)_\mu(\mathrm{d}\eta)_\nu + \gamma_{ij}(\mathrm{d}x^i)_\mu(\mathrm{d}x^j)_\nu\right]. \tag{1.4}$$

On constate alors que dans le cas où la métrique des sections spatiales est plate ($K = 0$), la métrique spatiale en coordonnées cartésiennes s'écrit $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ si bien que $\bar{g}_{\mu\nu}$ est conforme à une métrique de Minkowski[2]. Les géodésiques de type lumière sont alors paramétrées par

$$\mathrm{d}\eta = n_i\mathrm{d}x^i, \tag{1.5}$$

où n^i est un vecteur unitaire constant, et la structure causale est alors plus immédiate. Les tenseurs de Riemann et tenseurs d'Einstein associés à la métrique (1.4) sont donnés dans l'appendice B.

1.2.2 Loi de Hubble et décalage vers le rouge

On peut lire sur la métrique (1.1) que les distances comobile $\mathbf{x}$ et physique $\mathbf{r}$ sur une section spatiale de temps constant, déterminées respectivement par la métrique γ_{ij} et la métrique $h_{ij} = a^2\gamma_{ij}$, sont reliées par

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}. \tag{1.6}$$

Les sections spatiales étant paramétrées par le temps cosmique t qui est aussi le temps propre des observateurs comobiles, on en déduit la vitesse d'étirement des distances telles que mesurée par ces observateurs

$$\dot{\mathbf{r}} = H\mathbf{r} + a(t)\dot{\mathbf{x}}, \tag{1.7}$$

où un point signifie une dérivée par rapport à t et où $H \equiv \dot{a}/a$ est le paramètre de Hubble. Pour des points situés à une distance comobile constante ($\dot{\mathbf{x}} = 0$), on remarque une dilatation des distances caractérisée par le paramètre de Hubble. On peut montrer que cette dilatation des longueurs s'applique également aux longueurs d'onde. En effet, dans l'approximation de l'optique géométrique le vecteur tangent à la trajectoire d'un rayon lumineux, $\bar{k}^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$, satisfait

$$\bar{k}^\mu\bar{k}_\mu = 0\,, \qquad \bar{k}^\mu\bar{\nabla}_\mu\bar{k}^\nu = 0. \tag{1.8}$$

Un observateur comobile mesure une énergie donnée par $\bar{E} = -\bar{k}^\mu\bar{u}_\mu$ et une impulsion donnée par $\bar{p}^\mu = \bar{k}^\mu - \bar{E}\bar{u}^\mu$, où $\bar{p}^\mu\bar{u}_\mu = 0$. En utilisant les expressions données en appendice B pour les symboles de Christoffel nécessaires pour exprimer la dérivée covariante, on déduit des équations (1.8) que

$$\frac{\dot{\bar{E}}}{\bar{E}} = -H = -\frac{\dot{a}}{a}. \tag{1.9}$$

2. Ceci est également valable dans le cas où les sections spatiales ne sont pas plates.

L'énergie du photon étant reliée à sa longueur d'onde par $\bar{E} = \frac{h}{\lambda}$, on en déduit que $\lambda \sim a$. Ce décalage de longueur d'onde est vers le rouge entre le moment d'émission et moment d'observation car a est croissant, et il est paramétré par z défini selon

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \tag{1.10}$$

On définit par ailleurs le nombre d'e-folds[3] entre des temps t_1 et t_2 par

$$N_{t_1,t_2} \equiv \ln\left[a(t_2)/a(t_1)\right] = \ln\left[\frac{1+z_1}{1+z_2}\right]. \tag{1.11}$$

1.2.3 Tenseur énergie-impulsion

Dans une description continue telle que celle faite en relativité générale, le contenu matériel est encodé dans un tenseur symétrique $T_{\mu\nu}$. En toute généralité, la signification physique de ce tenseur peut être mise en évidence en utilisant le quadrivecteur vitesse d'un observateur n_μ, c'est-à-dire tel que $n^\mu n_\mu = -1$. En effet, en définissant à partir d'une métrique quelconque $g_{\mu\nu}$ le tenseur de projection $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$, on obtient l'identité

$$T_{\mu\nu} = \left(T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta\right)n_\mu n_\nu + 2T_{\alpha\beta}n^\alpha h^\beta_{\ (\mu}n_{\nu)} + T_{\alpha\beta}h^\alpha_{\ \mu}h^\beta_{\ \nu}\,, \tag{1.12}$$

où on a noté $X_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}X_{\mu\nu} + \frac{1}{2}X_{\nu\mu}$. Les quantités

$$\rho \equiv T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta\,, \quad q_\mu \equiv T_{\alpha\beta}n^\alpha h^\beta_{\ \mu} \quad \text{et} \quad P_{\mu\nu} \equiv T_{\alpha\beta}h^\alpha_{\ \mu}h^\beta_{\ \nu} \tag{1.13}$$

sont respectivement la densité d'énergie, la densité d'impulsion et le tenseur des contraintes mesurés par cet observateur. On peut décomposer encore cette dernière quantité en séparant la pression définie par $P \equiv \frac{1}{3}P^\mu_{\ \mu}$, et le tenseur de pression anisotrope défini par $\Pi^{\mu\nu} \equiv P^{\mu\nu} - Ph^{\mu\nu}$. Dans le cas d'un fluide parfait, le tenseur de pression anisotrope est nul puisqu'il n'y a pas de viscosité. Par ailleurs, toujours dans le cas d'un fluide parfait, il n'y a pas de transfert de chaleur, et si $q^\mu = 0$, l'observateur est dit comobile avec le fluide. L'observateur mesure alors la densité d'énergie $\rho = \sqrt{-p_\nu p^\nu}$ dans le référentiel où le fluide est au repos et sa quadrivitesse coïncide avec celle de fluide, c'est-à-dire

$$n^\mu = u^\mu \equiv \frac{p^\mu}{\rho}\,. \tag{1.14}$$

Le tenseur énergie-impulsion dans le cas d'un fluide parfait s'écrit donc

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P\left(u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}\right). \tag{1.15}$$

Les symétries de l'espace temps associées à la métrique (1.1) imposent que le contenu de l'univers à grande échelle doit nécessairement être décrit par un tenseur énergie-impulsion de la forme

$$T_{\mu\nu} = A\bar{g}_{\mu\nu} + B(\mathrm{d}t)_\mu(\mathrm{d}t)_\nu\,. \tag{1.16}$$

On en déduit donc que pour un espace de Friedmann-Lemaître, le contenu matériel est celui d'un fluide parfait de densité d'énergie et de pression notées $\bar{\rho}$ et $\bar{P}$. Les coordonnées comobiles correspondent alors à des observateurs de quadrivitesse $\bar{u}_\mu \equiv (\mathrm{d}t)_\mu$ qui suivent le fluide.

3. Repliement de facteur e. Dans le système international, il s'agit plus précisément du Neper, tandis que le décibel possède une définition semblable mais en base 10.

1.2.4 Les équations de Friedmann

On définit le tenseur d'Einstein à partir du tenseur de Ricci par $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$. L'équation d'Einstein qui lit le contenu matériel de l'espace-temps avec sa géométrie s'écrit $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, avec $\kappa = 8\pi G$. Dans le cas d'un fluide parfait et pour la métrique (1.1), elle implique les deux équations suivantes, dites de Friedmann

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\bar{\rho} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{1.17}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\bar{\rho} + 3\bar{P}) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{1.18}$$

Λ est la constante cosmologique, et sa valeur mesurée a été extrêmement variable au cours du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Elle a en effet été introduite par Einstein pour permettre une solution statique de l'équation (1.17), c'est-à-dire telle que $H = 0$. Puis l'expansion cosmique ayant été mise en évidence expérimentalement elle a été abandonnée avant de refaire surface pour expliquer la dynamique récente de l'univers. Nous n'aborderons pas ce point dans ce manuscrit. L'équation de conservation $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ n'est pas indépendante des deux équations précédentes dont elle peut être déduite, et s'écrit

$$\dot{\bar{\rho}} + 3H(\bar{\rho} + \bar{P}) = 0. \tag{1.19}$$

L'ensemble de ces trois équations peut être récrit en temps conforme sous la forme

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3}\bar{\rho}a^2 - K + \frac{\Lambda a^2}{3}, \tag{1.20}$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{\kappa a^2}{6}(\bar{\rho} + 3\bar{P}) + \frac{\Lambda a^2}{3}, \tag{1.21}$$

$$\bar{\rho}' + 3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{P}) = 0, \tag{1.22}$$

avec $\mathcal{H} = aH = \frac{a'}{a}$, et où $'$ signifie une dérivée par rapport au temps conforme. De ces trois équations seulement deux sont indépendantes puisque la troisième peut être déduite des deux premières. Cependant nous avons trois fonctions a déterminer, $\bar{\rho}$ $\bar{P}$ et a. Il faut donc ajouter une équation supplémentaire en utilisant une équation d'état qui relie $\bar{P}$ à $\bar{\rho}$.

1.2.5 Notion d'horizon et de causalité

L'équation des géodésiques en temps conforme (1.5) permet de comprendre simplement la structure causale de l'univers. A un temps conforme η donné, un observateur comobile n'a pu voir les particules situées au delà d'une sphère de rayon conforme

$$r(\eta) = \int_{\eta_i}^{\eta} \mathrm{d}\eta' = \int_{0^+}^{t(\eta)} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}. \tag{1.23}$$

Si $a(t) \sim t^n$ proche de la singularité, avec $n < 1$, on en déduit que η_i possède une valeur finie. Dans ce cas, $r(\eta)$ a également une valeur finie qu'on appelle alors rayon de l'*horizon des particules*. On définit également les rayons de Hubble physique et comobile par

$$d_H = \frac{1}{H} \qquad d_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mathcal{H}}. \tag{1.24}$$

On distinguera donc les échelles super-Hubble des échelles sub-Hubble selon qu'elles correspondent à des longueurs (physiques ou comobiles) plus grandes ou plus petites que le rayon de Hubble (physique ou comobile). Une discussion plus détaillée sur les différents types d'horizon et leurs signification physique peut être trouvée dans la référence [Rindler 02].

1.3 Le big-bang chaud

1.3.1 Dynamique de l'univers

Si l'on se donne une équation d'état pour le fluide $P = w(\rho)\rho$, on peut récrire l'équation de conservation (1.19) sous la forme

$$\mathrm{d}\ln\bar{\rho} = -3(1+w)\mathrm{d}\ln a. \tag{1.25}$$

La solution générale est donc

$$\bar{\rho} \sim \exp\left(-3\int(1+w)\mathrm{d}\ln a\right). \tag{1.26}$$

Si le fluide total est un mélange de plusieurs fluides, w va dépendre de ρ et donc du temps. Si en revanche il n'y a qu'un seul fluide ou si un fluide est dominant, w peut éventuellement être constant et dépend des caractéristiques du fluide. Dans ce cas la densité d'énergie dépend du facteur d'échelle selon

$$\bar{\rho} \sim a^{-3(1+w)}. \tag{1.27}$$

Pour de la matière essentiellement non relativiste et froide, c'est-à-dire dont l'énergie est dominée par l'énergie de masse, $w = 0$. Pour un fluide de radiation, $w = 1/3$. Ces valeurs seront justifiées à partir de la théorie statistique et de la limite fluide qui peut en être tirée dans la section 3.3.1. Quant à la constante cosmologique, elle peut être interprétée comme un fluide d'équation d'état $w = -1$. La densité d'énergie de ces trois types de fluides évolue selon

$$\bar{\rho}(a) \propto \begin{cases} a^{-3} & \text{si } w = 0 \\ a^{-4} & \text{si } w = 1/3 \\ \text{Cste} & \text{si } w = -1 \text{ et } H = \text{Cste}. \end{cases} \tag{1.28}$$

On remarque que la densité d'énergie de la radiation se dilue plus vite que la matière froide. En effet le nombre de photons par unité de volume physique évolue comme le nombre de particules de matière par unité de volume physique, mais les photons perdent de l'énergie au cours de l'expansion d'après la loi (1.9) si bien que la densité d'énergie de la radiation diminue plus vite que celle de la matière froide. Quelle que soit la nature de la matière dominant aujourd'hui le contenu énergétique (matière ou constante cosmologique) on en déduit qu'il était inévitablement dominé par la radiation dans le passé. Le moment où le contenu en énergie est divisé équitablement entre matière et radiation est appelé équivalence et correspond à un décalage vers le rouge z_{eq} donné par

$$1 + z_{\text{eq}} = \left.\frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r}\right|_0. \tag{1.29}$$

De plus, puisque la présence d'une constante cosmologique est favorisée par les observations, l'univers tend à être dominé par celle ci. Le moment où le facteur d'échelle commence à accélérer ($\ddot{a} > 0$) correspond à un décalage vers le rouge z_Λ donné par

$$1 + z_\Lambda = \left(\frac{2\bar{\rho}_\Lambda}{\bar{\rho}_m} \right)^{1/3} \Bigg|_0 . \tag{1.30}$$

Les équations de Friedmann (1.17) permettent également dans le cas plat de déduire la loi de puissance du facteur d'échelle en fonction du temps lorsque l'univers est dominé par un de ces trois types de fluides

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3} & \text{si } w = 0 \\ t^{1/2} & \text{si } w = 1/3 \\ e^{Ht} & \text{si } w = -1 \text{ et } H = \text{Cste}\,, \end{cases} \tag{1.31}$$

ou

$$a(\eta) \propto \begin{cases} \eta^2 & \text{si } w = 0 \\ \eta & \text{si } w = 1/3 \\ \frac{-1}{H\eta} & \text{si } w = -1 \text{ et } H = \text{Cste}. \end{cases}$$

Plus généralement, dans le cas plat sans constante cosmologique, on peut utiliser les équations de Friedmann (1.20) et (1.21) pour en déduire que

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3w) = 0, \tag{1.32}$$

dont la solution dans le cas où w est constant est de la forme

$$a \propto \eta^\nu, \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{2}{1+3w}\,. \tag{1.33}$$

Pour obtenir une solution plus précise qui prend en compte toutes les formes d'énergie, il est commode d'introduire la densité critique $\bar{\rho}_{\text{crit}} \equiv 3H^2/\kappa$ ainsi que $\Omega_e \equiv \bar{\rho}_e/\bar{\rho}_{\text{crit}}$ pour chaque type de matière indexé par e. On introduit également $\Omega_\Lambda \equiv \Lambda/(3H^2)$, et $\Omega_K \equiv -K/(aH)^2$ de telle sorte que la première équation de Friedmann se récrive sous la forme d'une contrainte

$$\sum_e \Omega_e + \Omega_\Lambda + \Omega_K \equiv \Omega + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1. \tag{1.34}$$

Si le paramètre d'état w_e des différents types de matière est constant, cette équation peut être récrite en fonction des valeurs mesurées aujourd'hui, que l'on indexe habituellement par 0

$$\left(\frac{H}{H_0} \right)^2 = \sum_e \Omega_{e0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w_e)} + \Omega_{K0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2} + \Omega_{\Lambda 0}\,. \tag{1.35}$$

La mesure actuelle des paramètres permet donc de déterminer l'histoire de l'univers, en intégrant cette équation différentielle. Les dernières valeurs combinant toutes les dernières mesures peuvent être trouvées dans [Spergel *et al.* 07]. Dans ce modèle appelé *concordant*, le paramètre de Hubble aujourd'hui est de l'ordre de $H_0 \simeq 73\,\text{Mpc}^{-1}\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$, le contenu en matière est donné par $\Omega_{m0} \simeq 0.26$. Seulement une partie de la matière est baryonique et sa proportion est donnée par $\Omega_{b0} \simeq 0.041$, le reste est sous forme de matière noire froide, c'est-à-dire de matière n'interagissant pas

avec la radiation [4]. La radiation est largement sous-dominante puisque $\Omega_{r0} \simeq 8.23 \times 10^{-5}$, si bien que l'essentiel du contenu matériel est sous forme d'une constante cosmologique car $\Omega_{\Lambda 0} \simeq 0.72$. Enfin les sections spatiales sont essentiellement plates puisque $|\Omega_{K0}| < 0.02$. On obtient avec ces valeurs $z_{\text{eq}} \simeq 3600$ et $z_\Lambda \simeq 0.77$.

1.3.2 Histoire thermique

Dans la description précédente de l'univers, nous avons supposé que le contenu matériel de l'univers pouvait être décrit par un ensemble de fluides de paramètres d'état connus et constants. Nous avons également supposé que ces différents constituants n'interagissaient pas si bien que l'équation de conservation (1.19) est satisfaite pour chaque espèce. Une théorie plus satisfaisante doit faire intervenir une description statistique de la matière et prendre en compte les réactions possibles entre les différentes espèces que nous connaissons dans le cadre de la physique des particules. La description fluide doit alors émerger comme une limite de la description statistique. La distribution des particules d'une espèce est caractérisée par sa fonction de distribution $f_e(\mathbf{p}, t, \mathbf{x})$, encodant la probabilité qu'une particule soit en $\mathbf{x}$ avec une impulsion $\mathbf{p}$ à un temps t. Plus précisément, pour un observateur de quadrivecteur vitesse u_μ, à un instant t le nombre de particules de cette espèce $\mathrm{d}N_e$ dans un élément de volume $\mathrm{d}V$ autour de $\mathbf{x}$ appartenant à l'hypersurface de type espace orthogonale à u_μ, et de volume $\mathrm{d}^3\mathbf{p}$ autour de $\mathbf{p}$ est donné par

$$\mathrm{d}N_e = f_e(\mathbf{p}, t, \mathbf{x}) \mathrm{d}V \mathrm{d}^3\mathbf{p}. \tag{1.36}$$

Plus de détails peuvent être trouvés dans les références [Stewart 71, Bernstein 88]. Pour l'espace-temps associé à la métrique (1.1), l'homogénéité implique que les fonctions de distribution ne dépendent pas de la position $\mathbf{x}$. De plus l'isotropie implique qu'elles ne dépendent que de la norme et pas de la direction de l'impulsion $\mathbf{p}$. On utilisera donc pour cet espace des fonctions de distribution de la forme $\bar{f}_e(\bar{p}, t)$, ou éventuellement $\bar{f}_e(\bar{E}, t)$ puisque pour une espèce donnée les particules sont de même masse m_e et il y a une relation univoque entre l'énergie et la norme de l'impulsion $\bar{E}^2 - \bar{p}^2 = m_e^2$. Les quantités thermodynamiques, notamment celles intervenant dans le tenseur énergie-impulsion de fond peuvent être calculées à partir de cette fonction

$$\bar{n}_e(t) = \int \bar{f}_e(\bar{p}, t) 4\pi \bar{p}^2 \mathrm{d}\bar{p}\,, \tag{1.37}$$

$$\bar{\rho}_e(t) = \int \bar{f}_e(\bar{p}, t) \bar{E}(\bar{p}) 4\pi \bar{p}^2 \mathrm{d}\bar{p}\,, \tag{1.38}$$

$$\bar{P}_e(t) = \int \bar{f}_e(\bar{p}, t) \frac{\bar{p}^2}{3\bar{E}(\bar{p})} 4\pi \bar{p}^2 \mathrm{d}\bar{p}. \tag{1.39}$$

Nous justifierons ces expressions dans la section 3.3.1. Si le taux d'interaction des particules est plus élevé que le taux d'expansion de Hubble H, ces particules sont maintenues à l'équilibre thermodynamique entre elles et suivent une statistique de Fermi-Dirac pour les fermions ou une statistique de Bose-Einstein pour les bosons, et une température pour chaque espèce peut être définie. Le gaz de photons suit un spectre de corps noir (une statistique de Bose-Einstein avec un potentiel chimique nul) et sa température est aussi appelée température de l'univers. On peut montrer que

$$\bar{\rho}_r(\bar{T}) = g_\star(\bar{T}) \left(\frac{\pi^2}{30} \right) \bar{T}^4, \tag{1.40}$$

4. Sa nature exacte est encore inconnue.

où $g_\star(\bar{T})$ dépend du nombre effectifs d'espèces relativistes (c'est-à-dire telles que $\bar{T} \gg m$). Son expressions est donnée d'après les hélicités g_i des particules relativistes selon

$$g_\star = \sum_{i=\text{bosons}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermions}} g_i. \tag{1.41}$$

Mis à part les sauts de température dus aux variations de $g_\star$ lorsque la température passe en dessous de la masse d'une espèce, on déduit en comparant à l'équation (1.28) que la température de l'univers décroît comme $\bar{T} \sim 1/a$. Chaque interaction possède une température en dessous de laquelle elle est gelée. L'histoire thermique de l'univers est donc un ensemble de interactions entre espèces qui s'éteignent tour à tour lorsque la température diminue avec l'expansion. Avant d'être majoritairement sous forme d'hydrogène, les protons et électrons étaient donc sous forme de plasma d'ions, interagissant par diffusion Compton. En effet si les photons ont une énergie au dessous de l'énergie d'ionisation de l'hydrogène ils ne peuvent plus empêcher les états liés entre protons et électrons. Il existe donc un intervalle de temps pendant lequel les baryons sont devenus transparents aux photons en se recombinant sous forme d'hydrogène. Cet intervalle de temps délimite un volume d'espace-temps appelé surface de dernière diffusion[5]. La température du gaz de radiation a ensuite continué à décroître et est aujourd'hui mesurée et appelée rayonnement de fond diffus (CMB). Les photons de ce fond diffus ont été émis autour d'un décalage vers le rouge de l'ordre de $z_{\text{LSS}} \simeq 1085$ et correspondent toujours à une distribution de corps noir puisque le décalage vers le rouge n'est pas dépendant de la longueur d'onde. La température correspondante de ce corps noir est de $\bar{T}_0 = 2.725\,K$. Beaucoup plus tôt, la température est suffisamment élevée pour permettre des réactions nucléaires. Il s'agit donc d'une époque, appelée nucléosynthèse primordiale, où les premiers noyaux plus lourds que l'hydrogène se forment. Elle a lieu à environ $z \simeq 10^{10}$.

1.3.3 Problèmes du big-bang chaud

– La platitude de l'univers :
Les données expérimentales indiquent que l'univers est extrêmement plat aujourd'hui, avec $|\Omega_K| < 0.02$. On remarque que pour de la matière avec un paramètre d'état $w_e > -1/3$, le rapport Ω_K/Ω_e est croissant avec a. Plus précisément, le rapport Ω_K/Ω_e est au moins croissant comme a dans l'ère dominée par la matière et comme a^2 dans l'ère dominée par la radiation. L'univers aurait donc été au moins 10^{10} fois plus plat au moment de la nucléosynthèse primordiale, et encore plus plat avant. Ces conditions initiales n'apparaissent pas naturelles, car elles requièrent un ajustement fin[6] des ces conditions initiales qui paraît peu satisfaisant.

– Isotropie et homogénéité :
Sur la surface de dernière diffusion, seules des zones de l'espace d'une taille comparable à $r(\eta_{\text{LSS}})$ ont pu avoir le temps de thermaliser. On peut calculer à partir de l'équation (2.53) que le nombre de ces zones thermalisées dans le CMB observé aujourd'hui est de l'ordre de

$$\left(\frac{\eta_0 - \eta_{\text{LSS}}}{\eta_{\text{LSS}}}\right)^3 \sim \left(\frac{a_0}{a_{\text{LSS}}}\right)^{3/2} \sim (1 + z_{\text{LSS}})^{3/2} \gg 1\,. \tag{1.42}$$

5. *Last scaterring surface* en anglais. Nous la mentionnerons donc par LSS.
6. *fine tuning* en anglais.

Ceci contraste avec la très grande isotropie observée du CMB qui laisse penser que $r(\eta_{\text{LSS}})$ doit être plus grand.

– Formation des structures :
L'espace-temps évoqué jusqu'à présent est strictement homogène et ne rend donc pas compte des inhomogénéités de densité. L'étude des perturbations autour de cet espace-temps de fond renseigne sur la formation des structures dont toutes les structures astrophysiques sont issues. L'étude détaillée dans le chapitre 2 montre que les perturbations de densité ne peuvent croître sensiblement pendant l'ère dominée par la radiation tandis qu'elles croissent comme le facteur d'échelle pendant l'ère dominée par la matière. L'univers étant fortement non linéaire aujourd'hui, $(\delta\rho/\bar{\rho})_0 \sim 1$ et donc $(\delta\rho/\bar{\rho})_{\text{eq}} \sim 10^{-4}$, ce qui est compatible avec l'ordre de grandeur des fluctuations du CMB (10^{-5}). Les fluctuations thermiques ne permettent pas d'expliquer la formation de telles inhomogénéités pendant l'ère dominée par la radiation. De plus nous verrons au chapitre suivant que les perturbations ayant une longueur d'onde λ super-Hubble sont gelées. Or pour un univers dominé par la radiation comme c'est le cas avant l'équivalence, $\lambda \sim a \sim t^{1/2}$ tandis que $d_H \sim t$ si bien que toutes les échelles de perturbations ont été à un moment super-Hubble et donc gelées. Il faut donc postuler l'existence du spectre des perturbations initiales sans pouvoir l'expliquer. Le spectre le plus compatible avec les observations est un spectre invariant d'échelle (dénommé spectre de Harrison-Zel'dovich [Harrison 70, Zeldovich 72]), et son origine reste donc inexpliquée dans le cadre du big-bang chaud.

Nous verrons au chapitre 4 que le mécanisme de l'inflation permet de répondre à ces limitations, avec une grande pertinence expérimentale. La combinaison de l'inflation et du big-bang chaud sera dénommée *modèle cosmologique standard*[7].

7. La notion de modèle standard est aussi variable que la notion de nouveauté. Jusqu'à peu la théorie de l'inflation était considérée comme une extension du modèle standard qui coïncidait alors avec le big-bang chaud, mais les observations détaillées du CMB lui donnent un support expérimental favorable et permettent de plus de compléter le modèle du big-bang chaud en explication l'origine des structures. Elle tend donc a y être incorporée.

Chapitre 2

Théorie des perturbations linéaires

Sommaire

2.1 Quantités perturbées 14
2.1.1 Décomposition SVT 14
2.1.2 Perturbations de la métrique et du tenseur énergie-impulsion 15
2.1.3 Equations d'évolution des perturbations linéaires 17
2.2 Dynamique au premier ordre 19
2.2.1 Ère de radiation 19
2.2.2 Ère de matière 21
2.2.3 Transition radiation-matière 21
2.2.4 Loi de conservation 26
2.2.5 Intéractions baryons-photons 27
2.3 Le formalisme 1+3 30
2.3.1 Principe général 30
2.3.2 Utilisation de la dérivée de Lie 32
2.3.3 Comparaison des approches Bardeen et 1+3 33

Observationnellement, l'univers n'est qu'approximativement homogène et en dessous de la taille des amas de galaxies il est même fortement inhomogène. Etant donnée la complexité de la relativité générale et plus particulièrement son caractère intrinsèquement non-linéaire, il va falloir adopter une résolution approchée afin de comprendre de la formation de ces structures. Nous allons donc adopter une résolution perturbative autour d'un espace de Friedmann-Lemaître. Cette perturbation d'un espace-temps va donner lieu au problème de jauge, et nous exposerons en détail ses conséquences dans la partie II. Dans toute cette partie nous nous affranchirons de ce problème en travaillant dans une jauge donnée, c'est à dire en utilisant certaines conditions sur les perturbations. Nous présentons dans les sections 2.1 et 2.2 les équations des perturbations et leurs solutions en nous concentrant principalement sur les perturbations de la métrique. Nous nous inspirons principalement de [Kodama & Sasaki 84] et plus particulièrement de [Peter & Uzan 05]. Dans la section 2.3 nous exposons brièvement une approche perturbative alternative essentiellement basée sur le formalisme ADM [Arnowitt *et al.* 62], dit formalisme $1+3$. Dans le chapitre 3 nous exposons ensuite la physique des perturbations du CMB.

2.1 Quantités perturbées

2.1.1 Décomposition SVT

Sur une variété tridimensionnelle munie d'une métrique γ_{ij} à laquelle on associe une dérivée covariante D_i, tout champ vectoriel X_i peut être décomposé en un mode dit scalaire S et un mode vectoriel V_i selon

$$X_i = D_i S + V_i \quad \text{avec} \quad D^i V_i = 0. \tag{2.1}$$

X_i comporte trois degrés de liberté. Le mode scalaire en comporte un, tandis que le mode vectoriel en comporte deux du fait de la condition de transversalité qui lui est imposée. De même, tout tenseur symétrique du second ordre X_{ij} peut se décomposer en deux modes scalaires S_1, S_2, un mode vectoriel V_i et un mode tensoriel T_{ij} selon

$$X_{ij} = D_i D_j S_1 + S_2 \gamma_{ij} + D_{(i} V_{j)} + T_{ij} \quad \text{avec} \quad D^i V_i = 0,\ D^i T_{ij} = T^i_{\ i} = 0. \tag{2.2}$$

X_{ij} comporte six degrés de liberté. Les deux modes scalaires en comportent deux, le mode vectoriel en comporte deux du fait de la condition de transversalité, et le mode tensoriel contient les deux restants puisque quatre conditions lui sont imposées. On peut choisir de redistribuer les deux degrés de liberté scalaires en les séparant entre la trace $3X \equiv 3X^i_{\ i} = \Delta S_1 + 3S_2$ et S_1, avec $\Delta \equiv D_i D^i$. Cette décomposition est dénommée scalaire-vecteur-tenseur (SVT). Les composantes scalaires et vectorielles d'un tenseur du premier ordre peuvent être extraites selon

$$\begin{aligned} S &= \Delta^{-1} D^i X_i \equiv \mathcal{P}^i_S X_i \,, \\ V^j &= \left(\delta^j_i - D^j \Delta^{-1} D_i\right) X^i \equiv \mathcal{P}^j_{V,i} X^i. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Quant aux composantes SVT d'un tenseur du second ordre, elles peuvent être extraites selon

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3}\gamma^{kl} X_{kl} \,, \\ \hat{X}_{ij} &\equiv X_{ij} - X\gamma_{ij} \equiv \hat{\mathcal{P}}^{kl}_{ij} X_{kl} \,, \\ S_1 &= \frac{3}{2}\left[\Delta(\Delta + 3K)\right]^{-1} D^i D^j \hat{X}_{ij} \equiv \mathcal{Q}^{ij}_S \hat{X}_{ij} \,, \\ V_k &= 2\left(\Delta + 2K\right)^{-1} \Delta \mathcal{P}^j_{V,k} \mathcal{P}^i_S \hat{X}_{ij} \,, \\ T_{kl} &= \mathcal{P}^i_{V,k} \mathcal{P}^j_{V,l} \hat{X}_{ij} \equiv \mathcal{P}^{ij}_{T,kl} \hat{X}_{ij} \,. \end{aligned} \tag{2.4, 2.5}$$

Il faut remarquer que cette décomposition n'est pas locale puisqu'elle fait intervenir l'inverse du laplacien dont la signification rigoureuse fait intervenir une fonction de Green intégrée sur tout l'espace. En définissant la fonction de Green comme étant la solution de

$$\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^3_{\mathrm{D}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{2.6}$$

la signification de $A = \Delta^{-1} B$ est plus précisément

$$A(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') B(\mathbf{x}') \mathrm{d}\mathbf{x}', \tag{2.7}$$

où l'intégrale porte sur tout la variété tridimensionnelle. On a noté le symbole de Dirac δ_{D} afin de le différencier des perturbations. Cette décomposition n'est en principe pas unique puisque

l'on peut rajouter à la fonction de Green toute fonction harmonique, c'est à dire satisfaisant l'équation de Laplace $\Delta f = 0$. Dans le cas où la variété est sans bord, c'est-à-dire pour un univers fermé, et le cas où la variété est non compacte avec des fonctions qui décroissent suffisamment asymptotiquement, les seules solutions de l'équation de Laplace sont des constantes, si bien que $A(\mathbf{x})$ est défini à une constante près [Stewart 90]. Pour dériver ces expressions, nous avons utilisé les relations de commutation données en appendice A. Il est crucial d'utiliser ces formules afin d'extraire les quantités intervenant dans la décomposition (2.2). En effet on peut constater assez fréquemment dans la littérature une mauvaise extraction même dans le cas sans courbure, par exemple dans les équation (78) et (79) de [Finelli *et al.* 06], l'équation (3.12) de [Malik & Wands 04], l'équation (3.9) de [Malik 05]. Enfin, afin de simplifier l'utilisation implicite de fonctions de Green, on introduit un ensemble complet de modes propres du laplacien sous réserve de montrer son existence [Stein & Weiss 71, Berger *et al.* 71, Lehoucq *et al.* 03]. Il s'agit d'un ensemble de fonction $Q_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ satisfaisant l'équation de Helmholtz

$$\Delta Q_{\mathbf{k}} = -\left(k^2 - K\right) Q_{\mathbf{k}}, \tag{2.8}$$

et qui doivent satisfaire la relation de fermeture

$$\sum_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) Q^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}') = \delta^3_{\mathrm{D}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{2.9}$$

On peut ensuite décomposer toute fonction $f(\mathbf{x})$ selon

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) Q_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \tag{2.10}$$

et travailler sur les coefficients $f(\mathbf{k})$ pour lesquels le laplacien correspond à une multiplication par $-k^2 + K$. Dans le cas d'un univers plat cette base est celles des exponentielles $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}.\mathbf{x})$ et la somme sur $\mathbf{k}$ est continue ($\int \mathrm{d}\mathbf{k}$). La décomposition correspond alors à la transformée de Fourier que nous utiliserons au cours de cette thèse. Il s'agit donc de la convention qui équilibre les facteurs 2π entre la transformée de Fourier et son inverse.

2.1.2 Perturbations de la métrique et du tenseur énergie-impulsion

La métrique (1.1), une fois perturbée, peut être paramétrée selon

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\left\{-(1+2\Phi)(\mathrm{d}\eta)_\mu(\mathrm{d}\eta)_\nu + 2B_i(\mathrm{d}x^i)_{(\mu}(\mathrm{d}\eta)_{\nu)} + \left[(1-2\Psi)\gamma_{ij} + 2E_{ij}\right](\mathrm{d}x^i)_\mu(\mathrm{d}x^j)_\nu\right\}, \tag{2.11}$$

où on rappelle que D_i est la dérivée covariante associée à la métrique des sections spatiales, c'est-à-dire telle que $D_i\gamma_{jk} = 0$. Cette décomposition, qui n'est pas la plus générale possible, correspond à un choix de jauge, celui de la jauge Newtonienne. Nous expliquerons plus en détail le problème de la liberté de jauge dans la partie II au chapitre 5. Cette décomposition fait apparaître des degrés de liberté scalaires, Φ et Ψ, des degrés de liberté vectoriels B_i, et des degrés de liberté tensoriels E_{ij}. On constate donc qu'il y a deux degrés de libertés scalaires, deux degrés de liberté vectoriels et deux degrés de liberté tensoriels. Sur les 10 degrés de liberté possibles de la perturbation de la métrique, 4 sont absorbés par le fait de fixer la jauge comme nous le verrons dans la section 5.2, et il nous reste donc bien 6 degrés de liberté. On rappelle

que les indices latins $i, j, k \ldots$ sont montés et descendus avec la métrique spatiale conforme de fond γ_{ij}. Cela signifie que les variables de perturbation vivent dans l'espace tangent des sections spatiales de fond.

Quant à la matière, elle est décrite dans l'espace perturbé par la perturbation de sa densité d'énergie, de sa pression et de sa quadrivitesse selon

$$\rho \equiv \bar{\rho} + \delta\rho \equiv \bar{\rho}(1+\delta), \qquad P = \bar{P} + \delta P, \qquad u^\mu = \bar{u}^\mu + \frac{v^\mu}{a}. \tag{2.12}$$

Les quatre composantes de la variable de perturbation de vitesse v^μ ne sont pas indépendantes car les vecteurs de quadrivitesse sont soumis à la normalisation $u_\mu u^\mu = \bar{u}_\mu \bar{u}^\mu = -1$. Il n'y a donc que trois degrés de liberté que l'on choisit de décrire par les composantes spatiales v^i, v^0 étant déterminé par la condition de normalisation. On décompose ces trois degrés de liberté en deux degrés de liberté vectoriel $\hat{v}^i$ et un degré de liberté scalaire v selon

$$v^i = \hat{v}^i + D^i v\,, \quad \text{avec} \quad D_i\hat{v}^i = 0. \tag{2.13}$$

Les perturbations de densité d'énergie et de pression ne sont pas indépendantes et sont reliées dans le cas d'un fluide barotropique, puisque P est alors une fonction de ρ. On définit la vitesse du son adiabatique c_s selon

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho} = c_s^2\,. \tag{2.14}$$

L'équation de conservation (1.22) nous permet d'obtenir la relation suivante entre le paramètre d'état w et la vitesse du son c_s

$$w' = -3\mathcal{H}(1+w)(c_s^2 - w). \tag{2.15}$$

En toute généralité le tenseur énergie impulsion compatible avec l'espace perturbé admet aussi un tenseur de pression anisotrope. On utilisera donc la décomposition

$$T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P\left(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu\right) + a^2\bar{P}\pi_{\mu\nu}\,, \tag{2.16}$$

dans le cas d'un fluide non parfait.

Toutes les quantités perturbées sont ensuite décomposées en ordre de perturbations selon [Bruni *et al.* 97, Nakamura 07]

$$W = \sum_n \frac{\delta^{(n)}W}{n!}. \tag{2.17}$$

La somme commence à $n = 0$ pour les quantités qui sont non nulles sur l'espace de fond, comme par exemple ρ ou P, et nous utilisons alors la convention $\delta^{(0)}\rho = \bar{\rho}$. La somme commence à $n = 1$ pour les quantités nulles sur l'espace de fond, comme les perturbations de la métrique intervenant dans la décomposition (2.11). Nous utilisons également la notation $W^{(n)} \equiv \delta^{(n)}W$ pour la perturbation d'ordre n. Dans toute cette partie, nous nous restreignons aux perturbations linéaires c'est-à-dire que nous ne considérons que $\delta^{(1)}W$ et nous utiliserons même l'abus de notation δW à la place de $\delta^{(1)}W$. Quant aux quantités qui sont nulles sur l'espace de fond, nous utiliserons la notation W à la place de $W^{(1)}$. Dans la partie II nous détaillerons la théorie des perturbations jusqu'au second ordre et restaurerons des notations sans ambiguïté.

Les perturbations du tenseur d'Einstein et du tenseur énergie-impulsion correspondant à la métrique (2.11) sont rapportées dans l'appendice B.

Nous allons maintenant effectuer une décomposition SVT des équations d'Einstein ainsi que des équations de conservation des fluides. Cependant, cette décomposition n'a été définie que pour des tenseurs vivant dans l'espace tangent aux sections spatiales de fond, puisque nous l'avons définie pour des variétés tridimensionnelles. Nous pouvons néanmoins décomposer un champ vectoriel X_μ vivant dans l'espace-temps de fond selon

$$X_\mu = -\bar{u}_\mu \left[\bar{u}^\nu X_\nu\right] + \bar{h}_\mu{}^\nu X_\nu, \tag{2.18}$$

où $\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu$ est le projecteur sur les surfaces orthogonales à $\bar{u}_\mu$. $\bar{u}^\nu X_\nu$ est un champ scalaire et peut donc être considéré comme un champ scalaire sur les sections spatiales de fond. $\bar{h}_\mu{}^\nu X_\nu$ est un champ vectoriel qui peut être considéré comme un champ vectoriel vivant dans l'espace tangent des sections spatiales de fond puisqu'il est orthogonal à $\bar{u}_\mu$. On s'intéressera donc plus précisément à $\bar{h}_i{}^\nu X_\nu$. De même, on peut décomposer un champ tensoriel symétrique $X_{\mu\nu}$ selon

$$X_{\mu\nu} = \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu \left[\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta X_{\alpha\beta}\right] - 2\bar{u}_{(\mu}\bar{h}^\beta_{\nu)}\bar{u}^\alpha X_{\alpha\beta} + \bar{h}^\alpha_\mu \bar{h}^\beta_\nu X_{\alpha\beta}. \tag{2.19}$$

Par les mêmes arguments, $\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta X_{\alpha\beta}$, $\bar{h}^\beta_i \bar{u}^\alpha X_{\alpha\beta}$ et $\bar{h}^\alpha_i \bar{h}^\beta_j X_{\alpha\beta}$ sont respectivement un champ scalaire, un champ vectoriel et un champ tensoriel de l'espace tangent associé au section spatiales de fond, pour lesquels nous pouvons effectuer une décomposition SVT. Par la suite lorsque nous noterons X_{00}, X_{0i} ou X_{ij}, nous ferons référence à ces quantités.

Nous présentons ci dessous la décomposition SVT des équations d'Einstein sans constante cosmologique $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. Si les différents fluides n'ont pas d'interaction entre eux, les tenseurs énergie impulsion de chaque fluide sont conservés indépendamment, c'est-à-dire qu'ils satisfont $\nabla_\mu T^\mu_{a\nu} = 0$. Nous présentons également la décomposition SVT de ces équations d'évolution. Dans le cas général, seul le tenseur énergie-impulsion total est conservé et chaque fluide est soumis a une résultante des forces Q^μ_a si bien que l'équation de conservation pour chaque fluide se récrit

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_a = Q^\nu_a, \quad \sum_a Q^\nu_a = 0. \tag{2.20}$$

2.1.3 Equations d'évolution des perturbations linéaires

Nous considérons le cas où l'univers est un mélange de plusieurs fluides parfaits et barotropes ($\pi_{\mu\nu} = 0$, $P = P(\rho)$) sans interactions entre eux. Nous utiliserons ensuite ces équations dans le cas où l'univers n'est rempli que de radiation puis que de matière et enfin dans le cas où il s'agit d'un mélange de radiation et de matière froide noire.

Modes scalaires

Les équations d'Einstein scalaires sont données par
- l'équation de Poisson donnée par $(\delta G_{00} - \kappa\delta T_{00}) = 0$,
- la trace de $(\delta G_{ij} - \kappa\delta T_{ij}) = 0$,
- le mode scalaire de la partie sans trace de $(\delta G_{ij} - \kappa\delta T_{ij}) = 0$,
- le mode scalaire de $(\delta G_{0i} - \kappa\delta T_{0i}) = 0$,

pour obtenir respectivement les équations

$$(\Delta + 3K)\Psi - 3\mathcal{H}\Psi' - 3\mathcal{H}^2\Phi - \frac{1}{2}\sum_e \kappa a^2 \bar{\rho}_e \delta_e = 0 \tag{2.21}$$

$$\Psi'' + \mathcal{H}^2\Phi + \frac{1}{3}\Delta(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}\Phi' + 2\mathcal{H}\Psi' - K\Psi + 2\mathcal{H}'\Phi - \frac{1}{2}\kappa a^2 \sum_e c^2_{s,e}\bar{\rho}_e\delta_e = 0 \tag{2.22}$$

$$\Psi - \Phi = 0 \tag{2.23}$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi + \frac{1}{2}\sum_e \kappa a^2 \bar{\rho}_e (1 + w_e) v_e = 0\,. \tag{2.24}$$

Nous obtenons deux équations scalaires d'évolution du fluide en considérant $\nabla_\mu T^\mu_{e0} = 0$ ainsi que le mode scalaire de $\nabla_\mu T^\mu_{ei} = 0$. Il s'agit respectivement de l'équation de conservation ainsi que de l'équation d'Euler de chaque fluide. Dans le cas où w_e est constant, et donc quand $w_e = c^2_{s,e}$, ces équations sont

$$\delta'_e + (1 + w_e)\left(\Delta v_e - 3\Psi'\right) = 0\,, \tag{2.25}$$

$$v'_e + \mathcal{H}(1 - 3c^2_{s,e})v_e + \Phi + \frac{c^2_{s,e}}{1 + w_e}\delta_e = 0\,. \tag{2.26}$$

Dans le cas ou w n'est pas constant c'est-à-dire pour $w \neq c^2_s$, les équations de conservation sont données en appendice D.1 tandis que les équations d'Einstein sont données en appendice D.2. Si de plus les perturbations ne sont pas barotropiques, c'est-à-dire si la pression ne dépend pas uniquement de ρ, alors il faut considérer une composante non-adiabatique dans les équation précédentes. Ceci peut être le cas soit si les perturbations du fluide considéré sont intrinsèquement non-adiabatiques, soit s'il s'agit d'un mélange de fluides barotropes pour lequel en général le fluide résultant n'est pas barotrope [1]. Dans ce dernier cas on contourne le problème en considérant les différentes composantes fluides comme il a été fait dans les équations (2.21-2.24). Nous ne considérerons dans ce manuscrit que le cas des perturbations adiabatiques.

Modes vectoriels

Les équations d'Einstein vectorielles sont données par
- le mode vectoriel de $(\delta G_{ij} - \kappa\delta T_{ij}) = 0$,
- le mode vectoriel de $(\delta G_{0i} - \kappa\delta T_{0i}) = 0$,

et sont respectivement

$$-\left(\Delta + 2K\right)B^i + 2\kappa a^2 \sum_a (1 + w_a)\left(\hat{v}^i_a + B^i\right) = 0, \tag{2.27}$$

$$B'_i + 2\mathcal{H}B_i = 0. \tag{2.28}$$

Nous obtenons également grâce à la partie vectorielle de $\nabla_\mu T^\mu_{ai} = 0$ l'équation d'Euler vectorielle de chaque fluide

$$\left(\hat{v}^i_a + B^i\right)' + \mathcal{H}(1 - 3c^2_s)\left(\hat{v}^i_a + B^i\right) = 0. \tag{2.29}$$

1. Aux échelles super-Hubble, les perturbations du fluide total restent adiabatiques si elles le sont initialement comme nous le verrons dans la section 2.2.

Modes tensoriels

Les équations d'Einstein tensorielles sont données par le mode tensoriel de $(\delta G_{ij} - \kappa \delta T_{ij}) = 0$

$$E''_{ij} + 2\mathcal{H}E'_{ij} + (2K - \Delta)E_{ij} = 0. \tag{2.30}$$

2.2 Dynamique au premier ordre

Nous allons résoudre ces équations en espace de Fourier dans le cas plat, c'est-à-dire que nous allons utiliser $\Delta \to -k^2$ et les conditions de transversalité $D^i B_i = D^i E_{ij} = 0$ s'écrivent $k^i B_i = k^i E_{ij} = 0$. Ce choix est justifié par la phase d'inflation primordiale et aussi par les contraintes observationnelles données dans la section 1.3 . Afin d'obtenir des solutions exactes, nous nous placerons dans les trois cas simples suivants. Tout d'abord nous étudierons le cas d'un univers dominé par le rayonnement, puis le cas d'un univers dominé par la matière, et enfin un cas plus général prenant en compte un mélange de matière noire et de rayonnement. Nous utiliserons les équations de la section 2.1.3 afin d'étudier ce dernier cas. Puisque celles-ci ont été dérivées en supposant que les différents fluides n'ont pas d'interaction, cela signifie que l'on considère un fluide de matière noire mélangé à un fluide de radiation. Puisque l'essentiel de la matière est sous forme de matière noire, la matière baryonique interagissant avec la radiation étant minoritaire, cette approximation constitue une bonne description lorsque l'on s'intéresse à la dynamique des variables de perturbation de la métrique. Enfin, nous étudierons la dynamique des baryons dans l'approximation fluide.

En ce qui concerne les modes vectoriels, la solution de l'équation d'Euler vectorielle (2.29) est de la forme

$$\hat{v}^i + B^i \propto a^{-(1-3c_s^2)}, \tag{2.31}$$

tandis que la solution de l'équation d'évolution (2.28) est

$$B_i \propto a^{-2}. \tag{2.32}$$

Les perturbations de métrique vectorielles décroissent avec l'évolution du facteur d'échelle et ne vont donc pas intervenir dans la formation des structures. De plus, dans le cas où la vitesse n'a pas de composante vectorielle, c'est-à-dire si $\hat{v}_i = 0$, alors l'équation de contrainte (2.27) implique que $B_i = 0$. Nous négligerons donc dans la suite les perturbations vectorielles au premier ordre.

2.2.1 Ère de radiation

Dans le cas plat, l'équation d'évolution (2.30) au premier ordre en perturbations est une équation différentielle linéaire d'ordre deux. L'ensemble des solutions est donc un espace vectoriel de dimension deux. La solution divergente quand $k\eta \ll 1$ n'est pas physique, ou plutôt correspond au mode le plus décroissant qui devient négligeable quand $k\eta$ croît. Nous ne retiendrons que la solution non divergente quand $k\eta \ll 1$. Pendant l'ère de radiation, cette solution est

$$E_{ij} \propto j_0(k\eta)\varepsilon_{ij} = \frac{\sin(k\eta)}{k\eta}\varepsilon_{ij}, \tag{2.33}$$

où ε_{ij} est un tenseur transverse sans trace constant normé, c'est à dire tel que $k^i \varepsilon_{ij} = \varepsilon^i{}_i = 0\,, \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon^{ij} = 1$. Les fonctions j_n sont les fonctions de Bessel sphériques, reliées aux fonctions de

Bessel du premier ordre J_n par

$$j_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(z). \tag{2.34}$$

En ce qui concerne les modes scalaires du premier ordre dans le cas plat, on peut récrire l'équation (2.22) en utilisant le fait que l'équation (2.23), dérivée pour un mélange de fluides parfaits, implique pour les variables de perturbation du premier ordre [2] $\Phi = \Psi$. On obtient alors dans le cas d'un univers plat dominé par la radiation

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + \left(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}'\right)\Phi - \frac{\kappa a^2}{6}\bar{\rho}_r \delta_r = 0 \tag{2.35}$$

En combinant cette équation avec l'équation (2.21) afin d'éliminer δ_r, et en utilisant l'équation (1.32) nous obtenons

$$\Phi'' + 4\mathcal{H}\Phi' - \frac{1}{3}\Delta\Phi = 0, \tag{2.36}$$

dont la solution la moins décroissante est (en espace de Fourier)

$$\Psi = \Phi = A(k)3\sqrt{3}(k\eta)^{-1} j_1\left(k\eta/\sqrt{3}\right) = A(k)\frac{9\sqrt{3}}{(k\eta)^3}\left[\sin\left(k\eta/\sqrt{3}\right) - \frac{k\eta}{\sqrt{3}}\cos\left(k\eta/\sqrt{3}\right)\right]. \tag{2.37}$$

Les coefficients numériques ont été choisis de telle sorte pour que $\Phi \to A(k)$ dans la limite $k\eta \to 0$. Nous pouvons ensuite obtenir v et δ à partir de l'équation (2.24) et l'équation (2.21). Nous obtenons respectivement

$$v = -\frac{A(k)}{2k^3\eta^2}3\sqrt{3}\left[2\sqrt{3}k\eta\cos\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right) + \left(k^2\eta^2 - 6\right)\sin\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right)\right] \tag{2.38}$$

et

$$\delta = \frac{A(k)}{(k\eta)^3}\left[12\sqrt{3}(3 - k^2\eta^2)\sin\left(k\eta/\sqrt{3}\right) + 6k\eta(k^2\eta^2 - 6)\cos\left(k\eta/\sqrt{3}\right)\right]. \tag{2.39}$$

Pour des modes super-Hubble ($k\eta \ll 1$)

$$\Phi = \Psi \simeq A(k), \quad kv \simeq -\frac{A(k)}{2}k\eta, \quad \delta \simeq -2A(k), \tag{2.40}$$

les perturbations de métrique et de densité d'énergie sont donc gelées. En revanche pour des modes sub-Hubble

$$\Phi = \Psi \simeq A(k)\frac{9}{(k\eta)^2}\cos\left(k\eta/\sqrt{3}\right), \quad kv \simeq -\frac{3\sqrt{3}A(k)}{2}\sin\left(k\eta/\sqrt{3}\right). \tag{2.41}$$

On constate donc que les perturbations de métriques sont amorties lorsqu'elles rentrent sous le rayon de Hubble et que les perturbations de densité d'énergie ne sont pas croissantes. Nous verrons que ceci n'est plus le cas si le contenu matériel est dominé par la matière. L'intensité des perturbations pour un mode rentré sous le rayon de Hubble pendant l'ère de radiation sera donc atténuée d'autant plus que ce mode est devenu sub-Hubble tôt.

