

# TRAVAUX DIRIGÉS DE RELATIVITÉ GÉNÉRALE

T.D. n° 2: 17 avril 2000

*Rappel: Dans ces T.D., on choisit les unités de telle sorte que la vitesse de la lumière soit  $c = 1$*

## Exercice I: Théorie de Kaluza-Klein.

Peu après la mise en place de la théorie de la relativité générale par Einstein en 1915, l'idée est venue, en particulier de Kaluza et Klein, de généraliser encore en passant à un espace-temps de plus de 4 dimensions dans l'espoir d'unifier la gravitation avec l'électromagnétisme. Dans cet exercice, on verra comment la chose est possible, mais aussi pourquoi, au début du siècle, on a pensé que ça ne marchait pas. On conclura sur les modèles récents, issus des théories de cordes, ayant des dimensions supplémentaires de grande tailles (en pratique millimétriques).

Les hypothèses sont maintenant les suivantes:

*i)* Les lois de la nature ne sont décrites que par de la géométrie pure. Les champs supplémentaires (Maxwell, Yang-Mills, etc ...) sont supposé contenus dans le tenseur d'Einstein à  $(4+n)$  dimensions et il n'y a donc pas de tenseur énergie-impulsion à  $(4+n)$  dimensions.

*ii)* On requiert qu'il s'agisse d'extensions minimale de la relativité. Donc la structure de la théorie est inchangée et les équations attendues (ou postulées) sont les équations d'Einstein du vide.

*iii)* Les dimensions supplémentaires sont compactes avec une topologie à définir.

• Notations: Les indices grecs  $\mu, \nu, \dots$  varient comme d'habitude de 0 à 3. Les indices latins majuscules  $A, B, \dots$  varient de 0 à  $3+n$ , où  $n$  est le nombre de dimensions supplémentaires. Pour  $n = 1$ , on adoptera la notation  $y \equiv x^4$ . Les quantités  $Q$  surmontées d'un chapeau  $\hat{Q}$  sont entendues dans l'espace complet, celles sans le chapeau  $Q$  dans l'espace-temps ordinaire à 4 dimensions. L'hypothèse *iii)* implique donc que les équations attendues sont

$$\hat{G}_{AB} \equiv \hat{R}_{AB} - \frac{1}{2} \hat{g}_{AB} \hat{R} = 0. \quad (1)$$

1) Exprimer la connection  $\hat{\Gamma}_{AB}^C$  et les tenseurs de Riemann  $\hat{R}_{BCD}^A$ , Ricci  $\hat{R}_{AB}$  et Einstein  $\hat{G}_{AB}$  ainsi que la courbure scalaire  $\hat{R}$  en fonction des composantes  $\hat{g}_{AB}$  de la métrique à  $4+n$  dimensions.

2) On se place maintenant explicitement dans le cas  $n = 1$ . Indiquer le nombre de fonctions arbitraires (degrés de libertés) de la théorie et montrer qu'ils peuvent se séparer entre un champ de spin 2 (le graviton), un champ de spin 1 (le photon) et un champ scalaire. Ce dernier champ a été à la base des réticences de nombreux physiciens du début du siècle.

3) On adopte la paramétrisation suivante pour la métrique

$$(\hat{g}_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + \kappa^2 \phi^2 A_\alpha A_\beta & \kappa \phi^2 A_\alpha \\ \kappa \phi^2 A_\beta & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

où  $\kappa$  est une constante qu'on déterminera ultérieurement, ainsi que la "condition du cylindre" de Kaluza,  $\partial_4 = 0$  sur tout champ physique. Montrer qu'alors les équations d'Einstein (??) se mettent sous une forme connue.

- 4) On suppose maintenant que le champ scalaire  $\phi$  est constant dans tout l'espace. Montrer que dans ce cas les équations d'Einstein obtenues dans la question précédente se réduisent aux formes habituelles des équations d'Einstein-Maxwell. Identifier la constante  $\kappa$  et discuter l'hypothèse au regard de l'équation du mouvement pour  $\phi$ . Y a-t-il une solution ?
- 5) On part maintenant de l'action de Hilbert-Palatini à 5 dimensions

$$S = - \int d^5x \sqrt{-\hat{g}} \frac{\hat{R}}{16\pi\hat{G}}. \quad (3)$$

Développer cette action à l'aide de la paramétrisation (??) en extrayant un facteur de volume de la dimension supplémentaire. Identifier alors la constante de Newton  $G$  à 4 dimensions en fonction de celle à 5 dimensions  $\hat{G}$ . Pouvez vous maintenant penser à une méthode pour résoudre le problème posé à la question précédente ?

