

Examen de Cosmologie

M2 de physique théorique, ENS 2008-2009.

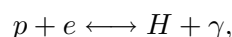
Les exercices sont à rendre pour le vendredi 29 mai au secrétariat du M2. Vous avez le droit d'utiliser tous les documents que vous désirez (livres, articles, etc). Cependant je préfère que vous citiez vos sources (et attention aux différentes conventions de la littérature) !

Je vous donne aussi une fiche d'évaluation. En la remplissant vous m'aidez à améliorer ce cours. Je vous en remercie.

On utilise $G = M_p^{-2}$. Toutes les autres notations sont celles du cours. Je vous laisse fixer toutes les valeurs numériques dont vous aurez besoin.

Exercice 1 : Fond diffus cosmologique

Le cours sur l'histoire thermique de l'univers s'est concentré sur la nucléosynthèse primordiale. Après la nucléosynthèse, l'univers est alors constitué de protons, d'électrons, de photons et de neutrinos (avec un peu d'hélium que nous négligerons). Les protons et les électrons interagissent selon



où H est l'hydrogène neutre. La réaction de formation de l'hydrogène s'appelle la recombinaison.

1. Expliquez qualitativement pourquoi l'hydrogène neutre ne peut pas se former à haute température.
2. Nous allons estimer la température de recombinaison.

(a) Exprimer les conditions imposées par la neutralité électrique et l'équilibre chimique. On appellera n_e et n_p les densités numériques de protons et d'électrons et μ les potentiels chimiques.

(b) En introduisant $X_e = n_e/(n_p + n_H)$, la fraction d'ionisation, montrer qu'à l'équilibre on doit avoir

$$\frac{X_e^2}{1 - X_e} = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-E_I/T} \frac{1}{n_b},$$

avec $E_I = m_e + m_p - m_H = 13.6$ eV et $n_b = n_p + n_H$.

- (c) Calculer $n_b = \eta n_\gamma$ en fonction de la température et de η . Rappeler l'ordre de grandeur typique de η .
- (d) Calculer $X_e(T = E_I)$ et commenter.
- (e) Déduire de la question (c) que

$$\frac{E_I}{T} = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{m_e}{2\pi T}\right) - \ln \eta - \ln\left[\frac{2}{\pi^2} \zeta(3) \frac{X_e^2}{1 - X_e}\right].$$

En justifiant que le dernier terme peut être négligé, estimer la température de la recombinaison. Comparer cette température à E_I et discuter.

- (f) Que se passe-t-il pour les photons après la recombinaison? Sur les bases de cette analyse, quel type de signal observationnel recherchiez-vous?

3. L'analyse précédente donne une estimation de la température de la recombinaison. Une analyse plus précise demanderait de résoudre une équation de Boltzmann. Nous allons utiliser des informations observationnelles pour mieux déterminer cette température.

- (a) Les photons du fond diffus cosmologique sont observés avec un spectre de Planck à une température $T_0 = 2.725$ K. Que vaut cette température en eV? Quelles sont la longueur d'onde et la fréquence associées?
- (b) En utilisant les résultats de la Figure 1 qui représente la distribution en énergie de la radiation dans les différentes longueurs d'onde, justifier que la densité de radiation de l'univers est dominée par les photons du fond diffus cosmologique.
- (c) Exprimer la température des photons en fonction du redshift z .
- (d) Calculer n_b en fonction du redshift en admettant que $\Omega_b h^2 = 0.02$ aujourd'hui.
- (e) En déduire l'expression du taux de réaction $\Gamma_T = n_e \sigma_T$ où σ_T est la section de diffusion Thomson, en fonction de z et de X_e .
- (f) Montrer que l'équation de Friedmann prend la forme

$$H^2 = \Omega_{m0} H_0^2 (1+z)^3 \left(1 + \frac{1+z}{1+z_{eq}} \right)$$

si on néglige la courbure et la constante cosmologique. z_{eq} est la valeur du redshift à l'égalité matière radiation. Estimer sa valeur si il y a 3 familles de neutrinos et que $\Omega_{m0} h^2 \sim 0.15$ et $h \sim 0.7$.

- (g) En déduire l'équation satisfaite par z_{dec} , valeur du redshift au découplage. La résoudre en admettant que la fraction d'électrons résiduelle est $X_e \sim 7 \times 10^{-3}$.
4. Historiquement, l'existence du fond diffus cosmologique a été prédit par Alpher, Hermann et Gamow en 1948. Pour cela, ils ont utilisé le fait qu'à la nucléosynthèse il fallait que $T_{BBN} \sim 10^9$ K et $n_b \sim 10^{18} \text{cm}^{-3}$. En estimant que $n_{b0} \sim 10^{-7} \text{cm}^{-3}$, ils en ont déduit la valeur de z_{BBN} puis celle de la température des photons aujourd'hui. Essayer de reconstruire leur calcul. Qu'en pensez-vous?
5. Ce fond diffus cosmologique (FDC) de photon a été observé pour la première fois par Penzias et Wilson, puis à de nombreuses reprises, en particulier par les satellites COBE et WMAP. Planck sera lancé le 6 mai 2009. Ces expériences ont prouvé que dans toutes les directions du ciel le spectre de ces photons était un spectre de corps noir avec une température $T(\theta, \varphi)$ et ont conclu que

$$T_0 = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 2.725 \pm 0.001 \text{ K}$$

et on définit la fluctuation de température par $\delta T = T(\theta, \varphi) - T_0$.