2. Si l'on considère la transition radiation-matière, on montre grâce à la théorie statistique détaillée dans la section 3.3 que le tenseur de pression anisotrope de la radiation ne peut plus être négligé. De plus les neutrinos, que nous ignorons totalement dans ce manuscrit, développent également un tenseur de pression anisotrope et ne peuvent donc pas être décrit par un fluide parfait au premier ordre dans les perturbations.

2.2.2 Ère de matière

Pendant l'ère de matière, la solution la moins décroissante de l'équation d'évolution (2.30) est

$$E_{ij} \sim 3\frac{j_1(k\eta)}{k\eta}\epsilon_{ij} = 3\frac{\sin(k\eta) - k\eta\cos(k\eta)}{(k\eta)^3}\epsilon_{ij}\,. \tag{2.42}$$

En ce qui concerne les modes scalaires du premier ordre dans le cas plat, en procédant de la même manière que pour le cas d'un univers dominé par la radiation, on peut récrire l'équation (2.22) sous la forme

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' = 0. \tag{2.43}$$

La solution la moins décroissante est constante et s'écrit donc

$$\Psi = \Phi = A(k). \tag{2.44}$$

Nous pouvons ensuite obtenir v et δ à partir de l'équation (2.24) et l'équation (2.21). Nous obtenons respectivement

$$v = -\frac{1}{3}A(k)\eta \tag{2.45}$$

et

$$\delta = -\left[\frac{1}{6}(k\eta)^2 + 2\right]A(k). \tag{2.46}$$

Nous constatons que pour des modes sub-Hubble le contraste de densité est croissant comme $(k\eta)^2 \sim a$. C'est donc pendant l'ère de matière que l'effondrement gravitationnel peut mener à la formation des structures à partir de fluctuations primordiales.

2.2.3 Transition radiation-matière

L'ère dominée par la matière succède à l'ère dominée par la radiation, les solutions présentées dans les deux cas ci-dessus ne sont donc pas valables partout. Afin de les raccorder, nous allons étudier le cas d'un univers dominé par un mélange de matière et de rayonnement sans interaction. La densité d'énergie et la pression sont additifs pour des fluides suffisamment dilués si bien que la densité d'énergie totale ainsi que la pression totale sont données par

$$\rho = \rho_m + \rho_r, \quad P = P_m + P_r. \tag{2.47}$$

Nous déduisons tout d'abord que le paramètre d'état total est donné par

$$\rho w = \rho_m w_m + \rho_r w_r = \frac{1}{3}\rho_r. \tag{2.48}$$

De plus en dérivant cette relation et en utilisant l'équation (2.15) qui est satisfaite pour chaque fluide ainsi que pour le fluide total, nous en déduisons que

$$\bar{\rho}c_s^2 = \bar{\rho}_m\left(\frac{1+w_m}{1+w}\right)c_{s,m}^2 + \bar{\rho}_r\left(\frac{1+w_r}{1+w}\right)c_{s,r}^2 = \frac{4w}{3(1+w)}\bar{\rho}\,. \tag{2.49}$$

Plutôt que d'utiliser le temps conforme comme paramètre d'évolution des variables de perturbation, nous allons utiliser le facteur d'échelle normalisé à l'équivalence

$$y \equiv \frac{a}{a_{\rm eq}} = \frac{1+z_{\rm eq}}{1+z}. \tag{2.50}$$

Nous définissons de plus la longueur $\lambda_{\rm eq} = 2\pi d_H(\eta_{\rm eq})$. Au facteur 2π près il s'agit du rayon de Hubble à l'équivalence. Le mode associé, et qui devient donc sub-Hubble après l'équivalence, est donné par

$$k_{\rm eq} \equiv \mathcal{H}_{\rm eq} \equiv \mathcal{H}(\eta_{\rm eq}). \tag{2.51}$$

La fonction de Hubble et la première équation de Friedmann (1.20) dans le cas plat s'écrivent respectivement

$$\mathcal{H} = \frac{y'}{y}, \quad \mathcal{H}^2 = \frac{1+y}{2y^2}\mathcal{H}_{\rm eq}\,. \tag{2.52}$$

Nous pouvons résoudre facilement ce système pour déduire l'évolution de y en fonction du temps conforme. Tout d'abord nous déduisons facilement que $y'' = (k_{\rm eq}/2)^2$, et nous obtenons

$$y = \frac{k_{\rm eq}\eta}{\sqrt{2}} + \frac{(k_{\rm eq}\eta)^2}{8}, \quad \eta = \frac{2\sqrt{2}}{k_{\rm eq}}\left(-1+\sqrt{1+y}\right), \tag{2.53}$$

ce qui interpole les solutions obtenues dans la section 1.32. De plus, comme $\bar{\rho}_r \propto a^{-4}$ et $\bar{\rho}_m \propto a^{-3}$, nous déduisons que

$$y = \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r}, \quad \frac{\bar{\rho}_r}{\bar{\rho}} = \frac{1}{1+y}, \quad \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}} = \frac{y}{1+y} \tag{2.54}$$

ainsi que

$$w = \frac{1}{3(1+y)}, \quad c_s^2 = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{3}{4}y\right)}. \tag{2.55}$$

Afin de paramétrer l'évolution des perturbations scalaires par y, nous avons également besoin de pouvoir passer des dérivées par rapport à η à des dérivées par rapport à y, grâce aux relations

$$X' = \sqrt{\frac{1+y}{2}}k_{\rm eq}\frac{{\rm d}X}{{\rm d}y}, \quad X'' = \frac{1+y}{2}k_{\rm eq}^2\frac{{\rm d}^2X}{{\rm d}y^2} + \frac{k_{\rm eq}^2}{4}\frac{{\rm d}X}{{\rm d}y} \quad . \tag{2.56}$$

L'équation (2.22), combinée à l'équation (2.21) peut être récrite en utilisant tous ces résultats préliminaires selon

$$\frac{{\rm d}^2\Phi}{{\rm d}y^2} + \left[\frac{8+9y}{2y(1+y)}\right]\frac{{\rm d}\Phi}{{\rm d}y} + \frac{1}{y(1+y)}\Phi + \frac{2}{3(1+y)k_{\rm eq}^2}k^2\Phi + \frac{1}{2y(1+y)}\delta_m = 0. \tag{2.57}$$

Dans la limite où $y \gg 1$, en utilisant l'équation de Poisson (2.21), cette équation est approximée par l'équation

$$\frac{{\rm d}^2\Phi}{{\rm d}y^2} + \left[\frac{6+7y}{2y(1+y)}\right]\frac{{\rm d}\Phi}{{\rm d}y} = 0, \tag{2.58}$$

et on retrouve en utilisant les relations (2.56) l'équation d'évolution en ère de matière (2.43). L'équation (2.57) d'évolution pour Φ fait intervenir le contraste de densité de la matière dont il va falloir déterminer l'évolution. L'équation de conservation (2.25) ainsi que l'équation d'Euler (2.26) au premier ordre pour la matière s'écrivent en fonction de y

$$\frac{{\rm d}\delta_m}{{\rm d}y} = \frac{k}{k_{\rm eq}}\sqrt{\frac{2}{1+y}}v_m + 3\frac{{\rm d}\Phi}{{\rm d}y}, \tag{2.59}$$

$$\frac{{\rm d}v_m}{{\rm d}y} = -\frac{v_m}{y} - \frac{k}{k_{\rm eq}}\sqrt{\frac{2}{1+y}}\Phi\,. \tag{2.60}$$

Ces équations peuvent être combinées pour obtenir un équation différentielle du second ordre pour δ_m

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta_m}{\mathrm{d}y^2}+\frac{2+3y}{2y(1+y)}\frac{\mathrm{d}\delta_m}{\mathrm{d}y}=S_\Phi(y)\equiv+3\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}y^2}+\left[\frac{6+9y}{2y(1+y)}\right]\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}-\frac{2k^2}{(1+y)k_{\rm eq}^2}\Phi. \tag{2.61}$$

Avant de rechercher les solutions de ce système d'équations couplées (2.57-2.61), il nous faut déterminer les conditions initiales du contraste de densité du fluide de matière. Le mélange de fluides parfaits n'étant pas a priori parfait, on suppose de plus que le mélange du fluide de radiation et du fluide de matière se comportent comme un seul fluide parfait, c'est-à-dire que le fluide total dont les quantités thermodynamique sont données par les relations (2.47) satisfait $\delta P=c_s^2\delta\rho$, où c_s est donné dans les relations (2.55). Comme $\delta\rho=\delta\rho_m+\delta\rho_r$ on obtient que le contraste de densité du fluide total est donné par

$$\delta=\frac{y\delta_m+\delta_r}{1+y}\,. \tag{2.62}$$

Pour que le fluide total satisfasse $\delta P=c_s^2\delta\rho$ il faut alors que les contrastes de densités satisfassent la condition d'adiabaticité

$$\delta_m=3\delta_r/4. \tag{2.63}$$

On utilise donc cette condition si l'on suppose des conditions initiales adiabatiques. Une représentation des solutions de l'équation (2.61) peut être écrite sous forme intégrale en utilisant la méthode de la fonction de Green. On obtient

$$\delta_m(y)=C_1+C_2\ln\left(\frac{\sqrt{1+y}-1}{\sqrt{1+y}+1}\right)+\int_0^y G(y,\tilde{y})S_\Phi(\tilde{y})\mathrm{d}\tilde{y}, \tag{2.64}$$

où

$$G(y,\tilde{y})=\tilde{y}\sqrt{1+\tilde{y}}\ln\left[\frac{\left(\sqrt{1+\tilde{y}}+1\right)\left(\sqrt{1+y}-1\right)}{\left(\sqrt{1+y}+1\right)\left(\sqrt{1+\tilde{y}}-1\right)}\right]. \tag{2.65}$$

Nous allons maintenant nous restreindre au domaine où la radiation domine le contenu énergétique de l'univers, c'est-à-dire quand $y\ll 1$. D'après la relation (2.53), la solution particulière multipliant C_2 est de la forme $\simeq\ln(\sqrt{1+y}-1)\propto\ln(k\eta)$. Pour des conditions initiales adiabatiques, en utilisant le fait que la solution (2.39) pour un univers dominé par la radiation possède une valeur finie dans cette limite $[3\Phi(y=0)/2]$, et comme la solution particulière de (2.64) tend vers 0 dans cette limite, on obtient que C_2 est nécessairement nul et $C_1=3\Phi(y=0)/2$.

Nous cherchons de plus à décrire des modes qui rentrent sous le rayon de Hubble lorsque cette limite $y\ll 1$ est encore valable. Un mode est sous le rayon de Hubble si $k\eta=\sqrt{2}ky/k_{\rm eq}\gg 1$. Comme l'essentiel de la variation de Φ et donc de S_Φ se situe aux alentours de $\eta=1/k$, c'est-à-dire de $y=k_{\rm eq}/(\sqrt{2}k)$, la solution particulière peut être évaluée en menant l'intégrale jusqu'à l'infini. Pour cela nous supposons que Φ est déterminé principalement par δ_r dans l'équation de Poisson (2.21). Après intégration numérique, en utilisant pour Φ la solution obtenue dans un univers dominé par la radiation (2.37), on obtient que cette solution est correctement approchée par

$$\int_0^y G(y,\tilde{y})S_\Phi(\tilde{y})\mathrm{d}\tilde{y}\simeq-6+9\ln\left(\frac{k\sqrt{2}y}{k_{\rm eq}}\right). \tag{2.66}$$

Finalement, dans ce régime la croissance du contraste de densité de la matière est correctement décrite par

$$\delta_m(k,y)\simeq\Phi(k,y=0)\left[-4.5+9\ln\left(\frac{k\sqrt{2}y}{k_{\rm eq}}\right)\right]. \tag{2.67}$$

Nous constatons donc que pour des modes sub-Hubble dans l'ère dominée par la radiation, $\delta_m\propto\ln y$. Or d'après l'équation (2.39) pour ces modes

$$\delta_r(k,y)\sim 6\Phi(k,y=0)\cos\left[\frac{k}{k_{\rm eq}}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{1+y}-1\right)\right], \tag{2.68}$$

si bien qu'il va exister un temps correspondant à un facteur d'échelle réduit $y^\star$ où la contribution à l'équation de Poisson (2.21) du fluide de matière devient comparable à celle du fluide de radiation (voir Figs. 2.1 et 2.2).

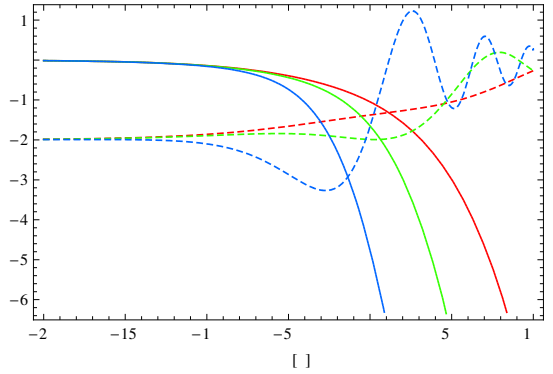

FIGURE 2.1 – $\delta\rho_m/\bar{\rho}=\frac{y}{1+y}\delta_m$ (en trait plein) et $\delta\rho_r/\bar{\rho}=\frac{1}{1+y}\delta_r$ (en tirets) pour $k/k_{\rm eq}=1,2,5$ respectivement en rouge vert et bleu. Pour des modes plus grands que $k_{\rm eq}$ il apparaît que le potentiel gravitationnel va être déterminé par les fluctuations dans le fluide de matière avant l'équivalence.

Nous allons donc étudier le régime où pour ce mode sub-Hubble, le potentiel Φ est principalement déterminé par δ_m plutôt que δ_r, c'est-à-dire pour $y\gg y^\star(k)$. L'équation de Poisson dans cette approximation s'écrit

$$\Phi=-\frac{3k_{\rm eq}^2}{4yk^2}\delta_m. \tag{2.69}$$

et le terme dominant de S_Φ est alors

$$S_\Phi\simeq-\frac{2k^2}{(1+y)k_{\rm eq}^2}\Phi. \tag{2.70}$$

L'équation d'évolution de δ_m (2.61) prend donc la forme suivante

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta_m}{\mathrm{d}y^2}+\frac{2+3y}{2y(1+y)}\frac{\mathrm{d}\delta_m}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{2y(1+y)}\delta_m=0, \tag{2.71}$$

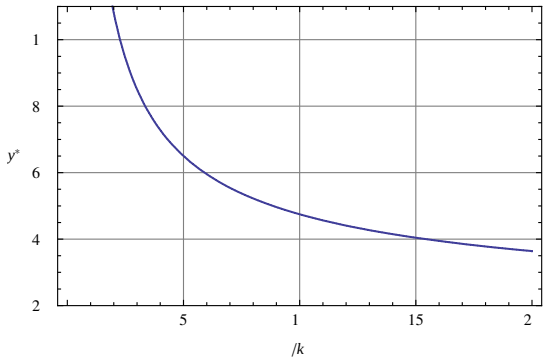

FIGURE 2.2 – $y^\star$ en fonction du rapport $k/k_{\rm eq}$

qui est l'équation de Mészáros [Mészáros 74]. Ses solutions sont de la forme

$$D_+(y) = y + 2/3, \quad D_-(y) = -2\sqrt{(1+y)} + D_+(y)\ln\left(\frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1}\right). \tag{2.72}$$

La solution est donc une combinaison linéaire de D_+ et D_- dont les coefficients doivent être déterminés de telle sorte qu'elle se raccorde à la solution (2.67), dans la limite $y \ll 1$. Le potentiel Φ est ensuite déduit de l'équation (2.69). Cependant, une intégration numérique donnera des résultats plus précis, et les résultats sont présentés sur la figure 2.1.

On s'intéresse maintenant aux modes qui sont super-Hubble pendant toute la transition entre l'ère de rayonnement et l'ère de matière, c'est-à-dire les modes tels que $k\eta = \sqrt{2}ky/k_{\rm eq} \gg 1$. Pour ces modes, l'équation de conservation (2.25) s'écrit respectivement pour la radiation et pour la matière

$$\delta_r' - 4\Psi' = 0, \tag{2.73}$$
$$\delta_m' - 3\Psi' = 0, \tag{2.74}$$

ce qui implique que si nous avons des conditions initiales adiabatiques, alors cette condition reste satisfaite pour les modes super-Hubble car

$$\left(\delta_m - \frac{3}{4}\delta_r\right)' = 0. \tag{2.75}$$

Nous pouvons en déduire que pour les modes super-Hubble avec des conditions initiales adiabatiques

$$\delta_m = \frac{3(1+y)}{4(1+\frac{3}{4}y)}\delta, \quad \delta_r = \frac{(1+y)}{(1+\frac{3}{4}y)}\delta. \tag{2.76}$$

En utilisant ce résultat ainsi que l'équation de Poisson (2.21) pour les modes super-Hubble, on obtient

$$\delta = -2\left(\Phi + \frac{{\rm d}\Phi}{{\rm d}y}y\right), \tag{2.77}$$

et on peut donc récrire l'équation d'évolution de Φ (2.57) sous la forme fermée

$$\frac{{\rm d}^2\Phi}{{\rm d}y^2} + \left[\frac{32+54y+21y^2}{2y(1+y)(4+3y)}\right]\frac{{\rm d}\Phi}{{\rm d}y} + \frac{1}{y(1+y)(4+3y)}\Phi = 0. \tag{2.78}$$

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$\Phi(y) = C_1\frac{\sqrt{1+y}}{y^3} + C_2\frac{\left(-16-8y+2y^2+9y^3\right)}{y^3}. \tag{2.79}$$

En imposant que la limite quand $y \ll 1$ est finie et vaut $\Phi(0) = A(k)$, on a nécessairement $C_1 = 16C_2$ et $C_2 = \Phi(0)/10 = A(k)/10$. La solution s'écrit donc

$$\Phi(y) = \frac{A(k)}{10y^3}\left[16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16\right]. \tag{2.80}$$

On remarque qu'après la transition, $\Phi(y)$ tend vers une constante qui est donnée par

$$\Phi(y \gg 1) = \frac{9}{10}\Phi(y \ll 1). \tag{2.81}$$

2.2.4 Loi de conservation

Dans le cas de modes super-Hubble, nous avons vu que les contrastes de densité du mélange radiation matière froide peuvent être reliés au contraste de densité total par les équations (2.76) si les conditions initiales des perturbations sont adiabatiques. On en déduit que le fluide total est un fluide parfait pour les modes super-Hubble car $\delta P - c_s^2\delta\rho = 0$. On peut alors combiner les équations (2.21-2.23) pour obtenir

$$\Psi'' + \mathcal{H}\Phi' + \mathcal{H}\Psi'(2+3c_s^2) + 3\Phi(c_s^2 - w) - c_s^2\Delta\Psi = 0. \tag{2.82}$$

En utilisant la contrainte (2.23) qui nous permet d'écrire $\Phi = \Psi$, cette équation se récrit

$$\Psi'' + \Psi' 3\mathcal{H}(1+c_s^2) + 3\Psi(c_s^2 - w) - c_s^2\Delta\Psi = 0. \tag{2.83}$$

Pour les modes super-Hubble cette équation prend la forme d'une loi de conservation

$$\frac{-\mathcal{H}}{2Q}\mathcal{R}^{(1)\prime} \simeq 0, \tag{2.84}$$

avec $Q \equiv \mathcal{H}\bar\rho/\bar\rho' = -\frac{1}{3(1+w)}$ et où $\mathcal{R}^{(1)}$ est la perturbation de courbure en jauge comobile donnée au premier ordre,

$$\mathcal{R}^{(1)} \equiv \Psi - \frac{2Q}{\mathcal{H}}\left(\Psi' + \mathcal{H}\Phi\right). \tag{2.85}$$

Cette relation peut être utilisée pour établir un lien entre les variables de perturbation super-Hubble avant et après la transition rayonnement-matière mais aussi pour établir un lien entre la phase d'inflation primordiale et l'ère de radiation. Il s'agit de la version intégrale de l'équation (2.83). La solution particulière correspond à la solution croissante de l'équation (2.83) tandis que la solution de l'équation homogène, c'est-à-dire avec $\mathcal{R}^{(1)} = 0$ correspond au mode décroissant de l'équation (2.83).

Dans une ère dominée par un fluide de paramètre d'état w constant, c'est-à-dire tel que $w = c_s^2$, une fois le mode décroissant négligeable, on peut relier Ψ à $\mathcal{R}$ pour des modes super-Hubble par

$$\Psi_I = \frac{3(1+w)}{5+3w}\mathcal{R}_I^{(1)}, \tag{2.86}$$

où l'indice I signifie qu'il s'agit une condition initiale pour les modes lorsqu'ils sont super-Hubble. Cet indice est pratique car il signifie également que cette valeur est héritée de l'inflation. On retrouve alors en évaluant cette relation en $w = 1/3$ et $w = 0$ la relation (2.81) entre le potentiel super-Hubble pendant les ères de radiation et de matière.

Au cours des sections précédentes, nous avons donc vu que les perturbations vectorielles étaient négligeables car amorties systématiquement, tandis que les perturbations tensorielles sont amorties uniquement lorsqu'elles deviennent sub-Hubble. Quant aux perturbations de la métrique, lorsqu'elles sont super-Hubble elles sont constantes et ne varient que d'un facteur 9/10 à la transition rayonnement matière. Les modes sub-Hubble sont eux amortis pendant l'ère de radiation mais regagnent une légère croissance logarithmique au moment de la transition radiation-matière, puis sont constants pendant l'ère de matière.

2.2.5 Intéractions baryons-photons

La description précédente qui supposait que toute la matière n'intéragissait pas avec la radiation est adaptée quand il s'agit de déterminer le potentiel Φ. En revanche si l'on veut déterminer correctement les fluctuations du fluide de radiation, il faut prendre en compte son interaction avec les baryons, et ce d'autant plus que la densité d'énergie des photons diminue pour devenir inférieure à celle des baryons. On introduit pour paramétrer ce moment le rapport

$$R = \frac{3\bar{\rho}_b}{4\bar{\rho}_r}, \tag{2.87}$$

où on a divisé le contenu en matière entre matière noire froide ρ_c et matière baryonique ρ_b ($\rho_m = \rho_c + \rho_b$). Si on introduit le rapport $\epsilon \equiv \rho_b/\rho_m \simeq 0.15$, alors $R = \frac{3}{4}\epsilon y$. Dans la limite $R \ll 1$, et on s'attend à ce que les baryons perturbent peu les conclusions établies pour un univers dominé par la radiation. Cependant, lorsque on approche l'équivalence, nous avons vu que la matière n'intéragissait pas avec la radiation, c'est-à-dire la matière noire froide, va déterminer le potentiel gravitationnel, tandis que parallèlement R croît et que les effets de l'interaction avec les baryons vont se faire ressentir pour la radiation. La forme de l'équation (2.20) qui caractérise l'interaction entre le fluide de radiation et le fluide de baryons doit être justifiée à partir de l'étude cinétique et nous exposerons la démarche nécessaire pour cela dans la section 3.3.7. Dans l'approximation fluide, on obtient donc l'équation de conservation et l'équation d'Euler sous la forme

$$\delta_r' = \frac{4}{3}k^2 v_r + 4\Psi', \quad v_r' = -\frac{1}{4}\delta_r - \Phi + \frac{1}{6}k^2\pi_r + \tau'(v_b - v_r) \tag{2.88}$$

$$\delta_b' = k^2 v_b + 3\Psi', \quad v_b' = -\mathcal{H}v_b - \Phi - \frac{\tau'}{R}(v_b - v_r), \tag{2.89}$$

où $\tau' = a\bar{n}_e\sigma_{\rm T}$, $\sigma_{\rm T}$ étant la section efficace de la diffusion Compton, $\bar{n}_e$ la densité d'électrons libres de fond et $k^2\pi_r \equiv k^i k^j \pi_{ij}$. La pression anisotrope est la manifestation du fait que le fluide de radiation soumis aux diffusions Compton sur les baryons ne va plus rester un fluide

parfait. Par conséquence il faut déterminer, via la théorie cinétique, sa forme la mieux adaptée a l'approximation fluide. Il peut être montré grâce à la théorie cinétique que si les intéractions entre les photons et les baryons sont fortes, $\pi_r \simeq -\frac{96}{45}v_r/\tau'$. Il faut également faire la distinction entre Φ et Ψ qui vont cesser d'être égaux à cause de la présence du ce tenseur de pression anisotrope car ce tenseur intervient dans l'équation (2.23). Dans un premier temps nous allons considérer des échelles telles que $k/\tau' \ll 1$, c'est-à-dire que nous allons considérer le régime de couplage fort [3] [Peebles & Yu 70, Sachs & Wolfe 67]. Plus précisément, nous allons considérer un développement perturbatif des équations dans le paramètre k/τ' et travailler d'abord à l'ordre dominant. Nous obtenons à partir de l'ordre dominant des équations d'Euler et de conservation

$$v_b = v_r + \mathcal{O}(k/\tau'), \quad \delta_r' = \frac{4}{3}\delta_b' + \mathcal{O}(k/\tau'). \tag{2.90}$$

Les équations d'Euler se récrivent donc

$$[(1+R)v_r]' = -\frac{1}{4}\delta_r - (1+R)\Phi + \mathcal{O}(k/\tau')\,, \tag{2.91}$$

ce qui permet ensuite de fermer la dérivée de l'équation de conservation de la radiation

$$\delta_r'' + \frac{R'}{1+R}\delta_r' + \frac{k^2}{3(1+R)}\delta_r = 4\left[\Phi'' + \frac{R'}{1+R}\Phi' - \frac{1}{3}k^2\Phi\right] + \mathcal{O}(k/\tau') \equiv F(\Phi) + \mathcal{O}(k/\tau'). \tag{2.92}$$

Le membre de gauche est une équations d'oscillation harmonique amortie, dont l'amortissement et le changement de fréquence sont dus à la proportion croissante R de baryons par rapport aux photons. Alors que le potentiel est de plus en plus déterminé par le contraste de densité de la matière noire qui s'effondre gravitationnellement, celui-ci agit comme un terme de forçage pour cette équation harmonique qui décale la position moyenne des oscillations. Dans la limite où le terme d'amortissement est faible devant la pulsation des oscillations, c'est-à-dire

$$\omega_s \equiv \frac{k}{\sqrt{3(1+R)}} \gg \frac{R'}{1+R}, \tag{2.93}$$

on peut donner une solution en couplage fort dans l'approximation WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) à l'équation homogène. Pour une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants du type

$$f'' + \frac{B'}{B}f' + \omega^2 f = 0\,, \tag{2.94}$$

on peut estimer deux solutions linéairement indépendantes par les solutions approchées

$$f^{\pm}_{\rm WKB} \equiv \frac{1}{\sqrt{B\omega}}\exp\left[\pm{\rm i}\int_0^\eta \omega(\eta'){\rm d}\eta'\right]. \tag{2.95}$$

Ces fonctions satisfont l'équation

$$f''_{\rm WKB} + \frac{B'}{B}f'_{\rm WKB} + \left(\omega^2 - Q_{\rm WKB}\right)f_{\rm WKB} = 0\,, \tag{2.96}$$

3. *tight coupling* en anglais.

avec la différence par rapport à l'équation (2.94) donnée par

$$Q_{\rm WKB} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + 3\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{B''}{B} + \frac{\omega''}{\omega}\right]. \tag{2.97}$$

Dans le cas où ce terme peut être négligé par rapport à ω^2, ces solutions sont de bonnes approximations analytiques. Dans le cas de l'équation homogène associée à l'équation (2.92), $\omega = \omega_s$ et $B = 3(1+R) = 1/\omega^2$. La condition de validité de l'approximation WKB s'écrit donc

$$\left|\frac{Q_{\rm WKB}}{\omega^2}\right| = \frac{3}{4k^2}\left[R'' - \frac{1}{4}\frac{(R')^2}{(1+R)}\right] = \frac{9\epsilon}{64}\left(\frac{k_{\rm eq}}{k}\right)^2\left[1 + \frac{3}{8}\epsilon(y-1)\right] \ll 1 \tag{2.98}$$

Pour le mode $k = k_{\rm eq}$ au moment de l'équivalence ($y = 1$), cette quantité vaut approximativement 0.02 et varie très peu jusqu'au découplage à $y_{\rm LSS} = (1+z_{\rm eq})/(1+z_{\rm LSS}) \simeq 3.3$. L'approximation WKB constitue donc une très bonne estimation pour les modes $k > k_{\rm eq}$. Les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (2.92) sont donc pour ces modes correctement approchées par

$$\delta_{r,1(}\eta) = \frac{1}{(1+R)^{1/4}}\cos[kr_s(\eta)], \quad \delta_{r,2}(\eta) = \frac{1}{(1+R)^{1/4}}\sin[kr_s(\eta)], \tag{2.99}$$

avec

$$kr_s(\eta) \equiv \int_0^\eta \omega_s(\eta'){\rm d}\eta'\,. \tag{2.100}$$

On peut déterminer la solution génerale forcée par le terme $F(\Phi)$ grâce à la méthode de la fonction de Green

$$\delta_r(\eta) = C_1\delta_{r,1} + C_2\delta_{r,2} + \int_0^\eta G(\eta,\eta')F(\eta'){\rm d}\eta', \tag{2.101}$$

où la fonction de Green est

$$G(\eta,\eta') \equiv \frac{\delta_{r,1}(\eta')\delta_{r,2}(\eta) - \delta_{r,1}(\eta)\delta_{r,2}(\eta')}{\delta_{r,1}(\eta')\delta'_{r,2}(\eta') - \delta_{r,2}(\eta')\delta'_{r,1}(\eta')} = \frac{\sqrt{3}[1+R(\eta')]^{3/4}}{k[1+R(\eta)]^{1/4}}\sin[kr_s(\eta) - kr_s(\eta')]. \tag{2.102}$$

Dans le cas où les variations de R et Φ sont très lentes devant la période des oscillations, on peut donner une solution approchée de cette solution générale. Nous allons donner une explications intuitive de la forme que l'on obtient alors. L'équation (2.92) peut se récrire au premier ordre dans le développement en k/τ' comme une équation pour la quantité $\mathcal{Q} \equiv \frac{\delta_r}{4} - \Phi$ selon

$$[(1+R)\mathcal{Q}']' + \frac{k^2}{3}\mathcal{Q} = -\frac{k^2}{3}(2+R)\Phi. \tag{2.103}$$

Dans le cas où R et Φ varient lentement, ce qui est le cas quand l'univers devient dominé par la matière, cette équation est comme celle d'un oscillateur harmonique amorti de pulsation ω_s, forcé par une force lentement dérivante. Le système est analogique à celui d'un ressort et d'une masse posés sur un plan incliné et soumis au frottement visqueux, pour lequel on augmenterait lentement l'angle d'inclinaison du plan. $\mathcal{Q}$ va donc osciller autour de la position moyenne $-\Phi(2+R)$. En l'absence de frottement, l'amplitude est donnée par la différence entre sa valeur initiale et la position moyenne, c'est-à-dire $\mathcal{Q}(0)+\Phi(2+R)$. La présence du frottement

visqueux va ensuite atténuer cette amplitude comme vu précédemment d'un facteur $1/(1+R)^{1/4}$ et faire dériver lentement la pulsation des oscillations. On aura donc

$$\mathcal{Q}(k,\eta) = -(2+R)\Phi + \frac{[\mathcal{Q}(0) + (2+R)\Phi]}{(1+R)^{1/4}}\cos[kr_s(\eta)]\,. \tag{2.104}$$

Nous verrons dans la section (3.1) que la quantité $\Theta_{\rm SW} \equiv \frac{\delta_r}{4} + \Phi = \mathcal{Q} + 2\Phi$ est reliée aux fluctuations de température du CMB. On obtient donc pour cette variable

$$\Theta_{\rm SW}(k,\eta) = \frac{[\Theta_{\rm SW}(0) + R\Phi]}{(1+R)^{1/4}}\cos[kr_s(\eta)] - R\Phi\,. \tag{2.105}$$

Si nous souhaitons raffiner cette description, il faut prendre en compte les effets dans l'ordre suivant en k/τ'. Nous ne rentrerons pas dans le détail de ce calcul. La principale conclusion est que le terme d'amortissement se trouve modifié, et qu'on peut en rendre compte en multipliant les solutions (2.99) par une facteur d'amortissement $\exp[-(k/k_{\rm D})^2]$, dit amortissement Silk [Silk 68], où l'échelle d'amortissement $k_{\rm D}$ est donnée par [Hu 95]

$$k_{\rm D}^{-2}(\eta) = \frac{1}{6}\int_0^\eta \frac{1}{1+R(\eta')}\left[\frac{16}{15} + \frac{R^2(\eta')}{1+R(\eta')}\right]\frac{{\rm d}\eta'}{\tau'(\eta')}\,. \tag{2.106}$$

En pratique nous utiliserons cette approche phénoménologique pour décrire l'état de la surface de dernière diffusion et nous noterons alors $k_{\rm D} = k_{\rm D}(\eta_{\rm LSS})$.

2.3 Le formalisme 1+3

2.3.1 Principe général

Jusqu'à présent, nous avons présenté une approche perturbative basée sur des coordonnées, un espace de fond et des variables invariantes de jauge. Celle approche a été introduite par Bardeen [Bardeen 80] et est majoritairement utilisée dans les publications de cosmologie. On peut cependant adopter un point de vue tout à fait opposé et utiliser un formalisme covariant qui ne se réfère pas aux coordonnées mais utilise des objets tensoriels ayant une existence propre indépendante du choix de coordonnées. Nous allons résumer ce formalisme mais plus de détails peuvent être trouvés dans [Ellis & van Elst 98]. Afin de donner une interprétation dynamique aux équations, c'est-à-dire sous la forme d'évolution temporelle de quantités physiques, on réalise un découpage local $1+3$ de l'espace temps. Cela consiste à supposer qu'il existe un ensemble d'observateurs de quadrivitesse u^μ dont les lignes d'univers constituent une partition de l'espace-temps et dont le temps propre τ sert de coordonnée temporelle. En se référant aux variations de quantités physiques le long des trajectoires suivies par ces observateurs, on définira une dérivée temporelle. De même, en se référant aux variation de quantités physiques le long des surfaces localement orthogonales au flot de ces observateurs, on obtiendra une dérivée spatiale. Formellement, ces observateurs permettent de définir un projection parallèle $U^\mu_{\ \nu} = -u^\mu u_\nu$ ainsi qu'une projection orthogonal $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$. On peut donc décomposer tout vecteur en sa partie parallèle et sa partie orthogonale, et généraliser cette décomposition pour des tenseurs quelconques. On décomposera ainsi le tenseur énergie impulsion comme dans l'équation (1.15), ainsi que le tenseur de Ricci et le tenseur de Riemann, et si l'on s'intéresse à la théorie cinétique

on décomposera l'espace tangent. On définit alors la dérivée directionnelle et la dérivée spatiale d'un tenseur quelconque $T^{\mu}_{\ \nu}$ par

$$\dot{T}^{\mu}_{\ \nu} \equiv u^{\alpha}\nabla_{\alpha}T^{\mu}_{\ \nu}, \quad D_{\alpha}T^{\mu}_{\ \nu} \equiv h^{\beta}_{\ \alpha}h^{\omega}_{\ \nu}h_{\sigma}^{\ \mu}\nabla_{\beta}T^{\sigma}_{\ \omega} \equiv P_h\left(\nabla_{\alpha}T^{\mu}_{\ \nu}\right). \tag{2.107}$$

On décompose la dérivée covariante de u_{μ} selon

$$\nabla_{\nu}u_{\mu} = -u_{\nu}a_{\mu} + D_{\nu}u_{\mu} \equiv -u_{\nu}a_{\mu} + \frac{\Theta}{3}h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}. \tag{2.108}$$

a_{μ} est l'accélération qui est non nulle si les observateurs ne suivent pas de géodésique, $\sigma_{\mu\nu}$ est le cisaillement [4] et $\omega_{\mu\nu}$ est la vorticité. D_{μ} est compatible avec $h_{\mu\nu}$, c'est-à-dire $D_{\alpha}h_{\mu\nu} = 0$, mais n'est sans torsion que si $\omega_{\mu\nu} = 0$. Dans ce dernier cas, on peut définir des sections spatiales globales orthogonales à l'ensemble des observateurs de quadrivitesse u^{μ}. Dans ce cas on bénéficie également d'une foliation de l'espace-temps c'est-à-dire d'un ensemble d'hypersurfaces de type espace qui réalise une partition de l'espace-temps. Ce découpage en tranches d'espace est appelé formalisme $3+1$ (voir [Gourgoulhon 07] pour des notes de cours sur ce sujet). Lorsque l'on exprime cette foliation en faisant référence explicitement aux coordonnées, ce formalisme est plus connu sous le nom de formalisme *ADM* [Arnowitt *et al.* 62]. Les approches $1+3$ et $3+1$ sont donc différentes mais très liées. Dans le cas où il n'y a pas de vorticité, $D_{\mu}u_{\nu} = D_{\nu}u_{\mu}$ et on définit le tenseur

$$K_{\mu\nu} \equiv D_{(\mu}u_{\nu)} = \frac{\Theta}{3}h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}\,. \tag{2.109}$$

$K_{\mu\nu}$ est alors symétrique et orthogonal à u^{μ} ($K_{\mu\nu}u^{\mu} = 0$) et est appelé courbure extrinsèque des sections spatiales. On peut alors relier le tenseur de Riemann associé à $g_{\mu\nu}$ à celui associé à $h_{\mu\nu}$, en utilisant la relation de Gauss-Codazzi

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\rho} &= {}^3R_{\alpha\beta\gamma\rho} + 2K_{\alpha[\gamma}K_{\rho]\beta} + 4u_{[\alpha}a_{\beta]}a_{[\rho}u_{\gamma]} + 4\left(D_{[\alpha}K_{\beta][\rho}\right)u_{\gamma]} + 4u_{[\beta}K^{\lambda}_{\alpha]}K_{\lambda[\rho}u_{\gamma]} \\ &\quad + 4u_{[\beta}P_h\left(\dot{K}_{\alpha][\rho}\right)u_{\gamma]} + 4\left(D_{[\alpha}K_{\beta][\rho}\right)u_{\gamma]} + 4\left(D_{[\gamma}K_{\beta][\rho}\right)u_{\alpha]} + 4u_{[\gamma}D_{\rho]}a_{[\beta}u_{\alpha]}\,. \end{aligned}$$

Si la matière est sans vorticité alors elle peut servir à réaliser ce découpage, sinon il faut distinguer le flot d'observateurs qui servent au découpage $1+3$ du flot de matière. En projetant la relation de commutation des dérivées covariantes selon les composantes parallèles et orthogonales ainsi qu'en projetant les identités de Bianchi et en utilisant $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, on obtient un ensemble d'équations d'évolution et de contrainte [Ellis & van Elst 98].

Cette approche ne fait pas référence explicitement à une espace de fond si bien qu'il faut trouver une procédure afin de donner un sens à la notion de perturbations. Une solution consiste à prendre des gradients spatiaux (D_{μ}) des quantités physiques. Par exemple, dans ce formalisme, l'équation de conservation s'écrit

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + P) = 0. \tag{2.110}$$

En appliquant l'opérateur D_{μ}, on obtient

$$D_{\mu}\dot{\rho} + (\rho + P)D_{\mu}\Theta + \Theta D_{\mu}(\rho + P) = 0. \tag{2.111}$$

4. *shear* en anglais.

Afin de la mettre sous la forme d'une équation d'évolution pour $D_{\mu}\rho$ il faut commuter la dérivée spatiale avec la dérivée temporelle. En notant $K_{\mu\nu} \equiv D_{\nu}u_{\mu} = \frac{\Theta}{3}h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$, on obtient

$$\begin{aligned} D_{\mu}\dot{\rho} &= (D_{\mu}\rho)^{\cdot} - u_{\mu}a_{\nu}D^{\nu}\rho - a_{\mu}\dot{\rho} + K_{\mu\nu}D^{\nu}\rho \\ &= P_h\left[(D_{\mu}\rho)^{\cdot}\right] - a_{\mu}\dot{\rho} + K_{\mu\nu}D^{\nu}\rho. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Des relations de commutations similaires pour des vecteurs et tenseurs d'ordre supérieur existent et permettent de généraliser cette méthode au delà des scalaires. La différence fondamentale entre le formalisme $1+3$ et l'approche perturbative basée sur les coordonnées tient dans le fait que dans le formalisme $1+3$ on ne fait pas référence de façon explicite à un espace de fond. En revanche, lorsque l'on choisit de résoudre les équations qui sont intrinsèquement non linéaires, on choisit un procédure itérative de résolution. A la première itération on choisit les quantités qui sont non nulles et cela spécifie la forme générale de l'espace temps. Par exemple pour rechercher des solutions proches de la solution de Friedmann-Lemaître, on va choisir dans la première itération $\Theta \neq 0$ mais $\sigma_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} = 0$. On choisit également $D_{\mu}Z = 0$ pour Z un champ scalaire quelconque. En ayant résolu les équations avec cette prescription, on réutilise les solutions obtenues afin d'améliorer les solutions dans une second itération. Par exemple dans l'équation (2.111), on utilisera les solutions pour Θ, ρ et P trouvées à la première itération afin de déterminer une équation satisfaite par les $D_{\mu}Z$. Les variables non nulles lors de la première itération sont donc appelées variables de fond tandis que celle qui sont non nulles uniquement à partir de la seconde itération sont appelées variables perturbées du premier ordre et ainsi de suite. L'approche $1+3$ résout donc de manière perturbative des équations exactes, tandis que l'approche basée sur l'utilisation de coordonnées résout de facons exacte des équations approchées. Il reste à montrer que ces deux approches se rejoignent quand le nombre d'itérations tend vers l'infini, ce qui n'a pas été fait. Nous ne détaillerons pas plus le formalisme $1+3$ mais nous présenterons dans la section 5.3 comment il peut être utilisé pour déterminer de façon algorithmique les perturbations de l'approche en coordonnées dans une utilisation hybride.

2.3.2 Utilisation de la dérivée de Lie

Une amélioration possible du formalisme $1+3$ consiste à utiliser la dérivée de Lie dans la direction u_{μ}, notée $\mathcal{L}_u$, plutôt que la dérivée covariante directionnelle. En utilisant $\mathcal{L}_u X_{\mu} = \dot{X}_{\mu} + X_{\nu}\nabla_{\mu}u^{\nu}$, on peut par exemple remettre l'équation (2.112) sous la forme

$$D_{\mu}(\dot{\rho}) = \mathcal{L}_u(D_{\mu}\rho) - a_{\mu}\dot{\rho}. \tag{2.113}$$

L'intérêt d'utiliser une dérivée de Lie réside dans le fait que cette quantité s'identifie à la dérivée par rapport au temps cosmique t lorsque l'on considère une variable de perturbation du premier ordre spatiale sur un espace de fond homogène, et pas seulement pour les scalaires comme c'est le cas pour la dérivée directionnelle $u^{\mu}\nabla_{\mu}$. En effet, au premier ordre

$$\mathcal{L}_u X_i = u^{\nu}\partial_{\nu}X_i + X_{\nu}\partial_i u^{\nu} = u^{\nu}\partial_{\nu}X_i = \frac{\partial X_i}{\partial t}\,, \tag{2.114}$$

où on a utilisé que nécessairement $\partial_i u^{\nu} = 0$ doit être pris à l'ordre le plus bas et est donc nul pour un espace homogène [5]. Cette formulation permet donc d'entrevoir l'unification des deux

5. Plus généralement, dans un système de coordonnées localement orthogonal et ayant une coordonnée temporelle correspondant au temps propre des observateurs de quadrivitesse u^{μ}, la dérivée de Lie s'identifie à la dérivée partielle temporelle.

formalismes. En définissant le facteur d'échelle moyen S par

$$S = \ln\left[\frac{1}{3}\int \mathrm{d}\tau\Theta\right] \equiv \ln\alpha, \tag{2.115}$$

on peut montrer [Langlois & Vernizzi 05] qu'en utilisant seulement l'équation de conservation (2.111)

$$\mathcal{L}_u\mathcal{R}_\mu = -\frac{\Theta}{3(\rho+P)}\left(D_\mu P - \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}}D_\mu\rho\right), \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_\mu \equiv D_\mu\alpha - \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\rho}}D_\mu\rho\,. \tag{2.116}$$

Pour des perturbations adiabatiques $D_\mu P - \left(\dot{P}/\dot{\rho}\right) D_\mu\rho = 0$, et cette loi est une loi de conservation. On montre alors qu'il s'agit d'une généralisation non perturbative de la loi de conservation de la perturbation de courbure comobile, et on peut retrouver la loi de conservation de la perturbation de courbure comobile donnée par l'équation (2.84).

2.3.3 Comparaison des approches Bardeen et 1+3

On peut comparer les deux approches perturbatives en développant les quantités $1+3$ en perturbations autour de l'espace de fond à symétries maximales dans l'approche en coordonnées. Les quantités $1+3$ peuvent ainsi être exprimées en fonction des variables de perturbations. On peut également développer en perturbations les équations satisfaites par les variables $1+3$. On obtient ainsi une comparaison immédiate des deux formalismes, cette comparaison pouvant être étendue à tout ordre. On trouvera dans [Osano *et al.* 07] ainsi que dans [Bruni *et al.* 92] les résultats d'un telle démarche. On retiendra que pour comparer l'appproche $1+3$ à l'approche en coordonnées, il faut exprimer cette première dans cette dernière, mais que la démarche inverse n'a pas été établie et reste à explorer. Une différence fondamentale entre les deux formalismes réside dans le fait que l'approche $1+3$ définit les gradients dits spatiaux sur l'espace physique, avec les notions de décomposition SVT et de laplacien associées, tandis que l'approche en coordonnées fait référence pour tout ordre de perturbation à l'espace de fond pour définir la notion de gradient spatial. Une conséquence pratique importante est qu'il semble difficile de construire facilement une décomposition en modes dans l'approche $1+3$, ce qui est utile si l'on souhaite avoir des équations différentielles uniquement dans le temps, tandis qu'elle est automatique dans l'approche en coordonnées. Bien que l'on puisse espérer que les deux démarches mènent aux mêmes résultats et même prédictions, il apparaît donc encore incertain lorsque l'on dépasse la théorie linéaire que les formalismes soient équivalents. En particulier, la procédure de moyennage qui est essentielle dans l'approche en coordonnées n'est pas explicitement construite, et même si la liberté de jauge peut être interprétée comme un changement procédure de moyennage, celle ci n'est pas acquise de façon systématique.