- 6) On se place maintenant dans le cas où le potentiel vecteur  $A_\mu = 0$ . Discuter tout d'abord de cette hypothèse en fonction de l'hypothèse du cylindre : est-ce une hypothèse purement mathématique (choix de jauge) ou bien physique ? Comment s'écrit alors l'action (??) ? Il s'agit de la théorie "tenseur-scalaire" de Brans-Dicke qu'on écrit généralement sous la forme

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R\phi}{16\pi G} + \omega \frac{\partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi}{\phi} \right] + S_{\text{matière}},$$

où le paramètre  $\omega > 500$  d'après les observations astronomiques actuelles. On peut généraliser cette théorie [qui ne respecte alors plus les règles *i*), *ii*) et *iii*)] en ajoutant une dépendance  $\omega(\phi)$  ou encore un potentiel  $V(\phi)$ .

- 7) On définit une transformation conforme par la relation

$$\hat{g}_{AB} \rightarrow \hat{g}'_{AB} = \Omega^2 \hat{g}_{AB}, \quad (4)$$

où le facteur conforme  $[\Omega(x^\mu)]^2$  ne dépend que des 4 coordonnées usuelles et est positif. Comment se transforme la métrique et le scalaire de Ricci à 4 dimensions sous la loi (??) ?

- 8) On remplace maintenant  $\phi^2$  par  $\phi$  dans la métrique (??) et on effectue une transformation conforme de facteur  $\Omega^2 = \phi^{-1/3}$ . Ré-écrire l'action de Brans-Dicke après cette transformation. Démontrer que si on pose

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}\kappa} \ln \phi,$$

(champ appelé "dilaton" en théorie des cordes), on obtient l'action canonique d'un champ scalaire minimalement couplé à la gravitation.

- 9) On suppose maintenant que la dimension supplémentaire est de topologie circulaire et de rayon  $L$  et on considère un champ scalaire  $\hat{\varphi}(x^\mu, y)$  de masse nulle. Ecrire l'action qui en régit la dynamique. En le développant en série de Fourier dans la 5<sup>ème</sup> dimension, montrer, en utilisant la métrique conforme, que cette action est celle d'une série infinie de champs scalaires massifs chargés. Identifier les masses et charges de ces champs et les calculer numériquement dans le cas où  $L \sim \ell_P$ , la longueur de Planck. Montrer que si la constante de structure fine est choisie à  $1/137$ , la longueur de la 5<sup>ème</sup> dimension est de l'ordre de la longueur associée à la brisure de grande unification.

- 10) Si on suppose qu'il y a plus d'une dimension compacte et que la constante de Newton à  $4 + n$  dimensions donne l'échelle caractéristique des interactions électrofaibles ( $\sim 1$  TeV), la longueur des dimensions supplémentaires change. Exprimer cette longueur en fonction de  $n$ . Pour  $n > 1$ ,

aucune observation actuelle ne contredit encore ce genre d'hypothèse (théorie de Arkani-Hamed, Dimopoulos et Dvali).

Exercice II: Approximation linéaire de la relativité générale.

Lorsque le champ gravitationnel est faible, on peut développer la métrique sous la forme

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

avec  $\eta_{\mu\nu}$  la métrique de Minkowski. C'est possible par exemple dans le système solaire où  $|h_{\mu\nu}| \simeq \Phi < GM_{\odot}/R_{\odot} \sim 10^{-6}$ .

1) Calculer au 1<sup>er</sup> ordre en  $h$  la connection  $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$  et les tenseurs de Riemann  $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ , Ricci  $R_{\mu\nu}$  et Einstein  $G_{\mu\nu}$  ainsi que la courbure scalaire  $R$ .

2) On définit les quantités avec une barre  $\bar{Q}_{\mu\nu}$  par la relation

$$\bar{Q}_{\mu\nu} \equiv Q_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}Q,$$

où  $Q$  représente la trace de  $Q_{\mu\nu}$  :  $Q \equiv Q^{\mu}_{\mu}$ . En effectuant un choix de jauge (voir question suivante) équivalent à la jauge  $A^{\alpha}_{,\alpha} = 0$  pour l'électromagnétisme et dont on déterminera les caractéristiques, montrer que les équations d'Einstein linéarisées peuvent se mettre sous la forme

$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}, \tag{5}$$

et écrire la métrique en fonction de  $\bar{h}_{\mu\nu}$ . Discuter le cas du vide. Connaissez vous une solution à ces équations ?

