

Exercices de Cosmologie, TD 2

March 27, 2009

1 Équations de Friedmann

Montrer qu'en temps conforme, les équations de Friedmann deviennent

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - K + \frac{\Lambda}{3}a^2 \\ \mathcal{H}' &= -\frac{8\pi G}{6}a^2(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}a^2\end{aligned}\tag{1}$$

Montrer qu'en temps conforme, l'équation de conservation devient

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + P) = 0.\tag{2}$$

2 Vitesse du son

On définit la vitesse du son comme $c_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}}$. Montrer que

$$\dot{w} = -3H(1+w)(c_s^2 - w).\tag{3}$$

3 Solutions des équations de Friedmann

Montrer que

- Si $K = 0$ et $w \neq -1$, alors $a \sim t^{\frac{2}{3(1+w)}}$
- Si $K = 0$ et $w = -1$, alors $a \sim e^{Ht}$ avec $H = \text{Cte}$

- Si $K = 0$ avec un mélange de matière froide ($w = 0$) et Λ

$$a = \left(\frac{H_0^2}{\alpha^2 - 1} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3\alpha}{2} t \right), \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (4)$$

4 Ères cosmologiques

Calculer les valeurs de z_{eq} et z_Λ pour lesquelles $\Omega_r \simeq \Omega_m$ et $\Omega_m \simeq \Omega_\Lambda$. On utilisera les valeurs mesurées aujourd'hui

$\Omega_{r0} \simeq 4.15 \cdot 10^{-5} h^{-2}$, $\Omega_{m0} \simeq 0.28$, $\Omega_{\Lambda0} \simeq 0.72$ et $h \simeq 0.72$.

5 Paramètre de décélération

Montrer que si on néglige la radiation, $q_0 = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda$. Quel est son signe aujourd'hui?

6 Thermodynamique

Pour $m \ll T$ et $\mu \ll T$ vérifier que

$$\begin{aligned} n &= \frac{\xi(3)}{\pi^2} g T^3 \times \begin{pmatrix} 1 \text{ si baryons} \\ \frac{3}{4} \text{ si fermions} \end{pmatrix} \\ \rho &= \frac{\pi^2}{30} g T^4 \begin{pmatrix} 1 \text{ si baryons} \\ \frac{7}{8} \text{ si fermions} \end{pmatrix} \\ P &= \frac{\rho}{3} \end{aligned} \quad (5)$$

Pour des particules non relativistes, vérifier que

$$\begin{aligned} n &= g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu-m}{T}} \\ \rho &= \left(m + \frac{3T}{2} \right) n \\ P &= Tn \end{aligned} \quad (6)$$

7 Entropie

Vérifier que si $m, \mu \ll T$ alors

$$s(T, \mu) = g_i \frac{2\pi^2}{45} T^3 \left(\begin{array}{l} 1 \text{ si baryons} \\ \frac{7}{8} \text{ si fermions} \end{array} \right) \quad (7)$$

Dans le cas de particules non relativistes, vérifier que

$$s(T, \mu) = \left(m + \frac{5T}{2} - \mu \right) \frac{n}{T} \quad (8)$$

8 Distribution des photons aujourd'hui

Les photons ont aujourd'hui un spectre de corps noir de température $T_0 = 2.725K$. Calculer leur densité n_γ et leur densité d'énergie ρ_γ aujourd'hui. N'oubliez pas de rétablir les constantes. Dans ce qui précède, nous avons utilisé $\hbar = c = k_B = 1$. On pourra utiliser

$$\begin{aligned} k_B &= 1.38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1} \\ 1 \text{ K} &= 8.618 \times 10^{-14} \text{ GeV} \cdot k_B^{-1} \\ 1 \text{ GeV} &= 1.602 \times 10^{-10} \text{ J} \\ 1 \text{ GeV} &= (1.973)^{-1} 10^{16} \text{ m}^{-1} \\ 1 \text{ GeV} &= 1.782 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$