Chapitre 3

Théorie cinétique et physique du fond diffus cosmologique

3.1 Effet Sachs-Wolfe

Si lorsque la condition de couplage fort est vérifiée on peut décrire la radiation par un fluide parfait puisque le tenseur de pression anisotrope y est effacé par les diffusions multiples, cela n'est en revanche plus le cas après la recombinaison lorsque les photons n'intéragissent plus avec la matière et suivent dans l'approximation de l'optique géométrique des géodésiques nulles. Tout d'abord nous supposons que la surface de dernière diffusion est infiniment fine et que l'on passe instantanément du couplage fort à la propagation libre[1] des photons. En étudiant la propagation le long d'une géodésique nulle dans un espace perturbé, nous pouvons relier les perturbations de la métrique et du fluide de radiation avant le découplage avec celles du CMB observé aujourd'hui. Dans l'approximation de l'optique géométrique, nous pouvons définir pour un photon une trajectoire paramétrée $x^\mu(\lambda)$. Nous définissons le vecteur tangent à cette trajectoire par $k^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ qui satisfait la condition de norme nulle et l'équation géodésique

$$k_\mu k^\mu = 0, \quad k^\mu \nabla_\mu k^\nu = k^\mu \left(\frac{\partial k^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} k^\rho \right) = 0. \tag{3.1}$$

On décompose le vecteur tangent selon $k^\mu = \bar{k}^\mu + \delta k^\mu$, et ces conditions doivent être satisfaites à la fois pour le vecteur de fond et le vecteur perturbé. Comme $\bar{k}_\mu \bar{k}^\mu = 0$ nous pouvons décomposer ce vecteur de type lumière selon

$$\bar{k}^\mu = \bar{E} \left[\bar{u}^\mu + \bar{e}^\mu \right], \quad \text{avec} \quad \bar{E} = -\bar{k}^\nu \bar{u}_\nu, \quad \bar{e}^\mu = \frac{1}{\bar{E}} \bar{h}^\mu_{\ \nu} \bar{k}^\nu. \tag{3.2}$$

De même nous décomposons la perturbation δk^μ selon

$$\delta k^\mu = \bar{E} \left[\delta_E \bar{u}^\mu + \delta e^\mu \right], \quad \text{avec} \quad \delta_E = -\frac{1}{\bar{E}} \delta k^\nu \bar{u}_\nu, \quad \delta e^\mu = \frac{1}{\bar{E}} \bar{h}^\mu_{\ \nu} \delta k^\nu, \tag{3.3}$$

c'est-à-dire $k^\mu = \bar{E} \left[(1 + \delta_E) \bar{u}^\mu + (\bar{e}^\mu + \delta e^\mu) \right]$. La condition de normalisation implique $\gamma_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j = 1$ et l'équation géodésique sur l'espace de fond (1.9) nous donne $\bar{E} \sim 1/a$. Toujours en négligeant

1. *free-streaming* en anglais.

les modes vectoriels, nous déduisons finalement de l'équation géodésique au premier ordre pour la composante d'indice $\nu = 0$

$$\frac{\mathrm{d}\delta_E}{\mathrm{d}\lambda} = -\Phi' - 2\bar{e}^i \partial_i \Phi + \Psi' - E'_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j. \tag{3.4}$$

L'énergie d'un photon mesurée par un observateur comobile avec un fluide de quadrivecteur vitesse u^μ est donnée par $\mathcal{E} = -k_\mu u^\mu$. Il faut bien réaliser que δ_E est le contraste d'énergie tel que mesuré par un observateur de quadrivitesse $\bar{u}_\mu = (\mathrm{d}t)_\mu$ qui n'est pas normalisé à -1 sur l'espace perturbé. Si l'on prend en compte le fait que l'observateur doit satisfaire $u^\mu u_\mu = -1$ sur l'espace perturbé et que de plus on souhaite que celui ci soit comobile avec les baryons, $u^\mu = u^\mu_b$, alors on obtient (toujours au premier ordre dans les perturbations) en définissant $\mathcal{E} \equiv \bar{\mathcal{E}} (1 + \delta_\mathcal{E})$

$$\delta_\mathcal{E} = \left[\delta_E + \Phi - \bar{e}_i v^i_b \right]. \tag{3.5}$$

On peut donc relier le contraste d'énergie $\delta_{\mathcal{E}_e}$ mesurée à l'émission du photon en x^i_e à η_e à celui $\delta_{\mathcal{E}_0}$ mesurée aujourd'hui en x^i_0 à η_0. A l'ordre le plus bas, ces points de l'espace-temps sont reliés par

$$x^i_0 - x^i_e = \bar{e}^i (\eta_0 - \eta_e) \tag{3.6}$$

et on a donc au premier ordre

$$\delta_{\mathcal{E}_0} = \delta_{\mathcal{E}_e} + \left[\delta_E + \Phi - \bar{e}_i (v^i_b) \right]^0_e. \tag{3.7}$$

Il nous faut donc intégrer l'équation (3.4) afin de pouvoir expliciter cette expression. On obtient finalement au premier ordre en négligeant les modes vectoriels

$$\delta_{\mathcal{E}_0} = \delta_{\mathcal{E}_e} + \left[\Phi + \bar{e}_i v^i_b \right]^e_0 + \int_e^0 \left(\Phi' + \Psi' - E'_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j \right) \mathrm{d}\eta. \tag{3.8}$$

On peut montrer en utilisant la physique de la recombinaison que la surface de dernière diffusion correspond à une surface de densité d'énergie de radiation constante, c'est-à-dire que les points $(\eta, \mathbf{x})$ de cette surface satisfont $\rho_r(\eta_{\mathrm{LSS}}, \mathbf{x}) = \bar{\rho}_r(\bar{\eta}_{\mathrm{LSS}})$. Si on suppose qu'avant cette surface les intéractions entre baryons et photons sont très fortes, alors la radiation est constamment thermalisée et sa fonction de distribution est celle d'un corps noir. Elle est donc entièrement caractérisée par sa température $T(\eta, \mathbf{x})$ qui est reliée à la densité d'énergie selon

$$\rho = 4\sigma_B T^4, \tag{3.9}$$

avec σ_B la constante de Stefan-Boltzmann dont la valeur dans les unités $c = 1$, $\hbar = 1$ et $k_B = 1$, est sans dimension et vaut $\pi^2/60$. On peut ainsi définir un contraste de température par $T(\eta, \mathbf{x}) \equiv \bar{T}(\eta) \left[1 + \Theta(\eta, \mathbf{x}) \right]$. On souhaite exprimer les quantités perturbées de l'équation (3.8) qui sont évaluées sur la surface de dernière diffusion en fonction de leurs valeurs prises sur la surface moyenne de dernière diffusion définie par $\bar{\eta}_{\mathrm{LSS}}$. Dans cette hypothèse de couplage fort avant la surface de dernière diffusion, on utilise le fait que la quantité qui intervient dans un spectre de corps noir est $\mathcal{E}/T$, et que par conséquent, une fois intégré sur toutes les énergies, les conclusions de l'équation (3.8) tirées pour $\delta_\mathcal{E}$ seront valables pour Θ, et on relie le contraste de température à celui de densité de radiation en utilisant l'équation (3.9) par $(1 + \Theta)^4 = 1 + \delta_r$.

Au premier ordre on aura $\Theta^{(1)}[\eta_{\rm LSS},\mathbf{x}(\eta_{\rm LSS})]=\delta_r^{(1)}[\eta_{\rm LSS},\mathbf{x}(\eta_{\rm LSS})]/4\simeq\delta_r^{(1)}[\bar\eta_{\rm LSS},\mathbf{x}(\bar\eta_{\rm LSS})]/4$. On obtient donc que la température observée dans une direction $-\bar e^i$ est donnée par

$$\Theta(\eta_0,\mathbf{x}_0,-\bar e^i)=\frac{1}{4}\delta_r+\left[\Phi+\bar e_i v_b^i\right](\bar\eta_{\rm LSS},\mathbf{x}_e)+\int_e^0\left(\Phi'+\Psi'-E'_{ij}\bar e^i\bar e^j\right)\mathrm{d}\eta+F(0), \tag{3.10}$$

où $F(0)$ est une fonction des variables de perturbations ici et aujourd'hui qui n'intervient pas dans les différences directionnelles. Le terme $\Theta_{\rm SW}(k,\eta)\equiv[\delta_r(k,\eta)/4+\Phi(k,\eta)]$ est appelé effet *Sachs-Wolfe propre*, le terme faisant intervenir la vitesse des baryons à la dernière diffusion est un effet *Doppler* $\Theta_{\rm Dop}(k,\eta)\equiv\left[\bar e_i v_b^i(k,\eta)\right]$, et le terme intégré est appelé effet *Sachs-Wolfe intégré*.

3.2 Multipôles

3.2.1 Prédictions statistiques multipôlaires

Lorsque l'on établit des prédictions pour l'univers, nous n'avons accès qu'à des prédictions statistiques sur un ensemble de réalisations d'univers. Nous détaillerons ce point plus particulièrement dans le chapitre dédié à l'inflation. Les propriétés statistiques de $\Phi^{(1)}(k)$ [Eq. (2.37)] au début de l'ère de radiation sont données par celles de $A(k)$ (voir l'équation 2.37 pour la définition). Le corrélateur à deux points de cette quantité est donné en espace de Fourier par

$$\langle A(\mathbf{k})A(\mathbf{k}')\rangle=\delta_{\rm D}^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')P_\Phi(k). \tag{3.11}$$

P_Φ est le spectre de puissance des fluctuations et ne dépend que de la norme de $\mathbf{k}$ ce qui traduit l'isotropie statistique. Quant à la fonction $\delta_{\rm D}^3$, elle traduit l'hypothèse d'homogénéité des propriétés statistiques des fluctuations. Le corrélateur à deux points contient toute l'information sur la statistique d'un champ gaussien car tout corrélateur à n points peut être exprimé en fonction du corrélateur à deux points (voir l'introduction de la partie II). Grâce à l'isotropie statistique, on déduit que la corrélation de température du CMB venant de région différentes du ciel ne dépend que de leur séparation angulaire et peut donc être décomposée sur la base des polynômes de Legendre selon

$$\langle\Theta(\mathbf{e}_1)\Theta(\mathbf{e}_2)\rangle=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2\ell+1}{4\pi}C_\ell P_\ell(\mathbf{e}_1.\mathbf{e}_2). \tag{3.12}$$

Cela revient à réaliser une décomposition de la température mesurée en harmoniques sphériques selon

$$\Theta(\mathbf{e})=\sum_{\ell m}a_{\ell m}Y_{\ell m}(\mathbf{e})\,, \tag{3.13}$$

et à considérer les corrélations des $a_{\ell m}$ qui, à cause de l'isotropie statistique, satisfont

$$\langle a_{\ell_1 m_1}a^*_{\ell_2 m_2}\rangle=C_{\ell_1}\delta_{\ell_1\ell_2}\delta_{m_1 m_2}\,. \tag{3.14}$$

En utilisant ces propriétés et en négligeant l'effet Sachs-Wolfe intégré, on peut montrer que

$$\begin{aligned}a_{\ell m}&=4\pi i^\ell\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\left[\Theta_{SW}j_\ell(k\Delta\eta_E)+v_b(k)\frac{j'_\ell(k\Delta\eta_E)}{k}\right]Y^*_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}})\\&\equiv 4\pi i^\ell\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}g_\ell(k,\eta_{\rm LSS})\Phi^{(1)}(\mathbf{k})Y^*_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}})\quad\text{avec}\quad\Delta\eta_E\equiv\eta_0-\eta_{\rm LSS}\end{aligned} \tag{3.15}$$

La fonction $g_\ell(k,\eta)$ contient à la fois le transfert des perturbations de métrique et de matière en perturbations de température, ainsi que les effets de projections sur la sphère des observations. En utilisant la propriété (3.11), on déduit que le spectre de puissance angulaire C_ℓ est donné au premier ordre dans les perturbations par

$$C_\ell=\frac{2}{\pi}\int|g_\ell(k,\eta_{\rm LSS})|^2\,P_\Phi(k)k^2\mathrm{d}k\,. \tag{3.16}$$

C_ℓ est la variance des fluctuations de température sur une échelle angulaire de l'ordre de $\theta\sim\pi/\ell$.

3.2.2 Approximation du ciel plat

Le résultat précédent peut être simplifié si l'on se place dans l'approximation du ciel plat. Si l'on regarde une direction du ciel $\mathbf{e}$, c'est-à-dire telle que les photons nous parvenant de cette zone soient approximativement parallèles entre eux et de direction $-\mathbf{e}$, alors on peut décomposer un mode $\mathbf{k}$ en une partie parallèle à $\mathbf{e}$ et une partie orthogonale selon

$$\mathbf{k}=\mathbf{k}_\perp+\mathbf{k}_r,\quad\text{avec}\quad k_r=\mathbf{k}.\mathbf{e}\,. \tag{3.17}$$

Dans ce cadre d'approximation, l'effet Sachs-Wolfe propre et l'effet Doppler s'écrivent respectivement

$$\Theta^{(1)}_{\rm SW}(\mathbf{k},\eta)=\left[\frac{\delta_r^{(1)}}{4}(k,\eta)+\Phi^{(1)}(k,\eta)\right],\quad\Theta^{(1)}_{\rm Dop}(\mathbf{k},\eta)=\left[-\mathrm{i}k_r v_b^{(1)}(k,\eta)\right], \tag{3.18}$$

et on définit $g^{(1)}(\mathbf{k},\eta)\equiv\frac{1}{A(k)}\left[\Theta^{(1)}_{\rm SW}(\mathbf{k},\eta)+\Theta^{(1)}_{\rm Dop}(\mathbf{k},\eta)\right]$. On peut alors montrer que le spectre angulaire s'écrit alors pour $\ell\gg1$

$$C_\ell\simeq\frac{1}{2\pi\left(\Delta\eta_E\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_r P_\Phi(k)|g(\mathbf{k},\eta_{\rm LSS})|^2, \tag{3.19}$$

où $\Delta\eta_E\,k_\perp=\ell$. L'approximation du ciel plat n'est valable que pour $\ell\gg1$. Dans la limite des grandes échelles, c'est-à-dire pour $\ell\ll1$, on obtient pour un spectre invariant d'échelle, c'est-à-dire ayant un comportement proportionnel à k^{-3}, une solution approchée du spectre de puissance angulaire (3.16) donnée par

$$\ell(\ell+1)C_\ell\simeq\frac{9}{100\pi}P_\Phi k^3\,. \tag{3.20}$$

Cette expression est ensuite utilisée pour normaliser le spectre de puissance par comparaison aux observations.

3.2.3 Epaisseur de la surface de dernière diffusion

En pratique, la recombinaison n'est pas instantanée et la surface de dernière diffusion est en fait un volume. Si l'on désigne par $r=(\eta_0-\eta)$ la distance comobile à laquelle un photon a été diffusé pour la dernière fois avant d'être observé aujourd'hui, alors on peut relier le nombre de photons $N(r)$ qui ont parcouru au moins une distance r au nombre de photons $N(r+dr)$ qui ont parcouru au moins une distance $r+dr$ par

$$N(r+dr)=N(r)-\tilde\sigma dr N(r),\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}N(r)}{\mathrm{d}r}=-\tilde\sigma N(r) \tag{3.21}$$

où nous utilisons la notation $\tilde{\sigma} \equiv a n_e \sigma_T$. On en déduit que $N(r) = N_{tot} \exp[-\int_0^r \tilde{\sigma}(r')\mathrm{d}r']$. On définit ensuite la fonction de visibilité $v(r)$ comme la probabilité pour qu'un photon qui nous arrive ait été diffusé pour la dernière fois entre r et $r + dr$. En termes différentiels on obtient

$$v(r) = -\frac{1}{N_{tot}}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r}, \quad \Rightarrow \quad v(r) = \tilde{\sigma}(r) \exp\left[-\int_0^r \tilde{\sigma}(r')\mathrm{d}r'\right]. \tag{3.22}$$

En posant $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r} \equiv \tilde{\sigma}$, c'est-à-dire $\tau = \int_0^r \tilde{\sigma}(r')\mathrm{d}r'$ [2], la fonction de visibilité se récrit

$$v(r) = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r} e^{-\tau}. \tag{3.23}$$

Néanmoins nous avons déjà utilisé la notation $\tau' \equiv \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r}$ ce qui implique $\tau' = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}(\eta_0 - \eta)} = -\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\eta}$, le signe résultant d'une convention historique.

Afin de tenir compte de cette épaisseur dans l'approximation du ciel plat, il faut remplacer $g(\mathbf{k}, \eta_{\mathrm{LSS}})$ par

$$\hat{g}(\mathbf{k}, \eta_{\mathrm{LSS}}) \equiv \int v(\eta) g(\mathbf{k}, \eta) e^{(\mathrm{i}k_r \eta)} \mathrm{d}\eta. \tag{3.24}$$

Cette méthode permet d'obtenir pour un spectre de puissance P_Φ invariant d'échelle, les prédictions du spectre de puissance angulaire apparaissant sur la figure 3.1, où l'épaisseur de la surface de dernière diffusion ainsi que l'amortissement Silk ont été pris en compte [Seljak 94].

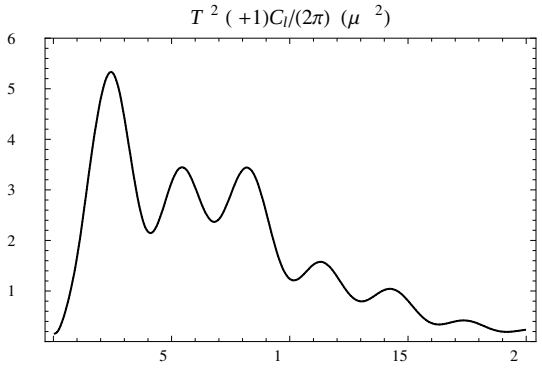

FIGURE 3.1 – Spectre angulaire dans l'approximation fluide en ciel plat, obtenu par intégration dans un code *Mathematica* des équations (2.88,2.89), avec le potentiel gravitationnel déterminé par l'équation de Poisson (2.21) en prenant en compte la matière noire froide.

Nous verrons dans la section 3.3 qu'il est nécessaire d'aller au delà de l'approximation fluide afin d'obtenir des prédictions précises pour le spectre angulaire. Il faut alors résoudre l'équation de Boltzmann et les équations d'Einstein de façon numérique afin de générer les prédictions pour tous les modèles d'univers envisageables et sélectionner celui qui est le plus compatible

2. τ est appelé profondeur optique.

avec les observations [Spergel *et al.* 07]. Le meilleur ajustement [3] aux données récoltées par le satellite consacré à la mesure du fond diffus WMAP est présenté sur la figure 3.2. Plusieurs codes sont disponibles en libre accès afin de réaliser ces intégrations numériques, les plus utilisés étant CMBFAST [Seljak & Zaldarriaga] et CAMB [Lewis & Challinor]. Une étude détaillée de la dépendance des caractéristiques du spectre angulaire dans les paramètres cosmologiques est exposée dans [Riazuelo 00].

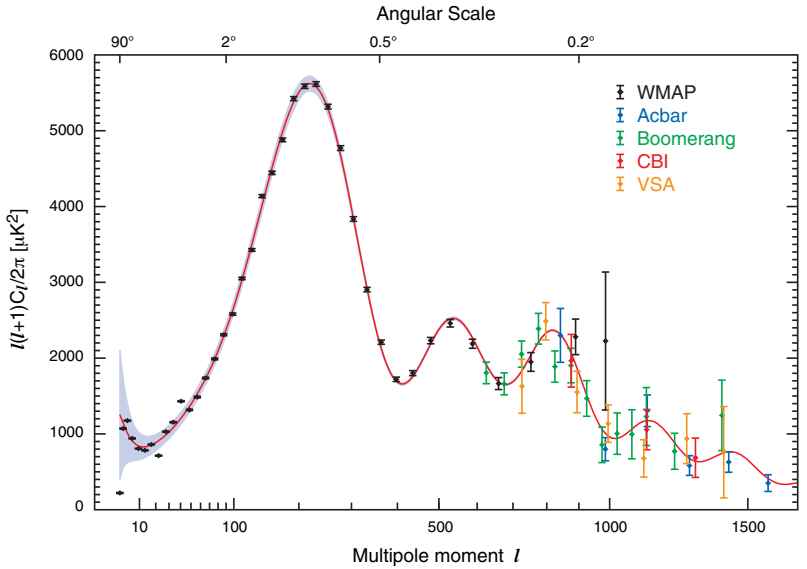

FIGURE 3.2 – Résultats de WMAP : Spectre de puissance angulaire de la température. En noir sont reportés les points mesurés et en rouge le meilleur ajustement correspondant au modèle concordant est tracé. Figure tirée de [Spergel *et al.* 07].

3.3 Théorie cinétique

3.3.1 Description statistique d'un ensemble de particules

Dans le cas général, et particulièrement pour la radiation, le contenu matériel de l'univers ne peut pas être décrit par un fluide parfait, et il faut prendre en compte la présence du tenseur de pression anisotrope. L'évolution de ce tenseur ne peut pas être déterminée seulement à

3. *best fit* en anglais.

partir de l'équation de conservation du tenseur énergie impulsion. De plus les forces entre les différents fluides doivent êtres déterminées afin de pouvoir écrire les équations de conservation couplées (2.20). Ces intéractions résultent principalement de diffusions entre particules dont les sections efficaces nous sont connues d'après la microphysique. On adopte une description statistique qui va être caractérisée par la fonction de distribution dans l'espace des phases $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ [Hillery *et al.* 84]. Nous pourrons ensuite remonter à l'approximation fluide afin de déterminer les forces entre les différents fluides. De plus, dans le régime de couplage fort, le tenseur de pression anisotrope peut être déterminé ce qui justifie alors de se restreindre à la description fluide. Lorsque l'on passe à la limite fluide, le paramètre d'équation d'état w peut être déterminé à partir de la vitesse quadratique moyenne des particules et de leur masse. Avant de dériver ce lien, il nous faut pouvoir utiliser les résultats de la physique locale dérivés dans un espace-temps Minkowskien. On va donc se ramener localement à un espace temps Minkowskien en utilisant une base de vecteurs orthonormés e_a, $a=0,1,2,3$, appelée tétrade ou champ de tétrade, qui satisfont

$$g_{\mu\nu}e_a^{\ \mu}e_b^{\ \nu}=\eta_{ab}\,,\quad \eta^{ab}e_a^{\ \mu}e_b^{\ \nu}=g^{\mu\nu}, \tag{3.25}$$

où η_{ab} est la métrique de Minkowski. On définit également une base de formes associées e^a, $a=0,1,2,3$ satisfaisant

$$g^{\mu\nu}e^a_{\ \mu}e^b_{\ \nu}=\eta^{ab}\,,\quad \eta_{ab}e^a_{\ \mu}e^b_{\ \nu}=g_{\mu\nu}. \tag{3.26}$$

Les impulsions $\mathbf{P}$ des particules peuvent donc être écrites soit dans la base associée au système de coordonnées ∂_μ soit dans la base de la tétrade et on aura donc

$$\mathbf{P}=p^\mu\partial_\mu=\pi^a e_a. \tag{3.27}$$

Afin de pouvoir utiliser les résultats de la physique des particules, on préfèrera donc écrire la fonction de distribution sous la forme $f(\mathbf{x},\pi^a)$, en sous entendant le champ de tétrade utilisé dans la décomposition des impulsions. On utilise alors les notations standard de la relativité restreinte

$$n^i\equiv\frac{\pi^i}{\pi^0},\qquad \beta=\sqrt{n^in_i},\qquad \hat{n}^i=n^i/\beta,\qquad \gamma=\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}. \tag{3.28}$$

Pour une particule massive $\pi^a\pi_a=-m^2$ et donc $\pi^0=\gamma m$, si bien que n^i est la vitesse, $\hat{n}^i$ son vecteur unitaire direction, et β la norme de cette vitesse qui satisfait nécessairement $\beta<1$. Pour une particule non massive, $\beta=1$ et $\hat{n}^i=n^i$ est le vecteur unitaire direction de cette particule. Pour un ensemble de particules de masse m n'ayant pas de mouvement d'ensemble ($\langle\pi^i\rangle=0$), la pression est donnée par

$$P\equiv\frac{2N\langle\pi^in_i\rangle}{6}=\frac{1}{3}mN\langle\gamma\beta^2\rangle. \tag{3.29}$$

Cette formule a une explication intuitive. Si on effectue une intégrale sur toutes les impulsions qui traversent une surface donnée, on montre que cela revient à considérer que seulement un sixième des particules traversera la surface en ayant une incidence normale, ce qui explique le facteur 1/6. Ensuite les particules qui touchent la surface rebondissent en y laissant deux fois leur impulsion qui est π^i. Ce nombre de particules qui touche la surface par unité de temps est proportionnel à la vitesse $n^i=\beta\hat{n}^i$ et à la densité de particules N. L'énergie de cet ensemble de particules est la moyenne des énergies $\rho=N\langle\pi^0\rangle=mN\langle\gamma\rangle$. On en conclut donc que le paramètre d'état s'écrit

$$w=\frac{\langle\gamma\beta^2\rangle}{3\langle\gamma\rangle}. \tag{3.30}$$

On en conclut donc que pour pouvoir décrire la matière avec un paramètre d'état nul il faut que toutes les particules aient une vitesse nulle. En cosmologie, lorsque l'on parle d'un fluide de pression nulle ($w=0$) pour lequel il existe généralement une vitesse d'ensemble, on doit donc comprendre qu'il s'agit d'un fluide pour lequel $P\ll\rho c^2$. Pour la radiation on trouve $P=\frac{1}{3}N\langle\pi^in_i\rangle=\frac{1}{3}N\langle\pi^0\rangle=\rho/3$.

Une approche plus rigoureuse consiste à définir un tenseur énergie-impulsion à partir de la fonction de distribution selon [4]

$$\begin{aligned}T^{ab}(x^\mu)&\equiv\int\delta_{\rm D}(\pi^c\pi_c-m^2)f(x^\mu,\pi^d)\pi^a\pi^b\mathrm{d}\pi^0\mathrm{d}^3\pi^i\,,\\&=\int f(x^\mu,\pi^i)\pi^0(\beta\pi^0)^2n^an^b\mathrm{d}(\beta\pi^0)\mathrm{d}\Omega\,,\end{aligned} \tag{3.31}$$

où on note $n^a=(1,n^i)=(1,\beta\hat{n}^i)$ et $\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}^2\hat{n}^i$. Nous avons également utilisé l'abus de notation $f(x^\mu,\pi^i)$ pour signifier $f(x^\mu,\pi^a)$ où la composante π^0 est déterminée en résolvant la contrainte du Dirac qui assure que les particules sont sur leur couche de masse. On utilisera également la notation $f(x^\mu,\pi^0,\hat{n}^i)$ qui correspond à des coordonnées sphériques pour π^i dans le cas de la radiation. En revanche dans le cas de matière de masse non nulle, il faut comprendre cette notation comme signifiant $f\left[x^\mu,\pi^0(\pi^i),\hat{n}^i(\pi^i)\right]$. Pour passer d'une intégrale sur π^a à une intégrale sur π^i dans la définition (3.31) nous avons effectué l'intégrale sur π^0, puis nous avons remarqué que la norme de π^i, c'est-à-dire $\sqrt{\pi^i\pi_i}$, vérifie $\sqrt{\pi^i\pi_i}=\beta\pi^0=\sqrt{(\pi^0)^2-m^2}$, et nous avons donc utilisé des coordonnées sphériques. Nous pouvons effectuer un changement de variable dans l'intégrale en utilisant $\mathrm{d}(\beta\pi^0)=\mathrm{d}\pi^0/\beta$, pour retrouver la forme standard dans la littérature

$$T^{ab}(x^\mu)=\int f(x^\mu,\pi^i)(\pi^0)^3\beta n^an^b\mathrm{d}\pi^0\mathrm{d}\Omega. \tag{3.32}$$

Cette formulation, plus pratique pour les calculs, a néanmoins l'inconvénient d'obscurcir la signification de la fonction de distribution, puisqu'il s'agit de la densité de probabilité de trouver en un point de l'espace-temps donné une particule d'impulsion π^i. On définit alors la moyenne d'une quantité physique tensorielle par

$$\langle X\rangle\equiv\int f(x^\mu,\pi^i)X(\pi^i)\mathrm{d}^3\pi^i=\int f(x^\mu,\pi^0,\hat{n}^i)X(\pi^0,\hat{n}^i)(\beta\pi^0)^2\mathrm{d}(\beta\pi^0)\mathrm{d}\Omega. \tag{3.33}$$

Il s'agit ici d'une moyenne sur toutes les particules se situant en un point $(t,\mathbf{x})$ de l'espace à ne pas confondre avec les moyennes stochastiques introduites dans la section 3.2.1. Par définition, le champ de tétrade $\tilde{e}_a$ correspond à un observateur comobile avec le fluide si les composantes du tenseur énergie-impulsion dans cette tétrade satisfont $T^{0i}=0$. La densité d'énergie, la pression

4. Nous utilisons la convention qui consiste à utiliser les deux hyperboloïdes de masse, c'est-à-dire que $f(x^\mu,-\pi^0,\pi^i)=f(x^\mu,\pi^0,\pi^i)$, ce qui revient à considérer la moitié des photons normalement orientés vers le futur comme étant orientés vers le passé, afin d'avoir une fonction de distribution plus "symétrique".

et la pression anisotrope mesurées par un tel observateur sont alors données par

$$\begin{aligned}\rho &= T^{00} = \int f(x^\mu,\pi^0,\hat{n}^i)\pi^0(\beta\pi^0)^2\mathrm{d}(\beta\pi^0)\mathrm{d}\Omega = \langle\pi^0\rangle \\ P &= \frac{1}{3}T^i{}_i = \frac{1}{3}\int f(x^\mu,\pi^0,\hat{n}^i)\beta^2\pi^0(\beta\pi^0)^2\mathrm{d}(\beta\pi^0)\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{3}\langle\beta^2\pi^0\rangle \\ \tilde{\Pi}^{ij} &= T^{ij} - P\delta^{ij} = \int f(x^\mu,\pi^0,\hat{n}^i)\beta^2\pi^0\hat{n}^{\langle ij\rangle}(\beta\pi^0)^2\mathrm{d}(\beta\pi^0)\mathrm{d}\Omega \\ &= \langle\beta^2\pi^0\hat{n}^{\langle ij\rangle}\rangle, \end{aligned} \tag{3.34}$$

avec $\hat{n}^{\langle ij\rangle} \equiv \left(\hat{n}^i\hat{n}^j - \frac{1}{3}\delta^{ij}\right)$. On retrouve bien la relation (3.30). c'est-à-dire que le tenseur énergie-impulsion se décompose en toute généralité selon

$$\mathbf{T} = \left[(P+\rho)\delta^a_0\delta^b_0 + P\eta^{ab} + \delta^a_i\delta^b_j\tilde{\Pi}^{ij}\right]\tilde{e}_a\tilde{e}_b\,. \tag{3.35}$$

Dans une tétrade quelconque e_a qui peut être obtenue à partir d'une transformation de Lorentz $e_a = \tilde{e}_b\Lambda_a{}^b$, en définissant $U^a = \Lambda^a{}_0$, le tenseur énergie-impulsion s'écrit grâce à la propriété $\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d\eta^{cd} = \eta^{ab}$

$$\mathbf{T} = \left[(\rho+P)U^aU^b + P\eta^{ab} + \Pi^{ab}\right]e_ae_b \quad \text{avec} \quad \Pi^{ab} \equiv \Lambda^a_i\Lambda^b_j\tilde{\Pi}^{ij}. \tag{3.36}$$

En pratique on choisit cette tétrade telle que $e^0 \sim \mathrm{d}\eta$. Nous détaillerons cette construction dans la section 5.2.

3.3.2 Perturbations de tétrades

Lorsque l'on s'intéresse à un espace perturbé, on décompose les tétrades en perturbations selon

$$e_a = \bar{e}_a + \delta e_a\,, \tag{3.37}$$

de telle sorte que la relation de normalisation (3.25) soit satisfaite. Les perturbations de la tétrade peuvent être exprimées en fonction de la tétrade de fond selon

$$e_a = \mathcal{R}_a{}^b\bar{e}_b,\;\; e^b = \bar{e}^a\mathcal{S}_a{}^b,\;\; \mathcal{R}_a{}^c\mathcal{S}_c{}^b = \mathcal{S}_a{}^c\mathcal{R}_c{}^b = \delta^b_a\,, \tag{3.38}$$

c'est-à-dire en notant $\mathcal{R}_a{}^b = \bar{\mathcal{R}}_a{}^b + \mathcal{R}^{(1)b}_a$

$$\delta e_a = \mathcal{R}^{(1)b}_a\bar{e}_b, \qquad \delta e^b = \bar{e}^a\mathcal{S}^{(1)b}_a\,. \tag{3.39}$$

$\mathcal{R}$ et son inverse $\mathcal{S}$ représentent la transformation nécessaires pour passer de la tétrade perturbée, à la tétrade de l'espace de fond. La condition de normalisation fixe nécessairement $\mathcal{R}_{(ab)}$ et $\mathcal{S}_{(ab)}$. La partie antisymétrique peut être choisie si l'on se donne une prescription, car elle correspond à la liberté de transformation de Lorentz dans le choix du champ de tétrades. La transformation de Lorentz peut être choisie si nous fixons systématiquement le choix de la tétrade de telle sorte que $e^0 \sim \mathrm{d}\eta$, ce qui implique $\mathcal{R}^{(1)}_{i0} = \mathcal{S}^{(1)}_{i0} = 0$. Quant à la liberté de rotation, on la fixe en choisissant $\mathcal{R}^{(1)}_{[ij]} = \mathcal{S}^{(1)}_{[ij]} = 0$. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Durrer & Straumann 88, Durrer 94, Pitrou 07].

3.3.3 Equation des géodésiques

Une particule d'impulsion $p^\mu\partial_\mu = \pi^a e_a$ (un photon si l'on s'intéresse à la fonction de distribution de la radiation) suit une géodésique. Sa trajectoire est donnée par $\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = p^\mu$, où s est un paramètre affine le long de la trajectoire. De plus, le long d'une trajectoire géodésique, le vecteur tangent est transporté parallèlement, c'est-à-dire

$$p^\mu\nabla_\mu p^\nu = \frac{\mathrm{d}p^\nu}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = 0, \quad \text{avec} \quad \frac{\mathrm{d}p^\nu}{\mathrm{d}s} \equiv p^\mu\frac{\partial p^\nu}{\partial x^\mu}\,. \tag{3.40}$$

Etant donné que nous avons choisi d'utiliser les impulsions dans une base orthonormée, il nous faut transposer cette équation géodésique dans la base orthonormée. On peut montrer qu'elle se récrit alors

$$\frac{\mathrm{d}\pi_a}{\mathrm{d}s} + \omega_{bac}\pi^c\pi^b = 0, \quad \text{avec} \quad \frac{\mathrm{d}\pi_a}{\mathrm{d}s} \equiv \pi^b\partial_{e_b}\pi_a\,, \tag{3.41}$$

où les ω_{abc} sont les connections affines dont les expressions sont détaillées dans l'appendice B.2. On peut donc extraire les perturbations ordre par ordre de cette équation en utilisant les expressions de perturbation des connections. On a donc pour l'évolution de l'énergie π^0 à l'ordre le plus bas

$$\left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}s}\right)^{(0)} = \bar{\omega}_{00i}\pi^0\pi^i + \bar{\omega}_{i0j}\pi^i\pi^j\,. \tag{3.42}$$

Cependant nous souhaitons connaître l'évolution en fonction de η. Nous utilisons donc

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s} = p^0 = \pi^a e_a{}^0 \tag{3.43}$$

qui à l'ordre le plus bas implique $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\eta} = \frac{a}{\pi^0}$. Avec les valeurs données dans l'appendice B.2, on obtient donc quelle que soit la masse de la particule

$$\left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(0)} = -\mathcal{H}\pi^0 n^i n_i\,. \tag{3.44}$$

L'expression générale pour une particule de masse m s'écrit dans la formulation de la relativité restreinte

$$\left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(0)} = -\mathcal{H}\pi^0\beta^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\eta} = -\mathcal{H}\frac{\beta}{\gamma^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\eta} = -\mathcal{H}\beta^2\gamma. \tag{3.45}$$

On retrouve donc que l'énergie $\pi^0 = \gamma m$ d'une particule massive non relativiste, c'est-à-dire telle que $\beta \ll 1$ ne varie pas au cours de l'évolution. Pour une particule massive on peut exprimer les dérivées en fonction du temps conforme η en fonction du temps propre de la particule τ en utilisant $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}$. Pour la radiation, $\beta = 1$ et on retrouve la loi du décalage vers le rouge $\frac{\mathrm{d}(a\pi^0)}{\mathrm{d}\eta} = 0$. On montre aussi que

$$\left(\frac{\mathrm{d}\pi^k}{\mathrm{d}s}\right)^{(0)} = -\bar{\omega}_{0ki}\pi^0\pi^i - \bar{\omega}_{ikj}\pi^i\pi^j = -\frac{\mathcal{H}\pi^0\pi^k}{a} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}n^k}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(0)} = -\frac{\mathcal{H}}{\gamma^2}n^k\,. \tag{3.46}$$

Cette relation, une fois projetée sur n_k redonne $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\eta} = -\mathcal{H}\beta/\gamma^2$, et on en déduit également qu'il n'y a pas de changement de direction à l'ordre le plus bas puisqu'elle implique également

$$\left(\frac{\mathrm{d}\hat{n}^k}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(0)} = 0. \tag{3.47}$$

Pour les particules massives, l'impulsion s'aligne avec le flot de Hubble, tandis que n^i est constant pour les particules sans masse puisque $\gamma = \infty$, ce qui se comprend, puisque dans le cas des photons ce vecteur est soumis à la contrainte $n^i n_i = 1$. En répétant cette procedure au premier ordre, c'est-à-dire en utilisant

$$\left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}s}\right)^{(1)} = +\omega^{(1)}_{00i}\pi^0\pi^i + \omega^{(1)}_{i0j}\pi^i\pi^j, \tag{3.48}$$

ainsi que la relation valable jusqu'au premier ordre entre η et le paramètre affine s

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\eta}\right) = \frac{a}{\pi^0}(1+\Phi), \tag{3.49}$$

on obtient

$$\left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(1)} = \pi^0\left[-n^i\partial_i\Phi + \Psi' n^i n_i - E'_{ij}n^i n^j\right]. \tag{3.50}$$

On peut récrire cette équation sous la forme

$$\left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(1)} = \pi^0\left[-\beta\hat{n}^i\partial_i\Phi + \beta^2\left(\Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j\right)\right]. \tag{3.51}$$

Cette équation d'évolution pour l'énergie implique que l'évolution de la norme de la vitesse satisfait au premier ordre

$$\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(1)} = \frac{1}{\pi^0\beta\gamma^2}\left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(1)} = \frac{1}{\gamma^2}\left[-\hat{n}^i\partial_i\Phi + \beta\left(\Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j\right)\right]. \tag{3.52}$$

En ce qui concerne l'évolution de la direction $\hat{n}^i$, on la déduit de

$$\left(\frac{\mathrm{d}\pi^k}{\mathrm{d}s}\right)^{(1)} = -\omega^{(1)}_{0ki}\pi^i\pi^0 - \omega^{(1)}_{ikj}\pi^i\pi^j - \omega^{(1)}_{ik0}\pi^i\pi^0 - \omega^{(1)}_{0k0}\pi^0\pi^0, \tag{3.53}$$

et on obtient en utilisant la définition $\perp^{ij} = \delta^{ij} - \hat{n}^i\hat{n}^j$,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\hat{n}^i}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(1)} = -\perp^{ij}\left(\beta\partial_j\Psi + \frac{1}{\beta}\partial_j\Phi + E'_{jk}\hat{n}^k\right) - 2\beta\partial^{[i}E_{k]j}\perp^{jk}. \tag{3.54}$$

On a utilisé ci-dessus la définition $X_{[ij]} = \frac{1}{2}(X_{ij} - X_{ji})$. Tout d'abord on remarque qu'en combinant cette équation d'évolution de la direction avec l'équation d'évolution de la norme de la vitesse (3.52), on obtient pour une particule non relativiste ($\beta \ll 1$)

$$\frac{\mathrm{d}\left(\beta\hat{n}^i\right)}{\mathrm{d}\eta} = -\partial_i\Phi. \tag{3.55}$$

On reconnaît l'équation obtenue en mécanique Newtonienne puisque la vitesse est $n^i = \beta\hat{n}^i$ et Φ s'identifie au potentiel gravitationnel. On remarque également que pour le cas $\beta = 1$, l'expansion $\mathcal{H}$ n'intervient pas car deux espaces reliés par une transformation conforme ont les

mêmes géodésiques nulles et l'espace-temps de Friedmann-Lemaître est conforme à l'espace de Minkowski.

Le cas de la radiation correspond à $\beta = 1$ et l'équation d'évolution de l'énergie (3.51) s'écrit dans ce cas

$$\frac{\mathrm{d}\ln(a\pi^0)}{\mathrm{d}\eta} = \left[-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\eta} + \Phi' + \Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j\right]. \tag{3.56}$$

Pour un observateur dont le quadrivecteur vitesse U_a correspond à une vitesse v^i par rapport à e_0, c'est-à-dire $U_a = \delta^0_a + \delta^i_a v_i$, l'énergie du photon mesurée est $\pi^a U_a$. En définissant

$$\frac{(a\pi^a U_a)\,|_0}{(a\pi^a U_a)\,|_e} \equiv \frac{1+\delta_{\mathcal{E}_0}}{1+\delta_{\mathcal{E}_e}}, \tag{3.57}$$

on obtient au premier ordre

$$\delta_{\mathcal{E}_0} - \delta_{\mathcal{E}_e} = -[\Phi + \bar{e}_i v^i_b]^0_e + \int_e^0 \left(\Phi' + \Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j\right)\mathrm{d}\eta, \tag{3.58}$$

ce qui a déjà été obtenu dans l'équation (3.7) sans passer par l'utilisation de tétrades. De plus, si on néglige l'effet des ondes gravitationnelles, l'équation de déviation prend la forme

$$\left(\frac{\mathrm{d}\hat{n}^i}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(1)} = -\perp^{ij}\partial_j\left(\Psi + \Phi\right), \tag{3.59}$$

qui est le résultat standard des effets de lentille gravitationnelle sur la radiation, utilisé par exemple pour les effets de lentilles faibles [Hoekstra *et al.* 06].

3.3.4 Terme de Liouville

L'équation d'évolution de la fonction de distribution est donnée par l'équation de Boltzmann

$$L[f] = C[f] \tag{3.60}$$

où $L[f]$ est l'opérateur de Liouville relativiste qui décrit l'évolution dans l'espace des phases, et $C[f]$ est le terme de collision qui intervient lors d'un description multifluide en intéraction. En utilisant le champ de tétrades comme base de l'espace tangent, le terme de Liouville s'écrit

$$L[f] \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\eta} + \frac{\partial f}{\partial \pi^a}\frac{\mathrm{d}\pi^a}{\mathrm{d}\eta}, \tag{3.61}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\eta} + \frac{\partial f}{\partial \pi^0}\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta} + \frac{\partial f}{\partial \hat{n}^i}\frac{\mathrm{d}\hat{n}^i}{\mathrm{d}\eta}. \tag{3.62}$$

Plus rigoureusement l'équation précédente est satisfaite par $\delta_{\mathrm{D}}(\pi^a\pi_a - m^2)f$ mais comme d'après l'équation des géodésiques (3.41) $\frac{\mathrm{d}\pi^a}{\mathrm{d}s}\pi_a = 0$, ce terme se factorise dans l'équation de Boltzmann. En utilisant les résultats de la section précédente ainsi que la propriété $\bar{f} = \bar{f}(\eta, \pi^0)$, on en déduit que cette équation s'écrit pour l'espace de fond

$$\bar{L}[f] = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \eta} - \mathcal{H}\pi^0\beta^2\frac{\partial \bar{f}}{\partial \pi^0}. \tag{3.63}$$

Au premier ordre, nous n'avons besoin de l'équation donnant $\frac{\mathrm{d}n^i}{\mathrm{d}\eta}$ que sur l'espace de fond car f ne dépend de n^i qu'à partir du premier ordre. On obtient alors

$$\begin{aligned} L^{(1)}[f] &= \frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\eta} + \beta\hat{n}^j\partial_j\delta^{(1)}f - \mathcal{H}\pi^0\beta^2\frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\pi^0} \\ &\quad + \left[-\beta\hat{n}^j\partial_j\Phi + \beta^2\left(\Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j\right)\right]\pi^0\frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^0}\,. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Le cas de la radiation auquel nous nous intéressons plus particulièrement s'écrit en prenant $\beta = 1$

$$\bar{L}[f] = \frac{\partial\bar{f}}{\partial\eta} - \mathcal{H}\pi^0\frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^0} \tag{3.65}$$

$$L^{(1)}[f] = \frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\eta} + \hat{n}^j\partial_j\delta^{(1)}f - \mathcal{H}\pi^0\frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\pi^0} + \left[-\hat{n}^j\partial_j\Phi + \left(\Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j\right)\right]\pi^0\frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^0}. \tag{3.66}$$

3.3.5 Terme de collision pour la radiation

Le terme de collision est de la forme

$$C[f] = \frac{\mathrm{d}f_+}{\mathrm{d}\eta} - \frac{\mathrm{d}f_-}{\mathrm{d}\eta}\,, \tag{3.67}$$

où $\frac{\mathrm{d}f_+}{\mathrm{d}\eta}$ et $\frac{\mathrm{d}f_-}{\mathrm{d}\eta}$ sont respectivement le taux entrant et le taux sortant résultant des intéractions baryons-photons par diffusion Compton. Pour le terme de collision de la radiation, ces expressions sont plus facilement exprimées dans le référentiel où les baryons sont au repos qui correspond à la tétrade $\tilde{e}_a = e_b\Lambda^b{}_a$, où $\Lambda^b{}_a$ est la transformée de Lorentz permettant de passer du référentiel des observateurs comobiles au référentiel des baryons. On relie la fonction de distribution dans ces deux bases par $\tilde{f}(x^\mu,\tilde{\pi}^a) = f(x^\mu,\pi^a)$, et donc

$$\tilde{f}(x^\mu,\pi^a) = \exp\left[\pi^d\left(\Lambda^c{}_d - \delta^c_d\right)\frac{\partial}{\partial\pi^c}\right]f(x^\mu,\pi^a), \tag{3.68}$$

où dans le développement en puissance de l'exponentielle, les dérivées partielles doivent être ordonnées à droite afin de n'agir que sur f. Au niveau de l'espace de fond on a $\bar{\tilde{f}}(x^\mu,\pi^0) = \bar{f}(x^\mu,\pi^0)$. Au premier ordre on a

$$\delta^{(1)}\tilde{f}(x^\mu,\pi^a) = \delta^{(1)}f(x^\mu,\pi^a) + \pi_i v_b^{i(1)}\frac{\partial}{\partial\pi^0}\bar{f}(x^\mu,\pi^0). \tag{3.69}$$

La limite à basse énergie de la diffusion Compton, pour laquelle l'énergie des baryons est assimilable à leur énergie au repos, est la diffusion Thomson. Le terme de collision au premier ordre [Itzykson & Zuber 80, Peskin & Schroeder 95], dans les bases $\tilde{e}_a$ et e_a respectivement, s'écrit

$$\tilde{C}^{(1)}[\tilde{f}(\pi)] = \tilde{\tau}'\int\left[\delta^{(1)}\tilde{f}(\pi^0,n^{i'}) - \delta^{(1)}\tilde{f}(\pi^0,n^i)\right]\left(1 + \frac{3}{4}n^{\langle ij\rangle}n'_{\langle ij\rangle}\right)\frac{\mathrm{d}^2\Omega'}{4\pi}\,, \tag{3.70}$$

$$C^{(1)}[f(\pi)] = \tau'\int\left[\delta^{(1)}f(\pi^0,n^{i'}) - \delta^{(1)}f(\pi^0,n^i) - \pi^0 n_i v_b^{i(1)}\frac{\partial}{\partial\pi^0}\bar{f}(x^\mu,\pi^0)\right]\left(1 + \frac{3}{4}n^{\langle ij\rangle}n'_{\langle ij\rangle}\right)\frac{\mathrm{d}^2\Omega'}{4\pi}.$$

3.3.6 Hiérarchie de Boltzmann et lien avec les observations du fond diffus

Dans le cas de la radiation, on mesure l'énergie bolométrique, c'est-à-dire l'énergie dans toutes les longueurs d'onde. On définit donc la brillance bolométrique par

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{I}}(x^\mu,n^i) &\equiv 4\pi\int\bar{f}(x^\mu,\pi^0,n^i)(\pi^0)^3\mathrm{d}\pi^0 \\ \mathcal{I}^{(1)}(x^\mu,n^i) &\equiv 4\pi\int\delta^{(1)}f(x^\mu,\pi^0,n^i)(\pi^0)^3\mathrm{d}\pi^0. \end{aligned} \tag{3.71}$$

En intégrant l'équation de Boltzmann sur π^0, on en déduit que la brillance satisfait les équations d'évolution ordre par ordre [Ma & Bertschinger 95]

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{I}}}{\partial\eta} - 4\mathcal{H}\bar{\mathcal{I}} = 0 \tag{3.72}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + n^i\partial_i\right)\frac{\mathcal{I}^{(1)}}{4} + \mathcal{H}\mathcal{I}^{(1)} + \left(n^i\partial_i\Phi^{(1)} - \Psi^{(1)\prime} + E'_{ij}n^in^j\right)\bar{\mathcal{I}} = \frac{1}{4}C^{(1)}[\mathcal{I}], \tag{3.73}$$

avec

$$C^{(1)}[\mathcal{I}] = \tau'\left[\int\mathcal{I}^{(1)}\frac{\mathrm{d}^2\Omega}{4\pi} - \mathcal{I}^{(1)} + 4v_b^{i(1)}n_i + \frac{3}{4}n^in^j\int\mathcal{I}^{(1)}n_{\langle ij\rangle}\frac{\mathrm{d}^2\Omega}{4\pi}\right]. \tag{3.74}$$

On peut définir un contraste de température directionnelle Θ comme dans la section 3.1 qui sera relié à la brillance par

$$\Theta = \frac{\mathcal{I}^{(1)}}{4\bar{\mathcal{I}}}. \tag{3.75}$$

Le terme de collision au premier ordre dérivé ci-dessus n'introduit pas de distorsion spectrale si bien que le spectre de corps noir n'est pas modifié par les intéractions baryons-photons. Or nous avons vu que la libre propagation des photons n'introduit pas non plus de distorsion spectrale si bien que le spectre de corps noir est conservé, et la température suffit à caractériser de façon unique la fonction de distribution. Ceci justifie donc qu'on puisse parler de température pour décrire la fonction de distribution. Au second ordre dans les perturbations ce résultat ne sera plus valable, même dans la limite basse énergie de la diffusion Thomson [Bartolo *et al.* 06]. On peut décomposer la dépendance directionnelle de la brillance et similairement du contraste de température en multipôles selon

$$\mathcal{I}^{(1)}(x^\mu,n^i) \equiv \sum_p\mathcal{M}^{(1)}_{i_1..i_p}(x^\mu)\hat{n}^{i_1}..\hat{n}^{i_p}, \tag{3.76}$$

où les moments de ce développements sont symétriques et sans trace. Les trois premiers moments peuvent être reliés au tenseur énergie impulsion

$$\begin{aligned} T^{00(1)} &= \mathcal{M}^{(1)} \\ T^{0i(1)} &= \mathcal{M}^{i(1)} \\ T^{ij(1)} &= \mathcal{M}^{ij(1)}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Après être passé en espace de Fourier

$$\mathcal{M}^{(1)}_{i_1\cdots_p}(\eta,\mathbf{x}) \equiv \int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\mathcal{M}^{(1)}_{i_1\cdots_p}(\eta,\mathbf{k})\exp\left(\mathrm{i}\mathbf{k}.\mathbf{x}\right), \tag{3.78}$$

on peut extraire successivement les multipôles de l'équation de Boltzmann. Pour l'équation du premier ordre, on obtient une succession d'équations différentielles qui couplent l'évolution de $\mathcal{M}^{(1)}_{i_1..i_p}$ à $\mathcal{M}^{(1)}_{i_1..i_{p-1}}$ et $\mathcal{M}^{(1)}_{i_1..i_{p+1}}$. En utilisant les relations (3.77), les deux premiers multipôles de l'équation d'évolution (3.73) permettent d'obtenir pour la radiation l'équation de conservation et l'équation d'Euler (2.88). Par la même méthode on retrouve ces mêmes équations de conservation et d'Euler (2.89) pour la matière baryonique. Si on néglige les termes de collision, il s'agit des équations (2.25) et (2.26) dérivées dans l'approximation fluide. Inversement, ces termes de collision permettent de donner la forme des forces entre les différents fluides définies par les relations (2.20). Nous verrons dans la section suivante pourquoi la description fluide peut être retrouvée à partir de l'approche cinétique. Une autre possibilité pour extraire la dépendance directionnelle consiste à considérer une décomposition sur la base des harmoniques sphériques qui a une relation bijective avec la décomposition en tenseurs symétriques sans trace [Thorne 80]. On définit alors

$$\mathcal{I}^{(1)}(\eta,\mathbf{x},\mathbf{n}) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell m} \mathcal{I}^{(1)}_{lm}(\eta,k)(-\mathrm{i})^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}.\mathbf{x})\, Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \tag{3.79}$$

et on emploie une définition similaire pour le contraste de température en définissant les $\Theta^{(1)}_{lm}(\eta,k)$. On obtient alors une série infinie d'équations différentielles couplées indexées par ℓ et m. On peut montrer que seuls les multipôles satisfaisant $|m| = 0, 1, 2$ seront non nuls. Il est ensuite possible de déduire les C_ℓ des propriétés statistiques des $\Theta^{(1)}_{lm}(\eta,k)$. Une résolution correcte des équations donnant la dynamique de ces quantités nécessite de considérer la polarisation de la radiation. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Riazuelo 00, Hu & White 97a, Peter & Uzan 05]. De plus, une fois ces équations établies, il faut pouvoir les intégrer numériquement. Une solution efficace algorithmiquement a été développée dans [Seljak & Zaldarriaga 96].