- (a) En quoi une telle mesure est importante pour notre compréhension du modèle cosmologique ?
- (b) L'instrument FIRAS a permis de montrer que la température était légèrement plus grande dans une partie du ciel et que

$$\delta T = (3.346 \pm 0.017) \times 10^{-3} \cos \theta \quad K.$$

En attribuant ce terme dipolaire à un effet Doppler, déduire la valeur de la vitesse du système solaire par rapport au référentiel cosmologique.

- (c) Ce dipole étant soustrait, il reste des fluctuations de température d'amplitude typique $\delta T/T_0 \sim 10^{-5}$ à des échelles angulaires supérieures à 10 degrés (voir la figure 2). En supposant que $\Omega_m \sim 0.3$ et $\Omega_\Lambda \sim 0.7$, calculer l'échelle angulaire sous laquelle est observée le rayon de Hubble au moment de la recombinaison. En déduire si ces fluctuations de température sont associées à des perturbations super- ou sub-Hubble.
- (d) Qu'en conclure? Quelle est l'intérêt potentiel de cette observation?

Exercice 2 : Anisotropies de température du fond diffus cosmologique

Le but de cet exercice est de relier les fluctuations de température du FDC aux perturbations de densité et de métrique. En identifiant la différence de température à la différence de redshift des photons dans différentes direction entre leur émission et la réception, Sachs et Wolfe ont montré que

$$\Theta(\mathbf{e}) = \left(\frac{1}{4} \delta_\gamma^N + \Phi - e^i D_i V_b \right)_{\mathbf{x}_e, \eta_e} + \int_e^0 (\Phi' + \Psi')[\mathbf{x}(\eta), \eta] d\eta.$$

Dans cette expression $\Theta \equiv \delta T/T_0$, δ_γ^N est le contraste de densité des photons (en jauge newtonienne), V_b le champ de vitesse des baryons, Φ et Ψ les deux potentiels gravitationnels de Bardeen. $\mathbf{e} \equiv e^i$ est la direction d'observation. La parenthèse du terme de droite est évaluée en (\mathbf{x}_e, η_e) où η_e est l'instant d'émission (c'est-à-dire au point d'émission sur la surface de recombinaison que nous supposons instantanée) et $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_0 + \mathbf{e}(\eta_0 - \eta_e)$ est le point d'émission. Le second terme est une intégrale qui est évaluée le long de la trajectoire des photons. Nous n'avons pris en compte ici que les modes scalaires, par souci de simplicité.

1. Essayer d'interpréter physiquement chacun de ces termes.
2. On définit la fonction de corrélation

$$C(\vartheta) = \langle \Theta(\mathbf{e}_1) \Theta(\mathbf{e}_2) \rangle.$$

Justifier que cette fonction ne dépend que de $\cos \vartheta = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$.

3. On peut donc la décomposer en polynome de Legendre selon

$$C(\vartheta) = \sum_\ell \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_\ell P_\ell(\cos \vartheta).$$

C_ℓ est le spectre de puissance angulaire des fluctuations de température. En vous basant sur les propriétés des polynomes de Legendre, justifier qu'un multipole ℓ correspond grossièrement à une échelle angulaire $\ell \sim \pi/\vartheta$.

On admettra sans démonstration (mais on pourra essayer de justifier cela si on a du temps) que

$$C_\ell = \frac{2}{\pi} \int |\Theta_\ell(k)|^2 k^2 dk$$

où k est un mode de Fourier et

$$\Theta_\ell(k) = \left(\frac{1}{4} \delta_\gamma^N(k, \eta_e) + \Phi(k, \eta_e) \right) j_\ell(k \Delta \eta_e) - \frac{V_b(k, \eta_e)}{k} j'_\ell(k \Delta \eta_e)$$

en négligeant le terme intégré et en posant $\Delta \eta_e = \eta_0 - \eta_e$, j_ℓ étant des fonctions de Bessel sphériques.

Dans cette notation, nous avons décomposé chaque perturbation selon

$$\delta(\mathbf{k}, \eta) = \delta(k, \eta) \mathbf{e}_\mathbf{k}$$

où $e_{\mathbf{k}}$ est une variable aléatoire gaussienne satisfaisant $\langle e_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}'} \rangle = \delta^{(3)}(e_{\mathbf{k}} + e_{\mathbf{k}'})$. Ainsi $\delta(k, \eta)$ peut être vu comme la “racine carrée” du spectre de puissance de δ à l’instant η . Justifier la possibilité d’une telle décomposition en vous basant sur les équations de perturbations et ce que vous savez des conditions initiales fixées par une phase d’inflation.

Nous allons évaluer C_ℓ dans deux régimes.