3) Une transformation de jauge est définie par un changement infinitésimal de coordonnées

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}, \tag{6}$$

avec  $\xi^{\mu}$  quatre fonctions des  $x^{\alpha}$  suffisamment petites pour conserver la relation  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Au premier ordre, seule la perturbation de métrique  $h_{\mu\nu}$  est modifiée par ce changement de coordonnées, appelé changement de jauge dans ce cas. Connaissant la transformation sous un changement de coordonnées de la métrique (tenseur de rang 2), obtenir la loi de transformation de  $h_{\mu\nu}$ . Que se passe-t-il pour une transformation de jauge effectuée avec  $\xi^{\mu}$  un vecteur de Killing. Démontrer l'invariance de jauge de la théorie linéarisée de la gravitation, i.e., l'invariance du tenseur de Riemann sous (??).

4) Soit  $\bar{h}_{\mu\nu}$  une solution des équations d'Einstein linéarisées. Démontrer qu'il existe un vecteur  $\xi^{\mu}$  grâce auquel  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , une fois transformé, satisfait la relation (jauge de Lorentz)

$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0.$$

Démontrer de plus qu'une nouvelle transformation de jauge ne modifie pas cette relation si et seulement si  $\nabla^2 \xi^{\mu} = 0$ . Comparer avec l'invariance de jauge U(1) de l'électromagnétisme.

Exercice IV: Déflexion de la lumière par une corde cosmique.

Une corde cosmique est une solution à symétrie cylindrique de type "solitonique" (non linéaire) des équations de champs du modèle de Higgs abélien. Ces objets sont supposés se former lors de la transition de phase au cours de laquelle le champs vectoriel associé à l'invariance initiale prend une masse. Ils se présentent sous la forme de cordes au sens où leur épaisseur est la longueur Compton associée à l'échelle d'énergie de brisure de symétrie, alors qu'ils peuvent traverser tout

l'univers dans les dimensions transverses. En ce sens, on les décrit souvent par des distributions  $\delta$ . Elles sont caractérisées par une énergie par unité de longueur  $U$  et une tension  $T$ , dont l'ordre de grandeur est  $U \sim T \sim \eta^2$ , avec  $\eta$  l'échelle d'énergie de la transition de phase responsable de la formation des cordes. L'utilisation de la théorie linéarisée se justifie dès l'instant que  $\eta \ll m_p$  (justifier).

1) Pour une corde cosmique alignée avec l'axe  $z$ , le tenseur énergie-impulsion peut se mettre sous la forme

$$(T_{\mu\nu}) = \text{diag}(U, 0, 0, -T)\delta(x)\delta(y).$$

Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour calculer la métrique au premier ordre au voisinage d'une corde cosmique. On utilisera soit la solution en terme de "potentiels retardés", soit la relation  $\Delta \ln(r/r_c) = 2\pi\delta(x)\delta(y)$ . Démontrer que dans le cas simple ultra-relativiste de Nambu-Goto (cf. cours de théorie des cordes), cette métrique peut s'exprimer sous la forme d'une métrique de Minkowski avec un angle manquant.

2) La solution générale des équations d'Einstein du vide à symétrie cylindrique et statique est donnée par la métrique de Kasner

$$ds^2 = -\left(\frac{r}{\ell}\right)^{2\alpha} dt^2 + dr^2 + \left(\frac{r}{\ell}\right)^{2\beta} dz^2 + \gamma r^2 \left(\frac{r}{\ell}\right)^{2\delta} d\theta^2, \quad (7)$$

avec  $\alpha + \beta + \delta = 0$  et  $\delta(\delta + 1) = \alpha\beta$ . Montrer que moyennant ces relations, la métrique (??) satisfait bien  $G_{\mu\nu} = 0$ . Montrer qu'au premier ordre dans le parameter  $G\eta^2$ , la solution linéaire de la question précédente peut se raccorder à la solution générale (??).

3) Dans cette métrique, on peut estimer un "angle manquant" dépendant de la distance à la corde  $r$  par

$$\delta(r) \equiv 2\pi \left( 1 - d \sqrt{\frac{g_{\theta\theta}}{\sqrt{g_{rr}}dr}} \right).$$

Expliquer pourquoi et dans quelle approximation il est possible de comprendre réellement  $\delta(r)$  comme un angle manquant.

4) Un rayon lumineux passe à une distance  $L$  de la corde dans un plan transverse à celle-ci. Estimer l'angle  $\Delta\theta$  par lequel il est défléchi par le champ gravitationnel de la corde et montrer qu'au premier ordre, cette déflexion ne dépend que de l'énergie par unité de longueur  $U$ .

5) Sous quelle condition la séparation angulaire entre deux images d'une même source (mirage gravitationnel) est-elle identique au déficit angulaire ?