3.3.7 La limite fluide de l'équation de Boltzmann

Nous suivons essentiellement [Ehlers 71] pour montrer que l'équation de Boltzmann implique l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion. En multipliant l'équation de Boltzmann (3.61) par $\delta_{\mathrm{D}}(\pi^a\pi_a - m^2)$, puis en multipliant encore par $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s}\pi^b$ et en intégrant sur les quadri-impulsions π^d, on obtient

$$\begin{aligned}
\int \left[\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial \pi^a}\frac{\partial \pi^a}{\partial s} - C[f]\right] \pi^b \delta_{\mathrm{D}}(\pi_d\pi^d - m^2)\mathrm{d}^4\pi &= 0\,,\\
\int \left[\frac{\partial f}{\partial x^\mu}p^\mu - \frac{\partial f}{\partial \pi^a}\omega_{eaf}\pi^e\pi^f - C[f]\right] \pi^b \delta_{\mathrm{D}}(\pi_d\pi^d - m^2)\mathrm{d}^4\pi &= 0\,,\\
\int \left[\partial_{e_a} f\pi^a + f\omega^a{}_{af}\pi^f + f\omega_{ebf}\pi^e\pi^f - C[f]\right] \pi^b \delta_{\mathrm{D}}(\pi_d\pi^d - m^2)\mathrm{d}^4\pi &= 0\,.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé l'équation géodésique (3.41) pour passer de la première à la seconde ligne, puis pour passer de la seconde à la troisième nous avons intégré par parties et utilisé le fait que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\delta_{\mathrm{D}}(\pi_d\pi^d - m^2) = 0. \tag{3.80}$$

On reconnaît alors l'équation de conservation

$$\partial_{e_a}T^{ab} + \omega^a_{ad}T^{db} + \omega_a{}^b{}_d T^{ad} = \nabla_a T^{ab} = Q^b \quad \text{avec} \quad Q^b \equiv \int C[f]\pi^b\delta_{\mathrm{D}}(\pi_d\pi^d - m^2)\mathrm{d}^4\pi. \tag{3.81}$$

Si $b = 0$ cela correspond au moment le plus bas et on retrouve l'équation de conservation tandis que pour $b = i$ on retrouve l'équation d'Euler. Il faut cependant veiller au fait que cet indice b correspond à la base de tétrade et donc lorsque l'on souhaite retrouver l'équation de conservation (2.25) et l'équation d'Euler (2.26) qui sont exprimées dans la base associées aux coordonnées, il faudra utiliser le champ de tétrade pour effectuer la conversion, c'est-à-dire projeter avec $(e_b)^\mu$. Ceci est expliqué en détails dans l'approximation fluide effectuée dans la section 5.2.

3.3.8 Conclusion

Nous avons résumé au cours de ces trois derniers chapitres le modèle standard du big-bang chaud pour l'espace de fond, la croissance des perturbations de métrique ainsi que les perturbations du fond diffus cosmologique. Evidemment ces aspects sont imbriqués puisque pour déterminer la croissance des perturbations de métrique il faut connaître le tenseur énergie impulsion des différentes espèces remplissant l'univers. Si pour certaines espèces, une approximation fluide suffit amplement (matière noire) une description statistique est requise pour la radiation et la matière baryonique ainsi que les neutrinos. Comme nous l'avons déjà évoqué à la fin de la section 3.2.2, la résolution de cet ensemble d'équations est nécessairement numérique. Cependant, elle nécessite d'abord de connaître les conditions initiales loin dans l'ère de radiation. Inversement, on peut déterminer ces conditions initiales en recherchant le meilleur ajustement aux observations, mais alors elle restent inexpliquées par le modèle. Le mécanisme de l'inflation, dont nous allons donner les grandes lignes dans le chapitre suivant, permet d'apporter une réponse au problème des conditions initiales tout en résolvant les problèmes de platitude et d'isotropie du big-bang chaud.

Chapitre 4

L'inflation standard

Sommaire

4.1 Phénoménologie 52
4.2 Quantification de l'inflaton et spectre primordial 53
4.3 La variable de Mukhanov-Sasaki en formalisme 1+3 (article) 57

Les problèmes du big-bang chaud trouvent une résolution élégante si l'on suppose que celui-ci a été précédé par une ère d'expansion accélérée. La conséquence de cette phase est d'étendre la zone en contact causal avant le découplage de telle sorte que tout l'univers observable soit bien plus petit qu'une telle zone. Le problème de la platitude est alors résolu car la matière permettant une telle phase accélérée satisfait nécessairement $w < -1/3$ et donc sa densité d'énergie diminue moins vite que $1/a^2$. Le terme de courbure Ω_K dans l'équation de Friedmann décroît alors plus rapidement que celui du contenu matériel et son importance relative décroît. Si l'inflation est soutenue par une matière dont la densité d'énergie ne se dilue quasiment pas, c'est-à-dire $w \simeq -1$, alors l'importance relative de la courbure par rapport au contenu matériel va comme $\simeq a^{-2}$. Même si dans l'ère de radiation et l'ère de matière ce comportement s'est inversé, avec une phase d'inflation suffisamment longue on explique la valeur encore très basse de la courbure. Basé sur ces motivations, le premier modèle d'inflation avec une interprétation physique claire a été proposé dans [Guth 81] afin de résoudre le problème de la platitude et de l'horizon. La théorie des perturbations pendant l'inflation a ensuite été développée presque aussitôt [Mukhanov & Chibisov 81] et a permis de donner une explication simple aux conditions initiales des perturbations du big-bang chaud en plaçant leur origine dans les fluctuations quantiques. Les premiers modèles d'inflation supposaient tout de même que l'univers était dans un état d'équilibre thermique préexistant, et suffisamment homogène sur de grandes échelles pour survivre jusqu'au déclenchement de la phase d'inflation. Ce problème a été résolu avec la théorie de l'inflation chaotique selon laquelle l'inflation peut débuter même si l'univers n'est pas en équilibre thermique. Dans ce cas, l'univers observable est alors issu d'une cellule de taille sub-Planckienne et ses conditions globales aujourd'hui sont issues des conditions locales quantiques d'alors. Le modèle le plus simple d'inflation chaotique est celui de l'inflation à un champ en roulement lent. Nous allons décrire rapidement ce modèle ainsi que ses prédictions pour le spectre des anisotropies primordiales.

4.1 Phénoménologie

La période d'inflation peut être décrite dans les modèles les plus simples avec un contenu matériel qui se réduit à un champ scalaire évoluant sur un potentiel $V(\varphi)$. L'action d'Hilbert-Einstein associée est alors

$$\begin{aligned} S &= \int \left(\frac{1}{2\kappa}R - \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi)\right)\sqrt{-g}\mathrm{d}^4\mathbf{x} \\ &= \int \mathcal{L}\mathrm{d}^4\mathbf{x}\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

En variant cette action par rapport à la métrique, on obtient l'équation d'Einstein avec un tenseur énergie-impulsion donné par

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\alpha\varphi\partial^\alpha + V(\varphi)\right)\,. \tag{4.2}$$

Si on sépare le champ scalaire en une partie de fond $\bar{\varphi}$ et une partie pérturbée $\delta\varphi$, alors on obtient sur le fond

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}\dot{\bar{\varphi}}^2 + V(\bar{\varphi}), \quad \bar{P} = \frac{1}{2}\dot{\bar{\varphi}}^2 - V(\bar{\varphi}). \tag{4.3}$$

Ces quantités doivent ensuite être utilisées dans les équations de Friedmann-Lemaître (1.17). L'équation de conservation est alors l'équation de Klein-Gordon

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 3H\dot{\bar{\varphi}} + V_{,\varphi} = 0, \tag{4.4}$$

où $V_{,\varphi} \equiv \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\bar{\varphi}}$. Au niveau de l'espace de fond on remarque que pour un terme potentiel plus grand que le terme cinétique, on peut obtenir une pression négative, c'est-à-dire un type de matière dont la densité d'énergie se dilue moins vite que la matière froide. De plus si $\dot{\bar{\varphi}}^2 < V(\bar{\varphi})$, alors $\bar{\rho} + 3\bar{P} < 0$ et donc on obtient une phase accélérée, $\ddot{a} > 0$.

La dynamique du champ scalaire de fond possède un attracteur [Uzan & Lehoucq 01]. Sur cet attracteur le champ est en roulement lent le long de son potentiel si bien que $\dot{\bar{\varphi}}^2 \ll V$ et$\ddot{\bar{\varphi}} \ll 3H\dot{\bar{\varphi}}$. On obtient alors $\bar{P} \simeq -\bar{\rho}$ et on a donc quasiment affaire à une constante cosmologique. Afin de quantifier plus précisément ces rapports, on introduit les paramètres de roulement lent

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\frac{3}{2}\dot{\bar{\varphi}}^2}{\frac{1}{2}\dot{\bar{\varphi}}^2 + V}\,, \tag{4.5}$$

$$\delta \equiv -\frac{\ddot{\bar{\varphi}}}{H\dot{\bar{\varphi}}}\,, \tag{4.6}$$

qui permettent ainsi de ne pas avoir à décrire explicitement la forme du potentiel et qui sont infinitésimaux sur l'attracteur. Les prédictions des modèles d'inflation seront données en fonction de ces paramètres de roulement lent. L'intérêt de ne pas utiliser une pure constante cosmologique réside dans le fait que la sortie du régime d'inflation se fait lorsque la condition de roulement lent n'est plus satisfaite et que le champ est dans la partie basse de son potentiel. L'avantage de lui donner une structure dynamique à travers un champ réside aussi dans le fait qu'on va s'intéresser à la dynamique des perturbations $\delta\varphi$. Nous allons maintenant voir comment évoluent ces perturbations mais aussi par quel moyen nous pouvons obtenir des prédictions en fixant des conditions initiales adéquates pour la perturbation du champ scalaire.

4.2 Quantification de l'inflaton et spectre primordial

Dans ce qui suit on ne travaille qu'au premier ordre en perturbations. Nous avons déjà vu qu'il y avait quatre degrés de liberté de perturbations scalaires de la métrique, auxquels s'ajoute un degré de liberté scalaire du champ lui même. Deux de ces cinq degrés sont des degrés de liberté de jauge et ne sont pas physiques tandis que deux autres sont déterminés par des équations de contraintes, c'est-à-dire des équations non dynamiques qui sont les équations (2.21) et (2.24). Nous n'avons au final qu'un degré de liberté dynamique scalaire et nous cherchons à l'isoler. On introduit la perturbation du champ en jauge plate

$$\mathcal{Q} \equiv \delta\varphi + \frac{\dot{\bar{\varphi}}}{H}\Psi = \delta\varphi + \frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}}\Psi\,, \tag{4.7}$$

ainsi que la perturbation de courbure comobile

$$\mathcal{R} \equiv \Psi + \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'}\delta\varphi = \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'}\mathcal{Q}\,. \tag{4.8}$$

En introduisant les variables

$$u \equiv \frac{2a\Phi}{\kappa\bar{\varphi}'}\,, \qquad z = a\frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}}\,, \qquad \theta \equiv \frac{1}{z}\,, \tag{4.9}$$

et en utilisant les équations de fond, on peut récrire la perturbation de courbure comobile selon $\mathcal{R} = \theta u' - \theta' u$. Si on définit la variable

$$v \equiv z\mathcal{R} = a\mathcal{Q}\,, \tag{4.10}$$

alors cette relation se réduit à la relation simple entre u et v

$$zv = (uz)'\,. \tag{4.11}$$

v (ou v/a) est appelée variable de Mukhanov-Sasaki [Mukhanov 85, Sasaki 86]. En utilisant l'équation (2.22) avec l'équation de Poisson (2.21) pour fermer l'équation en Φ, on montre que l'introduction de toutes ces quantités permet de reformuler le résultat selon

$$\mathcal{R}' = \theta\Delta u \Rightarrow u'' - \left(\Delta + \frac{\theta''}{\theta}\right)u = 0. \tag{4.12}$$

Cette équation est une équation de type oscillateur harmonique, mais avec un terme de masse variable. La relation (4.11) permet également de déduire l'équation dynamique de type oscillateur harmonique pour v

$$v'' - \left(\Delta + \frac{z''}{z}\right)v = 0. \tag{4.13}$$

En ce qui concerne les modes tensoriels, nous avons deux degrés de liberté dynamiques à identifier. Dans l'espace de Fourier [1], on introduit deux vecteurs unitaires e_i^1 et e_i^2 de l'espace orthogonal

1. Les fonctions exp[i**k**.**x**] sont fonctions propres du laplacien et constituent une base orthogonale complète pour décomposer toutes les fonctions. Une base de fonctions orthogonales à valeurs vectorielles et tensorielles peut être construite à partir de cette base en la multipliant par les vecteurs et tenseurs de polarisation appropriés. Cependant cette décomposition suppose que la topologie de l'univers est triviale, c'est-à-dire que l'univers est plat et infini. Pour un univers plat mais fermé seuls certains modes interviennent dans la décomposition en modes. Pour le cas non plat, il faudra travailler avec une autre base de fonctions propres du Laplacien.

à k^i ($k^i e_i^1 = k^i e_i^2 = 0$). On définit ensuite les tenseurs de polarisation

$$\varepsilon_{ij}^{+} \equiv \frac{e_i^1 e_j^1 - e_i^2 e_j^2}{\sqrt{2}}\,, \quad \varepsilon_{ij}^{\times} \equiv \frac{e_i^1 e_j^2 + e_i^2 e_j^1}{\sqrt{2}}\,, \tag{4.14}$$

qui sont sans trace ($\varepsilon_{ij}\gamma^{ij} = 0$) et transverses ($\varepsilon_{ij}k^i = 0$). On peut alors décomposer E_{ij} selon cette base

$$E_{ij} = E_+\varepsilon_{ij}^{+} + E_\times\varepsilon_{ij}^{\times}. \tag{4.15}$$

En introduisant

$$\mu_+ = \frac{a}{\sqrt{\kappa}}E_+\,, \qquad \mu_\times = \frac{a}{\sqrt{\kappa}}E_\times\,, \tag{4.16}$$

l'équation dynamique pour E_{ij} implique l'équation dynamique

$$\mu'' - \left(\Delta + \frac{a''}{a}\right)\mu = 0 \tag{4.17}$$

qui est satisfaite pour μ_+ et $\mu_\times$.

Nous avons donc identifié des degrés de liberté dynamiques (u et v) pour les perturbations scalaires, ainsi que la relation pour passer de l'un à l'autre mais rien ne permet de privilégier l'un sur l'autre ou même éventuellement sur les éventuelles combinaisons linéaires qu'on pourrait construire, si l'on souhaite ensuite bâtir une théorie quantique [Deruelle *et al.* 92]. De même nous avons identifié facilement les degrés de liberté dynamiques correspondant aux ondes gravitationnelles et toute combinaison linéaire possède la même dynamique. Cependant si l'on souhaite hiérarchiser les degrés de liberté scalaires, il faut s'intéresser directement à l'action plutôt qu'aux équations d'Einstein qui en résultent. On peut alors identifier les degrés de liberté dits canoniques.

En effet, en perturbant l'action (4.1) au second ordre dans les perturbations, on peut la récrire à des dérivées totales près sous la forme[Mukhanov *et al.* 92]

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\eta\mathrm{d}^3\mathbf{x}\left[(v')^2 + \frac{z''}{z}v^2 - \partial_i v\partial^i v\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\eta\mathrm{d}^3\mathbf{x}\left[\left(\mu_+'\right)^2 + \frac{a''}{a}\mu_+^2 - \partial_i\mu_+\partial^i\mu_+ + \left(\mu_\times'\right)^2 + \frac{a''}{a}\mu_\times^2 - \partial_i\mu_\times\partial^i\mu_\times\right]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

On définit à partir du développement ci-dessus le lagrangien

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[(v')^2 + \frac{z''}{z}v^2 - \partial_i v\partial^i v + \left(\mu_+'\right)^2 + \frac{a''}{a}\mu_+^2 - \partial_i\mu_+\partial^i\mu_+ + \left(\mu_\times'\right)^2 + \frac{a''}{a}\mu_\times^2 - \partial_i\mu_\times\partial^i\mu_\times\right]. \tag{4.19}$$

La perturbation de l'action à l'ordre deux fait donc intervenir l'action de trois champ scalaires libres avec masses variables. Dans le régime où $z''/z \ll k^2$ cette équation s'identifie à celle de trois champs scalaires libres dans un espace de Minkowski. Nous allons donc appliquer la procédure standard de quantification en s'assurant de retrouver cette limite. Nous promouvons v au rang d'opérateur [2] selon

$$\hat{v}(\eta,\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{k}\left[\hat{a}_\mathbf{k}v_\mathbf{k}(\eta)\exp(\mathrm{i}\mathbf{k}.\mathbf{x}) + \hat{a}_\mathbf{k}^\dagger v_\mathbf{k}^*(\eta)\exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}.\mathbf{x})\right] \tag{4.20}$$

2. Nous travaillons en représentation de Heisenberg.

où les fonctions $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ satisfont

$$v_{\mathbf{k}} + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right) v_{\mathbf{k}} = 0\,. \tag{4.21}$$

Le champ conjugué à $v(\eta,\mathbf{x})$ est $\pi(\eta,\mathbf{x}) = \frac{\delta\mathcal{L}^{(2)}}{\delta v} = v'(\eta,\mathbf{x})$, et il est aussi promu au rang d'opérateur de manière similaire. On impose donc les relations de commutation

$$[\hat{v}(\eta,\mathbf{x}),\hat{\pi}(\eta,\mathbf{x}')] = \mathrm{i}\delta^3_{\mathrm{D}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{4.22}$$

En imposant les relations standards sur les opérateurs de création et d'annihilation

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}},\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}] = \delta^3_{\mathrm{D}}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,, \tag{4.23}$$

cela implique que les fonctions $v_{\mathbf{k}}(\eta)$ doivent être normalisées selon

$$v_{\mathbf{k}}(\eta)v^{*\prime}_{\mathbf{k}}(\eta) - v^*_{\mathbf{k}}(\eta)v'_{\mathbf{k}}(\eta) = \mathrm{i}\,. \tag{4.24}$$

Puisque l'on souhaite retrouver la limite du vide d'un espace de Minkowski lorsque $z''/z \ll k^2$, qui est équivalente à $k\eta \to -\infty$, alors on impose dans cette limite [3]

$$v_{\mathbf{k}}(\eta) \to \frac{1}{\sqrt{2k}}\exp\left(-\mathrm{i}k\eta\right)\,. \tag{4.25}$$

En définissant le Hamiltonien [4] par une transformation de Legendre selon

$$H(\eta) \equiv \int \mathcal{H}\mathrm{d}^3\mathbf{x} \equiv \int \left(v'\pi - \mathcal{L}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,, \tag{4.26}$$

ainsi que $H^{(2)}$ associé, alors l'équation d'évolution (4.21) des modes $v_{\mathbf{k}}$ prend la forme d'équations d'Heisenberg

$$\hat{v}' = \mathrm{i}[\hat{H}^{(2)}(\eta),\hat{v}], \qquad \hat{\pi}' = \mathrm{i}[\hat{H}^{(2)}(\eta),\hat{\pi}]. \tag{4.27}$$

On applique une procédure similaire pour quantifier μ_+ et $\mu_\times$ et les évolutions de modes $\mu_{+,\mathbf{k}}$ et $\mu_{\times,\mathbf{k}}$ doivent satisfaire

$$\mu_{\mathbf{k}} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\mu_{\mathbf{k}} = 0\,. \tag{4.28}$$

Une fois sur l'attracteur de roulement lent, on peut montrer que $\epsilon'/\mathcal{H} = \mathcal{O}(\epsilon^2,\delta^2,\epsilon\delta)$ et $\delta'/\mathcal{H} = \mathcal{O}(\epsilon^2,\delta^2,\delta\epsilon)$ si bien qu'au premier ordre dans ces paramètres de roulement lent [Lidsey *et al.* 97]

$$\frac{z''}{z} = \frac{2+6\epsilon-3\delta}{\eta^2}\,, \quad \frac{a''}{a} = \frac{2+3\epsilon}{\eta^2}\,, \quad z = a\frac{\sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{\kappa}}\,, \quad \mathcal{H} = aH = -\frac{(1+\epsilon)}{\eta}\,. \tag{4.29}$$

Toujours au premier ordre dans les paramètres de roulement lent, la solution de l'équation (4.21) qui satisfait à la condition (4.25) est

$$v_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2}H^{(1)}_{\nu_S}(-k\eta), \quad \text{avec} \quad \nu_S = 3/2 + 2\epsilon - \delta\,. \tag{4.30}$$

3. Ceci est équivalent à un choix du vide, c'est-à-dire un état $|0\rangle$ tel que $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$, $\forall\mathbf{k}$, dit vide de Bunch-Davies.

4. Nous utilisons la même lettre que pour la fonction de Hubble et il ne devrait pas y avoir de confusion possible d'après le contexte

De même pour les degrés de liberté tensoriels, la solution de l'équation (4.28) qui satisfait à la condition (4.25) est

$$\mu_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{\sqrt{-\pi\eta}}{2}H^{(1)}_{\nu_T}(-k\eta), \quad \text{avec} \quad \nu_T = 3/2 + \epsilon\,. \tag{4.31}$$

Les $H^{(1)}_\nu$ sont les fonctions de Hankel de première espèce. On remarque que la limite asymptotique des ces fonctions quand $k\eta \to -\infty$ implique que

$$\hat{\mathcal{Q}}(\eta,\mathbf{x}) \equiv \frac{\hat{v}(\eta,\mathbf{x})}{a} \sim \int \mathrm{d}^3\mathbf{k}\left[\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}\right]\exp\left(\mathrm{i}\mathbf{k}.\mathbf{x}\right)\frac{1}{k^{\nu_S}}\,. \tag{4.32}$$

Dans la limite super-Hubble, les observables que l'on pourra construire à partir de la perturbation du champ en jauge plate ($\mathcal{Q}$) vont commuter entre-elles et vont donc être interprétables comme des variables stochastiques. De plus, le fait que l'on ait quantifié la théorie libre implique que leur statistique est gaussienne, et il suffit de calculer le corrélateur à deux points pour la caractériser. On définit ainsi

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{\mathcal{Q}}_{\mathbf{k}}\hat{\mathcal{Q}}_{\mathbf{k}'}|0\rangle &\equiv \delta^3_{\mathrm{D}}\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\right)\frac{2\pi^2}{k^3}\mathcal{P}_{\mathcal{Q}}(k) \equiv \delta^3_{\mathrm{D}}\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\right)P_{\mathcal{Q}}(k) \\ \langle 0|\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}}\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}'}|0\rangle &\equiv \delta^3_{\mathrm{D}}\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\right)\frac{2\pi^2}{k^3}\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \equiv \delta^3_{\mathrm{D}}\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\right)P_{\mathcal{R}}(k).\end{aligned} \tag{4.33}$$

On obtient plus précisément

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{\kappa H^2}{8\pi^2\epsilon}\left(\frac{k}{aH}\right)^{2\delta-4\epsilon}\,, \tag{4.34}$$

c'est-à-dire

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{\kappa H^2}{4\epsilon k^3}\left(\frac{k}{aH}\right)^{2\delta-4\epsilon}\,. \tag{4.35}$$

La procédure de quantification pour les modes tensoriels amènera les mêmes conclusions avec $E_+/\sqrt{\kappa}$ et $E_\times/\sqrt{\kappa}$ à la place de $\mathcal{Q}$ et ν_T à la place ν_S. On définira donc

$$\langle 0|\hat{E}_{+,\mathbf{k}}\hat{E}_{+,\mathbf{k}'}|0\rangle = \langle 0|\hat{E}_{\times,\mathbf{k}}\hat{E}_{\times,\mathbf{k}'}|0\rangle \equiv \delta^3_{\mathrm{D}}\left(\mathbf{k}+\mathbf{k}'\right)\frac{2\pi^2}{k^3}\mathcal{P}_E(k)\,. \tag{4.36}$$

On déduit de (4.29) qu'à l'ordre le plus bas dans les paramètres de roulement lent $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{\kappa}{2\epsilon}\mathcal{P}_{\mathcal{Q}}(k)$, et donc

$$\mathcal{P}_E = 2\epsilon\mathcal{P}_{\mathcal{R}}\,. \tag{4.37}$$

Cependant la quantité qui caractérise les ondes gravitationnelles est non pas E, mais $2E$. On définira donc

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = 8\mathcal{P}_E, \tag{4.38}$$

un facteur 2 supplémentaire venant du fait que l'on veut rendre compte de la puissance dans les deux polarisations. On aura donc au final une relation entre les spectres de puissance des perturbations scalaires et tensorielles donnée par

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = 16\epsilon\mathcal{P}_{\mathcal{R}}. \tag{4.39}$$

De plus, on déduit des expressions de ν_S et ν_T en fonction des paramètres de roulement lent que l'indice spectral est donné par

$$\begin{aligned} n_S - 1 &\equiv \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_\mathcal{R}}{\mathrm{d}\ln(k)} = 2\delta - 4\epsilon \\ n_T &\equiv \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_T}{\mathrm{d}\ln(k)} = -2\epsilon\,. \end{aligned}$$

L'amplitude globale des fluctuations est dépendante de l'échelle d'inflation c'est-à-dire de la valeur de H pendant l'inflation, mais le rapport des amplitudes tensorielles et scalaires est directement lié au paramètre de roulement lent ϵ. On considérera ensuite que les fluctuations sont remplacées par des fluctuations classiques d'un champ stochastique dont les moyennes d'ensembles $\langle \ldots \rangle$ sont égales au moyennes des opérateurs correspondants dans le vides $\langle 0| \ldots |0\rangle$. On utilisera le fait que la perturbation de courbure en jauge comobile $\mathcal{R}$ est constante pour en déduire ses propriétés statistiques comme nous avons fait dans le chapitre 2. De plus, ce mécanisme prédit un spectre quasiment invariant d'échelle (si on néglige les paramètres de roulement lent) car $P(k) \sim k^{-3}$, ce qui est favorisé expérimentalement.

4.3 La variable de Mukhanov-Sasaki en formalisme 1+3 (article)

Jusqu'à présent, nous avons utilisé le formalisme basé sur les coordonnées afin de traiter les perturbations pendant l'inflation. On peut néanmoins s'interroger sur son équivalent dans le formalisme 1+3. Un premier problème apparent vient du fait que les perturbations des quantités scalaires X dans le formalisme en coordonnées sont remplacées par des gradients spatiaux $D_\mu X$. De plus, le formalisme $1+3$ ne fait pas référence explicitement à un espace de fond. Ces deux différences essentielles font qu'il n'apparaît pas de méthode simple pour donner un sens à une perturbation de l'action. L'action n'est pas un champ scalaire et en considérer le gradient spatial n'a pas de sens. On peut cependant tenter d'isoler les degrés de libertés canoniques dans le formalisme $1+3$ afin d'obtenir des prédictions quantitatives. On calquera alors la procédure de quantification sur l'approche en coordonnées. Ceci est l'objet de l'article qui suit.

Deuxième partie

Dynamique au delà de l'approximation linéaire et non-gaussianité

La théorie des perturbations linéaires cesse d'être pertinente lorsque les perturbations ne sont plus infinitésimales, c'est-à-dire pour $\delta \sim 1$, puisqu'alors la dynamique non-linéaire domine. L'étude de la formation des structures nécessite donc d'aller au delà de la théorie linéaire. Cependant dans le cadre de la relativité générale ceci est très rapidement difficile. En effet la nature intrinsèquement non-linéaire émerge dès que nous étudions les perturbations au second ordre. Une solution consiste à tirer parti du fait que nous n'avons besoin du régime non-linéaire que lorsque les structures se forment, c'est-à-dire pour de modes sub-Hubble. Or dans cette limite la théorie de Newton est une très bonne approximation de la relativité générale. On utilise donc cette théorie simplifiée afin de pousser la résolution des équations plus loin. En étudiant systématiquement la dynamique des modes croissants on peut développer un formalisme inspiré des diagrammes de Feynmann permettant de décrire de manière statistique les perturbations de densité et de vitesse. Ce formalisme est expliqué exhaustivement dans [Bernardeau *et al.* 02]. Observationnellement ces statistiques sont réalisées sur les catalogues de galaxies. Cependant ce formalisme cesse d'être pertinent lorsque l'on souhaite étudier les perturbation du fond diffus au delà de l'ordre linéaire. Tout d'abord il est inadapté car les modes d'intérêt pour le fond diffus ne sont pas nécessairement sub-Hubble au moment du découplage et donc on ne peut utiliser l'approximation Newtonienne. En étudiant plutôt la relativité générale au premier ordre non-linéaire, c'est-à-dire au second ordre on capturera donc sa nature non-linéaire tout en limitant au plus les complications analytiques. Dans le chapitre 5 nous détaillerons comment la théorie des perturbations linéaires peut être étendue au second ordre. La compréhension des phénomènes non-linéaires permettra donc soit de valider la relativité générale au delà de son approximation linéaire ou bien de remonter aux condition initiales non-linéaires loin dans l'ère de radiation. L'un ne s'envisage pas sans l'autre sauf si l'on montre que ces deux aspects correspondent à des échelles bien distinctes. Nous avons vu dans le chapitre 4 que les prédictions de l'inflation à l'ordre linéaire sont relativement génériques. Les différents modèles doivent prédire un spectre quasiment invariant d'échelle car celui-ci est favorisé observationnellement et ne vont se distinguer essentiellement que dans la déviation légère à ce spectre (l'indice spectral). On ne dispose donc que de très peu de marge pour éliminer ou valider les différents modèles. Cependant si l'on s'intéresse à la dynamique non-linéaire, alors des différences notoires vont émerger. On caractérise essentiellement les conditions initiales non-linéaire à la fin de l'inflation par un paramètre noté $f_{\rm NL}$ (voir la section 7.8 pour la définition mathématique). Ce paramètre permet de caractériser le caractère non-gaussien des perturbations de courbure comobile à la fin de l'inflation. D'après le théorème de Wick, un champ est gaussien $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ si les moyennes stochastiques des corrélations de ce champ en un ensemble de points $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n$ satisfont

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(\mathbf{x}_1) \dots \mathcal{R}(\mathbf{x}_{2p+1}) \rangle &= 0\,, \\ \langle \mathcal{R}(\mathbf{x}_1) \dots \mathcal{R}(\mathbf{x}_{2p}) \rangle &= \sum_{\substack{\text{partitions} \\ \text{par paires}}} \prod_{\substack{\text{paires} \\ (i,j)}} \langle \mathcal{R}(\mathbf{x}_i) \mathcal{R}(\mathbf{x}_j) \rangle\,. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Nous constatons donc qu'un champ gaussien est caractérisé par les corrélations à deux points, c'est-à-dire en espace de Fourier par le spectre de puissance. La déviation la plus immédiate est donc donnée par les corrélations à trois points, appelée bispectre en espace de Fourier, et nous verrons comment le paramètre $f_{\rm NL}$ y est relié. Nous avons vu qu'au premier ordre les champs étaient gaussiens, et l'évolution linéaire n'altère pas cette propriété. Seuls des effets non-linéaires permettent de générer un bispectre non-nul. Ces effets peuvent avoir lieu pendant l'inflation ou

après. On parlera alors soit de non-gaussiannité primordiale ou alors de non-gaussianité générée par l'évolution. On montre que l'inflation chaotique à un champ présentée au chapitre 4 prédit un taux très faible de non-gaussianité, c'est-à-dire $f_{\rm NL} \ll 1$. Les modèles d'inflation prédisant des taux plus significatifs de non-gaussianité font donc en général intervenir plusieurs champs et ne prédisent pas alors des conditions initiales adiabatiques au début de l'ère de radiation. Quant à la non-gaussianité due à l'évolution, elle provient à la fois de la dynamique non-linéaire de la perturbation de courbure comobile et du fait que les observables (la température du fond diffus essentiellement) y sont reliées non-linéairement. Nous aborderons les prédictions de non-gaussianité de l'inflation à un champ dans le chapitre 7.

Un autre problème du modèle standard réside dans le principe cosmologique. En effet, celui-ci est postulé mais nullement démontré. En principe le mécanisme de l'inflation donne une explication satisfaisante puisqu'on peut montrer que pendant la phase d'inflation toutes les anisotropies sont effacées et que l'univers a été homogénéisé pendant cette période. Néanmoins, nous avons dû considérer que l'univers était asymptotiquement ($t \to 0$) isotrope et homogène afin de pouvoir quantifier les perturbations. Une autre voie pour étendre le modèle standard consiste non pas à raffiner les perturbations en dépassant la théorie des perturbations linéaires, mais plutôt à étudier des espaces de fond plus généraux ainsi que la cosmologie qui s'en suit afin d'obtenir des contraintes expérimentales sur le principe cosmologique. Nous avons pour cela étudié les espaces anisotropes et nous présenterons les résultats obtenus dans la partie III.

Chapitre 5

La théorie des perturbations dans le régime non-linéaire

Sommaire

5.1 Problématique 63
5.2 La théorie des perturbations : tenseurs et fonction de distribution (article) 66
5.3 Traitement informatique des perturbations 66
5.3.1 xAct 66
5.3.2 Algorithme de perturbation 67
5.3.3 Un exemple simple : la perturbation au premier ordre du scalaire de Ricci 71

5.1 Problématique

Lorsque nous avons perturbé la métrique (2.11), nous avons utilisé seulement six des dix degrés de liberté. Ceci se justifie par la notion de choix de jauge. Pour pouvoir parler de perturbation, il faut établir une relation entre espace de fond et espace perturbé. Cette relation entre espace physique et espace de fond correspond à un choix de jauge. Pour cela, on plonge l'espace physique $\mathcal{M}_{\rm phys}$ et l'espace de fond $\mathcal{M}_0$ dans un juxtaposition d'espace-temps. Mathématiquement on considère un espace produit

$$\mathcal{N} \equiv \mathcal{M} \times [0,1] \quad \text{avec} \quad (\mathcal{M},0) = \mathcal{M}_0 \quad (\mathcal{M},1) = \mathcal{M}_{\rm phys}. \tag{5.1}$$

Comme $[0,1]$ possède une structure de variété différentielle canonique, $\mathcal{N}$ est une variété différentielle à cinq dimensions. On utilise alors un champ de vecteur X (sur $\mathcal{N}$) normal à tous les espace-temps quadridimensionnels $(\mathcal{M},\lambda)$, c'est-à-dire tel que la cinquième coordonnée soit non-nulle, afin d'identifier les points de l'espace physique et de l'espace de fond ainsi que de tous les espaces intermédiaires de cette construction. En effet ce champ de vecteur définit des courbes intégrales et chaque courbe intégrale passe par un point et un seul pour chaque $(\mathcal{M},\lambda)$. Si de plus $X^4 = 1$, alors les courbes intégrales de X permettent de mettre en relation tous les

espace-temps entre eux, notamment l'espace de fond et l'espace physique. On parle alors d'un choix de jauge. Un champ vectoriel satisfaisant ces propriétés n'est pas unique si bien que l'on a une liberté dans l'identification des points des différents espace-temps. Il s'agit de la liberté de jauge. Un changement de jauge, c'est-à-dire le choix d'un champ Y plutôt que X pour identifier les points des espace-temps est intrinsèquement différent d'un changement de coordonnées. En effet sa signification est *géométrique* et ne dépend donc pas du choix des coordonnées. On présente sur la figure 5.1 deux choix de jauge possibles pour identifier les points d'un espace-temps de fond et ceux de l'espace-temps physique, représentés en une dimension pour les besoins du schéma. Les deux jeux de coordonnées résultants sont également mentionnés et il va donc falloir savoir comment passer de l'un à l'autre. On remarque graphiquement que cela consiste à changer les coordonnées sur l'espace de fond tout en les maintenant sur l'espace physique. Ce changement de coordonnées va être construit à partir du champ $\xi = Y - X$. Il est très important de comprendre que cette situation est très différente d'un simple changement de coordonnées dans une même jauge. En effet, nous présentons sur la figure 5.2 un changement de coordonnées qui préserve le choix d'une jauge pour identifier les points, et nous voyons que les coordonnées sont changées sur tous les espaces de façon simultanée, ce qui n'est pas le cas pour un changement de jauge. Les quantités tensorielles vivant sur les espace-temps se transforment donc différemment selon que l'on change simplement les coordonnées ou que l'on change la jauge utilisée pour identifier les points d'espace-temps différents. Bien que le problème de la jauge soit plus général en physique, il revêt un caractère particulier en relativité générale du fait de l'absence d'espace de fond absolu.

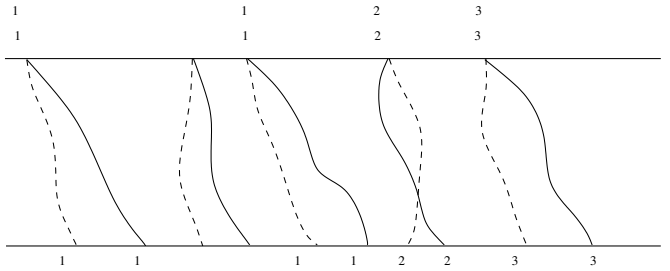

FIGURE 5.1 – Représentation schématique d'un changement de jauge. Deux champs de jauge (trait plein et tirets) sont représentés avec leur système de coordonnées corespondant ($\{x\}$ et $\{y\}$). On observe que le changement de jauge peut être interprété comme un changement de coordonnées uniquement sur l'espace de fond.

La jauge étant libre a priori, nous pouvons soit choisir une jauge en s'assurant qu'elle est fixée sans ambiguïté, soit travailler avec des variables invariantes de jauges. Nous allons voir que la méthode générale pour construire des variables invariantes de jauge implique qu'elles se réduisent dans une jauge donnée aux variables de perturbations que l'on aurait choisies en fixant initialement la jauge. Les équations satisfaites étant invariantes de jauge comme nous allons le voir, on est assuré que seules des quantités invariantes de jauge doivent intervenir. On peut donc travailler dans une jauge donnée et promouvoir dans les équations les variables de

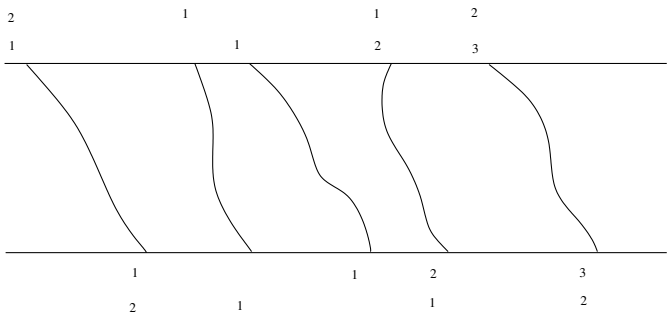

FIGURE 5.2 – Représentation schématique d'un changement de coordonnées. On change les coordonnées en même temps sur l'espace physique et sur l'espace de fond afin de conserver le choix du champ de jauge

perturbations dans une jauge donnée au rang de variables invariantes de jauge. C'est la démarche que nous avons adoptée. Les équations présentées dans la partie précédente (équation d'Einstein et équation de Boltzmann) ont été dérivées dans la jauge Newtonienne et sont en fait satisfaites par des variables invariantes de jauge qui se réduisent aux variables de perturbation en jauge Newtonienne. En effet la décomposition générale de la perturbation de la métrique n'est pas donnée par la décomposition (2.11) mais par

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= a^2(\eta)\left\{-(1+2\Phi)(\mathrm{d}\eta)_\mu(\mathrm{d}\eta)_\nu + (D_iB+B_i)(\mathrm{d}x^i)_\mu(\mathrm{d}\eta)_\nu + (D_iB+B_i)(\mathrm{d}x^i)_\nu(\mathrm{d}\eta)_\mu\right. \\ &\quad \left. + \left[(1-2\Psi)\gamma_{ij} + 2D_iD_jE + 2D_{(i}E_{j)} + 2E_{ij}\right](\mathrm{d}x^i)_\mu(\mathrm{d}x^j)_\nu\right\}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Lors d'un changement de jauge du premier ordre, si on décompose le champ ξ générant la transformation de coordonnées sur l'espace de fond en $\xi^\mu = (T, L^i + D^iL)$ avec $D_iL^i = 0$, alors les variables de perturbation de la métrique se transforment selon

$$\begin{aligned} \Phi &\to \Phi + T' + \mathcal{H}T, \\ \Psi &\to \Psi - \mathcal{H}T, \\ B &\to B - T + L', \\ E &\to E + L, \\ B^i &\to B^i + (L^i)', \\ E^i &\to E^i + L^i, \\ E_{ij} &\to E_{ij}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

On remarque alors que les quantités

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &\equiv \Phi + \mathcal{H}(B-E') + (B-E')', \\ \hat{\Psi} &\equiv \Psi - \mathcal{H}(B-E'), \\ \hat{\Phi}^i &\equiv B^i - (E^i)', \\ E_{ij}&, \end{aligned} \tag{5.4}$$

sont invariantes sous une transformation de jauge. Elles sont alors appelées variables invariantes de jauge. Si on dérive les équations d'Einstein en incluant toutes les variables de perturbation, on doit pouvoir faire disparaître les variables B E^i et E en introduisant $\hat{\Phi}$ $\hat{\Psi}$ et $\hat{\Phi}^i$, car le résultat doit être invariant de jauge. Dans le but de simplifier l'algèbre, on peut alors omettre dès le début les variables E B et E^i (fixer la jauge) puis identifier Ψ Φ et B^i avec $\hat{\Psi}$ $\hat{\Phi}$ et $\hat{\Phi}^i$ afin d'obtenir des équations invariantes de jauge. Nous présentons donc dans l'article qui suit la notion de jauge au delà de la théorie des perturbations linéaires, puis nous expliquons comment construire des variables invariantes de jauge, à la fois pour les tenseurs et pour les fonctions de distribution. La notion de jauge au delà de l'ordre linéaire a été explicitée dans [Bruni *et al.* 97] et la construction de variables invariantes de jauge pour les tenseurs à été complètement justifiée mathématiquement dans [Nakamura 07]. La construction d'une fonction de distribution invariante de jauge à l'ordre linéaire a été effectuée dans [Durrer & Straumann 88, Durrer 94]. Le travail pour les fonctions de distribution au delà de l'ordre linéaire constitue donc un travail entièrement nouveau. Il permet d'appliquer la même technique que pour les équations d'Einstein, c'est-à-dire de calculer dans une jauge donnée pour ensuite interpréter les équations de la théorie cinétique obtenues à l'ordre non-linéaire en termes de variables invariantes de jauge. Afin de faire le lien avec la description fluide, nous présentons également comment obtenir cette limite au delà de l'ordre linéaire.

5.2 La théorie des perturbations : tenseurs et fonction de distribution (article)

5.3 Traitement informatique des perturbations

5.3.1 xAct

Nous utilisons le paquet *xAct* [Martìn-Garcìa 04] spécialisé dans le calcul tensoriel formel. Ce package est une librairie à rajouter dans *Mathematica*. L'objectif ici n'est pas de décrire la syntaxe d'un tel paquet. Une documentation de plusieurs centaines de pages peut être trouvée sur le site où le package peut être téléchargé. Nous avons ici besoin de savoir qu'un tenseur de type $X^a_{\ b}$ est représenté par `X[a,-b]`, et que l'on dispose d'une fonction appelée `ToCanonical` qui permet de simplifier les expressions tensorielles équivalentes. Par exemple les expressions $A^\mu B_\mu$ et $A_\mu B^\mu$ sont équivalentes et il ne faut garder qu'un représentant de cette classe d'équivalence. La fonction `ToCanonical` remplacera donc $A^\mu B_\mu + A_\mu B^\mu$ par $2A^\mu B_\mu$. Pour commencer à travailler sur des quantités tensorielles, il faut commencer par définir une variété (`M4`) et sa métrique de signature négative (`gbar`) ainsi que la dérivée covariante associée (`CD`). Il s'agit pour nous de l'espace de fond et de la métrique de fond puisque toutes les quantités que nous allons définir (les variables de perturbations) vivent sur l'espace de fond. On définit également le jeu d'indices (`a,b,c,d`) utilisé pour les tenseurs.

```
DefManifold[M4,4,{a,b,c,d},ind];
DefMetric[-1,gbar[-a,-b],CD];
```

Automatiquement les tenseurs de Riemann (`RiemannCD`) de Ricci (`RicciCD`) le scalaire de Ricci (`RicciScalarCD`), le tenseur d'Einstein (`EinsteinCD`) et les symboles de Christoffel (`ChristoffelCD`) sont créés, ceci de façon formelle puisque la métrique n'est pas explicitée.

5.3.2 Algorithme de perturbation

On réalise ensuite les perturbations des tenseurs de Riemann, de Ricci et d'Einstein par la méthode de Palatini [Wald 84]. Nous suivons ici les méthodes exposées dans [Brizuela *et al.* 06]. On relie ces tenseurs associés à $\bar{g}_{\mu\nu}$ à ceux associés à $g_{\mu\nu} \equiv \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ en utilisant

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} &= \frac{g^{\rho\alpha}}{2}\left(\bar{\nabla}_\nu \delta g_{\alpha\sigma} + \bar{\nabla}_\sigma \delta g_{\nu\alpha} - \bar{\nabla}_\alpha \delta g_{\nu\sigma}\right) \\ \delta R_{\mu\nu} &= \bar{\nabla}_\alpha \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\nu \delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} - \delta\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} + \delta\Gamma^{\beta}_{\beta\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Puisque $[\bar{g}^{\mu\alpha} + \delta\left(g^{\mu\alpha}\right)]\,[\bar{g}_{\alpha\nu} + \delta g_{\alpha\nu}] = \delta^{\mu}_{\nu}$, on peut relier la perturbation de l'inverse de la métrique $\delta\left(g^{\mu\alpha}\right)$ à la perturbation de la métrique $\delta g_{\mu\nu}$ par

$$\delta\left(g^{\mu\nu}\right) = -\delta g^{\mu}_{\ \alpha}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-\delta g)^k\right]^{\alpha}_{\ \beta}\right]\bar{g}^{\beta\nu}\,, \quad \text{où} \quad \left[-\left(\delta g\right)^k\right]^{\alpha}_{\ \beta} \equiv (-1)^k \delta g^{\alpha}_{\ \lambda_1}\delta g^{\lambda_1}_{\ \lambda_2}\ldots\delta g^{\lambda_{k-1}}_{\ \beta}\,. \tag{5.6}$$

On rappelle que $(\delta g)^{\mu\nu} \neq \delta\left(g^{\mu\nu}\right)$ car les indices sont baissés et levés avec la métrique de fond $\bar{g}_{\mu\nu}$ ainsi que son inverse $\bar{g}^{\mu\nu}$. Dans les développements en perturbation d'une quantité X, on adopte comme évoqué dans la section 5.2, un développement ordre par ordre de la forme

$$\delta X = \sum_{k=1}^{\infty} l^k \frac{\delta^{(k)} X}{k!}\,. \tag{5.7}$$

Le paramètre l n'est là que pour pouvoir identifier l'ordre n à une puissance n de l. On prendra ensuite $l = 1$. On peut écrire des formules de perturbation générales en utilisant le concept de partition arrangée. Cela est particulièrement fructueux si l'on souhaite organiser le calcul de perturbations de manière recursive. L'ensemble des partition arrangées[1] $\{k_i\}_{m,n}$ est l'ensemble des 2^{n-1} combinaisons d'indices $k_1\ldots k_m$ positifs tels que $k_1 + \cdots + k_m = n$. Avec cette outil on peut récrire la perturbation à un ordre n de l'inverse de la métrique comme

$$\begin{aligned} \delta^{(n)}\left(g^{\mu\nu}\right) &= \sum_{\{k_i\}_{m,n}} \frac{n!\,(-1)^m}{k_1!\ldots k_m!}\delta^{(k_m)}g^{\mu}_{\ \alpha}\ \delta^{(k_{m-1})}g^{\alpha}_{\ \beta}\ldots\delta^{(k_2)}g^{\tau}_{\ \rho}\ \delta^{(k_1)}g^{\rho\nu}\,, \\ \delta^{(n)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \sum_{\{k_i\}_{m,n}} \frac{n!\,(-1)^{m+1}}{k_1!\ldots k_m!}\delta^{(k_m)}g^{\alpha}_{\ \beta}\ \delta^{(k_{m-1})}g^{\beta}_{\ \gamma}\ldots\delta^{(k_2)}g^{\tau\rho}\ \delta^{(k_1)}C_{\rho\mu\nu}\,, \\ \delta^{(n)}C_{\rho\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\bar{\nabla}_\mu\delta^{(n)}g_{\rho\nu} + \bar{\nabla}_\nu\delta^{(n)}g_{\mu\rho} - \bar{\nabla}_\rho\delta^{(n)}g_{\mu\nu}\right). \end{aligned} \tag{5.8}$$

La perturbation des symboles de Christoffel peut ensuite être utilisée dans l'équation (5.5) et

$$\delta^{(n)}R_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\alpha\delta^{(n)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\nu\delta^{(n)}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!k!}\left(-\delta^{(k)}\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}\delta^{(n-k)}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} + \delta^{(k)}\Gamma^{\beta}_{\beta\lambda}\delta^{(n-k)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right). \tag{5.9}$$

On construit ensuite en utilisant l'expression précédente les perturbations du tenseur d'Einstein. La mise en place de cette méthode se fait en utilisant la librairie *xPert* qui s'ajoute à *xAct*. Une fois chargée, on définit la perturbation de la métrique en définissant un paramètre de perturbation (l) qui servira à collecter les différents ordres de perturbation, puis on définit la perturbation de la métrique δg (`dg`).

1. Ceci n'a rien a voir avec les arrangements sur une partition.


```
DefParameter[l]
DefMetricPerturbation[gbar, dg, l]
```

Ceci crée automatiquement les différents ordres de perturbation de la métrique définis par la décomposition (5.7), c'est à dire un ensemble de tenseurs `dg[1,-a,-b]` `dg[2,-a,-b]`...Cela crée également de façon similaire les perturbations à chaque ordre des tenseurs de Riemann de Ricci et d'Einstein ainsi que ceux associés aux symboles de Christoffels, puis les met en relation avec la perturbation de la métrique en suivant les relations (5.8-5.9).

Une fois ces développements obtenus, il nous faut séparer les coordonnées d'espace des coordonnées de temps. Nous utilisons pour cela le formalisme $1+3$ sur l'espace de fond. Les observateurs comobiles de quadrivitesse $\bar{u}_\mu \equiv (\mathrm{d}t)_\mu$ suivent des géodésiques de l'espace de fond, c'est-à-dire que $\bar{a}_\mu = 0$. De plus, afin de pouvoir définir des surfaces orthogonales aux observateurs, ce flot est nécessairement irrotationnel, c'est-à-dire $\bar{\omega}_{\mu\nu} = 0$. On obtient donc

$$\bar{\nabla}_\mu\bar{u}_\nu = \bar{\nabla}_\nu\bar{u}_\mu = \bar{K}_{\mu\nu}\,. \tag{5.10}$$

On définit le champ de vecteur $\bar{u}_\mu$ sur la variété `M4`, que l'on normalise par $\bar{u}^\mu\bar{u}_\mu = -1$ en créant une règle automatique, ainsi que la métrique induite $\bar{h}_{\mu\nu}$ (`mspat`) par

```
DefTensor[u[a],{M4}]
AutomaticRules[u, MakeRule[{u[a] u[-a, -1}]]
DefMetric[1,mspat[-a,-b],cd,InducedFrom -> {gbar, u}]
```

Cela génère tous les tenseurs associés comme pour la métrique globale `gbar` mais avec les suffixes `CD` remplacés par `cd`. De plus cela génère automatiquement la courbure extrinsèque associée (`ExtrinsicKmspat`) et suppose implicitement que la vorticité est nulle ce qui fait que nous pouvons parler de sections spatiales. Cela génère également l'accélération a_μ (`Accelerationu`) et comme nous souhaitons que les observateurs de fond de quadrivitesse $\bar{u}_\mu$ soient en chute libre nous demandons

```
Accelerationu[a_?TangentM4`pmQ]=0;
```

D'après la définition de $K_{\mu\nu}$ (2.109), et la relation de Gauss-Codazzi (2.110), il suffit de choisir Θ et $\sigma_{\mu\nu}$ ainsi que le tenseur de Riemann associé à $\bar{h}_{\mu\nu}$ afin de caractériser l'espace-temps de fond. La méthode est pour l'instant générale et permet de considérer des espaces-temps plus généraux que des espaces de Friedmann-Lemaître sans coubure. Afin de simplifier les explications, nous nous restreignons pourtant à ce cas. Nous définissons donc le facteur d'échelle (`a`), le champ de Hubble $H = \Theta/3$ (`H`) et explicitons l'expression de la courbure extrinsèque par $K_{\mu\nu} = H\bar{h}_{\mu\nu}$ ainsi que le tenseur de Riemann des sections spatiales, c'est-à-dire associé à $\bar{h}_{\mu\nu}$.

```
DefTensor[a[], {M4}]
DefTensor[H[], {M4}]
ExtrinsicKmspat[a_?TangentM4`pmQ, b_?TangentM4`pmQ] = H[]mspat[a,b]
Riemanncd[a_?TangentM4`pmQ, b_?TangentM4`pmQ, c_?TangentM4`pmQ,
                                                d_?TangentM4`pmQ]=0
```

On relie ensuite le tenseur de Riemann associé à $\bar{g}_{\mu\nu}$ au tenseur de Riemann associé à $\bar{h}_{\mu\nu}$ en utilisant la relation de Gauss-Codazzi (2.110).

```
RuleRiemann = Flatten[{
MakeRule[{
RiemannCD[a_?TangentM4`pmQ, b_?TangentM4`pmQ, c_?TangentM4`pmQ,
                d_?TangentM4`pmQ]=Riemanncd[a,b,c,d]+...  }],
MakeRule[{
RicciCD[a_?TangentM4`pmQ, b_?TangentM4`pmQ]=Riccicd[a,b]+...  }],
MakeRule[{RicciCD[]=Riccicd[]+...  }],
}]
```

Il nous faut décomposer en 1+3 tous les tenseurs dont nous souhaitons calculer les perturbations. Nous nous intéresserons ainsi par exemple à la perturbation jusqu'au premier ordre de G_{00} ou bien la perturbation jusqu'au second ordre de G_{ij}, c'est-à-dire

$$\left(\bar{G}_{\mu\nu}+\delta^{(1)}G_{\mu\nu}\right)\bar{u}^{\mu}\bar{u}^{\nu}$$
$$\left(\bar{G}_{\alpha\beta}+\delta^{(1)}G_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\delta^{(2)}G_{\alpha\beta}\right)\bar{h}^{\alpha}{}_{\mu}\bar{h}^{\beta}{}_{\nu}. \tag{5.11}$$

```
Gdd00[]=ToGeneral[Perturbed[EinsteinCD[-a,-b,1]]u[a]u[b]//ToCanonical;
Gddij[-a_?TangentM4`pmQ, -b_?TangentM4`pmQ]=ToGeneral[Perturbed[
      EinsteinCD[-c, -d],2]] mspat[c, -a]] mspat[d, -b] //ToCanonical;
```

La fonction `ToCanonical` a ordonné dans les expressions précédentes les dérivées covariantes doubles et fait apparaître pour cela le tenseur de Riemann en utilisant les relations de commutation des dérivées covariantes. C'est la raison pour laquelle nous avons eu besoin de spécifier l'expression du tenseur de Riemann. Il nous reste à spécifier explicitement la forme de la perturbation de la métrique à tout ordre afin d'obtenir le développement perturbatif recherché. En toute généralité on peut décomposer la métrique perturbée en suivant la décomposition (5.2)

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu} \equiv\ & -2\Phi\bar{u}_{\mu}\bar{u}_{\nu}+2a\left(\bar{D}_{\alpha}B+B_{\alpha}-2\bar{K}_{\alpha\lambda}\bar{D}^{\lambda}E\right)\bar{u}_{(\nu}\bar{h}^{\alpha}{}_{\mu)}\\ & -2\Psi\frac{\bar{K}_{\mu\nu}}{H}+2a^{2}\bar{D}_{\mu}\bar{D}_{\nu}E+2a^{2}\bar{D}_{(\mu}E_{\nu)}+2a^{2}E_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{5.12}$$

avec

$$\bar{D}_{\mu}a=0,\quad \bar{D}^{\mu}E_{\mu\nu}=0,\quad E^{\mu}{}_{\mu}=0,\quad \bar{D}^{\mu}E_{\mu}=0,\quad \bar{D}^{\mu}B_{\mu=0}. \tag{5.13}$$

Nous justifierons dans le chapitre 8 pourquoi cette décomposition est très générale en expliquant en détail son intérêt. On rappelle que les indices sont levés et baissés avec la métrique $\bar{g}_{\mu\nu}$. Si l'on souhaite travailler dans la jauge Newtonienne en négligeant de plus les quantités vectorielles, alors on suppose de plus que $B=E=0$ et $B_{\mu}=E_{\mu}=0$. C'est le choix que nous faisons ici et nous définissons donc les champs de perturbations scalaires Ψ (`Psi`), Φ (`Phi`) et E_{ij} (`Et`) avec leurs propriétés. Nous les utilisons ensuite pour expliciter l'expression de la perturbation de la métrique, en nous restreignant ici par soucis de simplicité au premier ordre.

```
DefTensor[Psi[],{M4}]
DefTensor[Phi[],{M4}]
DefTensor[Et[-a,-b],{M4},Symmetric[{-a,-b}],OrthogonalTo -> {u[a],u[b]},
ProjectedWith -> {mspat[a,-c],mspat[b,-c]}]
```



```
dg[LI[1], a_?TangentM4`pmQ, b_?TangentM4`pmQ] :=
-2 Phi[]u[a]u[b] -2 Psi[]ExtrinsicKmspat[a,b]/H[] +2 a[]^2 Et[a,b]
```

D'après les expressions (5.8,5.9), les perturbations des tenseurs de Ricci, d'Einstein, et des symboles de Christoffel ne font intervenir au final que des dérivées covariantes de fond des perturbations de métrique. D'après l'expression (5.12), on constate qu'il va falloir connaître les dérivées covariantes des variables de perturbations Φ, Ψ et $E_{\mu\nu}$ ainsi que celles de $\bar{u}_{\mu}$ et $\bar{h}_{\mu\nu}$. Comme $\bar{h}_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}+\bar{u}_{\mu}\bar{u}_{\nu}$ et $\bar{\nabla}_{\alpha}\bar{g}_{\mu\nu}=0$, il suffit de connaître la dérivée covariant de $\bar{u}_{\mu}$ pour connaître celles de $\bar{h}_{\mu\nu}$. Or ceci est donné par la courbure extrinsèque $\bar{K}_{\mu\nu}=H\bar{h}_{\mu\nu}$ grâce à la relation (5.10). On définit donc la règle suivante qui permet de faire apparaître u_{μ} plutôt que $h_{\mu\nu}$.

```
Rulemspattogbar = Makerule[{
mspat[a_?TangentM4`pmQ, b_?TangentM4`pmQ],gbar[a,b]+u[a]u[b]
}]
```

A ce stade du calcul nous avons des expressions faisant intervenir des dérivées covariantes ($\bar{\nabla}_{\mu}$) de Φ, Ψ et E_{ab} ainsi que de a et H. En utilisant le fait que a et H sont constants sur les sections spatiales, on transforme les dérivées covariantes de a et H en dérivées directionnelles puisque $\bar{\nabla}_{\mu}a=-aH\bar{u}_{\mu}$ et $\bar{\nabla}_{\mu}H=-\bar{u}_{\mu}\dot{H}$. En ce qui concerne Φ Ψ et E_{ab} il nous faut séparer les variations spatiales des variations temporelles des variables de perturbations, on réalisera une projection $1+3$ des dérivées covariantes. On utilisera donc les formules de projections $1+3$ suivantes qui sont restreintes au cas $\bar{\omega}_{\mu\nu}=0$ $\bar{a}_{\mu}=0$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\alpha}S &= -u_{\alpha}\dot{S}+\bar{D}_{\alpha}S\\ \bar{\nabla}_{\alpha}\bar{D}_{\beta}S &= \bar{D}_{\alpha}\bar{D}_{\beta}S-\bar{u}_{\alpha}\bar{D}_{\beta}\dot{S}+2\bar{K}_{\gamma(\alpha}\bar{u}_{\beta)}\bar{D}^{\gamma}S\\ \bar{\nabla}_{\alpha}\bar{\nabla}_{\beta}S &= u_{\alpha}u_{\beta}\ddot{S}+\bar{D}_{\alpha}\bar{D}_{\beta}S+2\bar{K}_{\gamma(\alpha}\bar{u}_{\beta)}\bar{D}^{\gamma}S-2\bar{u}_{(\alpha}\bar{D}_{\beta)}\dot{S}-\bar{K}_{\alpha\beta}\dot{S}\\ \bar{\nabla}_{\alpha}T_{\mu\nu} &= -u_{\alpha}\dot{T}_{\mu\nu}+\bar{D}_{\alpha}T_{\mu\nu}+2\bar{K}_{\alpha\lambda}T^{\lambda}{}_{(\nu}\bar{u}_{\mu)}\\ \bar{\nabla}_{\alpha}\bar{D}_{\beta}T_{\mu\nu} &= \bar{D}_{\alpha}\bar{D}_{\beta}T_{\mu\nu}-\bar{u}_{\alpha}\bar{D}_{\beta}\dot{T}_{\mu\nu}+2\bar{K}_{\gamma(\alpha}\bar{u}_{\beta)}\bar{D}^{\gamma}T_{\mu\nu}+2\bar{K}_{\alpha}{}^{\gamma}\bar{D}_{\beta}T_{\gamma(\mu}\bar{u}_{\nu)}\,.\end{aligned} \tag{5.14}$$

On créera donc des champs de tenseurs correspondant à $\dot{H}$, $\dot{\Psi}$, $\ddot{\Psi}$, $\dot{\Phi}$, et $\ddot{\Phi}$ puis une règle de remplacement qui permettra de mettre en place les décomposition $1+3$ précédentes. De plus, le facteur d'échelle et le paramètre de Hubble sont constants sur les sections spatiales. Nous utiliserons donc le fait que $\bar{D}_{\mu}a=\bar{D}_{\mu}H=0$.

```
DefTensor[Hp[],{M4}]
DefTensor[Psip[],{M4}]
DefTensor[Psip2[],{M4}]
DefTensor[Phip[],{M4}]
DefTensor[Phip2[],{M4}]
```

```
RuleNabla = Flatten[{
  MakeRule[{CD[b][a[]], -a[]H[]u[b] }],
  MakeRule[{CD[b][H[]], -Hp[]u[b] }],
  MakeRule[{CD[b][Psi[]], -Psip[]u[b] +cd[b][Psi[]] }],
  MakeRule[{CD[b][Phi[]], -Phip[]u[b] +cd[b][Phi[]] }],
  MakeRule[{CD[a]CD[b][Psi[]], Psip2[]u[a]u[b] +cd[a][cd[b][Psi[]]]
     -ExtrinsicKmspat[ab]Psip[] + ... }],
```

```
...
                                }]
```

Nous souhaitons ensuite pouvoir interpréter les résultats en termes de dérivées ordinaires. Les dérivées spatiales ($\bar{D}_\mu$) vont correspondre à des dérivées ordinaires spatiales dans le cas plat. En revanche la dérivée directionnelle $\bar{u}^\mu\bar{\nabla}_\mu$ ne correspond pas à une dérivée par rapport à la coordonnée de temps si la quantité dérivée n'est pas un scalaire. Il faudra alors utiliser une dérivée de Lie, afin d'utiliser la propriété (2.114). On utilisera donc les relations

$$\dot{T}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\bar{u}}T_{\mu\nu} - 2K_{\alpha(\mu}T^{\alpha}{}_{\nu)} \tag{5.15}$$

$$\ddot{T}_{\mu\nu} = \mathcal{L}^2_{\bar{u}}T_{\mu\nu} - 4\mathcal{L}_{\bar{u}}T_{\alpha(\mu}\bar{K}^{\alpha}{}_{\nu)} + 2T^{\alpha\beta}\bar{K}_{\alpha\mu}\bar{K}_{\beta\nu} + 2T_{\alpha(\mu}\bar{K}_{\nu)\beta}\bar{K}^{\alpha\beta} - 2T^{\alpha}{}_{(\mu}\dot{\bar{K}}_{\nu)\alpha}, \tag{5.16}$$

et on définira une liste de règles de remplacement correspondante pour E_{ab} puisqu'il s'agit de la seule quantité tensorielle.

```
RuleToLie = Flatten[{
MakeRule[{u[a]CD[-a][Et[-b,-c]],LieD[u[ind]][Et[-b,-c]]
-ExtrinsicKmspat[-d,-b]Et[d,-c]-ExtrinsicKmspat[-d,-c]Et[d,-b]  }],
.....
                          ]}
```

Une fois appliquées ces règles, toutes les dérivées covariantes auront été projetées en $1+3$ si bien que l'on obtiendra les perturbations des quantités recherchées en termes de dérivées spatiales ($\bar{D}_\mu$) sur les variables de perturbation de la métrique, ainsi qu'en termes de dérivées directionnelles selon $\bar{u}_\mu$ pour les scalaires a H Φ et Ψ, ou de dérivées de Lie selon $\bar{u}_\mu$ pour le tenseur E_{ab}. Toutes ces dérivées correspondent à des dérivées ordinaires, et l'on obtient le résultat recherché.

Si l'on ne souhaite pas que les sections spatiales soient plates, alors il faudra utiliser l'équation (1.2) pour spécifier le tenseur de Riemann des sections spatiales. Les dérivées spatiales ($\bar{D}_\mu$) correspondront alors à des dérivées covariantes associées à $\bar{h}_{\mu\nu}$. Si on souhaite de plus que l'espace puisse être anisotrope alors il faudra tenir compte de $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ dans l'expression du tenseur de courbure extrinsèque. Pour un espace de Bianchi de type I (voir partie III) le tenseur de Riemann des sections spatiales est nul, tandis qu'il faudra l'exprimer en fonction des constantes de structures de l'espace de Bianchi considéré [Ellis & MacCallum 69] pour le cas général. En appliquant la méthode décrite précédemment, la seule différence sera l'expression de la courbure extrinsèque, et ses dérivées directionnelles feront apparaître en plus des dérivées directionnelles selon $\bar{u}_\mu$ du cisaillement $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$. On utilisera alors a profit la relation

$$\dot{\bar{\sigma}}^{\mu}{}_{\nu} = \mathcal{L}_{\bar{u}}\bar{\sigma}^{\mu}{}_{\nu}, \tag{5.17}$$

pour pouvoir interpréter les résultats en termes de dérivées ordinaires par rapport à la coordonnée temporelle. Nous avons utilisé cette méthode afin de calculer tous les développements au second ordre de cette thèse dans le cas homogène et isotrope ainsi que dans le cas d'un espace de Bianchi I dans le partie III.

5.3.3 Un exemple simple : la perturbation au premier ordre du scalaire de Ricci

Jusqu'à présent nous n'avons présenté que la mise en place de l'algorithme en définissant les quantités tensorielles nécessaires, ainsi que des règles de remplacement permettant de mettre en

forme les quantités perturbées recherchées. Afin de rendre l'explication plus visuelle, nous allons décrire les étapes principales de l'algorithme pour le cas le plus simple, celui de $R^{(1)}$ pour le cas de perturbations scalaires. On suppose que toutes les champs nécessaires ont été définis ainsi que les règles de remplacement nécessaires, mais que la forme de la métrique perturbée n'a pas été explicitée. On commence par définir la quantité que l'on souhaite perturber et qui va être exprimée en fonction de la perturbation de la métrique.

```
R1[] = ToGeneral[Perturbed[RicciScalarCD[1]]//ToCanonical
```

Il est possible de préciser pour toutes les quantités une forme affichée qui sera lisible. On demandera donc que `CD` soit formaté en $\bar{\nabla}$, `Psi` en Ψ, et ainsi de suite. Le résultat de l'affectation précédente renvoie donc un résultat de la forme suivante.

$$\bar{R} + l\left(-\delta g^{(1)}_{ab}\bar{R}^{ab} + \bar{\nabla}^b\bar{\nabla}^a\delta g^{(1)}_{ab} - \bar{\nabla}^b\bar{\nabla}_b\delta g^{(1)a}_{a}\right)$$

On spécifie ensuite la métrique perturbée en nous restreignant à des perturbations scalaires.

```
dg[LI[1], a_?TangentM4`pmQ, b_?TangentM4`pmQ] :=
-2 Phi[]u[a]u[b] -2 Psi[]ExtrinsicKmspat[a,b]/H[]
```

$$-2u_au_b\Phi - 2\Psi(g_{ab} + u_au_b)$$

Une fois le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci remplacés, la quantité recherchée prend alors une forme développée qu'il faudra simplifier.

```
Collect[ContractMetric[R1[]/.RuleRiemann]/.Rulemspattogbar// ToCanonical, l]
```

$$\begin{aligned}&12H^2 + 6\dot{H}\\ &+l\Big[-6\dot{H}\Phi - 6H^2\Phi + 18H^2\Psi + 6\dot{H}\Psi - 2\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^a\Phi + 4\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^a\Psi\\ &\quad -2\Phi u^a\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b u^b - 2\Psi u^a\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b u^b - 2\Phi(\bar{\nabla}_a u^a)\bar{\nabla}_b u^b - 2\Psi(\bar{\nabla}_a u^a)\bar{\nabla}_b u^b\\ &\quad -4u^a(\bar{\nabla}_a u^b)\bar{\nabla}_b\Psi - 4u^a(\bar{\nabla}_a u^b)\bar{\nabla}_b\Phi - 2\Phi u^a\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a u^b - 2\Psi u^a\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a u^b - 4u^a(\bar{\nabla}_a\Psi)\bar{\nabla}_b u^b\\ &\quad -2u^au^b\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a\Psi - 2u^au^b\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a\Phi - 2\Phi(\bar{\nabla}_a u^b)\bar{\nabla}_b u^a - 2\Psi(\bar{\nabla}_a u^b)\bar{\nabla}_b u^a - 4u^a(\bar{\nabla}_a\Phi)\bar{\nabla}_b u^b\Big]\end{aligned}$$

On transforme les termes du type $\bar{\nabla}_a u_b$ en utilisant le fait qu'ils sont égaux à la courbure extrinsèque. Ceci est réalisé grâce à la fonction `GradNormalToExtrinsicK` qui est fournie par *xAct*.

```
ContractMetric[%//GradNormalToExtrinsicK]
/.Rulemspattogbar//GradNormalToExtrinsicK;
Collect[% // ToCanonical, l]
```

$$\begin{aligned}&12H^2 + 6\dot{H}\\ &+l\Big[-6\dot{H}\Phi - 6H^2\Phi + 18H^2\Psi + 6\dot{H}\Psi - 2\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^a\Phi + 4\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}^a\Psi - 6H\Phi u^b\bar{\nabla}_b H\\ &\quad -6H\Psi u^b\bar{\nabla}_b H + 12Hu^a\bar{\nabla}_a\Phi + 12Hu^a\bar{\nabla}_a\Psi - 2u^au^b\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a\Psi - 2u^au^b\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_a\Phi\Big]\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à réaliser la projection en $1+3$ des dérivées covariantes grâce à la fonction `RuleNabla`.

```
Collect[%//.RuleNabla//ToCanonical,l]
```

$$12H^2 + 6\dot{H} + l\left[-12\dot{H}\Phi - 24H^2\Phi - 6H\dot{\Psi} - 24H\dot{\Psi} - 6\ddot{\Psi} - 2\bar{D}_a\bar{D}^a\Phi + 4\bar{D}_a\bar{D}^a\Psi\right]$$

Comme nous n'avons pas de quantité tensorielle, ceci parce que nous ne les avons pas considérées dans cet exemple mais aussi parce qu'on montre qu'elles n'interviennent pas dans $R^{(1)}$ si on les prend en compte, toutes les dérivées directionnelles s'identifient à des dérivées par rapport au temps cosmique. On peut ensuite, si on le désire, exprimer le résultat en temps conforme, ce qui revient à considérer des dérivées dans la direction du quadrivecteur au_μ plutôt que u_μ [Pitrou & Uzan 07].

Chapitre 6

Dynamique au second ordre

Sommaire

6.1 État des lieux 75
6.2 Approximation fluide 76
6.2.1 Équations d'évolution des perturbations 76
6.2.2 Loi de conservation 78
6.2.3 Ère de radiation 79
6.2.4 Ère de matière 82
6.2.5 Transition radiation-matière 83
6.2.6 Intéractions baryons-photons 85
6.2.7 Physique du fond diffus cosmologique 85
6.3 Théorie cinétique au second ordre 87
6.3.1 Équation des géodésiques 87
6.3.2 Terme de Liouville 88
6.3.3 Hiérarchie de Boltzmann et lien avec les observations 89
6.3.4 Limite fluide de l'équation de Boltzmann 90

6.1 État des lieux

Lors que j'ai débuté ma thèse en 2005, l'étude de la dynamique des perturbations au second ordre était essentiellement réalisée pour des échelles super-Hubble [Bartolo *et al.* 04b], dans l'approximation fluide, pour un univers dominé soit par la matière soit par la radiation, ou pour des échelles sub-Hubble dans le régime Newtonien [Bernardeau *et al.* 02]. La construction de quantités conservées ainsi que leur utilisation venait d'être réalisée en généralisant les résultats du premier ordre [Malik & Wands 04, Vernizzi 05] de manière perturbative, puis cette procédure a éte étendue à tous les ordres au cours de ma thèse [Rigopoulos & Shellard 03, Lyth *et al.* 05, Langlois & Vernizzi 05, Enqvist *et al.* 07]. Je me suis donc intéressé à la dynamique lorsque les modes deviennent sub-Hubble, pendant l'ère de radiation puis pendant l'ère de matière. Ensuite je me suis concentré plus particulièrement sur la transition entre les deux, toujours dans l'approximation fluide, en étudiant plus précisément

les oscillations baryoniques au second ordre dans le but de comprendre les effets non-linéaires sur la surface de dernière diffusion . Par ailleurs la théorie cinétique, qui permet de décrire correctement la radiation et les baryons et de justifier rigoureusement le terme de collision entre les baryons et les photons, n'avait pas été étudiée au second ordre. Des travaux on été réalisés sur ce sujet au cours de ma thèse [Bartolo *et al.* 06, Bartolo *et al.* 07], et je me suis basé sur cette étude pour en approfondir les fondements théoriques. Une fois décomposée en multipôles, l'équation de Boltzmann fait intervenir une infinité (pour chaque ℓ) d'équations toutes couplées entre elles. La résolution numérique n'est donc pas aisée et ceci justifie l'utilisation de l'approximation fluide que nous exposons dans ce chapitre, dont le but est d'extraire le comportement dominant des solutions. Cette étude permet d'entrevoir les sources de non-gaussianité dues à l'évolution non-linéaire des perturbations, qui viennent s'ajouter à la non-gaussianité primordiale déterminant les conditions initiales. Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons alors plus particulièrement à la non-gaussianité primordiale dans le cas de l'inflation à un champ.

6.2 Approximation fluide

6.2.1 Équations d'évolution des perturbations

Comme nous l'avons déjà indiqué, toutes les quantités perturbées sont décomposées en ordre de perturbation selon la relation (2.17). Les perturbations du tenseur d'Einstein et du tenseur énergie-impulsion correspondant à la métrique (2.11) sont rapportées dans l'appendice B. Les équations peuvent être écrites ordre par ordre, et nous utiliserons la notation compacte

$$\mathcal{E}[\delta g, \delta T] = \mathcal{S}[\delta g, \delta T]. \tag{6.1}$$

Cela signifie que ordre par ordre, elle se lit

$$\mathcal{E}[\delta^{(1)} g, \delta^{(1)} T] = 0, \quad \mathcal{E}[\delta^{(2)} g, \delta^{(2)} T] = \mathcal{S}[\delta^{(1)} g, \delta^{(1)} T], \tag{6.2}$$

car les variables de second ordre satisfont les mêmes équations linéaires $\mathcal{E}$ que les variables du premier ordre, mais avec un terme de source $\mathcal{S}$ quadratique dans les variables de premier ordre.

Dans les équations présentées ci-dessous, nous ne considérons que les modes scalaires dans les termes de source des équation du second ordre. Nous avons vu en effet que les modes vectoriels et tensoriels sont décroissants au premier ordre et qu'il est par conséquent justifié de les négliger [1]. Nous reportons néanmoins dans l'appendice B les termes de source en incluant les perturbation tensorielles. Nous allons également nous restreindre au cas simplifié d'un mélange de matière noire et de radiation.

Modes scalaires

Les équations d'Einstein scalaires sont données par
- $(\delta G_{00} - \kappa \delta T_{00}) = 0$,
- la trace de $(\delta G_{ij} - \kappa \delta T_{ij}) = 0$
- le mode scalaire de la partie sans trace de $(\delta G_{ij} - \kappa \delta T_{ij}) = 0$

1. Les modes tensoriels ne sont décroissants que lorsqu'ils sont sub-Hubble. Lorsqu'ils sont super-Hubble, ils sont constants et il est justifié de les négliger dans les termes de source car ils n'interviennent qu'avec une dérivée.

– le mode scalaire de $(\delta G_{0i} - \kappa\delta T_{0i}) = 0$
pour obtenir respectivement les équations

$$(\Delta + 3K)\Psi - 3\mathcal{H}\Psi' - 3\mathcal{H}^2\Phi - \frac{1}{2}\sum_{e=r,m}\kappa\bar{\rho}_e\delta_e = S_1 \quad (6.3)$$

$$\Psi'' + \mathcal{H}^2\Phi + \frac{1}{3}\Delta(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}\Phi' + 2\mathcal{H}\Psi' - K\Psi + 2\mathcal{H}'\Phi - \frac{1}{6}\kappa\bar{\rho}_r\delta_r = S_2 \quad (6.4)$$

$$\Psi - \Phi = S_3 \quad (6.5)$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi + \frac{1}{2}\sum_{e=r,m}\kappa\bar{\rho}_e(1+w_e)v_e = S_4. \quad (6.6)$$

Les termes de source sont donnés par

$$S_1 = -8\Psi\Delta\Psi - 3D_i\Psi D^i\Psi - 3\Psi'^2 + \sum_{e=r,m}\kappa\bar{\rho}_e(1+w_e)D_iv_eD^iv_e - 12\mathcal{H}^2\Psi^2 \quad (6.7)$$

$$S_2 = 4\mathcal{H}^2\Psi^2 + \frac{7}{3}D_i\Psi D^i\Psi + \frac{8}{3}\Psi\Delta\Psi + 8\mathcal{H}\Psi\Psi' + 8\mathcal{H}'\Psi^2 + \Psi'^2 + \frac{1}{3}\sum_{e=r,m}\kappa\bar{\rho}_e(1+w_e)D_iv_eD^iv_e\,, \quad (6.8)$$

$$S_3 = -4\Psi^2 - \Delta^{-1}\left[2D_i\Psi D^i\Psi + \sum_{e=r,m}\kappa\bar{\rho}_e(1+w_e)D_iv_eD^iv_e\right] + 3(\Delta\Delta)^{-1}D_iD_j\left[2D^i\Psi D^j\Psi + \sum_{e=r,m}\kappa\bar{\rho}_e(1+w_e)D^iv_eD^jv_e\right], \quad (6.9)$$

$$S_4 = 2\mathcal{H}\Psi^2 - 4\Psi\Psi' + 2D_i^{-1}(\Psi'D_i\Psi) + \sum_{e=r,m}\kappa\bar{\rho}_eD_i^{-1}\left[(1+w_e)\Psi D_iv_e - (1+c_{s,e}^2)\delta_eD_iv_e)\right]. \quad (6.10)$$

Pour des fluides sans intéraction, ce qui est le cas si on traite uniquement un mélange de radiation et de matière noire, nous obtenons deux équations scalaires d'évolution du fluide en considérant $\bar{\nabla}_\mu T^\mu_{e0} = 0$ ainsi que le mode scalaire de $\nabla_\mu T^\mu_{ei} = 0$. Il s'agit respectivement de l'équation de conservation de chaque fluide ainsi que de l'équation d'Euler de chaque fluide. Dans le cas où w est constant et donc $w = c_s^2$ ces équations sont

$$\delta_e' + (1+w_e)\left(\Delta v_e - 3\Psi'\right) = S_{c,e}\,, \quad (6.11)$$

$$v_e' + \mathcal{H}(1 - 3c_{s,e}^2)v_e + \Phi + \frac{c_{s,e}^2}{1+w_e}\delta_e = S_{e,e}. \quad (6.12)$$

Les termes de source de ces équations sont donnés par

$$S_{c,e} = 2(1+w_e)\left\{3\delta_e\Psi' + 6\Psi\Psi' - (\Phi+\delta_e)\Delta v_e + D_iv_e\left[-D^i\delta_e - (1-3w_e)\mathcal{H}D^iv_e - 2D^iv_e' - 2D^i\Phi + 3D^i\Psi\right]\right\}, \quad (6.13)$$

$$D_iS_{e,e} = -2(\delta_eD_iv_e)' - 2\mathcal{H}(1-3c_{s,e}^2)\delta_eD_iv_e + 2\mathcal{H}(1-3c_{s,e}^2)(\Phi+2\Psi)D_iv_e + 10\Psi'D_iv_e + 4\Psi D_iv_e' - 2D_j\left(D^jv_eD_iv_e\right) + 2\Phi D_iv_e' - 2\delta D_i\Phi + 4\Phi D_i\Phi\,. \quad (6.14)$$

Dans le cas ou w n'est pas constant c'est-à-dire pour $w \neq c_s^2$, les équations de conservation sont données en appendice D.1 tandis que les équations d'Einstein sont données en appendice D.2. Si de plus les perturbations ne sont pas adiabatiques, c'est-à-dire si la pression ne dépend pas uniquement de ρ, alors il faut considérer une composante non-adiabatique dans les équation précédentes. Nous ne considérerons pas cette situation et nous restreindrons dans ce qui suit à des perturbations adiabatiques. Si de plus on souhaite inclure les baryons dans les équations précédentes, il faudra considérer la force qu'exercent les baryons sur les photons (et réciproquement) au second ordre. Celle-ci ne peut être justifiée qu'à partir de la théorie cinétique et sa forme est donnée dans [Bartolo *et al.* 06]. Tout comme au premier ordre, nous étudierons la dynamique des perturbations gravitationnelles sans considérer cet aspect étant donné que la matière noire froide est dominante.

Modes tensoriels

Les équations d'Einstein tensorielles sont données par le mode tensoriel de $(\delta G_{ij} - \kappa\delta T_{ij}) = 0$

$$E_{ij}'' + 2\mathcal{H}E_{ij}' + (2K - \Delta)E_{ij} = S_{ij}^{TT}, \quad (6.15)$$

où

$$S_{ij}^{TT} = \mathcal{P}_{T,ij}^{kl}\left[4D_k\Phi D_l\Phi + 2\kappa\bar{\rho}(1+w)D_kvD_lv\right]. \quad (6.16)$$

Dans l'expression précédente, nous avons utilisé qu'au premier ordre $\Phi = \Psi$ pour un fluide parfait d'après l'équation (6.5).

Nous utiliserons les solutions trouvées pour les équations homogènes satisfaites par les variables de perturbation de premier ordre afin de résoudre les équations du second ordre avec la méthode de la fonction de Green.

6.2.2 Loi de conservation

En suivant la même procédure qu'au premier ordre, on peut montrer (voir section 7.5.2) que pour des modes super-Hubble, la condition d'adiabaticité du mélange radiation-matière noire froide est encore satisfaite au second ordre, et on peut exprimer les contrastes de densité au second ordre en fonction du contraste de densité du fluide total par la version au second ordre de l'équation (2.76). Le fluide total à ces échelles peut être considéré comme un fluide parfait de paramètre d'état variable. De façon plus générale, pour un fluide parfait, on montre en suivant la même procédure qu'au premier ordre à partir des équations d'Einstein de l'appendice D.2, que l'équation d'évolution pour $\Psi^{(2)}$ s'écrit

$$\Psi'' + \Psi'3\mathcal{H}(1+c_s^2) + 3\Psi(c_s^2 - w) - c_s^2\Delta\Psi = S_2 - c_s^2S_1 + \frac{1}{3}\Delta S_3 + 3S_3(c_s^2 - w) + \mathcal{H}S_3' \equiv S. \quad (6.17)$$

De façon équivalente, cette équation s'écrit en fonction de $\Phi^{(2)}$ et $\Psi^{(2)}$

$$\Psi'' + \mathcal{H}\Phi' + \mathcal{H}\Psi'(2+3c_s^2) + 3\Phi(c_s^2 - w) - c_s^2\Delta\Psi = S_2 - c_s^2S_1 + \frac{1}{3}\Delta S_3\,. \quad (6.18)$$

On peut montrer alors (voir l'appendice E) qu'en utilisant la perturbation de courbure en jauge comobile au second ordre dans sa limite super-Hubble

$$\mathcal{R}^{(2)} = \Psi^{(2)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}}\left(\Psi'^{(2)} + \mathcal{H}\Phi^{(2)} - 4\mathcal{H}\Psi^2 - \frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}}\right) + \left(1+3c_s^2\right)(Q\delta)^2 - 4Q\delta\Psi\,, \quad (6.19)$$

où on rappelle que $Q = -1/[3(1+w)]$, on peut récrire cette équation pour les modes super-Hubble sous la forme

$$\frac{-\mathcal{H}}{2Q}\mathcal{R}^{(2)\prime} \simeq 0. \tag{6.20}$$

Nous utiliserons donc cette loi de conservation pour établir les liens entre les variables de perturbations du second ordre avant et après un changement d'ère pour des modes super-Hubble, et en particulier pour fixer les conditions initiales dans l'ère de radiation à partir des prédictions inflationnaires.

6.2.3 Ère de radiation

En suivant la même méthode qu'au premier ordre, mais en gardant tous les termes de source quadratiques dans les variables de premier ordre, nous pouvons dériver l'équation d'évolution pour les perturbations scalaires du second ordre dans le cas où l'univers est dominé par la radiation

$$\Psi'' + 4\mathcal{H}\Psi' - \frac{1}{3}\Delta\Psi = S_2 - \frac{1}{3}S_1 + \frac{1}{3}\Delta S_3 + \mathcal{H}S_3' \equiv S_r\,. \tag{6.21}$$

Cette équation peut être convertie en une équation satisfaite pour Φ en utilisant la contrainte $\Psi - \Phi = S_3$. Afin que l'équation (6.21) soit une équation différentielle uniquement sur le temps, nous passons en espace de Fourier. Les termes de source ne font intervenir que des termes quadratiques dans les variables de perturbation du premier ordre. On relie la transformée de Fourier d'un produit XY à celle de X et Y par

$$[XY](\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3\mathbf{k}_1\mathrm{d}^3\mathbf{k}_2\delta_{\mathrm{D}}^3(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k})X(\mathbf{k}_1)Y(\mathbf{k}_2)\,. \tag{6.22}$$

Afin de simplifier la notation nous n'utilisons pas de notation différente pour une variable et sa transformée de Fourier. Nous omettrons également de spécifier la dépendance en $\mathbf{k}$ là où aucune confusion ne peut être faite. On utilisera également dorénavant la notation compacte

$$\mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2\delta_{\mathrm{D}}^3(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}). \tag{6.23}$$

Cette expression fait intervenir nécessairement toutes les valeurs de k_1 et k_2 ce qui entrera en contradiction avec la notion de limite super-Hubble ou sub-Hubble pour lesquelles on souhaite comparer k à $1/\eta$, mais aussi k_1 et k_2 à $1/\eta$. Cependant le but sous-jacent à nos calculs au second ordre est d'obtenir une expression pour le bispectre et nous verrons alors que l'intégrale représentée par $\mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ n'est jamais réalisée, et dans ce cas, il y a bien un sens pour les limites sub-Hubble et super-Hubble. Nous présenterons donc les résultats au second ordre dans les limites super-Hubble et sub-Hubble avec $\mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)$ en facteur en nous souvenant que cela à un sens uniquement lorsque l'on utilise ces expressions dans le calcul d'un bispectre. Nous notons Ψ_1 et Ψ_2 les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (6.21) que nous souhaitons résoudre. On définit alors la fonction de Green par

$$G_r(\eta,\eta') = \frac{\Psi_1^{(1)}(\eta')\Psi_2^{(1)}(\eta) - \Psi_1^{(1)}(\eta)\Psi_2^{(1)}(\eta')}{\Psi_1^{(1)}(\eta')\Psi_2^{'(1)}(\eta') - \Psi_2^{(1)}(\eta')\Psi_1^{'(1)}(\eta')}\,. \tag{6.24}$$

La solution générale est alors de la forme

$$\Psi(\eta) = C_1\Psi_1(\eta) + C_2\Psi_2(\eta) + \int_0^\eta G_r(\eta,\eta')S_r(\eta')\mathrm{d}\eta'. \tag{6.25}$$

La fonction de Green associée à l'équation (6.21) s'écrit explicitement

$$G_r\left(\eta,\eta'\right) = \frac{\sqrt{3}\eta'}{k^3\eta^3}\left\{\left(\eta\eta'k^2+3\right)\sin\left[\frac{k(\eta-\eta')}{\sqrt{3}}\right] - \sqrt{3}k(\eta-\eta')\cos\left[\frac{k(\eta-\eta')}{\sqrt{3}}\right]\right\}. \tag{6.26}$$

Modes super-Hubble

Pour les modes super-Hubble, nous pouvons soit utiliser la limite super-Hubble du résultat précédent, c'est-à-dire en ne gardant dans S_r que les termes dominant dans cette limite qui sont

$$S_r \simeq 8\mathcal{H}\Psi\Psi' + \Psi'^2 + 3w\Psi'^2 + \mathcal{H}S_3'\,, \tag{6.27}$$

soit utiliser la conservation de $\mathcal{R}^{(2)}$. Cette dernière méthode est une intégrale première d'une équation du second ordre et est donc une équation du premier ordre comme on peut le voir directement sur l'expression de $\mathcal{R}^{(2)}$. Si à la fin de l'inflation la valeur de $\mathcal{R}^{(2)}$ est $\mathcal{R}_I^{(2)}$, alors on peut utiliser cette valeur comme condition initiale au début de l'ère dominée par la radiation. L'évolution de $\Psi^{(2)}$ est ensuite obtenue en résolvant $\mathcal{R}^{(2)}(\eta) = \mathcal{R}_I^{(2)}$, c'est-à-dire

$$\Psi^{(2)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}}\left(\Psi'^{(2)} + \mathcal{H}\Phi^{(2)}\right) = \mathcal{R}_I^{(2)} - \left(1+3c_s^2\right)(Q\delta)^2 + 4Q\delta\Psi - \frac{2Q}{\mathcal{H}}\left(4\mathcal{H}\Psi^2 + \frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}}\right). \tag{6.28}$$

Nous avons vu au premier ordre que pour des modes super-Hubble dans une ère dominée par un fluide de paramètre d'état w constant, une fois la solution décroissante négligeable, c'est-à-dire quand $\Psi^{(1)\prime} \ll \mathcal{H}\Psi^{(1)}$, nous pouvons relier $\Psi^{(1)}$ à $\mathcal{R}^{(1)}$ par la relation (2.86). Dans ce cas nous pouvons également relier v à Ψ d'après l'équation (2.24) par

$$v^{(1)} = \frac{-2\Psi^{(1)}}{3\mathcal{H}(1+w)}\,, \tag{6.29}$$

et négliger δ devant Ψ. On applique la même méthode au second ordre. Une fois la solution décroissante négligeable, c'est-à-dire la solution de l'équation homogène associée à l'équation (6.28), et donc que $\Psi^{(2)\prime} \ll \mathcal{H}\Psi^{(2)}$, nous pouvons déduire une relation entre $\Psi^{(2)}$ et $\mathcal{R}_I^{(2)}$. En utilisant l'équation (6.29) et en exprimant $\Phi^{(2)}$ en fonction de $\Psi^{(2)}$ grâce à la contrainte (6.5), cette relation qui correspond à la solution particulière de l'équation (6.28) s'écrit

$$\begin{aligned}\Psi_I^{(2)}(w) \;=\; & \frac{1}{5+3w}\left\{3(1+w)\mathcal{R}_I^{(2)} + 4\frac{5+3w}{3(1+w)}\Psi_I^{(1)2} - 2\Delta^{-1}\left[\frac{10+6w}{3(1+w)}\partial_i\Psi_I^{(1)}\partial^i\Psi_I^{(1)}\right]\right. \\ & \left. +6\Delta^{-2}\partial^j\partial_i\left[\frac{10+6w}{3(1+w)}\partial_j\Psi_I^{(1)}\partial^i\Psi_I^{(1)}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{6.30}$$

Dans le cas de l'ère dominée par la radiation

$$\Psi_{I,r}^{(2)} = \frac{2}{3}\mathcal{R}_{I,r}^{(2)} + \Psi_{I,r}^{(1)2} - \Delta^{-1}\left[\partial_i\Psi_{I,r}^{(1)}\partial^i\Psi_{I,r}^{(1)}\right] + 3\Delta^{-2}\partial^j\partial_i\left[\partial_j\Psi_{I,r}^{(1)}\partial^i\Psi_{I,r}^{(1)}\right], \tag{6.31}$$

où nous rappelons que $\Psi^{(1)}_{I,r} = 2\mathcal{R}^{(1)}_I/3$. Il faut remarquer qu'au second ordre $\Phi^{(2)} \neq \Psi^{(2)}$ et donc d'après l'équation 6.5), on les relie dans le cas super-Hubble par

$$\Phi^{(2)}_I = \Psi^{(2)}_I + 4\Psi^{(1)2}_I + \Delta^{-1}\left[\frac{10+6w}{3(1+w)}\partial_i\Psi^{(1)}_I\partial^i\Psi^{(1)}_I\right] - 3\Delta^{-2}\partial^j\partial_i\left[\frac{10+6w}{3(1+w)}\partial_j\Psi^{(1)}_I\partial^i\Psi^{(1)}_I\right]. \quad (6.32)$$

Modes sub-Hubble

Lorsque nous souhaitons étudier la rentrée d'un mode sous l'horizon, il n'est plus possible d'utiliser la méthode intégrale précédente et nous utiliserons donc la méthode générale de la fonction de Green. La solution dominante de l'équation homogène, notée $\Psi^{(2)}_h$ a la forme donnée par la fonction (2.37) avec une valeur limite quand $k\eta \gg 1$ donnée par $\Psi^{(2)}_{I,r}$

$$\Psi^{(2)}_h = \Psi^{(2)}_{I,r}\frac{9\sqrt{3}}{(k\eta)^3}\left[\sin\left(k\eta/\sqrt{3}\right) - \frac{k\eta}{\sqrt{3}}\cos\left(k\eta/\sqrt{3}\right)\right]. \quad (6.33)$$

Quant à la solution particulière, ou solution sourcée $\Psi^{(2)}_S$, nous pouvons nous intéresser dans un but de simplification à son ordre dominant en $k\eta$ qui est

$$\Psi^{(2)}_S(k,\eta) \simeq \mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)F(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k})\Psi^{(1)}_I(k_1)\Psi^{(1)}_I(k_2)\int_0^\eta I\left(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k},\eta,\eta'\right)\mathrm{d}\eta', \quad (6.34)$$

où

$$F(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k},\eta) = \frac{27\sqrt{3}k_1k_2}{k^3\eta^2}\left[1 + 2\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2 + 3\left(\frac{\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2}{k_1k_2}\right)^2\right], \quad (6.35)$$

$$I(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k},\eta,\eta') = \sin\left(\frac{k_1\eta'}{\sqrt{3}}\right)\sin\left(\frac{k_2\eta'}{\sqrt{3}}\right)\sin\left[\frac{k(\eta'-\eta)}{\sqrt{3}}\right]. \quad (6.36)$$

Afin de dériver ce résultat, nous avons utilisé le fait que dans le terme de source S_r, les termes dominants sont les termes quadratiques en v qui sont tous du type $\sim \mathcal{H}^2\partial^i v\partial_i v \sim \eta^{-2}$, tandis que les autres termes se comportent asymptotiquement au mieux comme $k^{-2}\eta^{-4}$.

On peut calculer l'intégrale sur I, et on obtient alors pour les modes sub-Hubble ($k_1\eta \gg 1$, $k_2\eta \gg 1$, $k\eta \gg 1$), en notant $\mu = \mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2/(k_1k_2)$

$$\Psi^{(2)}_S(k,\eta) \simeq \mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\frac{81\Psi^{(1)}_I(k_1)\Psi^{(1)}_I(k_2)}{2k^2\eta^2(1-\mu^2)}\left[1 + 2\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2 + 3\left(\frac{\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2}{k_1k_2}\right)^2\right]$$
$$\left[\mu\sin\left(\frac{k_1\eta}{\sqrt{3}}\right)\sin\left(\frac{k_2\eta}{\sqrt{3}}\right) + \cos\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right) - \cos\left(\frac{k_1\eta}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\frac{k_2\eta}{\sqrt{3}}\right)\right]. \quad (6.37)$$

La solution totale $\Psi^{(2)}_r$ est la somme de $\Psi^{(2)}_S$, qui vient de l'évolution, et de $\Psi^{(2)}_h$, qui porte une information sur la perturbation de courbure à la fin de l'inflation $\mathcal{R}^{(2)}_I$. Outre la dépendance dans la configuration de $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ et μ ainsi que le comportement oscillant, on remarque que l'amplitude des perturbations du second ordre décroît comme $(k\eta)^{-2}$. On conlut donc que le premier ordre comme le second ordre est amorti lorsqu'il rentre sous l'horizon dans l'ère dominée par la radiation. On peut ensuite en déduire le comportement asymptotique du contraste de

densité grâce à l'équation de Poisson (6.3). Comme les termes dominants dans le terme de source sont de l'ordre de $k^2\Psi^{(1)2}/(k\eta)^4$, on peut les négliger devant $\Delta\Psi^{(2)}$ et $\bar{\rho}\delta^{(2)}$. On en déduit qu'asymptotiquement l'équation de Poisson s'écrit dans l'ère de radiation

$$\delta^{(2)}_r = -\frac{2}{3}(k\eta)^2\Psi^{(2)}_r. \quad (6.38)$$

6.2.4 Ère de matière

Dans le cas où l'univers est dominé par la matière,

$$\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' = S_2 + \frac{1}{3}\Delta S_3 + \mathcal{H}S_3' \equiv S_m\,. \quad (6.39)$$

La fonction de Green associée est

$$G_m\left(\eta,\eta'\right) = \frac{1}{5}\left(\eta' - \frac{\eta'^6}{\eta^5}\right). \quad (6.40)$$

Modes super-Hubble

Pour les modes super-Hubble, on suit la même démarche que pour l'ère de radiation. Une fois la solution décroissante négligeable, $\Psi^{(2)}$ converge vers $\Psi^{(2)}_I(w=0)$, c'est-à-dire

$$\Psi^{(2)}_{I,m} = \left[\frac{3}{5}\mathcal{R}^{(2)}_I + \frac{4}{3}\Psi^{(1)2}_{I,m} - \Delta^{-1}\left(\frac{4}{3}\partial_i\Psi^{(1)}_{I,m}\partial^i\Psi^{(1)}_{I,m}\right) + \Delta^{-2}\partial^j\partial_i\left(4\partial_j\Psi^{(1)}_{I,m}\partial^i\Psi^{(1)}_{I,m}\right)\right], \quad (6.41)$$

avec $\Psi^{(1)}_{I,m} = 3\mathcal{R}^{(1)}_I/5$. On relie cette valeur à $\Phi^{(2)}_{I,m}$ en utilisant l 'équation (6.32) évaluée en $w=0$.

Modes devenant sub-Hubble pendant l'ère de matière

Dans la limite $k\eta \gg 1$, $k_1\eta \gg 1$, $k_2\eta \gg 1$, une fois le mode décroissant du premier ordre négligeable, $\Psi^{(1)}$ est constant et le terme de source S_m s'écrit

$$S_m = \mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\Psi^{(1)}_{I,m}(k_1)\Psi^{(1)}_{I,m}(k_2)\frac{14k_1^2k_2^2}{3k^2}\left[\frac{5}{7} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right) + \frac{2}{7}\frac{(\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2)^2}{k_1^2k_2^2}\right], \quad (6.42)$$

où nous avons utilisé la relation (6.29) valable quand Ψ est constant. On en déduit en utilisant l'expression (6.40) de la fonction de Green pour l'ère de matière que

$$\Psi^{(2)}_S = -\mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\Psi^{(1)}_{I,m}(k_1)\Psi^{(1)}_{I,m}(k_2)\frac{k_1^2k_2^2\eta^2}{3k^2}\left[\frac{5}{7} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right) + \frac{2}{7}\frac{(\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2)^2}{k_1^2k_2^2}\right]. \quad (6.43)$$

Quant à la solution de l'équation homogène $\Psi^{(2)}_h$, elle est égale à $\Psi^{(2)}_{I,m}$ puisque l'équation homogène ne dépend pas de cette approximation. La solution totale $\Psi^{(2)}_m$ est la somme de $\Psi^{(2)}_h$ et $\Psi^{(2)}_{I,m}$, mais asymptotiquement cette dernière va devenir négligeable. On procède de même que pour l'ère de radiation afin de déduire le comportement asymptotique de $\delta^{(2)}$. Nous pouvons négliger le terme de source de l'équation de Poisson (6.3), qui est de l'ordre de $k^2\Psi^{(1)2}$, devant $\Delta\Psi^{(2)}$ et

$\bar{\rho}\delta^{(2)}$ qui sont de l'ordre de $k^2(k\eta)^2\Psi^{(1)2}$. On en déduit alors le comportement asymptotique du contraste de densité par

$$\delta_m = -\frac{1}{6}(k\eta)^2\Psi_m \tag{6.44}$$

valable à la fois pour le premier et le second ordre. Ceci nous permet alors de retrouver le résultat standard de l'effondrement gravitationnel en régime Newtonien [Bernardeau *et al.* 02]

$$\frac{1}{2}\delta_m^{(2)} = \mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\left[\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)+\frac{2}{7}\frac{(\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2)^2}{k_1^2k_2^2}\right]\delta_m^{(1)}(k_1)\delta_m^{(1)}(k_2). \tag{6.45}$$

6.2.5 Transition radiation-matière

Nous décrivons la transition radiation-matière comme nous l'avons fait au premier ordre en la paramétrant par le facteur d'échelle normalisé à l'unité à l'égalité y. L'équation (2.57) au second ordre s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi^{(2)}}{\mathrm{d}y^2}+\frac{6+7y}{2y(1+y)}\frac{\mathrm{d}\Psi^{(2)}}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}\Phi^{(2)}}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{3(1+y)k_{\rm eq}^2}k^2\Psi^{(2)}+\frac{\Omega_m}{2y^2}\delta_m^{(2)}+\frac{1}{y(1+y)}\Phi^{(2)} = S_{rm}, \tag{6.46}$$

avec

$$S_{rm} = \frac{2}{1+y}\left(S_2-\frac{S_1}{3}-\frac{k^2S_3}{3}\right), \tag{6.47}$$

où $\Phi^{(2)}$ est relié à $\Psi^{(2)}$ grâce à l'équation (6.5). Comme au premier ordre, il faut déterminer le contraste de densité afin de pouvoir intégrer cette équation. L'équation de conservation et l'équation d'Euler au second ordre peuvent être combinées afin de donner

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta_m^{(2)}}{\mathrm{d}y^2}+\frac{2+3y}{2y(1+y)}\frac{\mathrm{d}\delta_m^{(2)}}{\mathrm{d}y}-3\frac{\mathrm{d}^2\Psi^{(2)}}{\mathrm{d}y^2}-\left[\frac{6+9y}{2y(1+y)}\right]\frac{\mathrm{d}\Psi^{(2)}}{\mathrm{d}y}+\frac{2k^2}{(1+y)k_{\rm eq}^2}\Phi^{(2)} = S_{\delta_m}, \tag{6.48}$$

avec

$$S_{\delta_m} \equiv \frac{\sqrt{2}}{k_{\rm eq}\sqrt{1+y}}\left(\frac{\mathrm{d}S_c}{\mathrm{d}y}+\frac{S_c}{y}\right)+\frac{2k^2}{k_{\rm eq}^2(1+y)}S_e. \tag{6.49}$$

De façon similaire au premier ordre nous avons un système d'équations différentielles couplées. De plus, il nous faut déterminer des conditions initiales pour $\delta_m^{(2)}$. Le mélange de fluides parfaits n'étant pas a priori parfait, on suppose de plus que le mélange du fluide de radiation et du fluide de matière se comportent comme un seul fluide parfait jusqu'au second ordre, c'est-à-dire que le fluide total dont les quantités thermodynamiques sont données par les relations (2.47) satisfait

$$\begin{aligned}\delta P &= \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\delta\rho+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}\rho^2}(\delta\rho)^2\\ &= c_s^2\delta\rho+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}c_s^2}{\mathrm{d}\rho}(\delta\rho)^2,\end{aligned} \tag{6.50}$$

où c_s est donné dans les relations (2.55). On obtient alors que les contrastes de densité doivent satisfaire la condition d'adiabaticité donnée par

$$\frac{\delta_r^{(1)}}{4} = \frac{\delta_m^{(1)}}{3}, \quad \frac{\delta_r^{(2)}}{4} = \frac{\delta_m^{(2)}}{3}+\left(\frac{\delta_r^{(1)}}{4}\right)^2. \tag{6.51}$$

On utilisera donc cette condition car on supposera des conditions initiales adiabatiques. On peut montrer en utilisant l'équation de conservation (6.11) que cette condition adiabatique est conservée aux échelles super-Hubble.
Nous allons étudier plus particulièrement des modes rentrés sous l'horizon suffisamment avant l'égalité pour que le potentiel $\Psi^{(2)}$ créé par le contraste de densité dû à la radiation soit devenu plus faible que celui dû à la matière froide. Il s'agit donc d'établir l'effet Mészáros au second ordre. Dans ce cadre d'approximation, l'équation de Poisson se réduit à

$$k^2\Phi^{(2)} \simeq k^2\Psi^{(2)} \simeq -\frac{3}{4y}k_{\rm eq}^2\delta_m^{(2)}. \tag{6.52}$$

On a négligé S_1 dans cette relation car les termes dominants de $S_1/k_{\rm eq}^2$ sont de l'ordre de $(k_{\rm eq}/k)^2 \ll 1$. Quant aux contributions dominantes de S_{δ_m}, elles proviennent de

$$S_c \simeq -2\partial_i\left(\delta\partial^i v\right), \quad \partial_i S_e \simeq -2\left(\partial_j v\partial^j\partial_i v\right), \tag{6.53}$$

et contribuent de l'ordre de $(k_{\rm eq}/k)^0$ à S_{δ_m}. Finalement l'équation de Mészáros au second ordre s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta_m^{(2)}}{\mathrm{d}y^2}+\frac{2+3y}{2y(1+y)}\frac{\mathrm{d}\delta_m^{(2)}}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{2y(1+y)}\delta_m^{(2)} = S_M, \tag{6.54}$$

avec (en notant $\delta \equiv \delta_m^{(1)}$ et $\dot{\delta} \equiv \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}y}$ pour simplifier)

$$S_M = \mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\left\{\left[2\delta\ddot{\delta}+2\dot{\delta}^2+\frac{\delta\dot{\delta}}{y(1+y)}\right]+\left[\delta\ddot{\delta}+2\dot{\delta}^2+\frac{\delta\dot{\delta}}{2y(1+y)}\right]\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)+2\frac{\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2}{k_1^2k_2^2}\dot{\delta}^2\right\}. \tag{6.55}$$

L'équation de Green associée à l'équation (6.54) est

$$G(y,y') = \frac{3}{2}y'\sqrt{1+y'}(2+3y)(2+3y')\left\{\frac{\sqrt{1+y}}{2+3y}-\frac{\sqrt{1+y'}}{2+3y'}+\frac{1}{6}\ln\left[\frac{(\sqrt{1+y'}+1)(\sqrt{1+y}-1)}{(\sqrt{1+y'}-1)(\sqrt{1+y}+1)}\right]\right\}. \tag{6.56}$$

La limite asymptotique quand $y \gg 1$, $y' \gg 1$ de la fonction de Green est

$$G(y,y') \simeq \frac{2}{5}y\left[1-\left(\frac{y'}{y}\right)^{5/2}\right], \tag{6.57}$$

tandis que la limite asymptotique de S_M s'obtient en utilisant $\delta\ddot{\delta} \ll \dot{\delta}^2$ et $\dot{\delta} \sim \delta/y$

$$S_M \simeq \mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)7\left[\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)+\frac{2}{7}\frac{(\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2)^2}{k_1^2k_2^2}\right]\frac{\delta(k_1)\delta(k_2)}{y^2}. \tag{6.58}$$

On retrouve bien à partir de ces deux limites le comportement asymptotique sous l'horizon en ère de matière donné par l'équation (6.45). Proche de l'équivalence cette limite asympotique n'est évidemment pas valable.

6.2.6 Intéractions baryons-photons

Nous venons donc de voir qu'au second ordre pour des modes sub-Hubble, le potentiel $\Psi^{(2)} \simeq \Phi^{(2)}$ est croissant à cause de l'effondrement de la matière noire froide, et de plus se nourrit des perturbations du premier ordre qui ont subi une croissance logarithmique à la fin de l'ère de radiation. Dans les termes du second ordre, on s'attend donc à ce que les termes quadratiques dans les variables de perturbation du premier ordre soient de magnitude inférieure au potentiel du second ordre. Nous allons donc étudier de plus près le système couplé baryons-photons pour les modes tels que $k/k_{\rm eq} \gg 1$, en supposant que les caractéristiques dominantes du potentiel du second ordre sont dues à l'effondrement de la matière noire froide. Les baryons étant minoritaires dans la matière totale, cette approximation est justifiée si l'on désire comprendre la forme des solutions numériques de ce problème. Nous allons donc négliger tous les termes quadratiques dans les variables de perturbation du premier ordre dans les équations de conservations et d'Euler. On pose de même qu'au premier ordre $\mathcal{Q}^{(2)} = \frac{\delta_r^{(2)}}{4} - \Psi^{(2)}$, dont l'équation d'évolution est donnée d'après l'approximation faite par

$$[(1+R)\mathcal{Q}^{(2)\prime}]' + \frac{k^2}{3}\mathcal{Q}^{(2)} \simeq -\frac{k^2}{3}(2+R)\Phi^{(2)}\,. \tag{6.59}$$

La différence essentielle par rapport au premier ordre réside dans le fait que $\Psi^{(2)}$ ne peut plus être supposé constant mais est au contraire croissant comme $(k\eta)^2$. Le système possède donc la même analogie qu'au premier ordre sauf qu'une solution WKB ne va plus être possible dans le cas où l'amplitude de $\mathcal{Q}^{(2)}$ est de l'ordre de celle de $\Phi^{(2)}$. Il s'agit d'un système largement forcé dont le comportement est approximativement

$$\mathcal{Q}^{(2)} \simeq -(2+R)\Phi^{(2)} + \frac{6(1+R)(2+R)}{(k\eta)^2}\Psi^{(2)} + \mathcal{O}[1/(k\eta)^4]. \tag{6.60}$$

De même, la version au second ordre de l'équation (2.91) est dans ce cadre d'approximation à l'ordre le plus bas dans le paramètre de couplage fort

$$\left[(1+R)v_r^{(2)}\right]' = -\frac{\mathcal{Q}^{(2)}}{4} - (2+R)\Phi^{(2)}. \tag{6.61}$$

On en déduit l'ordre de grandeur de $v_r^{(2)}$

$$kv_r^{(2)}(y) \simeq -\frac{3(2+R)k_{\rm eq}}{k\sqrt{2y}}\Psi^{(2)}. \tag{6.62}$$

On rappelle que cette solution n'est valable que lorsque le potentiel au second ordre dirige les oscillations baryoniques. En pratique, l'intervalle de temps entre l'équivalence et la recombinaison ($y_{\rm LSS} \simeq 3.3$) n'est pas assez grand pour que ce régime soit atteint, même en considérant la pression anisotrope, sauf pour des modes plus grands que k_D.

6.2.7 Physique du fond diffus cosmologique

Nous suivons la même démarche qu'à l'ordre linéaire. La perturbation de l'énergie d'un photon se définit alors jusqu'au second ordre par $\mathcal{E} \equiv \bar{\mathcal{E}}\,(1+\delta_{\mathcal{E}}) \equiv \bar{\mathcal{E}}\left(1+\delta_{\mathcal{E}}^{(1)} + \frac{1}{2}\delta_{\mathcal{E}}^{(2)}\right)$. On obtient par le même type de raisonnement qu'au premier ordre [Mollerach & Matarrese 97]

$$\delta_{\mathcal{E}}^{(2)} = \left[\delta_E^{(2)} + \Phi^{(2)} - \bar{e}_i v_b^{i(2)} - 2\Phi^2 + 2v_i v^i - 2v_i\delta e^i - 4E_{ij}v^j\bar{e}^i + 4\Psi v_i\bar{e}^i\right]. \tag{6.63}$$

Tout d'abord la perturbation de température sera définie de la même façon que pour la théorie linéaire en utilisant la loi (3.9). Au second ordre on obtient donc que la température est définie à partir du contraste de densité d'énergie selon

$$\Theta^{(2)}[\eta_{\rm LSS}, \mathbf{x}(\eta_{\rm LSS})] = \delta_r^{(2)}[\eta_{\rm LSS}, \mathbf{x}(\eta_{\rm LSS})]/4 - \frac{3}{16}\delta_r^{(1)2}[\eta_{\rm LSS}, \mathbf{x}(\eta_{\rm LSS})], \tag{6.64}$$

même si la distribution des fréquences ne suit pas nécessairement celle d'un corps noir. Afin de relier $\delta_{\mathcal{E}}^{(2)}$ à l'émission avec sa valeur à la réception, il faudra suivre la même démarche mais en tenant compte des difficultés suivantes. Tout d'abord le point d'intersection entre la géodésique suivie par un photon et la surface de dernière diffusion, de coordonnées $[\eta_{\rm LSS}, \mathbf{x}(\eta_{\rm LSS})]$ n'est pas confondu avec le point d'intersection de la géodésique avec la surface de dernière diffusion moyenne de coordonnées $[\bar{\eta}_{\rm LSS}, \mathbf{x}(\bar{\eta}_{\rm LSS})]$. Il faut le prendre en compte si l'on souhaite se ramener à la surface définie par $\bar{\eta}_{\rm LSS}$. De plus il faudra tenir compte du fait que la géodésique au premier ordre se distingue de la géodésique obtenue à l'ordre le plus bas dans l'équation (3.6), ce qui en plus d'affecter le point d'intersection avec la surface de dernière diffusion va modifier l'intégration de la version au second ordre de l'équation (3.4). En effet, les variables du premier ordre seront à évaluer sur la trajectoire du premier ordre. De plus, si on intègre le long des géodésiques avec le paramètre affine λ, il faudra tenir compte du $\Delta\lambda$ nécessaire pour partir de la surface de dernière diffusion jusqu'à arriver à l'observateur. Ceci peut être contourné en paramétrant la géodésique par η. Enfin cette méthode repose sur le fait que le spectre de corps noir n'est pas modifié, c'est-à-dire que les intéractions fortes avec les baryons ainsi que le libre parcours sur une géodésique affecte de la même manière des photons ayant des énergies différentes (le rapport de leurs énergies reste constant). Ceci est vérifié pour ce qui concerne le parcours sur des géodésiques nulles mais n'est pas a priori vérifié en ce qui concerne les intéractions avec les baryons. Au premier ordre, les diffusion Compton avec les électrons ne changent pas l'énergie des photons et il est justifié de caractériser la distribution des photons par une température de corps noir. En revanche ce n'est plus le cas au second ordre où il y a une distorsion spectrale même dans la limite de la diffusion Thomson, qui pourtant n'induit pas de distorsion spectrale dans le référentiel des baryons, mais induit tout de même une distorsion spectrale une fois ramené au référentiel des observateurs comobiles [Dodelson & Jubas 95, Bartolo *et al.* 06]. Parler de température n'a de sens que via l'énergie totale et l'équation (3.9) qui constitue alors une définition de la température, sans qu'elle puisse être associée à un corps noir. Cette approche, essentiellement Lagrangienne, qui consiste à intégrer selon les cônes de lumière est donc complexe, tandis que la théorie cinétique, qui consiste à regarder un point de l'espace l'évolution de la fonction de distribution, ce qui est une approche Eulerienne me semble plus prometteuse au second ordre, et permet de décrire correctement la recombinaison.

Cependant aux grandes échelles (super-Hubble) on peut négliger la vitesse des baryons et donc la distorsion spectrale. De plus la variation du contraste de densité d'énergie lorsque la radiation peut être traitée comme un fluide pendant un temps $\Delta\eta$ est jusqu'au second ordre donnée par $\delta'\Delta\eta$. Or toujours dans la limite super-Hubble, la variation du contraste de température pendant ce même temps le long d'une géodésique est jusqu'au second ordre $-\Psi'\Delta\eta$ d'après l'équation (3.8) évaluée pendant le temps $\Delta\eta$. On en déduit que pour une distribution de corps noir, le contraste de densité d'énergie lorsque les photons sont en propagation libre évolue pendant un temps $\Delta\eta$ selon $-4\Psi'\Delta\eta$ (jusqu'au second ordre). Comme on sait que $\delta' - 4\Psi' \simeq 0$ aux échelles super-Hubble d'après l'équation de conservation (2.25), peu importe qu'on ne sache pas exactement où se situe la surface de dernière diffusion ni son épaisseur au premier ordre dans les perturbations

de la coordonnée temps, puisque le fluide de radiation ou l'ensemble des photons en propagation libre donnent la même évolution du contraste de densité d'énergie. On peut donc considérer pour des échelles super-Hubble que la surface de dernière diffusion n'est pas perturbée[2] et correspond partout au temps $\bar{\eta}_{\rm LSS}$. Ceci n'est évidemment plus valable si on ne considère plus des échelles super-Hubble et l'équation (6) de [Bartolo *et al.* 04c] n'a donc de sens que pour des modes super-Hubble. Étant données ces considérations, le contraste de température aux grandes échelles en ne prenant en compte aucun effet intégré[3] est donné par [Bartolo *et al.* 04c, Mollerach & Matarrese 97, Pyne & Carroll 96]

$$\Theta^{(2)} = \Phi^{(2)} - \Phi^{(1)2} + \frac{1}{4}\delta_r^{(2)} - \frac{3}{16}\delta_r^{(1)2} + \frac{1}{2}\Phi^{(1)}\delta_r^{(1)}\,, \tag{6.65}$$

où le membre de droite est à évaluée sur la surface de dernière diffusion de l'espace de fond. Nous utiliserons ce résultat dans la section 7.5.2, lorsque nous chercherons à caractériser la non-gaussianité dans le CMB aux grandes échelles.

6.3 Théorie cinétique au second ordre

Nous suivons la même démarche qu'au premier ordre et l'étendons au second ordre. Nous étudions donc l'équation géodésique au second ordre puis le terme de Liouville de l'équation de Boltzmann. Cette approche est nouvelle puisqu'elle est basée sur l'utilisation de tétrades tout au long du calcul, et correspond au calcul détaillé de la dérivation de l'équation de Boltzmann que nous avons présenté dans la section 5.2. Nous considérons le cas général où les particules peuvent éventuellement être massives sans être pour autant non-relativistes.

6.3.1 Équation des géodésiques

On obtient d'après l'équation géodésique (3.41), en utilisant les expression données dans l'appendice B.2 pour les connections affines,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(2)} &= \pi^0\Big[- n^i\partial_i\Phi^{(2)} + \Psi^{(2)\prime}n^i n_i + \left(\partial_i B_j^{(2)} - E_{ij}^{(2)\prime}\right)n^i n^j \\ &\quad +2(\Phi-\Psi)n^i\partial_i\Phi + 2n^i E_{ik}\partial^k\Phi \\ &\quad +4n^i n^j\left(E'_{k(i}E^k{}_{j)} - \Psi E'_{ij} + \Psi\Psi'\delta_{ij}\right)\Big].\end{aligned} \tag{6.66}$$

2. Nous l'avons expliqué jusqu'au second ordre mais on s'attend à ce que ce résultat soit valable à tout ordre. En effet dans le formalisme $1+3$, l'évolution du fluide de radiation est donnée par $\dot{\rho}+\frac{4}{3}\Theta\rho=0$ tandis que pour un photons de direction e^μ la variation de son énergie dans la direction $u^\mu+e^\mu$ est donnée par $\frac{1}{E}\left(u^\mu+e^\mu\right)\nabla_\mu E = -\frac{\Theta}{3}-\sigma_{\mu\nu}e^\mu e^\nu$. Pour des échelles super-Hubble on négligera le terme $e^\mu\nabla_\mu$. Alors, on en déduira les propriétés de la densité d'énergie correspondante en utilisant $\rho=\int f(E,\mathbf{e})E^3\mathrm{d}E\mathrm{d}^2\mathbf{e}$ (voir la section suivante). Pour une fonction de distribution de corps noir (vue dans le référentiel comobile avec u^μ), on en déduira que la densité d'énergie correspondante évolue de la même façon que le fluide de radiation, puisque par isotropie des directions des photons, la moyenne sur toutes les directions de $\sigma_{\mu\nu}e^\mu e^\nu$ va être nulle.

3. On s'attend à ce que les effets intégrés contribuent aux petites échelles sauf pour le cas de l'effet Sachs-Wolfe tardif dû à la présence d'une constante cosmologique. Nous négligeons donc ces effets intégrés, mais il reste à montrer rigoureusement que cela est correct.

On rappelle que le développement utilisé est

$$\left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(0)} + \left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(2)} + \dots \tag{6.67}$$

Nous précisons les variables qui sont du second ordre en perturbations mais pas celles qui sont du premier ordre en perturbations afin de simplifier les notations. Les variables du premier ordre apparaissent uniquement sous forme quadratique et il n'y a donc pas de confusion possible.

On peut récrire l'équation (6.66) sous la forme

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(2)} &= \pi^0\beta\Big[- \hat{n}^i\partial_i\Phi^{(2)} + \beta\left[\Psi^{(2)\prime} + \left(\partial_i B_j^{(2)} - E_{ij}^{(2)\prime}\right)\hat{n}^i\hat{n}^j\right] \\ &\quad +2(\Phi-\Psi)\hat{n}^i\partial_i\Phi + 2\hat{n}^i E_{ik}\partial^k\Phi \\ &\quad +4\beta\hat{n}^i\hat{n}^j\left(E'_{k(i}E^k{}_{j)} - \Psi E'_{ij} - \Psi' E_{ij}\right) + 4\beta\Psi\Psi'\Big],\end{aligned} \tag{6.68}$$

le cas de la radiation correspondant à $\beta=1$. L'évolution de la norme de la vitesse se déduit de la même manière que pour l'équation (3.52). On remarque que pour les particules complètement froides, c'est-à-dire sans impulsion ($\beta=0$), l'énergie est conservée à tout ordre comme on peut le constater sur l'expression générale de l'équation géodésique (3.41) évaluée pour une particule satisfaisant $\pi^i=0$. Dans ce cas, l'énergie se réduisant à l'énergie de masse, cela traduit uniquement le fait que la masse de la particule est conservée, ce qui était une hypothèse.

6.3.2 Terme de Liouville

L'équation de déviation au premier ordre (3.54) est suffisante car la fonction de distribution de fond ne dépend pas des directions des particules mais seulement du module de leurs impulsions. On utilise également

$$\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\eta}\right)^{(1)} = \left(\frac{p^i}{p^0}\right)^{(1)} = n^i(\Phi+\Psi) - E^i{}_j n^j, \tag{6.69}$$

pour obtenir dans le cas général

$$\begin{aligned}L^{(2)}[f] &= \frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\eta} + \beta\hat{n}^j\partial_j\delta^{(2)}f - \mathcal{H}\pi^0\beta^2\frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\pi^0} \\ &\quad + \left\{-\hat{n}^j\partial_j\Phi^{(2)} + \beta\left[\Psi^{(2)\prime} + \left(\partial_i B_j^{(2)} - E_{ij}^{(2)\prime}\right)\hat{n}^i\hat{n}^j\right]\right\}\beta\pi^0\frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^0} \\ &\quad +2\beta\left[\hat{n}^i(\Phi+\Psi) - E^i{}_j\hat{n}^j\right]\partial_i\delta^{(1)}f + 2\frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\pi^0}\pi^0\beta\left[-\hat{n}^i\partial_i\Phi + \beta\left(\Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j\right)\right] \\ &\quad -2\left[\perp^{ij}\left(\beta\partial_j\Psi + \frac{1}{\beta}\partial_j\Phi + E'_{jk}\hat{n}^k\right) + 2\beta\partial^{[i}E_{k]j}\perp^{jk}\right]\frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\hat{n}^i} \\ &\quad + \left[2(\Phi-\Psi)\hat{n}^i\partial_i\Phi + 2\hat{n}^i E_{ik}\partial^k\Phi + 4\beta\hat{n}^i\hat{n}^j\left(E'_{k(i}E^k{}_{j)} - \Psi E'_{ij} - \Psi' E_{ij}\right) + 4\beta\Psi\Psi'\right]\beta\pi^0\frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^0}.\end{aligned} \tag{6.70}$$

Cette formulation présente l'avantage de séparer clairement la dépendance dans la direction $\hat{n}^i$ des particules et celle dans leur énergie π^0. On relie ensuite la dépendance en énergie à la dépendance dans la norme de l'impulsion ($\beta\pi^0$) en utilisant $\frac{\mathrm{d}\pi^0}{\mathrm{d}(\beta\pi^0)}=\beta$. Si enfin on souhaite

exprimer les dérivées partielles en fonction de l'impulsion $\pi^i = \beta\pi^0\hat{n}^i$, on utilisera $\frac{\partial f}{\partial \hat{n}^i} = \frac{\partial f}{\partial \pi^i}\beta\pi^0$ et $\frac{\partial f}{\partial(\beta\pi^0)} = \frac{\partial f}{\partial \pi^i}\hat{n}^i$. On peut alors mettre l'équation de Boltzmann sous la forme

$$\begin{aligned} L^{(2)}[f] &= \frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\eta} + \beta\hat{n}^j\partial_j\delta^{(2)}f - \mathcal{H}\pi^i\frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\pi^i} \\ &+\left\{-\frac{1}{\beta}\hat{n}^j\partial_j\Phi^{(2)} + \left[\Psi^{(2)\prime} + \left(\partial_i B_j^{(2)} - E_{ij}^{(2)\prime}\right)\hat{n}^i\hat{n}^j\right]\right\}\pi^k\frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^k} \\ &+2\beta\left[\hat{n}^i(\Phi+\Psi) - E^i{}_j\hat{n}^j\right]\partial_i\delta^{(1)}f + 2\frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\pi^i}\pi^i\Psi' \\ &-2\left[\beta^2\perp^{ij}\partial_j\Psi + \partial_i\Phi + \beta E'_{ik}\hat{n}^k + 2\beta^2\partial^{[i}E_{k]j}\perp^{jk}\right]\frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\pi^i}\pi^0 \\ &+\left[\frac{2}{\beta}(\Phi-\Psi)\hat{n}^i\partial_i\Phi + \frac{2}{\beta}\hat{n}^iE_{ik}\partial^k\Phi + 4\hat{n}^i\hat{n}^j\left(E'_{k(i}E^k{}_{j)} - \Psi E'_{ij} - \Psi' E_{ij}\right) + 4\Psi\Psi'\right]\pi^i\frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^i}. \end{aligned} \tag{6.71}$$

Cette formulation est plus pratique lorsque l'on veut intégrer l'équation de Boltzmann sur $\mathrm{d}^3\pi^i$, car il suffit alors de faire de simples intégrations par parties.
Le cas de la radiation auquel nous nous intéressons plus particulièrement s'écrit en prenant $\beta = 1$

$$\begin{aligned} L^{(2)}[f] &= \frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\eta} + \hat{n}^j\partial_j\delta^{(2)}f - \mathcal{H}\pi^0\frac{\partial\delta^{(2)}f}{\partial\pi^0} \\ &+\left\{-\hat{n}^j\partial_j\Phi^{(2)} + \left[\Psi^{(2)\prime} + \left(\partial_i B_j^{(2)} - E_{ij}^{(2)\prime}\right)\hat{n}^i\hat{n}^j\right]\right\}\pi^0\frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^0} \\ &+2\left[\hat{n}^i(\Phi+\Psi) - E^i{}_j\hat{n}^j\right]\partial_i\delta^{(1)}f + 2\frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\pi^0}\pi^0\left[-\hat{n}^i\partial_i\Phi + \left(\Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j\right)\right] \\ &-2\left[\perp^{ij}\left(\partial_j\Psi + \partial_j\Phi + E'_{jk}\hat{n}^k\right) + 2\partial^{[i}E_{k]j}\perp^{jk}\right]\frac{\partial\delta^{(1)}f}{\partial\hat{n}^i} \\ &+\left[2(\Phi-\Psi)\hat{n}^i\partial_i\Phi + 2\hat{n}^iE_{ik}\partial^k\Phi + 4\hat{n}^i\hat{n}^j\left(E'_{k(i}E^k{}_{j)} - \Psi E'_{ij} - \Psi' E_{ij}\right) + 4\Psi\Psi'\right]\pi^0\frac{\partial\bar{f}}{\partial\pi^0}. \end{aligned} \tag{6.72}$$

6.3.3 Hiérarchie de Boltzmann et lien avec les observations

Dans le cas de la radiation, on mesure l'énergie intégrée dans toutes les longueurs d'onde. On définit donc la brillance ordre par ordre par

$$\mathcal{I}^{(n)}(x^\mu, n^i) \equiv 4\pi\int\delta^{(n)}f(x^\mu,\pi^0,n^i)\beta(\pi^0)^3\mathrm{d}\pi^0. \tag{6.73}$$

Pour le second ordre on obtient

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial\eta} + n^i\partial_i\right)\frac{\mathcal{I}^{(2)}}{4} + \mathcal{H}\mathcal{I}^{(2)} + \bar{\mathcal{I}}n^i\partial_i\Phi^{(2)} - \bar{\mathcal{I}}\left[\Psi^{(2)\prime} + \left(\partial_i B_j^{(2)} - E_{ij}^{(2)\prime}\right)\hat{n}^i\hat{n}^j\right] \\ &-\frac{1}{2}\left[\perp^{ij}\left(\partial_j\Psi + \partial_j\Phi + E'_{jk}\hat{n}^k\right) + 2\partial^{[i}E_{k]j}\perp^{jk}\right]\frac{\partial\mathcal{I}^{(1)}}{\partial n^i} \\ &-\bar{\mathcal{I}}\left[2(\Phi-\Psi)\hat{n}^i\partial_i\Phi + 2\hat{n}^iE_{ik}\partial^k\Phi + 4\hat{n}^i\hat{n}^j\left(E'_{k(i}E^k{}_{j)} - \Psi E'_{ij} - \Psi' E_{ij}\right) + 4\Psi\Psi'\right] \\ &-2\mathcal{I}^{(1)}\left(\Psi' - E'_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j - n^j\partial_j\Phi\right) + \frac{1}{2}\left[(\Phi+\Psi)n^i - E^i{}_j\hat{n}^j\right]\partial_i\mathcal{I}^{(1)} = \frac{1}{4}C^{(2)}[\mathcal{I}]. \end{aligned} \tag{6.74}$$

Nous n'avons pas encore déterminé le terme de collision au second ordre. Une étude a déjà été réalisée dans [Bartolo *et al.* 06]. L'étape suivante consiste à trouver des méthodes efficaces numériquement pour intégrer l'équation de Boltzmann au second ordre une fois décomposée en multipôles. Une étape intermédiaire permettant de capturer l'essentiel de la physique consistera à d'abord en considérer la limite fluide.

6.3.4 Limite fluide de l'équation de Boltzmann

En négligeant la pression anisotrope, et en définissant une approximation de fluide parfait à partir du tenseur énergie-impulsion, on retrouve l'équation de conservation puis l'équation d'Euler, depuis les deux moments les plus bas de l'équation de Boltzmann, ce qui est attendu puisque nous avons montré dans la section 3.3.7 que la théorie cinétique impliquait la conservation du tenseur énergie-impulsion. Cependant une telle méthode fera apparaître la vitesse dans la base de tétrades $U^a e_a$, et si l'on souhaite retrouver les équations (6.11-6.12), il faudra effectuer le changement de base. Cette démarche est détaillée dans [Pitrou 07]. Quant aux conséquences observationnelles sur la surface de dernière diffusion qui peuvent être tirées de cette approximation, nous les aborderons au chapitre suivant. Auparavant, tout comme au premier ordre, il nous faut déterminer les conditions initiales loin dans l'ère de radiation. Celles-ci résultant de la phase d'inflation primordiale, nous devons étudier les effets non-linéaires pendant l'inflation et ceci est également traité dans le chapitre suivant.

Chapitre 7

L'inflation au delà de l'ordre linéaire et signature à grande échelle

Sommaire

7.1 Généralités 91
7.2 Ondes gravitationnelles générées par des effets de second-ordre pendant l'inflation (article) 92
7.3 Le formalisme in-in 92
7.4 Perturbations scalaires générées au second ordre 93
7.5 Les signatures observationnelles 94
7.5.1 Statistiques sur des champs 94
7.5.2 Le bispectre aux grandes échelles 96

7.1 Généralités

Dans le modèle le plus simple d'inflation à un champ en roulement lent, on ne peut avoir que de très faibles niveaux de non-gaussianité. En effet, afin d'avoir un roulement lent le potentiel doit être suffisamment plat ce qui limite considérablement l'amplitude des termes quadratiques. On montre ainsi [Bernardeau & Uzan 02, Maldacena 03] que le paramètre caractérisant la non-gaussianité, $f_{\rm NL}$, est nécessairement de l'ordre des paramètres de roulement lent. Les modèles d'inflation pouvant générer des taux significatifs de non-gaussianité font nécessairement intervenir un contenu matériel plus sophistiqué, par exemple avec plusieurs champs couplés, un terme cinétique non standard, ou bien permettant de ne pas être toujours en roulement lent grâce à un potentiel bien spécifique. Nous avons vu que pour des perturbations adiabatiques, la perturbation de courbure comobile était conservée ce qui revient à établir une loi de conservation pour l'ordre de grandeur des non-gaussianités. Lorsqu'il y a plusieurs champs, il existe un degré de liberté qui n'est pas adiabatique, dit isocourbure, si bien que cela relache cette contrainte sur le taux de non-gaussianité. On peut ainsi construire un modèle d'inflation à deux champs exploitant ce degré de liberté isocourbure avant de revenir à des perturbations

adiabatiques [Bernardeau & Uzan 02]. Dans ce cas on peut obtenir de façon générique une non-gaussianité très forte, souvent non paramétrisable par le paramètre $f_{\rm NL}$. Une autre source de non-gaussianité primordiale se situe pendant le réchauffement, c'est-à-dire lors de la transition entre la fin de l'inflation et l'ère dominée par la radiation [Bartolo *et al.* 04a]. En effet, le ou les champs présents pendant l'inflation doivent se désintégrer en d'autres champs, éventuellement ceux du modèle standard des particules. Ce processus, appelé réchauffement, peut éventuellement générer des non-gaussianités via une désintégration inhomogène du champ scalaire [Kofman 03, Bernardeau *et al.* 04b]. Il existe deux manières de traiter les effets non-linéaires pendant l'inflation. Soit on traite quantiquement les perturbations linéaires comme dans le modèle standard de l'inflation, pour ensuite considérer les effets non-linéaires dans les équations d'Einstein, en remplaçant les variables de premier ordre par des variables stochastiques. Soit on traite les termes non-linéaires quantiquement dès le début afin d'être plus cohérent dans la démarche, et alors les termes non-linéaires sont pris en compte en utilisant la représentation en intéraction de la théorie quantique. La première approche est celle qui a été considérée dans [Rigopoulos *et al.* 06a, Rigopoulos *et al.* 06b], tandis que la seconde approche est considérée dans [Maldacena 03, Seery & Lidsey 05b, Seery & Lidsey 05a, Chen *et al.* 06, Chen *et al.* 08]. Dans le cas d'un champ test, on peut montrer que ces deux approches donnent le même résultats pour les échelles super-Hubble [Bernardeau *et al.* 04a].

7.2 Ondes gravitationnelles générées par des effets de second-ordre pendant l'inflation (article)

Nous allons présenter dans l'article qui suit les résultats obtenus à propos des ondes gravitationnelles générées au second ordre lorsque l'on traite l'interaction au second ordre de façon classique. Nous montrerons alors que la dépendance en $\mathbf{k}_i$ est différente du traitement complètement quantique, tandis que l'ordre de grandeur en fonction des paramètres de roulement lent ainsi qu'en fonction de l'échelle d'inflation H est le même. Ce résultat était déjà connu pour les perturbations scalaires [Rigopoulos *et al.* 05, Acquaviva *et al.* 03]. On montre ainsi que le bispectre avec un degré de liberté tensoriel et deux degrés de libertés scalaires, $\langle E\mathcal{R}\mathcal{R}\rangle$ est de même amplitude que le bispectre à trois scalaires $\langle\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\rangle$. Nous effectuons également une comparaison du formalisme en coordonnées avec le formalisme $1+3$. Nous montrons que lorsque l'on développe le formalisme $1+3$ autour d'un espace homogène et isotrope, on retrouve les résultats de l'approche en coordonnées. Cependant nous montrons que la notion d'onde gravitationnelle est dépendante de l'approche, selon qu'on la définit à partir d'observateurs de l'espace physique ou à partir d'observateurs (fictifs) de l'espace de fond. Ceci peut avoir une importance pour montrer la correspondance formelle entre les deux formalismes.

7.3 Le formalisme in-in

Nous allons maintenant résumer les idées essentielles du traitement complètement quantique des effets non-linéaires, initié dans [Maldacena 03]. Si l'on souhaite obtenir des prédictions inflationnaires au delà de l'ordre linéaire, alors il faut perturber l'action jusqu'au troisième ordre et traiter les termes cubiques comme une perturbation au lagrangien quadratique [Weinberg 05]. On utilise la représentation en interaction, car on ne peut trouver de solution analytique simple

des équations d'évolution si l'on inclut le terme cubique. On traite alors $\mathcal{H}^{(3)} = -\mathcal{L}^{(3)}$ comme un Hamiltonien d'interaction. Pour tout opérateur construit à partir de $\hat{v}$ et $\hat{\pi}$ on peut relier sa valeur $\hat{Q}_I(\eta)$ obtenue s'il est évolué avec le Hamiltonien libre $\mathcal{H}^{(2)}$ à sa valeur $\hat{Q}(\eta)$ si son évolution est donnée par le Hamiltonien total $\mathcal{H}^{(2)} + \mathcal{H}^{(3)} + \dots$. On montre alors que

$$\mathcal{Q}(\eta) = \left(\mathcal{U}^I\right)^{-1}(\eta, -\infty)\mathcal{Q}_I(\eta)\mathcal{U}^I(\eta, -\infty), \tag{7.1}$$

où

$$\mathcal{U}^I(\eta, -\infty) = \mathcal{T}\exp\left(-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\eta} H^{(3)}(\eta')\mathrm{d}\eta'\right). \tag{7.2}$$

La notation $\mathcal{T}$ signifie que l'exponentielle est définie à partir de son développement en série et que les champs intervenant dans chaque terme de ce développement doivent y être ordonnés en temps croissants de droite à gauche. Ce formalisme s'appelle *in-in* car il donne les corrélations de deux états entrants plutôt qu'une probabilité de transition comme dans une expérience standard de physique des particules. La première utilisation qui peut en être faite consiste à calculer le corrélateur à trois points qui nécessite un Langrangien cubique. Cette contribution va venir uniquement du Langrangien d'intéraction. En termes d'équations d'Einstein, elles provient des équations écrites au second ordre. On obtient à l'ordre le plus bas en perturbations

$$\langle 0|\hat{v}(\eta,\mathbf{x}_1)\hat{v}(\eta,\mathbf{x}_3)\hat{v}(\eta,\mathbf{x}_3)|0\rangle = -\int_{-\infty}^{\eta}\langle 0|\left[\hat{v}(\eta,\mathbf{x}_1)\hat{v}(\eta,\mathbf{x}_3)\hat{v}(\eta,\mathbf{x}_3), H^{(3)}(\eta')\right]|0\rangle\mathrm{d}\eta'. \tag{7.3}$$

Afin de sélectionner le vide en intéraction, on déforme le contour d'intégration en remplaçant η par $\eta + \mathrm{i}\epsilon_E|\eta|$, où ϵ_E est un nombre infiniment petit qui permet de faire converger $\exp(-\mathrm{i}k\eta)$.

7.4 Perturbations scalaires générées au second ordre

Les résultats obtenus sont présentés plus en détails dans [Maldacena 03]. En espace de Fourier, on obtient dans le cas où les impulsions $\mathbf{k}_1$ $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{k}_3$ sont du même ordre de grandeur

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_1}(\eta)\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_2}(\eta)\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_3}(\eta)|0\rangle &= \frac{\delta_{\mathrm{D}}^3(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)}{(2\pi)^{3/2}}\left[-2+\delta-\frac{\epsilon}{2}\left(1+\frac{k_1^2+k_2^2}{k_3^2}\right)-2\epsilon\frac{k_1^2+k_2^2}{k_3\left(k_1+k_2+k_3\right)}\right]\\ &\quad .P_{\mathcal{R}}(k_1)P_{\mathcal{R}}(k_2)+(1\to 2\to 3)+(1\to 3\to 2)\,.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Dans la limite dite *squeezed*, où $k_3 \ll k_1, k_2$ on obtient

$$\langle 0|\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_1}(\eta)\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_2}(\eta)\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_3}(\eta)|0\rangle = \frac{\delta_{\mathrm{D}}^3(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)}{(2\pi)^{3/2}}\left(-4+2\delta-4\epsilon\right)P_{\mathcal{R}}(k_1)P_{\mathcal{R}}(k_3)\,. \tag{7.5}$$

C'est à partir de ces résultats que nous pouvons conclure que

$$\frac{\mathcal{R}_I^{(2)}}{2} \simeq -\mathcal{R}_I^{(1)2} + \mathcal{O}(\epsilon,\delta)\,, \tag{7.6}$$

et ceci peut être utilisé dans la conditions initiale (6.31). Cette méthode a été généralisée au cas d'un terme cinétique non-standard dans [Seery & Lidsey 05b] puis au cas multi-champs dans [Seery & Lidsey 05a]. On peut pousser le calcul perturbatif jusqu'aux corrections à une boucle. Ceci a été étudié dans [Weinberg 05, Seery 07, Sloth 06, Sloth 07].

7.5 Les signatures observationnelles

7.5.1 Statistiques sur des champs

Nous avons vu précédemment que les champs stochastiques résultants de la quantification des perturbations linéaires avaient une statistique gaussienne. Par conséquent il suffit de caractériser la fonction de corrélation à deux points pour caractériser toutes les propriétés du champ. En espace de Fourier [1], en utilisant l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie statistique de l'univers, on obtient pour le champ $\mathcal{R}$

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(1)}\mathcal{R}_{\mathbf{k}'}^{(1)}\rangle \equiv \delta_{\mathrm{D}}^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')P_{\mathcal{R}}(k)\,. \tag{7.7}$$

Le champ en espace réel sous-jacent $\mathcal{R}^{(1)}(\mathbf{x})$ est réel si bien que $\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(1)} = \mathcal{R}_{-\mathbf{k}}^{(1)*}$. Tous les autres champs de la théorie linéaire sont formés à partir de combinaisons linéaires de $\mathcal{R}^{(1)}$ et présentent donc également une statistique gaussienne. Nous avons cependant vu qu'en prenant en compte la dynamique au delà de la théorie linéaire, le champ $\mathcal{R}$ développait nécessairement une statistique non-gaussienne puisque le corrélateur à trois points est non-nul. Cela revient à considérer que $\mathcal{R}^{(1)}$ possède une statistique gaussienne tandis que $\mathcal{R}^{(2)}$ n'est pas gaussien et peut être écrit sous la forme

$$\frac{\mathcal{R}_{\mathbf{k}}^{(2)}}{2} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3\mathbf{k}_1\mathrm{d}^3\mathbf{k}_2\delta_{\mathrm{D}}^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)f_{\mathrm{NL}}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k})\mathcal{R}_{\mathbf{k}_1}^{(1)}\mathcal{R}_{\mathbf{k}_2}^{(1)}\,. \tag{7.8}$$

Ceci constitue une définition de f_{NL} [2]. En effet d'après le théorème de Wick, un telle décomposition implique

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_1}(\eta)\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_2}(\eta)\hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}_3}(\eta)\rangle &= \frac{\delta_{\mathrm{D}}^3(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)}{(2\pi)^{3/2}}\Big[2f_{\mathrm{NL}}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)P_{\mathcal{R}}(k_1)P_{\mathcal{R}}(k_2)\\ &\quad +(1\to 2\to 3)+(1\to 3\to 2)\Big]\,.\end{aligned} \tag{7.9}$$

On lit donc sur l'expression (7.4) que dans le cas d'une inflation en roulement lent à un champ

$$f_{\mathrm{NL}}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) = \left[-1+\frac{\delta}{2}-\frac{\epsilon}{4}\left(1+\frac{k_1^2+k_2^2}{k_3^2}\right)-\epsilon\frac{k_1^2+k_2^2}{k_3\left(k_1+k_2+k_3\right)}\right]. \tag{7.10}$$

On pourra éventuellement utiliser la variable $\tilde{\mathcal{R}}$ définie par

$$\exp\left(2\tilde{\mathcal{R}}\right) \equiv 1+2\mathcal{R}. \tag{7.11}$$

On y associera alors

$$\tilde{f}_{\mathrm{NL}}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) = f_{\mathrm{NL}}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)+1, \tag{7.12}$$

et c'est donc pour cette variable que l'on pourra conclure que les effets non linéaires pendant l'inflation sont négligeables puisque proportionnels aux paramètres de roulement lent. De même on pourra définir un f_{NL} pour d'autres champs tels que Φ et Ψ en utilisant une définition similaire à (7.8).

1. Toujours dans la convention qui équilibre les facteurs 2π entre la transformée de Fourier et sa réciproque.
2. Rigoureusement on doit soustraire la valeur moyenne de ce terme quadratique, mais ce terme supplémentaire est proportionnel à $\delta_{\mathrm{D}}^3(\mathbf{k})$ et n'aura donc pas de conséquence lorsque l'on s'intéressera au bispectre.

Lorsque nous nous intéressons aux conséquences observationnelles, il faut non pas considérer la fonction de corrélation à trois points dans les sections d'espace à trois dimensions mais sur la sphère bidimensionnelle des observations. On cherchera donc plutôt à caractériser les moyennes d'ensemble de type

$$\langle f(\hat{\mathbf{n}}_1) f(\hat{\mathbf{n}}_2) f(\hat{\mathbf{n}}_3)\rangle. \tag{7.13}$$

Nous présentons ici des idées tirées de [Komatsu 02, Bartolo *et al.* 04a]. Nous avons déjà vu que l'espace de Fourier associé est celui des harmoniques sphériques et on utilisera la décomposition

$$f(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}). \tag{7.14}$$

Lorsque l'on considère la fonction de corrélation à deux points sur la sphère observée, on considère

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a^*_{\ell_2 m_2}\rangle = C_{\ell_1} \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2} \tag{7.15}$$

où le présence des symboles de Kronecker provient de l'isotropie statistique supposée, l'égalité définissant donc la variance C_ℓ des $a_{\ell m}$. On vérifie bien qu'en utilisant la propriété des harmoniques sphériques

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}_1) Y^*_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}_1) = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\hat{\mathbf{n}}_1.\hat{\mathbf{n}}_2), \tag{7.16}$$

on retrouve la relation (3.12).

La fonction de corrélation à trois points dans l'espace des harmoniques sphériques sera caractérisée par le bispectre $B_{\ell_1\ell_2\ell_3}$ défini par

$$\langle a_{\ell_1 m_1} a_{\ell_2 m_2} a_{\ell_3 m_3}\rangle \equiv B^{m_1 m_2 m_3}_{\ell_1\ell_2\ell_3} = B_{\ell_1\ell_2\ell_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \tag{7.17}$$

Le symbole à droite du second membre est un Wigner-3j qui est directement relié au coefficients de Clebsch-Gordan et caractérise le couplage de deux moments cinétiques (ℓ_1, m_1) (ℓ_2, m_2) en un moment cinétique(ℓ_3, m_3). Les ℓ doivent donc satisfaire l'inégalité triangulaire ainsi que les propriétés $\ell_1+\ell_2+\ell_3 = 2n$ et $m_1+m_2+m_3 = 0$ imposées par la parité. On peut montrer que les Wigner-3j assurent l'isotropie statistique ainsi que l'invariance par parité. On peut inverser la relation (7.17) en utilisant

$$\sum_{m_1' m_2'} = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1' & m_2' & m_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L \\ m_1' & m_2' & M' \end{pmatrix} = \frac{\delta_{\ell_3 L} \delta_{m_3' M'}}{2L+1}. \tag{7.18}$$

On obtient alors

$$B_{\ell_1\ell_2\ell_3} = \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} B^{m_1 m_2 m_3}_{\ell_1\ell_2\ell_3}. \tag{7.19}$$

De plus on définit le bispectre réduit $b_{\ell_1\ell_2\ell_3}$ par

$$B_{\ell_1\ell_2\ell_3} = \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b_{\ell_1\ell_2\ell_3}, \tag{7.20}$$

c'est-à-dire

$$B^{m_1 m_2 m_3}_{\ell_1\ell_2\ell_3} = \mathcal{G}^{m_1 m_2 m_3}_{\ell_1\ell_2\ell_3} b_{\ell_1\ell_2\ell_3}, \tag{7.21}$$

où on a utilisé l'équation (7.18) ainsi que la définition

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{m_1 m_2 m_3}_{\ell_1\ell_2\ell_3} &\equiv \int \mathrm{d}\hat{\mathbf{n}} Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_3 m_3}(\hat{\mathbf{n}}) \\ &= \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

L'intérêt du bispectre réduit réside dans le fait qu'il contient autant d'information que $B^{m_1 m_2 m_3}_{\ell_1\ell_2\ell_3}$ du fait de l'invariance statistique rotationnelle. De plus, dans la limite du ciel plat le lien avec le bispectre réduit est plus immédiat. Nous ne détaillerons pas plus la construction d'estimateurs pour le bispectre ainsi que l'influence d'une couverture partielle du ciel sur ces estimateurs. Plus de détails peuvent être trouvés dans les références [Yadav *et al.* 07a, Komatsu *et al.* 05, Creminelli *et al.* 07a, Yadav *et al.* 07b].

Une question se pose maintenant. Comment relie t'on les $f_{\rm NL}$ prédits par différents modèles d'inflation aux bispectres observés en prenant en compte les effets de l'évolution. Nous aborderons cette question dans la section suivante, en nous focalisant sur les grandes échelles.

7.5.2 Le bispectre aux grandes échelles

Dans la limite des grandes échelles, l'effet dominant des anisotropies de température est l'effet Sachs-Wolfe propre. Nous avons déjà calculé l'effet au premier ordre, c'est-à-dire relié la perturbation de courbure comobile via les potentiels gravitationnels aux fluctuations de température. Cependant nous devons encore relier les fluctuations de courbure comobile au second-ordre avec les fluctuations de température au second ordre. En effet la fonction f dans la définition (7.13) doit être reliée facilement à une mesure physique du CMB. On peut donc prendre le contraste de densité de l'énergie de la radiation reçue depuis une direction $\hat{\mathbf{n}}$ ou bien le contraste de température. On rappelle que la température est alors définie via la relation (3.9) et que l'on peut l'interpréter comme une température si le spectre de corps noir de la radiation n'a pas été déformé. Ceci n'est pas garanti au second ordre sauf si l'épaisseur de la surface de dernière diffusion est infiniment fine et si l'on peut négliger la vitesse des baryons, ce qui est le cas lorsque l'on s'intéresse aux grandes échelles. En effet on considère dans ce cas qu'avant la surface de dernière diffusion le couplage avec les baryons était fort et donc la radiation en équilibre thermique, puis que les photons ont instantanément continué sur des géodésiques sans interaction et que le spectre n'a donc pas été déformé.

Aux grandes échelles, d'après l'équation de Poisson (2.21,6.3), on a pour le contraste de densité du fluide total

$$\delta^{(1)} = -2\Phi^{(1)} \qquad \delta^{(2)} = -2\Phi^{(2)} + 8\Psi^{(1)2}. \tag{7.23}$$

On utilise ensuite les conditions initiales adiabatiques (6.51) afin de déterminer $\delta^{(2)}_m$ et $\delta^{(2)}_r$ à partir de $\delta^{(2)}$. Aux grandes échelles on montre, en utilisant les équations de conservation (6.11) pour la matière et pour la radiation, que les conditions initiales adiabatiques sont conservées. D'après l'équation (6.65), on en déduit donc que pour de telles conditions initiales aux grandes échelles

$$\Theta^{(1)} = \frac{\Phi^{(1)}}{3}, \qquad \Theta^{(2)} = \frac{\Phi^{(2)}}{3} - \frac{5}{9}\Phi^{(1)2}. \tag{7.24}$$

On a utilisé dans les expressions précédentes le fait que le découplage a lieu au moment ou l'univers est dominé par la matière et donc $\delta \simeq \delta_m$. On peut utiliser les expressions (6.32-6.30) évaluées dans l'ère de matière pour en conclure qu'aux grandes échelles

$$\Theta^{(2)} = \frac{1}{5}\left(\mathcal{R}^{(2)} + 2\mathcal{R}^{(1)2}\right) + \frac{\Phi^{(1)2}}{9} + \frac{2}{3}\Delta^{-1}\partial_i\Phi^{(1)}\partial^i\Phi^{(1)} - 2\Delta^{-2}\partial^j\partial_i\left(\partial_j\Phi^{(1)}\partial^i\Phi^{(1)}\right). \quad (7.25)$$

Dans le cas de l'inflation à un champ en roulement lent, nous avons déjà vu que $\tilde{\mathcal{R}}^{(2)} = \mathcal{R}^{(2)} + 2\mathcal{R}^{(1)2}$, qui correspond au bispectre primordial, était proportionnel aux paramètres de roulement lent et donc par conséquent négligeable. On en déduit que pour ce type d'inflation, l'essentiel du bispectre en température est donc essentiellement lié à des effets d'évolution. Dans la littérature [Komatsu & Spergel 01, Komatsu *et al.* 03, Bartolo *et al.* 04c] on définit le bispectre en température par[3]

$$\frac{\Theta^{(2)}_k}{2} = g(k,\eta_{\rm LSS})\mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)f^{\Theta}_{\rm NL}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k})\Phi^{(1)}_{\mathbf{k}_1}\Phi^{(1)}_{\mathbf{k}_2}, \quad (7.26)$$

où

$$g(k,\eta) \equiv \frac{\Theta^{(1)}(k,\eta)}{\Phi^{(1)}(k,\eta)}. \quad (7.27)$$

Aux grandes échelles on a donc

$$f^{\Theta}_{\rm NL}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}) = \left[\frac{5}{3}\tilde{f}_{\rm NL}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}) + \frac{1}{6} + \frac{\mathbf{k}_1.\mathbf{k}_2}{k^2} - 3\frac{(\mathbf{k}.\mathbf{k}_1)(\mathbf{k}.\mathbf{k}_2)}{k^4}\right]. \quad (7.28)$$

L'avantage d'une telle définition est qu'elle permet de considérer une décomposition de la température en harmoniques sphériques jusqu'au second ordre selon

$$\begin{aligned} a^{(1)}_{\ell m} &= 4\pi i^\ell \int \frac{{\rm d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} g_\ell(k,\eta_{\rm LSS})\Phi^{(1)}(\mathbf{k})Y^*_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) \\ \frac{a^{(2)}_{\ell m}}{2} &= 4\pi i^\ell \int \frac{{\rm d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} g_\ell(k,\eta_{\rm LSS})\mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)f^{\Theta}_{\rm NL}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k})\Phi^{(1)}_{\mathbf{k}_1}\Phi^{(1)}_{\mathbf{k}_2}Y^*_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Historiquement, il s'agit d'une extension de la formule au premier ordre [Komatsu & Spergel 00] aux grandes échelles. On a donc d'abord supposé que la formule au second ordre était la même qu'au premier ordre aux grandes échelles (dans cette limite $g(k,\eta_{\rm LSS}) = 1/3$) en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^{(1)}}{3} &= \Theta^{(1)} \\ \frac{1}{2}\frac{\Phi^{(2)}}{3} &= \frac{\Theta^{(2)}}{2} = \mathcal{C}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\frac{1}{3}f^{\Phi}_{\rm NL}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k})\Phi^{(1)}_{\mathbf{k}_1}\Phi^{(1)}_{\mathbf{k}_2}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Il s'agissait de réaliser rapidement des analyses des données. Puis se rendant compte qu'il n'était pas correct de transposer au second ordre des résultats obtenus au premier ordre, l'expression de $f^{\Theta}_{\rm NL}$ a été établie et il a alors fallu rebaptiser $\Phi^{(2)}$ en $\mathbf{\Phi^{(2)}}$ dans les équations (7.30) qui sont alors devenues des définitions dans lesquelles on a remplacé $f^{\Phi}_{\rm NL}$ par $f^{\Theta}_{\rm NL}$. Pour ensuite pouvoir

3. Plus précisément avec un signe opposé. Nous ne conservons pas ce signe.

étendre cette définition à des modes pas nécessairement super-Hubble on a alors utilisé la définition (7.26), c'est-à-dire remplacé 1/3 par $g(k,\eta_{\rm LSS})$. Finalement cette définition permet d'avoir une similarité dans les expressions (7.29) des $a_{\ell m}$. Une dépendance géométrique supplémentaire, qui n'est pas justifiée, a été suggérée dans les références [Bartolo *et al.* 04a, Bartolo *et al.* 04c] mais elle n'a pas été reprise dans les travaux qui y succèdent.

En utilisant la définition du bispectre réduit (7.21-7.17) ainsi que la décomposition en harmoniques sphériques (7.29), la propriété (7.9) avec Φ à la place de $\hat{\mathcal{R}}$ et les relations

$$\begin{aligned} \delta(k) &= \int \frac{{\rm d}x}{2\pi}\exp\left({\rm i}kx\right), & (7.31) \\ \exp\left({\rm i}\mathbf{k}.\mathbf{r}\right) &= 4\pi\sum_{\ell m} i^\ell j_\ell(kr)Y^*_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}})Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}), & (7.32) \end{aligned}$$

on montre [Creminelli *et al.* 06, Komatsu & Spergel 01] que si $f^{\Theta}_{\rm NL}$ ne dépend que des modules k_1, k_2, k_3 et pas des directions $\hat{\mathbf{k}}_1$, $\hat{\mathbf{k}}_2$, $\hat{\mathbf{k}}_3$, alors

$$\begin{aligned} b_{\ell_1\ell_2\ell_3} &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{G}^{m_1m_2m_3}_{\ell_1\ell_2\ell_3}\right)^{-1}\left[\langle a^{(2)}_{\ell_1m_1}a^{(1)}_{\ell_2m_2}a^{(1)}_{\ell_3m_3}\rangle + \langle a^{(1)}_{\ell_1m_1}a^{(2)}_{\ell_2m_2}a^{(1)}_{\ell_3m_3}\rangle + \langle a^{(1)}_{\ell_1m_1}a^{(1)}_{\ell_2m_2}a^{(2)}_{\ell_3m_3}\rangle\right] \\ &= 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\int k_1^2{\rm d}k_1k_2^2{\rm d}k_2k_3^2{\rm d}k_3r^2{\rm d}rP(k_1)P(k_2)g_{\ell_1}(k_1,\eta_{\rm LSS})g_{\ell_2}(k_2,\eta_{\rm LSS})g_{\ell_3}(k_3,\eta_{\rm LSS}) \\ &\quad .j_{\ell_1}(k_1)j_{\ell_2}(k_2)j_{\ell_3}(k_3)f^{\Theta}_{\rm NL}(k_1,k_2,k_3) + (1\to2\to3) + (1\to3\to2). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Dans le cas où l'on suppose de plus que $f^{\Theta}_{\rm NL}$ est constant et n'a aucune dépendance en k_1 k_2 k_3, ceci se récrit sous la forme plus compacte

$$b_{\ell_1\ell_2\ell_3} = 2f^{\Theta}_{\rm NL}\int r^2{\rm d}r\left[\beta_{\ell_1}(r)\beta_{\ell_2}(r)\alpha_{\ell_3}(r) + (1\to2\to3) + (1\to3\to2)\right] \quad (7.34)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_\ell(r) &= \frac{2}{\pi}\int k^2{\rm d}k g_\ell(k,\eta_{\rm LSS})j_\ell(kr), \\ \beta_\ell(r) &= \frac{2}{\pi}\int k^2{\rm d}k g_\ell(k,\eta_{\rm LSS})j_\ell(kr)P(k). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Evidemment comme nous avons montré que cette approximation n'était pas possible, il faut aller plus loin. On décompose alors $f^{\Theta}_{\rm NL}$ grâce aux polynômes de Legendre selon

$$f^{\Theta}_{\rm NL}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) = \sum_{n=0}^{2} f_n(k_1,k_2,k_3)P_n(\hat{\mathbf{k}}_1.\hat{\mathbf{k}}_2). \quad (7.36)$$

On peut alors généraliser la formule précédente au prix d'un accroissement du temps de calcul. Nous ne reportons ni le détail ni le résultat de ce calcul mais il peut être trouvé dans [Liguori *et al.* 06].

Une possible détection d'un bispectre primordial de type constant est reportée dans la référence [Yadav & Wandelt 07] tandis que les études précédentes étaient compatibles avec une absence de bispectre primordial de type constant [Komatsu *et al.* 03, Creminelli *et al.* 07b, Spergel *et al.* 07].

Troisième partie

Cosmologie dans un univers anisotrope

Chapitre 8

Théorie des perturbations autour d'un espace de Bianchi I

Un problème essentiel des prédictions inflationnaires réside dans le fait que l'inflation explique l'homogénéité l'isotropie et même la platitude de l'univers au niveau de l'espace de fond, mais suppose ces conditions déjà établies et que l'inflaton a atteint un régime de roulement lent depuis un temps asymptotiquement petit afin d'obtenir des prédictions quantiques au niveau des perturbations. Ceci suppose donc que le nombre de e-folds pendant l'inflation soit très grand de telle sorte que l'isotropie de l'espace de fond soit atteinte longtemps avant que l'on puisse traiter les perturbations dans leur vide quantique. Si le nombre d'e-folds n'est que de l'ordre de grandeur du nombre d'e-folds depuis la fin de l'inflation, ou si il est plus grand mais que l'inflaton n'a atteint l'attracteur de roulement que tardivement, alors les conditions initiales des modes devenant sub-Hubble aujourd'hui ne sont pas bien définies. Nous nous intéressons donc dans l'article qui suit à la théorie des perturbations dans un espace anisotrope de type Bianchi I. Le but est de pouvoir traiter les perturbations en même temps que le processus d'isotropisation de l'univers. La différence principale de la dynamique de fond avec le cas isotrope réside dans la variation temporelle de la métrique spatiale γ_{ij}. On caractérisera cette phase avec le cisaillement défini par

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\gamma_{ij}\right)' \,, \quad \sigma^2 \equiv \sigma_{ij}\sigma^{ij} \,. \tag{8.1}$$

Dans le cas d'un espace de Bianchi I, on montre que pour un contenu matériel ne comportant pas de pression anisotrope, comme c'est le cas pour un champ scalaire, le cisaillement évolue comme [1] $\sigma \sim a^{-2}$, si bien que les effets d'une éventuelle anisotropie sont attendus uniquement dans la phase primordiale de l'univers, c'est-à-dire pendant l'inflation. Formellement on va montrer que les variables de Mukhanov-Sasaki se généralisent, puis dans le chapitre suivant nous montrerons que leur quantification est spécifique au cas isotrope et qu'il n'est plus possible d'obtenir des prédictions robustes pour des modes trop grands.

1. Dans le cas général d'un espace de Bianchi quelconque, l'équation satisfaite par le cisaillement est $(\sigma^i{}_j)' + 2\mathcal{H}\sigma^i{}_j = -\left({}^{(3)}R^i{}_j - {}^{(3)}R\delta^i_j/3\right)$. Dans le cas d'un espace de Bianchi I, les sections spatiales sont plates et donc $(a^2\sigma)' = 0$.

8.1 Variables invariantes de jauge dans le cas d'un espace de Bianchi quelconque

Dans l'article précédent, nous avons construit des variables invariantes de jauge pour le cas d'un espace de fond de type Bianchi I. On peut généraliser ce procédé à tout espace de fond homogène mais pas nécéssairement isotrope en utilisant le formalisme $1+3$ sur l'espace de fond. Un espace de Bianchi est caractérisé par un ensemble d'observateurs de quadrivitesse $\bar{u}_\mu$ en chute libre ($\bar{a}_\mu = \bar{u}^\nu\bar{\nabla}_\nu\bar{u}_\mu = 0$), et sans vorticité ($\bar{\omega}_{\mu\nu} = 0$) [Ellis & MacCallum 69]. La courbure extrinsèque des surfaces orthogonales à ces observateurs est donc

$$\bar{K}_{\mu\nu} = \bar{D}_\mu\bar{u}_\nu = \bar{\nabla}_\mu\bar{u}_\nu \,. \tag{8.2}$$

Les sections spatiales sont homogènes mais pas nécessairement isotropes. On considère maintenant une perturbation de cette métrique de fond $\delta g_{\mu\nu}$ et un changement de jauge généré par un champ vectoriel ξ^μ. On peut décomposer ce champ vectoriel en $1+3$ selon

$$\xi^\mu \equiv -\bar{u}^\mu T + \hat{L}^\mu \equiv -\bar{u}^\mu T + \bar{D}^\mu L + L^\mu \tag{8.3}$$

avec $\bar{D}_\mu L^\mu = \bar{u}^\mu L_\mu = \bar{u}^\mu\hat{L}_\mu = 0$, si bien que la transformation de jauge $\delta g_{\mu\nu} \to \delta g_{\mu\nu} + 2\bar{\nabla}_{(\mu}\xi_{\nu)}$ prend la forme

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu} \;\to\; & \delta g_{\mu\nu} + 2\bar{D}_{(\mu}\hat{L}_{\nu)} - 2\bar{u}_{(\mu}\left[\hat{L}_{\mu)}\right]^{\cdot} + 2T\bar{K}_{\mu\nu} \\ & + 2\bar{K}_{\alpha(\mu}\hat{L}^\alpha\bar{u}_{\nu)} + 2\bar{u}_{(\mu}\bar{D}_{\nu)}T - 2\bar{u}_\mu\bar{u}_\nu\dot{T} \,.\end{aligned} \tag{8.4}$$

On considère une décomposition de la métrique perturbée de la forme

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu} \;\equiv\; & -2\Phi\bar{u}_\mu\bar{u}_\nu + 2\left(\bar{D}_\alpha B + B_\alpha - 2\bar{K}_{\alpha\lambda}\bar{D}^\lambda E\right)\bar{u}_{(\nu}\bar{h}^\alpha{}_{\mu)} \\ & -2\Psi\frac{3\bar{K}_{\mu\nu}}{\bar{K}^\alpha_\alpha} + 2\bar{D}_\mu\bar{D}_\nu E + 2\bar{D}_{(\mu}E_{\nu)} + 2E_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{8.5}$$

avec

$$\bar{D}_\mu a = 0, \quad \bar{D}^\mu E_{\mu\nu} = 0, \quad E^\mu{}_\mu = 0, \quad \bar{D}^\mu E_\mu = 0, \quad \bar{D}^\mu B_{\mu=0} \,. \tag{8.6}$$

En projetant selon $\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu$, $\bar{u}^\mu\bar{h}^\nu{}_\alpha$ et $\bar{h}^\mu{}_\beta\bar{h}^\nu{}_\alpha$, on obtient alors que sous une transformation de jauge du premier ordre les variables de perturbation se transforment selon

$$\begin{aligned}\Psi \;&\to\; \Psi - \frac{\bar{K}^\alpha_\alpha}{3}T \\ \Phi \;&\to\; \Phi + \mathcal{L}_u(T) \\ E \;&\to\; E + L \\ B \;&\to\; B - T + \mathcal{L}_u(L) \\ B^\mu \;&\to\; B^\mu + \mathcal{L}_u L^\mu \\ E^\mu \;&\to\; E^\mu + L^\mu \\ E_{\mu\nu} \;&\to\; E_{\mu\nu} \,.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Il est ensuite facile d'incorporer une transformation conforme $\tilde{\mathbf{g}} \equiv a^2\mathbf{g}$ dans le raisonnement précédent. On utilisera que $\mathcal{L}_u(\tilde{\mathbf{g}}) = a^2\mathcal{L}(\mathbf{g}) + 2a\mathcal{L}_u(a)\mathbf{g}$, ce qui permettra de calculer le changement

de courbure extrinsèque ($\tilde{K}_{\mu\nu} \equiv K_{\mu\nu} + \frac{\mathcal{L}_u(a)}{a}\bar{h}_{\mu\nu}$) ainsi que la modification de la transformation de jauge de la métrique. On choisira la transformation conforme telle que $K^{\alpha}_{\ \alpha} = 0$ afin que toute l'expansion volumique soit dans le facteur d'échelle a. On aura donc $\tilde{K}^{\alpha}_{\ \alpha} = 3\frac{\mathcal{L}_u(a)}{a}$. La forme de la perturbation de la métrique $\tilde{\mathbf{g}}$ sera la même que celle de $\mathbf{g}$ au facteur multiplicatif a^2 près, mais en utilisant la courbure extrinsèque $\tilde{K}_{\mu\nu}$ pour le terme en facteur de Ψ, afin que la loi de transformation de cette variable soit inchangée. On obtiendra finalement les lois de transformation

$$\begin{aligned}
\Psi &\rightarrow \Psi - \frac{\mathcal{L}_u(a)}{a}T \\
\Phi &\rightarrow \Phi + \frac{\mathcal{L}_u(a)}{a}T + \mathcal{L}_u(T) \\
E &\rightarrow E + L \\
B &\rightarrow B - T + \mathcal{L}_u(L) \\
B^{\mu} &\rightarrow B^{\mu} + \mathcal{L}_u(L^{\mu}) \\
E^{\mu} &\rightarrow E^{\mu} + L^{\mu} \\
E_{\mu\nu} &\rightarrow E_{\mu\nu}\,,
\end{aligned} \tag{8.8}$$

et la dérivée $\mathcal{L}_u$ s'identifie alors à la dérivée par rapport au temps conforme. Nous avons obtenu des transformations simples en paramétrant de façon compliquée la perturbation de la métrique. L'avantage est que les lois de transformation sont maintenant exactement similaires à celles dérivées de façon pédestre dans le cas isotrope. Ici nous n'avons fait usage que de l'hypothèse d'homogénéité, puisque dans les calculs nous avons utilisé que pour tout scalaire X de l'espace de fond, $\bar{D}_{\mu}X = 0$. Nous pouvons donc calquer la procédure de construction d'ensembles complets de variables invariantes de jauge sur le cas isotrope, en utilisant par exemple les constructions (5.4), où la dérivée simple par rapport au temps conforme doit être remplacée par la dérivée de Lie $\mathcal{L}_u$. L'ensemble des différentes possibilités est revu dans [Peter & Uzan 05]. On remarque que dans le cas isotrope, $K_{\mu\nu} = 0$, et on retrouve la forme de la perturbation de la métrique (5.2).

Chapitre 9

Modèle d'inflation anisotrope et signatures observationnelles (article)

Lorsque l'on considère les équations d'évolution des degrés de liberté canoniques des perturbations, les termes de masse variables sont cependant très différents du cas isotrope lorsque le cisaillement domine, ce qui va altérer la procédure de quantification. De plus, les degrés de liberté canoniques sont couplés ce qui ne permet pas d'avoir trois champs scalaires indépendants. On peut néanmoins quantifier les degrés de liberté lorsque le cisaillement est intermédiaire et pour des modes pas trop petits, et ainsi prédire le spectre des perturbations primordiales à la fin de l'inflation.

Dans l'article qui suit, nous tirons ainsi les conclusions quant à la quantification des perturbations des degrés de liberté canoniques dans un modèle simple d'inflation, l'inflation chaotique. Les spectres résultants, en plus de dévier de l'invariance d'échelle présentent une dépendance directionnelle héritée de la phase anisotrope. On les décompose donc en harmoniques sphériques selon

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}) = f(k)\left[1+\sum_{\ell=1}^{\ell=\infty}\sum_{m=-\ell}^{m=+\ell} r_{\ell m}(k)\,Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}})\right]. \tag{9.1}$$

Du fait des symétries des espaces de Bianchi I, les coefficients $r_{\ell m}$ sont réels et non nuls uniquement si ℓ et m sont pairs. On montre alors [Pullen & Kamionkowski 07] que les coefficients $a_{\ell m}$ de décomposition en harmoniques sphériques du CMB présentent des corrélations statistiques non diagonales, c'est-à-dire du type $\langle a_{\ell m} a^*_{\ell' m'}\rangle$, si $\ell - \ell'$ est pair.

Conclusion et perspectives de recherche

Cette thèse a essentiellement porté sur la théorie des perturbations, dans le but d'étendre la compréhension que nous avons du modèle cosmologique standard.

Mon premier axe de recherche a été l'étude des perturbations au delà de l'ordre linéaire, en allant des aspects les plus théoriques jusqu'à la résolution des équations dynamiques. Je me suis intéressé à la dépendance de jauge inhérente à la théorie des perturbations afin d'obtenir une formulation invariante de jauge, et j'ai tenté de mettre en relation les différents formalismes utilisés pour traiter les perturbations, dans le but d'obtenir une compréhension la plus complète possible. La dépendance de jauge et les équations dynamiques des perturbations ont été considérées jusque dans le cadre très large de la théorie cinétique, en insistant sur leur relation avec l'approximation fluide qui permet une résolution approchée aisée. La physique des collisions reste cependant à explorer en détails au delà de la théorie linéaire et cela fera l'objet de recherches futures. La précision des mesures attendues de la mission *Planck* rend en effet nécessaire la compréhension de toute la physique non-linéaire, de l'inflation jusqu'aux observations. Quant à la comparaison des formalismes perturbatifs, ceci semble étroitement lié au problème de la moyenne en cosmologie, nécessaire pour décrire l'univers aux grandes échelles. J'espère que les compétences techniques acquises pendant ce travail de thèse me permettront d'engager une réflexion de long terme sur ce problème. Dans un premier temps, j'ai ouvert la voie au calcul informatique des équations de perturbation dans le cadre cosmologique. Si ce travail est poursuivi, il permettra de recentrer les efforts théoriques sur les aspects fondamentaux de la théorie des perturbations plutôt que sur la lourdeur des calculs intermédiaires.

La seconde partie de mes recherches fut consacrée à l'étude des univers anisotropes, dans le but de mieux comprendre les implications du principe cosmologique. Afin d'étudier complètement de tels modèles, il a fallu à la fois travailler sur l'espace de fond et développer la théorie des perturbations. Je me suis restreint au cas le plus simple qui est celui d'un espace de type Bianchi I, pour ensuite en tirer les conséquences sur le spectre de puissance des fluctuations primordiales. Il est techniquement aisé de généraliser la théorie des perturbations invariantes de jauge à tous les types d'espaces anisotropes, mais la résolution des équations dynamiques nécessite de connaître la décomposition en modes pour de tels espaces, et ceci constitue la difficulté principale. Si les anisotropies à grande échelle du fond diffus cosmologique sont confirmées par les nouvelles détections, je pense qu'il sera nécessaire de surmonter ces difficultés mathématiques afin de

posséder un ensemble très large de modèles anisotropes, ainsi que leurs signatures, dans le but de les contraindre observationnellement.

Appendices

Sommaire

A Commutation des dérivées covariantes . . . 109

B Quantités géométriques . . . 110

B.1 Symboles de Christoffel . . . 110

B.2 Connections affines . . . 111

B.3 Tenseur d'Einstein . . . 112

C Perturbations de la matière . . . 114

C.1 Vitesse . . . 114

C.2 Tenseur énergie-impulsion . . . 115

D Équations au second ordre dans le cas plat . . . 116

D.1 Équations de conservation . . . 116

D.2 Équations d'Einstein dans le cas d'un fluide parfait avec $c_s^2 \neq w$ . . . 116

E Conservation de la perturbation de courbure comobile au second ordre . . . 117

A Commutation des dérivées covariantes

Le tenseur de Riemann et les tenseurs associés de la métrique de fond des sections spatiales γ_{ij} est donné par les équations 1.2. Des relations de commutation générales

$$\begin{aligned} [D_i, D_j]\, X_k &= {}^{(3)}R_{qkji} X^q \\ [D_i, D_j]\, X_{kl} &= {}^{(3)}R_{qkji} X^{ql} + {}^{(3)}R_{qlji} X^{kq} \end{aligned} \tag{2}$$

on déduit l'ensemble des relations utiles suivantes.

$$\begin{aligned} [D_i, D_j]\, X_k &= K\gamma_{ik}X_j - K\gamma_{jk}X_i \\ [D_i, D_j]\, X^i &= 2KX_j \\ [\Delta, D_i]\, X &= 2KD_iX \\ [D_i, D_j]\, X^i_{\ k} &= 2KX_{jk} + KX_{kj} + \gamma_{jk}X^i_{\ i} \\ [\Delta, D_j]\, X_k &= 2KD_jX_k + 2KD_kX_j + 2\gamma_{jk}D^iX_i \\ \Delta\Delta X - D_i\Delta D^i X &= -2K\Delta X \\ D_i\Delta^{-1}X &= (\Delta - 2K)^{-1} D_iX \\ D_pX_q &= \left[\Delta\delta^l_p\delta^i_q - 2K\left(\delta^l_p\delta^i_q + \delta^l_q\delta^i_p - \gamma_{pq}\gamma^{il}\right)\right] D_l\Delta^{-1}X_i \\ D_i\Delta^{-1}X^i &= (\Delta + 2K)^{-1} D_iX^i \end{aligned} \tag{3}$$

B Quantités géométriques

On utilise la métrique perturbée (5.2) dans laquelle on choisit $E, B = 0$ et $E_i = 0$, ce qui correspond au choix de la jauge Newtonienne. On rappelle également que les perturbations vectorielles au premier ordre sont négligées si bien qu'au premier ordre $v_i = \partial_i v$ et $B_i = 0$. On rappelle que $\mathcal{H}(\eta) \equiv a'/a$ et également que les indices latins sont montés et baissés avec la métrique spatiale de fond γ_{ij}. On aura par exemple $X^i = \gamma^{ij}X_j$. Toutes les quantités sont perturbées selon la décomposition (2.17).

B.1 Symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel non nuls sont pour l'espace de fond

$${}^{(0)}\Gamma^0_{00} = \mathcal{H},\ {}^{(0)}\Gamma^0_{jk} = \mathcal{H}\gamma_{jk},\ {}^{(0)}\Gamma^i_{0j} = \mathcal{H}\gamma^i_j\,. \tag{4}$$

Au premier ordre on obtient

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\Gamma^0_{00} &= \Phi'\,, && (5)\\ {}^{(1)}\Gamma^0_{0j} &= D_j\Phi\,, && (6)\\ {}^{(1)}\Gamma^i_{00} &= D^i\Phi\,, && (7)\\ {}^{(1)}\Gamma^0_{jk} &= 2\mathcal{H}E_{jk} + E'_{jk} - \left(2\mathcal{H}\Phi + \Psi' + 2\mathcal{H}\Psi\right)\gamma_{jk}\,, && (8)\\ {}^{(1)}\Gamma^i_{0j} &= E'^i_{\ j} - \Psi'\gamma^i_j\,, && (9)\\ {}^{(1)}\Gamma^i_{jk} &= 2D_{(k}[E^i_{j)} - \Psi\gamma^i_{j)}] - D^i(E_{jk} - \Psi\gamma_{jk})\,, && (10) \end{aligned}$$

où on a utilisé la notation de symétrisation $A_{(ij)} \equiv (A_{ij} + A_{ji})/2$. Au second ordre on obtient

$$
\begin{aligned}
{}^{(2)}\Gamma^0_{00} &= \Phi^{(2)\prime} - 4\,\Phi\,\Phi'\,, && (11)\\
{}^{(2)}\Gamma^0_{0j} &= D_j\Phi^{(2)} + \mathcal{H}B^{i(2)} - 4\,\Phi\,D_j\Phi\,, && (12)\\
{}^{(2)}\Gamma^i_{00} &= D^i\Phi^{(2)} + B^{i(2)\prime} + \mathcal{H}B^{i(2)} - 4E^{ij}D_j\Phi + 4\Psi D^i\Phi\,, && (13)\\
{}^{(2)}\Gamma^0_{jk} &= \left[-2\mathcal{H}\Psi^{(2)} - \Psi^{(2)\prime} + 4\Phi\Psi' - 2\mathcal{H}\Phi^{(2)} + 8\mathcal{H}\Phi\,(\Phi+\Psi)\right]\gamma_{jk}\\
&\quad +2\mathcal{H}E^{(2)}_{jk} - 8\mathcal{H}\Phi E_{jk} + E^{(2)\prime}_{jk} - D_{(i}B^{(2)}_{j)} - 4\Phi E'_{jk}\,, && (14)\\
{}^{(2)}\Gamma^i_{0j} &= E^{i(2)\prime}_j + \gamma^{il}D_{[j}B^{(2)}_{l]} - \Psi^{(2)\prime}\gamma^i_j + 4\Psi' E^i_j - 4\Psi\Psi'\gamma^i_j - 4E^{ik}E'_{kj} + 4\Psi E^{i\,\prime}_j\,, && (15)\\
{}^{(2)}\Gamma^i_{jk} &= -\mathcal{H}\gamma_{jk}B^{i(2)} + 2D_{(k}[E^{i(2)}_{j)} - \Psi^{(2)}\gamma^i_{j)}] - D^i(E^{(2)}_{jk} - \Psi^{(2)}\gamma_{jk}) && (16)\\
&\quad +4\left(E^{il} - \Psi\gamma^{il}\right)\{D_l(E_{jk} - \Psi\gamma_{jk}) - D_k(E_{lj} - \Psi\gamma_{lj}) - D_j(E_{kl} - \Psi\gamma_{kl})\}\,.
\end{aligned}
$$

B.2 Connections affines

Si l'on utilise une base de tétrades orthonormées, alors la dérivée covariante est caractérisée par les connections affines [Wald 84] définies par

$$\omega_{abc} \equiv \eta_{bd}e^d{}_\nu e_a{}^\mu \nabla_\mu e_c{}^\nu = -\omega_{acb}\,. \tag{17}$$

Elles sont reliées au symboles de Christoffel selon

$$\omega_{adc}\eta^{db} = \Gamma^\nu_{\mu\sigma}e_a{}^\sigma e_c{}^\mu e^b{}_\nu + e_a{}^\sigma e^b{}_\nu \partial_\sigma e_c{}^\nu\,. \tag{18}$$

Dans toute cette section, on se place dans le cas plat avec les tétrades naturellement associées au système de coordonnées cartésien. On effectue un développement perturbatif des connections en développant les symboles de Christoffel ainsi que les tétrades. Tout d'abord, la propriété d'antisymétrie implique $\omega_{000} = \omega_{i00} = 0$ et ce pour tout ordre. Pour la métrique de fond, les seules composantes non nulles sont

$$\bar\omega_{i0j} = -\bar\omega_{ij0} = -\frac{\mathcal{H}}{a}\delta_{ij}\,. \tag{19}$$

On vérifie bien qu'à cet ordre les vecteurs de tétrade commutent puisque

$$0 = \bar\omega_{abc} - \bar\omega_{cba} = \eta_{db}\bar e^d{}_\nu[\bar e_a, \bar e_c]^\nu\,. \tag{20}$$

Au premier ordre on obtient toujours dans la jauge Newtonienne en négligeant les termes vectoriels

$$
\begin{aligned}
\omega^{(1)}_{00i} &= -\omega^{(1)}_{0i0} = -\frac{1}{a}\partial_i\Phi\\
\omega^{(1)}_{i0j} &= -\omega^{(1)}_{ij0} = \frac{1}{a}\left[-E'_{ij} + (\mathcal{H}\Phi + \Psi')\delta_{ij}\right]\\
\omega^{(1)}_{jik} &= -\omega^{(1)}_{jki} = \frac{2}{a}\left(\partial_{[k}E_{i]j} - \partial_{[k}\Psi\delta_{i]j}\right)\\
\omega^{(1)}_{0ij} &= 0. && (21)
\end{aligned}
$$

Au second ordre, on obtient pour les composantes utilisées

$$
\begin{aligned}
\omega^{(2)}_{00i} &= -\omega^{(2)}_{0i0} = \frac{1}{a}\left[-\partial_i\Phi^{(2)} + 4\Phi\partial_i\Phi + 2E_{ik}\partial^k\Phi - 2\Psi\partial_i\Phi\right]\\
\omega^{(2)}_{i0j} &= -\omega^{(2)}_{ij0} = \frac{1}{a}\Big\{\partial_{(i}B^{(2)}_{j)} - E^{(2)\prime}_{ij} + (\mathcal{H}\Phi^{(2)} + \Psi^{(2)\prime})\delta_{ij} - 3\mathcal{H}\Phi^2\delta_{ij} + 2(E'_{ij} - \Psi'\delta_{ij})\Phi\\
&\qquad +2[E'_{ik} - \Psi'\delta_{ik}][E^k_j - \Psi\delta^k_j] + 2[E'_{jk} - \Psi'\delta_{jk}][E^k_i - \Psi\delta^k_i]\Big\}\,. && (22)
\end{aligned}
$$

On peut voir que les tétrades ne commutent plus sur l'espace perturbé car $\omega^{(2)}_{abc} \neq \omega^{(2)}_{cba}$.

B.3 Tenseur d'Einstein

Au niveau de l'espace de fond les composantes non nulles du tenseur d'Einstein sont

$$
\begin{aligned}
-a^2G^{0(0)}_0 &= +3\mathcal{H}^2 + 3K\,, && (23)\\
a^2G^{i(0)}_j &= -\gamma^i_j\left(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}' + K\right)\,. && (24)
\end{aligned}
$$

Au premier ordre on obtient

$$
\begin{aligned}
-a^2G^{0(1)}_0 &= 2\Delta\Psi - 6\mathcal{H}\Psi' - 6\mathcal{H}^2\Phi + 6K\Psi\,, && (25)\\
G^{(1)}_{0i} &= 2\mathcal{H}D_i\Phi + 2D_i\Psi'\,, && (26)\\
-a^2G^{0(1)}_i &= 2\mathcal{H}D_i\Phi + 2D_i\Psi'\,, && (27)\\
a^2G^{i(1)}_j &= \frac{1}{3}\gamma^i_j a^2\tilde G^{(1)} + \Delta^i_j(-\Phi + \Psi) + (2K - \Delta)\,E^i_j + 2\mathcal{H}E^{i\,\prime}_j + E^{i\,\prime\prime}_j\,, && (28)
\end{aligned}
$$

où

$$\Delta^i_{\ j} \equiv D^iD_j - \frac{1}{3}\gamma^i_j\Delta,\ \ \Delta \equiv D_kD^k\,, \tag{29}$$

et où $\tilde G \equiv G^i_{\ i}$ est la trace de la partie spatiale du tenseur d'Einstein donnée par

$$\tilde G^{(1)} = 6\Psi''^{(1)} + \left(6\mathcal{H}^2 + 12\mathcal{H}'\right)\Phi^{(1)} + 2\Delta\left(\Phi^{(1)} - \Psi^{(1)}\right) + 6\mathcal{H}\Phi'^{(1)} + 12\mathcal{H}\Psi'^{(1)} - 6K\Psi^{(1)}\,. \tag{30}$$

Au second ordre on obtient tout d'abord

$$-a^2G^{0(2)}_0 = 2\Delta\Psi^{(2)} - 6\mathcal{H}^2\Phi^{(2)} - 6\mathcal{H}\Psi'^{(2)} + 6K\Psi^{(2)} - a^2G^{0(2)}_{0SS} - a^2G^{0(2)}_{0ST} - a^2G^{0(2)}_{0TT}\,, \tag{31}$$

où les indices T et S se réfèrent au type de variables de perturbations du premier ordre (respectivement scalaires et tenseurs) entrant dans les termes quadratiques.

$$
\begin{aligned}
-a^2G^{0(2)}_{0SS} &= 6D_i\Psi D^i\Psi + 16\Psi\Delta\Psi + 24\mathcal{H}^2\Phi^2 + 24\mathcal{H}(\Phi - \Psi)\Psi' + 6\Psi'^2 + 24K\Psi^2 && (32)\\
-a^2G^{0(2)}_{0TT} &= 3D_iE_{jk}D^iE^{jk} - 2D_iE_{jk}D^jE^{ik} + 4E_{ij}\Delta E^{ij}\\
&\quad -8\mathcal{H}E_{ij}E^{ij\prime} - E_{ij}{}'E^{ij\prime} - 4KE^{ij}E_{ij} && (33)\\
-a^2G^{0(2)}_{0ST} &= -4E^{ij}D_iD_j\Psi. && (34)
\end{aligned}
$$

Ensuite on obtient

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}_{0i} &= 2\mathcal{H}D_i\Phi^{(2)} + 2D_i\Psi^{(2)\prime} - (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + 2K)B^{(2)}_i + G^{(2)}_{0iSS} + G^{(2)}_{0iST} + G^{(2)}_{0iTT}\,, &(35)\\
-a^2G^{0(2)}_i &= 2\mathcal{H}D_i\Phi^{(2)} + 2D_i\Psi^{(2)\prime} - \left(K + \frac{1}{2}\Delta\right)B^{(2)}_i - a^2G^{0(2)}_{iSS} - a^2G^{0(2)}_{iST} - a^2G^{0(2)}_{iTT}, &(36)
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}_{0iSS} &= -8\mathcal{H}\Phi D_i\Phi + 8D_i\left(\Psi\Psi'\right) - 4\Psi' D_i\Phi\,, &(37)\\
G^{(2)}_{0iST} &= -2E_i^{\prime j}D_j(\Phi + \Psi) + 4E_i^j D_j\Psi'\,, &(38)\\
G^{(2)}_{0iTT} &= 2E^{kl\prime}D_iE_{kl} + 4E^{kl}D_iE'_{kl} - 4E^{kl}D_lE'_{ik}\,, &(39)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
-a^2G^{0(2)}_{iSS} &= -16\mathcal{H}\Phi D_i\Phi + 8D_i\left(\Psi\Psi'\right) - 4\Psi' D_i\Phi - 8\Phi D_i\Psi'\,, &(40)\\
-a^2G^{0(2)}_{iST} &= -2E_i^{\prime j}D_j(\Phi + \Psi) + 4E_i^j D_j\Psi'\,, &(41)\\
-a^2G^{0(2)}_{iTT} &= 2E^{kl\prime}D_iE_{kl} + 4E^{kl}D_iE'_{kl} - 4E^{kl}D_lE'_{ik}\,. &(42)
\end{aligned}
$$

Quant à $G^{i(2)}_j$, on le décompose en une trace et une partie sans trace selon

$$
G^{i(2)}_j = \frac{1}{3}\gamma^i{}_j\tilde{G}^{(2)} + (G_{\rm tf})^{i(2)}_j\,. \tag{43}
$$

On décompose ensuite ces termes selon

$$
\begin{aligned}
a^2\left(G_{\rm tf}\right)^{i(2)}_j &= -\gamma^{ik}D_{(k}\left[B^{(2)\prime}_{j)} + 2\mathcal{H}B^{(2)}_{j)}\right] + (2K - \Delta)E^{i(2)}_j + 2\mathcal{H}E^{i(2)\prime}_j + E^{i(2)\prime\prime}_j\\
&\quad + \left[\Delta^i{}_j\left(-\Phi^{(2)} + \Psi^{(2)}\right)\right] + a^2\left[(G_{\rm tf})^{i(2)}_{j\,SS} + (G_{\rm tf})^{i(2)}_{j\,ST} + (G_{\rm tf})^{i(2)}_{j\,TT}\right]\,, &(44)\\
a^2\tilde{G}^{(2)} &= 6\Psi''^{(2)} + 6\mathcal{H}^2\Phi^{(2)} + 2\Delta\left(\Phi^{(2)} - \Psi^{(2)}\right) + 6\mathcal{H}\Phi'^{(2)} + 12\mathcal{H}\Psi'^{(2)} + 12\mathcal{H}'\Phi^{(2)} - 6K\Psi^{(2)}\\
&\quad + a^2\left[\tilde{G}^{(2)}_{SS} + \tilde{G}^{(2)}_{ST} + \tilde{G}^{(2)}_{TT}\right]\,. &(45)
\end{aligned}
$$

Les termes de couplage sont donnés par

$$
\begin{aligned}
a^2\left(G_{\rm tf}\right)^{i(2)}_{j\,SS} &= \frac{1}{3}\gamma^i_j\Big[-2D^k\Phi D_k(\Phi - \Psi) - 2D^k\Psi D_k(3\Psi - \Phi) - 8\Psi\Delta\Psi - 4(\Phi - \Psi)\Delta\Phi\Big]\\
&\quad + 2D^i\Phi D_j(\Phi - \Psi) + 2D^i\Psi D_j(3\Psi - \Phi) + 8\Psi D^iD_j\Psi + 4(\Phi - \Psi)D^iD_j\Phi\,, &(46)\\
a^2\left(G_{\rm tf}\right)^{i(2)}_{j\,ST} &= \frac{1}{3}\gamma^i_j\Big[-4E_{kl}D^kD^l\Psi - 4E_{kl}D^kD^l\Phi\Big] + 4E_{kj}D^kD^i\Psi + 4E^i_kD_jD^k\Phi\\
&\quad - 2D_k(\Phi + 3\Psi)D^kE^i_j - 4\Delta\Psi E^i_j - 8\Psi\Delta E^i_j + 8\mathcal{H}\Psi' E^i_j + 4\partial^{(i}E_{j)k}D^k(\Psi + \Phi)\\
&\quad + 4\Psi'' E^i_j - 16K\Psi E^i_j + 4\left(E^{i''}_j + 2\mathcal{H}E^{i'}_j\right)(\Psi - \Phi) + 2E^{i'}_j(\Psi' - \Phi')\,, &(47)\\
a^2\left(G_{\rm tf}\right)^{i(2)}_{j\,TT} &= \frac{1}{3}\gamma^i_j\Big[-6D_kE_{lm}D^kE^{lm} - 8E_{kl}\Delta E^{kl} + 8\mathcal{H}E_{kl}{}'E^{kl}\\
&\qquad + 4E_{kl}{}'E^{kl\prime} + 4D_iE_{kj}D^jE^{ki} + 4E_{ij}E^{ij\prime\prime} + 8KE^{lk}E_{kl}\Big]\\
&\quad + 2D^iE_{kl}D_jE^{kl} - 4E^{kl}\left(D_lD^iE_{jk} + D_lD_jE^i_k\right) + 4D_kE^i{}_lD^kE^l{}_j - 4D_kE^i{}_lD^lE_{jk}\\
&\quad + 4E^{kl}D^iD_jE_{kl} + 4E^{kl}D_kD_lE^i{}_j + 4E^i{}_k\Delta E^k_j - 8\mathcal{H}E^i{}_kE^{k\prime}_j\\
&\quad - 4E^i{}_k{}'E^{k\prime}_j - 4E^i{}_kE^{k\prime\prime}_j - 8KE^{ik}E_{kj}\,, &(48)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}^{(2)}_{SS} &= -4D_k\Phi D^k\Phi - 6D_k\Psi D^k\Psi - 4D^k\Psi D_k\Phi + 8(\Psi - \Phi)\Delta\Phi - 16\Psi\Delta\Psi - 24\mathcal{H}^2\Phi^2 &(49)\\
&\quad - 48\mathcal{H}\Phi\Psi' + 48\mathcal{H}(\Psi - \Phi)\Psi' + 6(\Psi')^2 - 12\Phi'\Psi' - 48\mathcal{H}'\Phi^2 + 24\Psi''(\Psi - \Phi) - 8K\Psi^2\,,\\
\tilde{G}^{(2)}_{TT} &= +16\mathcal{H}E_{ij}E^{ij\prime} + 5E_{ij}{}'E^{ij\prime} + 8E_{ij}E^{ij\prime\prime} - 4E_{ij}\Delta E^{ij}\\
&\quad - 3D_iE_{jk}D^iE^{jk} + 2D_iE_{jk}D^jE^{ik} - 8KE^{ij}E_{ij}\,, &(50)\\
\tilde{G}^{(2)}_{ST} &= E^{ij}D_iD_j\left(-8\Phi + 4\Psi\right)\,. &(51)
\end{aligned}
$$

C Perturbations de la matière

C.1 Vitesse

La vitesse de fond est donnée par

$$
\begin{aligned}
u^{\mu(0)} &= \frac{1}{a}\delta^\mu_0\,, &(52)\\
u^{(0)}_\mu &= -a\delta^0_\mu\,. &(53)
\end{aligned}
$$

La perturbation de vitesse v^μ est définie dans les relations (2.12). Elle ne possède que trois degrés de liberté et nous choisissons les composantes spatiales. Au premier ordre on a par définition

$$
\begin{aligned}
u^{i(1)} &\equiv \frac{1}{a}v^i\,, &(54)\\
u^{(1)}_i &= av_i\,. &(55)
\end{aligned}
$$

La composante temporelle est alors reliée aux autres variables de perturbation par

$$
\begin{aligned}
u^{(1)}_0 &= -a\Phi\,, &(56)\\
u^{0(1)} &= -\frac{1}{a}\Phi\,. &(57)
\end{aligned}
$$

Au second ordre on obtient

$$u^{i(2)} \equiv \frac{1}{a}v^{i(2)}, \tag{58}$$
$$u_i^{(2)} = a\left(v_i^{(2)} + 4E_{ij}v^j - 4\Psi v_i\right), \tag{59}$$

et la composante temporelle vérifie

$$u^{0(2)} = \frac{1}{a}\left(-\Phi^{(2)} + 3\Phi^2 + v_i v^i\right),$$
$$u_0^{(2)} = a\left(-\Phi^{(2)} + \Phi^2 - v_i v^i\right). \tag{60}$$

C.2 Tenseur énergie-impulsion

Au niveau de l'espace de fond les seules composantes non nulles du tenseur énergie impulsion sont

$$T_{00}^{(0)} = a^2\bar{\rho}, \tag{61}$$
$$T_{ij}^{(0)} = a^2\bar{P}\gamma_{ij}, \tag{62}$$
$$T_0^{0(0)} = -\bar{\rho}, \tag{63}$$
$$T_j^{i(0)} = \bar{P}\gamma_j^i. \tag{64}$$

Au premier ordre on obtient

$$T_{00}^{(1)} = a^2(2\bar{\rho}\Phi + \delta\rho), \tag{65}$$
$$T_{0i}^{(1)} = -a^2\left(\bar{\rho} + \bar{P}\right)v_i, \tag{66}$$
$$T_{ij}^{(1)} = a^2(2\bar{P}(E_{ij} - \Psi\gamma_{ij}) + \delta P\gamma_{ij}). \tag{67}$$
$$T_0^{0(1)} = -\delta\rho, \tag{68}$$
$$T_i^{0(1)} = \left(\bar{\rho} + \bar{P}\right)v_i, \tag{69}$$
$$T_j^{i(1)} = \delta P\gamma_j^i. \tag{70}$$

Au second ordre on obtient

$$T_{00}^{(2)} = a^2\left(\delta^{(2)}\rho + 2\bar{\rho}\Phi^{(2)} + 4\Phi\delta\rho + 2(\bar{\rho} + \bar{P})v_i v^i\right), \tag{71}$$
$$T_{0i}^{(2)} = a^2\left[-(\bar{\rho} + \bar{P})v_i^{(2)} - \bar{\rho}B_i^{(2)} - 2(\delta P + \delta\rho)v_i - 2(\bar{\rho} + \bar{P})(\Phi v_i + 2E_{ij}v^j - 2\Psi v_i)\right], \tag{72}$$
$$T_{ij}^{(2)} = a^2\left[\delta^{(2)}P\gamma_{ij} + 2\bar{P}(E_{ij}^{(2)} - \Psi^{(2)}\gamma_{ij}) + 4\delta P(E_{ij} - \Psi\gamma_{ij}) + 2(\bar{\rho} + \bar{P})v_i v_j\right], \tag{73}$$
$$T_0^{0(2)} = -\delta^{(2)}\rho - 2(\bar{\rho} + \bar{P})v_i v^i,$$
$$T_i^{0(2)} = \left(\bar{\rho} + \bar{P}\right)\left(v_i^{(2)} + B_i^{(2)}\right) + 2(\delta P + \delta\rho)v_i + 2(\bar{\rho} + \bar{P})(-\Phi v_i + 2E_{ij}v^j - 2\Psi v_i)$$
$$T_j^{i(2)} = \delta^{(2)}P\gamma_j^i + 2(\bar{\rho} + \bar{P})v^i v_j. \tag{74}$$

D Équations au second ordre dans le cas plat

D.1 Équations de conservation

Nous considérons ici le cas général d'un fluide parfait mais n'ayant pas nécessairement une paramètre d'état constant, c'est à dire tel que $c_s^2 \neq w$. Pour les modes scalaires l'équation de conservation $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ conduit à l'équation

$$\delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - w)\delta + (1 + w)(\Delta v - 3\Psi') = S_c \tag{75}$$

et l'équation d'Euler

$$(v_i + B_i)' + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)(v_i + B_i) + \partial_i\Phi + \frac{c_s^2}{1 + w}\partial_i\delta = S_{e,i}. \tag{76}$$

Les termes de source sont donnés par

$$S_c = (1 + w)\Big[12\Psi\Psi' - 2\Phi\Delta v - 2\mathcal{H}v_i v^i(1 - 3c_s^2) - 4v_i'v^i - 4v_i\partial^i\Phi + 6v_i\partial^i\Psi + 4E_{ij}E^{ij'}\Big]$$
$$+(1 + c_s^2)\Big[6\delta\Psi' - 2\partial_i(\delta v^i)\Big] - 3(c_s^2)'\frac{\bar{\rho}'\mathcal{H}}{\bar{\rho}'}\delta^2, \tag{77}$$
$$S_{e,i} = -2\frac{1 + c_s^2}{1 + w}(\delta v_i)' - 2\mathcal{H}(1 - 3w)\frac{1 + c_s^2}{1 + w}\delta v_i - 2\frac{(c_s^2)'}{1 + w}\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}'}\delta\partial_i\delta + \delta v_i\right)$$
$$+2\mathcal{H}(1 - 3c_s^2)(\Phi + 2\Psi)v_i + 10\Psi' v_i + 4\Psi v_i' - 2\partial_j\left(v^j v_i\right) + 2\Phi v_i'$$
$$-2\frac{1 + c_s^2}{1 + w}\delta\partial_i\Phi + 4\Phi\partial_i\Phi + 4\left(E_{ij}v^j\right)' + 4\mathcal{H}E_{ij}v^j(1 - 3c_s^2). \tag{78}$$

D.2 Équations d'Einstein dans le cas d'un fluide parfait avec $c_s^2 \neq w$

Dans le cas d'un fluide parfait ayant un paramètre d'état variable, ou un mélange de fluide adiabatique se comportant comme tel, les équations d'Einstein impliquent

$$\Delta\Psi - 3\mathcal{H}\Psi' - 3\mathcal{H}^2\Phi - \kappa a^2\frac{1}{2}\bar{\rho}\delta = S_1, \tag{79}$$
$$\Psi'' + \mathcal{H}^2\Phi + \frac{1}{3}\Delta(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}\Phi' + 2\mathcal{H}\Psi' + 2\mathcal{H}'\Phi - \frac{1}{2}c_s^2a^2\kappa\bar{\rho}\delta = S_2, \tag{80}$$
$$\Delta\Delta(\Psi - \Phi) = \Delta\Delta S_3. \tag{81}$$
$$\tag{82}$$

Les termes de source dans lesquels on néglige les ondes gravitationnelles sont donnés par

$$S_1 = -8\Psi\Delta\Psi - 3\partial_i\Psi\partial^i\Psi - 3\Psi'^2 + 3\mathcal{H}^2(1 + w)\partial_i v\partial^i v - 12\mathcal{H}^2\Psi^2, \tag{83}$$
$$S_2 = \frac{-\kappa(c_s^2)'}{2(1 + w)}(\mathcal{H}\delta^2) + 4\left(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}'\right)\Psi^2 + \frac{7}{3}\partial_i\Psi\partial^i\Psi + \frac{8}{3}\Psi\Delta\Psi + 8\mathcal{H}\Psi\Psi' + \Psi'^2$$
$$+\mathcal{H}^2(1 + w)\partial_i v\partial^i v, \tag{84}$$
$$S_3 = -4\Psi^2 - \Delta^{-1}\left(2\partial_i\Psi\partial^i\Psi + 3\mathcal{H}^2(1 + w)\partial_i v\partial^i v\right)$$
$$+3\Delta^{-2}\left[\partial_i\partial_j\left(2\partial^i\Psi\partial^j\Psi + 3\mathcal{H}^2(1 + w)\partial^i v\partial^j v\right)\right]. \tag{85}$$

E Conservation de la perturbation de courbure comobile au second ordre

On peut définir des variables invariantes de jauge associées à la perturbation de courbure Ψ. On définit soit la perturbation de courbure sur les hypersurfaces de densité d'énergie constante soit la perturbation de courbure sur des hypersurfaces comobiles avec le fluide cosmologique. Ces quantités on été définies dans [Malik & Wands 04] mais néanmoins les lois de transformation des variables de perturbations utilisées dans la construction ne sont prises en compte que dans la limite super-Hubble comme il est montré dans l'appendice de [Pitrou 07] (voir chapitre 5). On peut montrer que ces deux types de perturbations de la courbure se réduisent à la même quantité dans la limite super-Hubble [Vernizzi 05], et jusqu'au second ordre leurs expressions sont données pour les échelles super-Hubble par

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(1)} &\simeq \Psi^{(1)} + Q\delta^{(1)}\rho \\
&\simeq \Psi^{(1)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}}\left(\Psi'^{(1)} + \mathcal{H}\Phi^{(1)}\right) \qquad (86)\\
\mathcal{R}^{(2)} &\simeq \Psi^{(2)} + Q\delta^{(2)}\rho + \left(1+3c_s^2\right)(Q\delta)^2 - 4Q\delta\Psi \\
&\simeq \Psi^{(2)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}}\left(\Psi'^{(2)} + \mathcal{H}\Phi^{(2)} - 4\mathcal{H}\Psi^2 - \frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}}\right) + \left(1+3c_s^2\right)(Q\delta)^2 - 4Q\delta\Psi \qquad (87)
\end{aligned}$$

avec

$$Q \equiv \frac{\mathcal{H}\bar{\rho}}{\bar{\rho}'} = -\frac{1}{3(1+w)}\,. \qquad (88)$$

Si on ne considère pas la limite super-Hubble, ces deux quantités ne sont pas égales et ce n'est qu'en considérant correctement les lois de transformation de jauge des variables de perturbation que l'on peut construire des variables vraiment invariantes de jauge dans le cas général. Si le contenu matériel est celui d'un champ scalaire, alors la perturbation de courbure comobile correspond à la perturbation de courbure sur les surfaces où $\delta\varphi = 0$. En utilisant la décomposition de la métrique perturbée (5.2) dans le cas plat, ces expressions au premier et second ordre sont données par

$$\mathcal{R}^{(1)} \equiv \Psi^{(1)} + \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'}\delta^{(1)}\varphi\,, \qquad (89)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(2)} \equiv\ & \Psi^{(2)} + \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'}\delta^{(2)}\varphi + \left[\frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}'}\mathcal{H} - \mathcal{H}' - 2\mathcal{H}^2\right]\left(\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'}\right)^2 \\
& -2\mathcal{H}\frac{\delta\varphi\delta\varphi'}{\bar{\varphi}'^2} - 2\left(\Psi' + 2\mathcal{H}\Psi\right)\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} - 2\frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'}\partial_i E\partial^i\left(\delta\varphi + \Psi\right) \\
& +\frac{1}{2}\left(\delta^{ij} - \Delta^{-1}\partial^i\partial^j\right)\left\{\partial_j\left(2B - E' + \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}}\right)\partial_i\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}} + \partial_i\partial^k E\left[2\partial_k\partial_j E + 4E_{kj} - 4\Psi\delta_{kj}\right]\right. \\
& \left. +\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'}\left(2E'_{ij} + 4\mathcal{H}E'_{ij} + \partial_i\partial_j E'\right) + \partial^k E\partial_k\left(\partial_i\partial_j E + 2E_{ij}\right)\right\}. \qquad (90)
\end{aligned}$$

On peut également mettre la perturbation de courbure comobile au second ordre sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(2)} =\ & \Psi^{(2)} + \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'}\delta^{(2)}\varphi + \left[\frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}'}\mathcal{H} - \mathcal{H}' - 2\mathcal{H}^2\right]\left(\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'}\right)^2 - 2\mathcal{H}\frac{\delta\varphi\delta\varphi'}{\bar{\varphi}'^2} \\
& -2\left(\Psi' + 2\mathcal{H}\Psi\right)\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} - 2\frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'}\partial_i E\partial^i\delta\varphi \\
& +\Delta^{-1}\left\{-\partial_i\left(\Delta\Psi\partial^i E + \Delta E\partial^i\Psi\right) + \partial^i\partial^j\left(B - E' + \frac{\delta\varphi}{2\bar{\varphi}'}\right)\partial_i\partial_j\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'}\right. \\
& -\Delta\left(B - E' + \frac{\delta\varphi}{2\bar{\varphi}'}\right)\Delta\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} + \frac{1}{2}\left(\partial^i\partial^j\partial^k E\partial_i\partial_j\partial_k E - \partial^k\Delta E\partial_k\Delta E\right) \\
& \left. -\partial^i\partial^j\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'}\left(E'_{ij} + 2\mathcal{H}E_{ij}\right) + 2E_{ij}\partial^i\partial^j E + \partial_i E_{jk}\partial^i\partial^j\partial^k E\right\}.
\end{aligned}$$

Si l'on souhaite l'expression de la perturbation de courbure sur les hypersurfaces de densité constante, il suffit de remplacer φ par ρ dans l'expression de la perturbation de courbure comobile précédente. On la note alors souvent plutôt ζ au signe près. Dans la limite super-Hubble, en utilisant les équations d'Einstein, l'équation de conservation de fond (1.22) et l'équation d'évolution du paramètre d'état (2.15), on retrouve alors les expressions (86).

La perturbation de courbure comobile est la quantité utilisée dans [Maldacena 03] pour obtenir des prédictions dans le cas de l'inflation à un champ scalaire en roulement lent. Plus précisément ces prédictions ont été établies en jauge comobile, puisque par définition dans ce cas la perturbation de courbure comobile se réduit à Ψ et on peut donc identifier ces deux quantités. Si l'on souhaite construire l'expression générale de la perturbation de courbure comobile, il faut veiller à ne pas confondre un changement de jauge avec un changement de coordonnées standard tel qu'expliqué dans la section 5.1. La perturbation de courbure peut être utilisée pour reformuler l'équation d'évolution dans la limite super-Hubble dans le cas de perturbations adiabatiques, comme une loi de conservation

$$\begin{aligned}
\frac{-\mathcal{H}}{2Q}\mathcal{R}^{(1)'} &= 0\,, \\
\frac{-\mathcal{H}}{2Q}\mathcal{R}^{(2)'} &= 0\,. \qquad (91)
\end{aligned}$$

Le préfacteur est là pour se souvenir que dans une phase de-Sitter pure, $w = -1$, $Q = 0$, et ce résultat n'est plus valide.

On montre ce résultat en décomposant la perturbation de courbure comobile selon

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(1)} &= A_1\,, \\
\mathcal{R}^{(2)} &= A_2 + B + C\,, \qquad (92)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \Psi^{(1)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}}(\Psi'^{(1)} + \Phi^{(1)}\mathcal{H})\,, \\ A_2 &= \Psi^{(2)} - \frac{2Q}{\mathcal{H}}(\Psi'^{(2)} + \Phi^{(2)}\mathcal{H})\,, \\ B &= 2Q\left(4\Psi^2 + \frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}^2}\right)\,, \\ C &= (1+3c_s^2)(Q\delta)^2 - 4Q\delta\Psi\,. \end{aligned}$$

On utilise les relations

$$\left[\frac{2}{3\mathcal{H}(1+w)}\right]' = \left[\frac{-2Q}{\mathcal{H}}\right]' = \frac{1-3w+6c_s^2}{3(1+w)}\,, \tag{93}$$

$$Q' = 3Q\mathcal{H}(c_s^2 - w)\,, \tag{94}$$

$$\mathcal{H}' = -(1+3w)\frac{\mathcal{H}^2}{2}. \tag{95}$$

De plus en utilisant la définition de la vitesse adiabatique du son $c_s^2 \equiv \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}$ on obtient avec un développement de Taylor [Malik & Wands 04]

$$\delta P^{(2)} = c_s^2\bar{\rho}\delta^{(2)} + \frac{(\bar{\rho}\delta)^2}{\bar{\rho}'}(c_s^2)'. \tag{96}$$

Le terme A_1 ne fait intervenir que des variables de perturbation du premier ordre et son évolution est donnée par

$$A_1' = \frac{-2Q}{\mathcal{H}}\left[\Psi^{(1)\prime\prime} + \mathcal{H}\Phi^{(1)\prime} + \mathcal{H}\Psi^{(1)\prime}(2+3c_s^2) + 3\Phi^{(1)}\mathcal{H}^2(c_s^2 - w)\right],$$

et on reconnaît l'équation (2.82). Quant à A_2, son évolution est la même que A_1 mais avec les variables de perturbation du second ordre, car il n'a pas été fait usage de la contrainte $\Phi^{(1)} = \Psi^{(1)}$. On reconnaît alors le membre de gauche de l'équation (6.18). On considère maintenant la contribution de B qui est

$$\begin{aligned} B' &= \left[Q\left(8\Psi^2 + 2\frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}^2}\right)\right]' \\ &= 3Q\mathcal{H}(c_s^2 - w)\left(8\Psi^2 + 2\frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}^2}\right) + Q\left(16\Psi\Psi' + \frac{4}{\mathcal{H}^2}\Psi'\Psi'' - 4\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^3}\Psi'^2\right)\,, \end{aligned} \tag{97}$$

et qui peut être mise sous une forme plus simple grâce à l'équation (2.83)

$$\begin{aligned} B' = \frac{-2Q}{\mathcal{H}}\Big\{ &-\frac{3}{2}\mathcal{H}^2(c_s^2 - w)\left(8\Psi^2 + 2\frac{\Psi'^2}{\mathcal{H}^2}\right) \\ &+\mathcal{H}\Psi\Psi'\left[-8 + 6(c_s^2 - w)\right] + \Psi'^2\left[6(1+c_s^2) - (1+3w)\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{98}$$

De plus le terme impliquant C évolue selon

$$C' = \Psi'\left(4\Psi + 2\delta\frac{1+c_s^2}{1+w}\right) + 2Q\delta(1+3c_s^2)\mathcal{R}'^{(1)} + 3\left(c_s^2\right)'(Q\delta)^2. \tag{99}$$

On utilise alors que pour des perturbations adiabatiques, $\mathcal{R}'^{(1)} = 0$, et on obtient (en utilisant que pour des modes super-Hubble $\Psi' + \mathcal{H}\Phi = -\mathcal{H}\delta/2$)

$$C' = \frac{-2Q}{\mathcal{H}}\left[6\mathcal{H}\Psi\Psi'(1+w) - 6\mathcal{H}(1+c_s^2)\Psi'\left(\Psi + \frac{\Psi'}{\mathcal{H}}\right) - \frac{3}{2}\mathcal{H}Q(c_s^2)'\delta^2\right]. \tag{100}$$

En collectant tous les termes on obtient donc

$$B' + C' = \frac{-2Q}{\mathcal{H}}\left[-8\mathcal{H}\Psi\Psi' - \Psi'^2(1+3w) - \frac{3}{2}(c_s^2 - w)(8\mathcal{H}^2\Psi^2 + 2\Psi'^2) - \frac{3}{2}Q\mathcal{H}(c_s^2)'\delta^2\right]. \tag{101}$$

On remarque qu'il s'agit exactement de l'opposé du membre de droite de l'équation (6.17) dans la limite super-Hubble

$$S_2 - c_s^2 S_1 \simeq 8\mathcal{H}\Psi\Psi' + (1+3w)\Psi'^2 + \frac{3}{2}\mathcal{H}Q(c_s^2)'\delta^2 + (c_s^2 - w)\left(12\mathcal{H}^2\Psi^2 + 3\Psi'^2\right). \tag{102}$$

Finalement en réunissant ces résultats on obtient les relations (91). Il est crucial de ne pas confondre w avec c_s^2 comme il a été fait dans [Bartolo *et al.* 04b] dans la démonstration car la conservation de la courbure comobile permet justement de faire le lien entre des phases de l'univers pendant lesquelles le paramètre d'état n'est pas le même et est donc par conséquent passé par une phase variable où $w \neq c_s^2$. De plus toute cette démonstration de la loi de conservation peut être faite à partir de l'équation de conservation (75) comme il a été montré dans [Malik & Wands 04] ainsi que de manière non perturbative dans [Lyth & Wands 03, Lyth *et al.* 05, Langlois & Vernizzi 05, Enqvist *et al.* 07].

Bibliographie

[Acquaviva *et al.* 03] V. Acquaviva, N. Bartolo, S. Matarrese & A. Riotto, « Second-Order Cosmological Perturbations from Inflation », *Nucl. Phys. B*, vol. **667**, 119, 2003, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0209156.

[Albrecht *et al.* 82] A. Albrecht, P. J. Steinhardt, M. S. Turner & F. Wilczek, « Reheating an Inflationary Universe », *Phys. Rev. Lett.*, vol. **48**, 1437, 1982.

[Armendariz-Picon 07] C. Armendariz-Picon, « Why should primordial perturbations be in a vacuum state ? », *JCAP*, vol. **0702**, 031, 2007, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0612288.

[Arnowitt *et al.* 62] R. Arnowitt, S. Deser & C. W. Misner, « The dynamics of general relativity », 1962, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/0405109.

[Babich *et al.* 04] D. Babich, P. Creminelli & M. Zaldarriaga, « The shape of non-Gaussianities », *JCAP*, vol. **0408**, 009, 2004, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0405356.

[Bardeen 80] J. M. Bardeen, « Gauge Invariant Cosmological Perturbations », *Phys. Rev. D*, vol. **22**, 1882–1905, 1980.

[Bartolo *et al.* 04a] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese & A. Riotto, « Non-Gaussianity from Inflation : Theory and Observations », *Phys. Rep.*, vol. **402**, 103, 2004, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0406398.

[Bartolo *et al.* 02] N. Bartolo, S. Matarrese & A. Riotto, « Non-Gaussianity from Inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **65**, 103 505, 2002, URL http://arxiv.org/abs/hep-ph/0112261.

[Bartolo *et al.* 04b] N. Bartolo, S. Matarrese & A. Riotto, « Enhancement of Non-Gaussianity after Inflation », *JHEP*, vol. **0404**, 006, 2004, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0308088.

[Bartolo *et al.* 04c] N. Bartolo, S. Matarrese & A. Riotto, « Gauge-Invariant Temperature Anisotropies and Primordial Non-Gaussianity », *Phys. Rev. Lett.*, vol. **93**, 231 301, 2004, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0407505.

[Bartolo *et al.* 06] N. Bartolo, S. Matarrese & A. Riotto, « CMB Anisotropies at Second Order I », *JCAP*, vol. **0606**, 024, 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0604416.

[Bartolo *et al.* 07] N. Bartolo, S. Matarrese & A. Riotto, « CMB Anisotropies at Second-Order II : Analytical Approach », *JCAP*, vol. **0701**, 019, 2007, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0610110.

[Berger *et al.* 71] M. Berger, P. Gauduchon & E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemanienne*, vol. 194 de *Lecture Notes in Math.*, springer-verlag édition, 1971.

[Bernardeau *et al.* 04a] F. Bernardeau, T. Brunier & J.-P. Uzan, « High order correlation functions for self interacting scalar field in de Sitter space », *Phys. Rev. D*, vol. **69**, 063 520, 2004, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0311422.

[Bernardeau *et al.* 06] F. Bernardeau, T. Brunier & J.-P. Uzan, « Models of inflation with primordial non-Gaussianities », 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0604200.

[Bernardeau *et al.* 02] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga & R. Scoccimarro, « Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory », *Phys. Rep.*, vol. **367**, 1–248, 2002, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0112551.

[Bernardeau *et al.* 04b] F. Bernardeau, L. Kofman & J.-P. Uzan, « Modulated fluctuations from hybrid inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **70**, 083 004, 2004, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0403315.

[Bernardeau & Uzan 02] F. Bernardeau & J.-P. Uzan, « Non-Gaussianity in multi-field inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **66**, 103 506, 2002, URL http://arxiv.org/abs/hep-ph/0207295.

[Bernardeau & Uzan 03] F. Bernardeau & J.-P. Uzan, « Inflationary models inducing non-Gaussian metric fluctuations », *Phys. Rev. D*, vol. **67**, 121 301, 2003, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0209330.

[Bernstein 88] J. Bernstein, *Kinetic theory in the expanding universe*, cambridge university press édition, 1988.

[Bondi 61] H. Bondi, *Cosmology*, cambridge university press édition, 1961.

[Brizuela *et al.* 06] D. Brizuela, J. M. Martin-Garcia & G. A. Mena Marugan, « Second and higher-order perturbations of a spherical spacetime », *Phys. Rev. D*, vol. **74**, 044 039, 2006, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/0607025.

[Bruni *et al.* 92] M. Bruni, G. F. R. Ellis & P. K. S. Dunsby, « Gauge invariant perturbations in a scalar field dominated universe », *Class. Quant. Grav.*, vol. **9**, 921–946, 1992.

[Bruni *et al.* 97] M. Bruni, S. Matarrese, S. Mollerach & S. Sonego, « Perturbations of spacetime : gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond », *Class. Quant. Grav.*, vol. **14**, 2585, 1997, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/9609040.

[Brunier & Bernardeau 06] T. Brunier & F. Bernardeau, « The shape of high order correlation functions in CMB anisotropy maps », *Phys. Rev. D*, vol. **73**, 083 524, 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0602276.

[Byrnes *et al.* 06] C. T. Byrnes, M. Sasaki & D. Wands, « Primordial trispectrum from inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **74**, 123 519, 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0611075.

[Challinor 00] A. Challinor, « The covariant perturbative approach to cosmic microwave background anisotropies », *General Relativity and Gravitation*, vol. **32**, 1059, 2000, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9903283.

[Challinor & Lasenby 99] A. Challinor & A. Lasenby, « Cosmic microwave background anisotropies in the CDM model : a covariant and gauge-invariant approach », *Astrophys. J.*, vol. **513**, 1, 1999, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9804301.

[Chen *et al.* 06] X. Chen, R. Easther & E. A. Lim, « Large Non-Gaussianities in Single Field Inflation », 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0611645.

[Chen *et al.* 08] X. Chen, R. Easther & E. A. Lim, « Generation and Characterization of Large Non-Gaussianities in Single Field Inflation », 2008, URL http://arxiv.org/abs/0801.3295.

[Chen *et al.* 07] X. Chen, M. xin Huang, S. Kachru & G. Shiu, « Observational Signatures and Non-Gaussianities of General Single Field Inflation », *JCAP*, vol. **0701**, 002, 2007, URL http://arxiv.org/abs/hep-th/0605045.

[Cooray 01] A. Cooray, « Non-Gaussian Aspects of Thermal and Kinetic Sunyaev-Zel'dovich Effects », *Phys. Rev. D*, vol. **64**, 063 514, 2001, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0105063.

[Cooray 02] A. Cooray, « Non-linear Integrated Sachs-Wolfe Effect », *Phys. Rev. D*, vol. **65**, 083 518, 2002, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0109162.

[Cooray & Sheth 02] A. Cooray & R. Sheth, « Halo Models of Large Scale Structure », *Phys. Rep.*, vol. **372**, 1, 2002, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0206508.

[Cooray & Hu 00] A. R. Cooray & W. Hu, « Imprint of Reionization on the Cosmic Microwave Background Bispectrum », *Astrophys. J.*, vol. **534**, 533, 2000, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9910397.

[Creminelli *et al.* 06] P. Creminelli, A. Nicolis, L. Senatore, M. Tegmark & M. Zaldarriaga, « Limits on non-Gaussianities from WMAP data », *JCAP*, vol. **0605**, 004, 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0509029.

[Creminelli *et al.* 07a] P. Creminelli, L. Senatore & M. Zaldarriaga, « Estimators for local non-Gaussianities », *JCAP*, vol. **0703**, 019, 2007, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0606001.

[Creminelli *et al.* 07b] P. Creminelli, L. Senatore, M. Zaldarriaga & M. Tegmark, « Limits on $f_N L$ parameters from WMAP 3yr data », *JCAP*, vol. **0703**, 005, 2007, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0610600.

[Creminelli & Zaldarriaga 04] P. Creminelli & M. Zaldarriaga, « Single field consistency relation for the 3-point function », *JCAP*, vol. **0410**, 006, 2004, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0407059.

[Davis & Lineweaver 03] T. M. Davis & C. H. Lineweaver, « Expanding Confusion : common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the Universe », 2003, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0310808.

[Deruelle *et al.* 92] N. Deruelle, C. Gundlach & D. Polarski, « On the quantization of perturbations in inflation », *Class. Quant. Grav.*, vol. **9**, 137–148, 1992.

[Dodelson & Jubas 95] S. Dodelson & J. M. Jubas, « Reionization and its imprint on the cosmic microwave background », *Astrophys. J.*, vol. **439**, 503–516, 1995, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9308019.

[Dunsby 97] P. K. S. Dunsby, « A fully covariant description of CMB anisotropies », *Class. Quant. Grav.*, vol. **14**, 3391, 1997, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/9707022.

[Durrer 94] R. Durrer, « Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory », *Fund. Cosmic. Phys.*, vol. **15**, 209, 1994, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9311041.

[Durrer 01] R. Durrer, « The theory of CMB anisotropies », *J. Phys. Stud.*, vol. **5**, 177, 2001, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0109522.

[Durrer & Straumann 88] R. Durrer & N. Straumann, *Helv. Phys. Acta*, vol. **61**, 1027, 1988.

[Durrer & Zhou 96] R. Durrer & Z. H. Zhou, « Large Scale Structure Formation with Global Topological Defects. A new Formalism and its implementation by numerical simulations », *Phys. Rev. D*, vol. **53**, 5394, 1996, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9508016.

[Ehlers 71] J. Ehlers, *General Relativity and Kinetic theory*, New-York, USA., academic press édition, 1971.

[Ellis 75] G. Ellis, « Cosmology and verifiability », *Quaterly Journal of the Astronomical Society*, vol. **16**, 245, 1975.

[Ellis & Bruni 89] G. F. R. Ellis & M. Bruni, « Covariant and gauge invariant approach to cosmological density fluctuations », *Phys. Rev. D*, vol. **40**, 1804–1818, 1989.

[Ellis & MacCallum 69] G. F. R. Ellis & M. A. H. MacCallum, « A Class of homogeneous cosmological models », *Commun. Math. Phys.*, vol. **12**, 108–141, 1969.

[Ellis & van Elst 98] G. F. R. Ellis & H. van Elst, « Cosmological models (Cargèse lectures 1998) », 1998, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/9812046.

[Enqvist *et al.* 07] K. Enqvist, J. Hogdahl, S. Nurmi & F. Vernizzi, « Covariant generalization of cosmological perturbation theory », *Phys. Rev. D*, vol. **75**, 023 515, 2007, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/0611020.

[Fergusson & Shellard 06] J. R. Fergusson & E. P. S. Shellard, « Primordial non-Gaussianity and the CMB bispectrum », 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0612713.

[Finelli *et al.* 06] F. Finelli, G. Marozzi, G. P. Vacca & G. Venturi, « Second Order Gauge-Invariant Perturbations during Inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **74**, 083 522, 2006, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/0604081.

[Gebbie *et al.* 00] T. Gebbie, P. Dunsby & G. Ellis, « 1+3 Covariant Cosmic Microwave Background anisotropies II : The almost - Friedmann Lemaitre model », *Annals Phys.*, vol. **282**, 321, 2000, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9904408.

[Gebbie & Ellis 00] T. Gebbie & G. F. R. Ellis, « 1+3 Covariant Cosmic Microwave Background anisotropies I : Algebraic relations for mode and multipole representations », *Annals Phys.*, vol. **282**, 285, 2000, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9804316.

[Goldberg & Spergel 99] D. M. Goldberg & D. N. Spergel, « The Microwave Background Bispectrum, Paper II : A Probe of the Low Redshift Universe », *Phys. Rev. D*, vol. **59**, 103 002, 1999, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9811251.

[Goodman 95] J. Goodman, « Geocentrism reexamined », *Phys. Rev. D*, vol. **52**, 1821, 1995, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9506068.

[Gourgoulhon 07] E. Gourgoulhon, « 3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity », 2007, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/0703035.

[Guth 81] A. H. Guth, « The Inflationary Universe : A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems », *Phys. Rev. D*, vol. **23**, 347–356, 1981.

[Harrison 70] E. R. Harrison, « Fluctuations at the threshold of classical cosmology », *Phys. Rev. D*, vol. **1**, 2726–2730, 1970.

[Hawking 66] S. W. Hawking, « Perturbations of an expanding universe », *Astrophys. J.*, vol. **145**, 544–554, 1966.

[Hawking & Ellis 73] S. W. Hawking & G. F. R. Ellis, *The large scale structure of spacetime*, Cambridge, cambridge university press édition, 1973.

[Hillery *et al.* 84] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully & E. P. Wigner, « Distribution functions in physics : Fundamentals », *Phys. Rep.*, vol. **106**, 121–167, 1984.

[Hinshaw *et al.* 07] G. Hinshaw, M. R. Nolta, C. L. Bennett, R. Bean, O. Dore, M. R. Greason, M. Halpern, R. S. Hill, N. Jarosik, A. Kogut, E. Komatsu, M. Limon, N. Odegard, S. S. Meyer, L. Page, H. V. Peiris, D. N. Spergel, G. S. Tucker, L. Verde, J. L. Weiland, E. Wollack & E. L. Wright, « Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Temperature Analysis », *APJS*, vol. **170**, 288, 2007, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0603451.

[Hoekstra *et al.* 06] H. Hoekstra, Y. Mellier, L. van Waerbeke, E. Semboloni, L. Fu, M. J. Hudson, L. C. Parker, I. Tereno & K. Benabed, « First cosmic shear results from the Canada-France-Hawaii Telescope Wide Synoptic Legacy Survey », *Astrophys. J.*, vol. **647**, 116, 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0511089.

[Hu 95] W. Hu, « Wandering in the Background : A CMB Explorer », 1995, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9508126.

[Hu 00] W. Hu, « Weak lensing of the CMB : A harmonic approach », *Phys. Rev. D*, vol. **62**, 043 007, 2000.

[Hu & Sugiyama 95a] W. Hu & N. Sugiyama, « Anisotropies in the Cosmic Microwave Background : An Analytic Approach », *Astrophys. J.*, vol. **444**, 489–506, 1995, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9407093.

[Hu & Sugiyama 95b] W. Hu & N. Sugiyama, « Toward Understanding CMB Anisotropies and Their Implications », *Phys. Rev. D*, vol. **51**, 2599, 1995, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9411008.

[Hu & White 97a] W. Hu & M. White, « CMB Anisotropies : Total Angular Momentum Method », *Phys. Rev. D*, vol. **56**, 596, 1997, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9702170.

[Hu & White 97b] W. Hu & M. White, « A CMB Polarization Primer », *New Astron.*, vol. **2**, 323, 1997, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9706147.

[Itzykson & Zuber 80] C. Itzykson & J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, New York, USA, mcgraw-hill, international series in pure and applied physics édition, 1980.

[Kodama & Sasaki 84] H. Kodama & M. Sasaki, « Cosmological Perturbation Theory », *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. **78**, 1–166, 1984.

[Kofman 03] L. Kofman, « Probing String Theory with Modulated Cosmological Fluctuations », 2003, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0303614.

[Komatsu 02] E. Komatsu, *The Pursuit of Non-Gaussian Fluctuations in the Cosmic Microwave Background*, Thèse de doctorat, 2002, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0206039.

[Komatsu *et al.* 03] E. Komatsu, A. Kogut, M. Nolta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, D. N. Spergel, G. S. Tucker, L. Verde, E. Wollack & E. L. Wright, « First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Tests of Gaussianity », *Astrophys. J.*, vol. **148**, 119, 2003, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0302223.

[Komatsu & Spergel 00] E. Komatsu & D. N. Spergel, « The cosmic microwave background bispectrum as a test of the physics of inflation and probe of the astrophysics of the low-redshift universe », 2000, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0012197.

[Komatsu & Spergel 01] E. Komatsu & D. N. Spergel, « Acoustic Signatures in the Primary Microwave Background Bispectrum », *Phys. Rev. D*, vol. **63**, 063 002, 2001, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0005036.

[Komatsu *et al.* 05] E. Komatsu, D. N. Spergel & B. D. Wandelt, « Measuring primordial non-Gaussianity in the cosmic microwave background », *Astrophys. J.*, vol. **634**, 14, 2005, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0305189.

[Langlois & Vernizzi 05] D. Langlois & F. Vernizzi, « Conserved non-linear quantities in cosmology », *Phys. Rev. D*, vol. **72**, 103 501, 2005, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0509078.

[Larena 07] J. Larena, *Champs scalaires en cosmologie : Discussion sur les principes d'équivalence et cosmologique.*, Thèse de doctorat, Université Paris VII, Denis Diderot, 2007.

[Lehoucq *et al.* 03] R. Lehoucq, J.-P. Uzan & J. Weeks, « Eigenmodes of Lens and Prism Spaces », *Kodai Mathematical Journal*, vol. **26**, 119, 2003, URL http://arxiv.org/abs/math/0202072.

[Lewis & Challinor] A. Lewis & A. Challinor, « CAMB », URL http://camb.info.

[Lidsey *et al.* 97] J. E. Lidsey, A. R. Liddle, E. W. Kolb, E. J. Copeland, T. Barreiro & M. Abney, « Reconstructing the Inflaton Potential — an Overview », *Rev. Mod. Phys.*, vol. **69**, 373, 1997, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9508078.

[Liguori *et al.* 06] M. Liguori, F. K. Hansen, E. Komatsu, S. Matarrese & A. Riotto, « Testing Primordial Non-Gaussianity in CMB Anisotropies », *Phys. Rev. D*, vol. **73**, 043 505, 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0509098.

[Linde 08] A. Linde, « Inflationary Cosmology », *Lect. Notes Phys.*, vol. **738**, 1–54, 2008, URL http://arxiv.org/abs/0705.0164.

[Linde & Mukhanov 97] A. Linde & V. Mukhanov, « Nongaussian Isocurvature Perturbations from Inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **56**, 535, 1997, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9610219.

[Linde 82] A. D. Linde, « A New Inflationary Universe Scenario : A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems », *Phys. Lett.*, vol. **B108**, 389–393, 1982.

[Linde 83] A. D. Linde, « Chaotic Inflation », *Phys. Lett.*, vol. **B129**, 177–181, 1983.

[Luminet *et al.* 03] J. P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq & J. P. Uzan, « Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background », *Nature*, vol. **425**, 593, 2003, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0310253.

[Lyth *et al.* 05] D. H. Lyth, K. A. Malik & M. Sasaki, « A general proof of the conservation of the curvature perturbation », *JCAP*, vol. **0505**, 004, 2005, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0411220.

[Lyth & Wands 03] D. H. Lyth & D. Wands, « Conserved cosmological perturbations », *Phys. Rev. D*, vol. **68**, 103 515, 2003, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0306498.

[Ma & Bertschinger 95] C.-P. Ma & E. Bertschinger, « Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges », *Astrophys. J.*, vol. **455**, 7, 1995, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9506072.

[Maartens *et al.* 99] R. Maartens, T. Gebbie & G. Ellis, « Cosmic microwave background anisotropies : Nonlinear dynamics », *Phys. Rev. D*, vol. **59**, 083 506, 1999, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9808163.

[Maldacena 03] J. Maldacena, « Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models », *JHEP*, vol. **0305**, 013, 2003, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0210603.

[Malik 05] K. A. Malik, « Gauge-invariant perturbations at second order : multiple scalar fields on large scales », *JCAP*, vol. **0511**, 005, 2005, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0506532.

[Malik & Wands 04] K. A. Malik & D. Wands, « Evolution of second-order cosmological perturbations », *Class. Quant. Grav.*, vol. **21**, L65, 2004, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0307055.

[Malquarti *et al.* 03] M. Malquarti, E. J. Copeland, A. R. Liddle & M. Trodden, « A new view of k-essence », *Phys. Rev. D*, vol. **67**, 123 503, 2003, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0302279.

[Martin 07] J. Martin, « Inflationary Perturbations : the Cosmological Schwinger Effect », 2007, URL http://arxiv.org/abs/0704.3540.

[Martìn-Garcìa 04] J. Martìn-Garcìa, « xAct and xPert », 2004, URL http://metric.iem.csic.es/Martin-Garcia/xAct/index.html.

[Matarrese *et al.* 98a] S. Matarrese, S. Mollerach & M. Bruni, « Relativistic second-order perturbations of the Einstein-de Sitter Universe », *Phys. Rev. D*, vol. **58**, 043 504, 1998, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9707278.

[Matarrese *et al.* 98b] S. Matarrese, S. Mollerach & M. Bruni, « Relativistic second-order perturbations of the Einstein-de Sitter Universe », *Phys. Rev. D*, vol. **58**, 043 504, 1998, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9707278.

[Mészáros 74] P. Mészáros, « The behaviour of point masses in an expanding cosmological substratum », *Astron. Astrophys.*, vol. **37**, 225–228, 1974.

[Misner *et al.* 73] C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation*, San Francisco, USA, freeman édition, 1973.

[Mollerach & Matarrese 97] S. Mollerach & S. Matarrese, « Cosmic Microwave Background anisotropies from second order gravitational perturbations », *Phys. Rev. D*, vol. **56**, 4494, 1997, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9702234.

[Mukhanov *et al.* 92] V. Mukhanov, H. Feldman & R. Brandenberger, « Theory of cosmological perturbations », *Phys. Rep.*, vol. **215**, 203–333, 1992.

[Mukhanov 85] V. F. Mukhanov, « Gravitational Instability of the Universe Filled with a Scalar Field », *JETP Lett.*, vol. **41**, 493–496, 1985.

[Mukhanov & Chibisov 81] V. F. Mukhanov & G. V. Chibisov, « Quantum Fluctuation and Nonsingular Universe. (In Russian) », *JETP Lett.*, vol. **33**, 532–535, 1981.

[Nakahara 90] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Bristol, New-York, adam hilger édition, 1990.

[Nakamura 07] K. Nakamura, « Second-order Gauge Invariant Cosmological Perturbation Theory : – Einstein equations in terms of gauge invariant variables – », *Prog. Theor. Phys.*, vol. **117**, 17, 2007, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/0605108.

[Osano *et al.* 07] B. Osano, C. Pitrou, P. Dunsby, J.-P. Uzan & C. Clarkson, « Gravitational waves generated by second order effects during inflation », *JCAP*, vol. **0407**, 003, 2007, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/0612108.

[Peebles & Yu 70] P. J. E. Peebles & J. T. Yu, « Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe », *Astrophys. J.*, vol. **162**, 815–836, 1970.

[Penzias & Wilson 65] A. A. Penzias & R. W. Wilson, « A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s », *Astrophys. J.*, vol. **142**, 419–421, 1965.

[Pereira *et al.* 07] T. S. Pereira, C. Pitrou & J.-P. Uzan, « Theory of cosmological perturbations in an anisotropic universe », *JCAP*, vol. **0709**, 006, 2007, URL http://arxiv.org/abs/0707.0736.

[Peskin & Schroeder 95] M. E. Peskin & D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Reading, USA, addison-wesle édition, 1995.

[Peter & Uzan 05] P. Peter & J.-P. Uzan, *Cosmologie primordiale*, Paris, France, belin édition, 2005.

[Pitrou 07] C. Pitrou, « Gauge invariant Boltzmann equation and the fluid limit », *Class. Quant. Grav.*, vol. **24**, 6127, 2007, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/0701121.

[Pitrou & Uzan 07] C. Pitrou & J.-P. Uzan, « Quantization of perturbations during inflation in the 1+3 covariant formalism », *Phys. Rev. D*, vol. **75**, 087 302, 2007, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/0701121.

[Pullen & Kamionkowski 07] A. R. Pullen & M. Kamionkowski, « Cosmic Microwave Background Statistics for a Direction-Dependent Primordial Power Spectrum », *Phys. Rev. D*, vol. **76**, 103 529, 2007, URL http://arxiv.org/abs/0709.1144.

[Pyne & Carroll 96] T. Pyne & S. M. Carroll, « Higher-Order Gravitational Perturbations of the Cosmic Microwave Background », *Phys. Rev. D*, vol. **53**, 2920, 1996, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9510041.

[Riazuelo 00] A. Riazuelo, *Signature de divers modèles d'univers primordial dans les anisotropies du rayonnement fossile*, Thèse de doctorat, Université Paris Sud, 2000.

[Rigopoulos & Shellard 03] G. I. Rigopoulos & E. P. S. Shellard, « The Separate Universe Approach and the Evolution of Nonlinear Superhorizon Cosmological Perturbations », *Phys. Rev. D*, vol. **68**, 123 518, 2003, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0306620.

[Rigopoulos & Shellard 05] G. I. Rigopoulos & E. P. S. Shellard, « Non-linear inflationary perturbations », *JCAP*, vol. **0510**, 006, 2005, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0405185.

[Rigopoulos *et al.* 05] G. I. Rigopoulos, E. P. S. Shellard & B. J. W. van Tent, « Simple route to non-Gaussianity in inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **72**, 083 507, 2005, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0410486.

[Rigopoulos *et al.* 06a] G. I. Rigopoulos, E. P. S. Shellard & B. J. W. van Tent, « Large non-Gaussianity in multiple-field inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **73**, 083 522, 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0506704.

[Rigopoulos *et al.* 06b] G. I. Rigopoulos, E. P. S. Shellard & B. J. W. van Tent, « Non-linear perturbations in multiple-field inflation », *Phys. Rev. D*, vol. **73**, 083 521, 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0504508.

[Rindler 02] W. Rindler, « Visual horizons in world-models », *Gen. Rel. Grav.*, vol. **34**, 133–153, 2002.

[Riotto & Sloth 08] A. Riotto & M. S. Sloth, « On Resumming Inflationary Perturbations beyond One-loop », 2008, URL http://arxiv.org/abs/0801.1845.

[Sachs & Wolfe 67] R. K. Sachs & A. M. Wolfe, « Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background », *Astrophys. J.*, vol. **147**, 73–90, 1967.

[Salopek & Bond 90] D. S. Salopek & J. R. Bond, « Nonlinear evolution of long wavelength metric fluctuations in inflationary models », *Phys. Rev. D*, vol. **42**, 3936–3962, 1990.

[Sasaki 86] M. Sasaki, « Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe », *Prog. Theor. Phys.*, vol. **76**, 1036, 1986.

[Sasaki *et al.* 06] M. Sasaki, J. Valiviita & D. Wands, « Non-Gaussianity of the primordial perturbation in the curvaton model », *Phys. Rev. D*, vol. **74**, 103 003, 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0607627.

[Seery 07] D. Seery, « One-loop corrections to a scalar field during inflation », *JCAP*, vol. **0711**, 025, 2007, URL http://arxiv.org/abs/0707.3377.

[Seery & Lidsey 05a] D. Seery & J. E. Lidsey, « Primordial non-gaussianities from multiple-field inflation », *JCAP*, vol. **0509**, 011, 2005, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0506056.

[Seery & Lidsey 05b] D. Seery & J. E. Lidsey, « Primordial non-gaussianities in single field inflation », *JCAP*, vol. **0506**, 003, 2005, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0503692.

[Seery & Lidsey 07] D. Seery & J. E. Lidsey, « Non-gaussianity from the inflationary trispectrum », *JCAP*, vol. **0701**, 008, 2007, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0611034.

[Seljak 94] U. Seljak, « A Two-Fluid Approximation for Calculating the Cosmic Microwave Background Anisotropies », *Astrophys. J.*, vol. **435**, L87, 1994, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9406050.

[Seljak & Zaldarriaga] U. Seljak & M. Zaldarriaga, « CMBFAST », URL http://cmbfast.org.

[Seljak & Zaldarriaga 96] U. Seljak & M. Zaldarriaga, « A Line of Sight Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies », *Astrophys. J.*, vol. **469**, 437, 1996, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9603033.

[Serra & Cooray 08] P. Serra & A. Cooray, « Impact of Secondary non-Gaussianities on the Search for Primordial Non-Gaussianity », 2008, URL http://arxiv.org/abs/0801.3276.

[Silk 68] J. Silk, « Cosmic black body radiation and galaxy formation », *Astrophys. J.*, vol. **151**, 459–471, 1968.

[Sloth 06] M. S. Sloth, « On the one loop corrections to inflation and the CMB anisotropies », *Nucl. Phys. B*, vol. **748**, 149, 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0604488.

[Sloth 07] M. S. Sloth, « On the One Loop Corrections to Inflation II : The Consistency Relation », *Nucl. Phys. B*, vol. **775**, 78, 2007, URL http://arxiv.org/abs/hep-th/0612138.

[Smith & Zaldarriaga 06] K. M. Smith & M. Zaldarriaga, « Algorithms for bispectra : forecasting, optimal analysis, and simulation », 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0612571.

[Smoot 97] G. F. Smoot, « The Cosmic Microwave Background Anisotropy Experiments », 1997, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9705135.

[Smoot 08] G. F. Smoot, « CMB Anisotropies : Their Discovery and Utilization », 2008, URL http://arxiv.org/abs/0801.2563.

[Smoot *et al.* 92] G. F. Smoot *et al.*, « Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps », *Astrophys. J.*, vol. **396**, L1–L5, 1992.

[Spergel *et al.* 07] D. N. Spergel, R. Bean, O. Dore, M. R. Nolta, C. L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, H. V. Peiris, L. Verde, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack & E. L. Wright, « Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results : Implications for Cosmology », *APJS*, vol. **170**, 377, 2007, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0603449.

[Spergel & Goldberg 99] D. N. Spergel & D. M. Goldberg, « The Microwave Background Bispectrum, Paper I : Basic Formalism », *Phys. Rev. D*, vol. **59**, 103 001, 1999, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9811252.

[Stebbins 97] A. Stebbins, « The CMBR Spectrum », 1997, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/9705178.

[Stein & Weiss 71] E. Stein & G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidian spaces*, princeton university press édition, 1971.

[Stewart 71] J. Stewart, *Non-equilibrium relativistic kinetic theory*, vol. 10 de *Lecture Notes in Physics*, Springer, Berlin, Germany ; New York, U.S.A., springer édition, 1971.

[Stewart 90] J. M. Stewart, « Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models », *Class. Quant. Grav.*, vol. **7**, 1169–1180, 1990.

[Stewart & Walker 74] J. M. Stewart & M. Walker, « Perturbations of spacetimes in general relativity », *Proc. Roy. Soc. Lond.*, vol. **A341**, 49–74, 1974.

[Thorne 80] K. S. Thorne, « Multipole Expansions of Gravitational Radiation », *Rev. Mod. Phys.*, vol. **52**, 299–339, 1980.

[Tsagas *et al.* 07] C. G. Tsagas, A. Challinor & R. Maartens, « Relativistic cosmology and large-scale structure », 2007, URL http://arxiv.org/abs/0705.4397.

[Uzan 98] J.-P. Uzan, « Dynamics of Relativistic Interacting Gases : from a Kinetic to a Fluid Description », *Class. Quant. Grav.*, vol. **15**, 1063, 1998, URL http://arxiv.org/abs/gr-qc/9801108.

[Uzan *et al.* 07a] J.-P. Uzan, F. Bernardeau & Y. Mellier, « Time drift of cosmological redshifts and its variance », 2007, URL http://arxiv.org/abs/0711.1950.

[Uzan *et al.* 07b] J.-P. Uzan, C. Clarkson & G. F. R. Ellis, « Time drift of cosmological redshifts as a test of the Copernican principle », 2007, URL http://arxiv.org/abs/0801.0068.

[Uzan & Lehoucq 01] J.-P. Uzan & R. Lehoucq, « A Dynamical Study of the Friedmann Equations », *Eur. J. Phys.*, vol. **22**, 371, 2001, URL http://arxiv.org/abs/physics/0108066.

[Verde & Spergel 02] L. Verde & D. N. Spergel, « Dark energy and cosmic microwave background bispectrum », *Phys. Rev. D*, vol. **65**, 043 007, 2002, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0108179.

[Vernizzi 05] F. Vernizzi, « On the conservation of second-order cosmological perturbations in a scalar field dominated universe », *Phys. Rev. D*, vol. **71**, 061 301, 2005, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0411463.

[Vernizzi & Wands 06] F. Vernizzi & D. Wands, « Non-Gaussianities in two-field inflation », *JCAP*, vol. **0605**, 019, 2006, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0603799.

[Wald 84] R. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, U.S., 1984.

[Weinberg 05] S. Weinberg, « Quantum Contributions to Cosmological Correlations », *Phys. Rev. D*, vol. **72**, 043 514, 2005, URL http://arxiv.org/abs/hep-th/0506236.

[Weinberg 06] S. Weinberg, « Quantum Contributions to Cosmological Correlations II : Can These Corrections Become Large ? », *Phys. Rev. D*, vol. **74**, 023 508, 2006, URL http://arxiv.org/abs/hep-th/0605244.

[Yadav *et al.* 07a] A. P. S. Yadav, E. Komatsu & B. D. Wandelt, « Fast Estimator of Primordial Non-Gaussianity from Temperature and Polarization Anisotropies in the Cosmic Microwave Background », *Astrophys. J.*, vol. **664**, 680, 2007, URL http://arxiv.org/abs/astro-ph/0701921.

[Yadav *et al.* 07b] A. P. S. Yadav, E. Komatsu, B. D. Wandelt, M. Liguori, F. K. Hansen & S. Matarrese, « Fast Estimator of Primordial Non-Gaussianity from Temperature and Polarization Anisotropies in the Cosmic Microwave Background II : Partial Sky Coverage and Inhomogeneous Noise », 2007, URL http://arxiv.org/abs/0711.4933.

[Yadav & Wandelt 07] A. P. S. Yadav & B. D. Wandelt, « Detection of primordial non-Gaussianity (f_{NL}) in the WMAP 3-year data at above 99.5% confidence », 2007, URL http://arxiv.org/abs/0712.1148.

[Zeldovich 72] Y. B. Zeldovich, « A Hypothesis, unifying the structure and the entropy of the universe », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. **160**, 1–3, 1972.