4. Nous commençons par considérer le cas des petits ℓ (i.e. à grande échelle angulaire), correspondant à des modes qui sont encore super-Hubble au moment du découplage. Dans ce cas on admettra que $V_b = 0$ et que

$$\Theta_\ell(k) = \frac{1}{3} \Phi(k, \eta_e) j_\ell(k \Delta \eta_e)$$

pour des conditions initiales adiabatiques. Rappeler pourquoi Φ reste constant pour des modes super-Hubble (de combien varie-t-il à la transition radiation-matière ?) En déduire l’expression de C_ℓ en fonction du spectre de puissance $P_\Phi(k)$ du potentiel gravitationnel. En posant

$$P_\Phi = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}(k),$$

montrer que

$$\ell(\ell + 1) C_\ell \propto \ell^{n-1}$$

si $\mathcal{P}(k) \propto k^n$ [Il existe une formule “magique” pour l’intégrale de $x^a j_\ell^2(x)$]. Conclure sur l’utilité des observations aux grandes échelles angulaires.

5. Considérons maintenant le cas général.

- (a) Ecrire les équations d’Euler et de continuité pour les perturbations des baryons et de la radiation, dans la jauge newtonienne et en temps conforme si on suppose les deux fluides découplés [utiliser les notes de cours] et en négligeant la pression anisotrope.
- (b) La diffusion Thomson induit un terme supplémentaire dans les équations d’Euler: $\tau'(V_b - V_\gamma)$ dans celle des photons et $-\tau'(V_b - V_\gamma)/R$ dans celle des baryons, avec $R = 3\rho_b/4\rho_\gamma$ et $\tau' = an_e\sigma_T$. Justifier cette forme.
- (c) Considérons des longueurs d’onde grandes devant $1/\tau'$. Montrer qu’alors

$$V_b = V_\gamma, \quad \text{et} \quad \delta'_\gamma - \frac{3}{4}\delta'_b = 0.$$

Interpréter ces deux équations. On appelle ce régime, le régime de couplage fort. Justifier cette appellation.

- (d) En déduire que dans ce régime on a

$$[(1 + R)V_\gamma]' = -\frac{1}{4}\delta_\gamma^N - (1 + R)\Phi.$$

- (e) Utiliser ensuite l’équation de continuité des photons pour montrer que

$$(\delta_\gamma^N)'' + \frac{R'}{1 + R}(\delta_\gamma^N)' + k^2 c_s^2 \delta_\gamma^N = F(\Phi, \Psi),$$

où $c_s^2 = 1/3(1 + R)$ et F est une fonction des potentiels gravitationnels que l’on peut ne pas exprimer explicitement. Que décrit cette équation?

- (f) En résolvant l’équation homogène par une méthode de type WKB puis en regroupant tous les termes on montre (ne pas le faire!) que

$$\Theta(k, \eta) = -\frac{3}{2} \Phi_{init}(k) \frac{\cos kr_s}{(1 + R)^{1/4}}$$

pour des conditions initiales adiabatiques, où r_s est donné par

$$r_s(\eta) = \int_0^\eta c_s d\eta.$$

Pour quelles valeurs k_p de k , $\Theta(k, \eta_e)$ est-il maximum?

(g) k_p correspond à une échelle physique $a(\eta_e)\pi/k_p$. En déduire les échelles angulaires auxquelles cela correspond? A quoi correspond physiquement le premier pic?

6. Comparer ceci au calcul exact dont le résultat se trouve sur la figure 3.

Exercice 3 : Quintessence

Revenons sur la dynamique récente de l'expansion de l'univers. Si nous effectuons un développement de Taylor du facteur d'échelle selon

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \right],$$

avec $q_0 = -\ddot{a}/aH^2|_{t_0}$, les observations récentes, et en particulier celles des supernovae de type Ia indiquent que $q_0 < 0$ [l'indice "0" indique des quantités évaluées aujourd'hui].

1. Exprimer q_0 en fonction de Ω_{m0} pour un modèle cosmologique ne contenant que de la matière non-relativiste (sans pression). Ne supposez pas que l'univers est spatialement euclidien.
2. Reprendre ce calcul pour un modèle cosmologique contenant de la matière non-relativiste et un fluide X dont l'équation d'état est constante, $P_X = w_X \rho_X$. On définira en particulier Ω_{X0} . Quelles doivent être les caractéristiques de cette composante de matière pour que $q_0 < 0$?
3. Que se passe-t-il si $w_X < -1$? Montrez en particulier que le facteur d'échelle diverge en un temps fini. Qu'en est-il de H ? Interprétation.
4. Nous supposons maintenant que cette composante X est une simple constante cosmologique ($w_X = -1$).
 - (a) Quelle contrainte $q_0 < 0$ impose-t-il sur la valeur de $\Omega_{\Lambda 0}$?
 - (b) Calculez le redshift auquel l'expansion cosmique commence à accélérer et celui auquel la constante cosmologique commence à dominer le contenu matériel de l'univers.
 - (c) On suppose maintenant que les sections spatiales sont euclidiennes ($K = 0$). Calculez le taux de croissance des perturbations de densité. Discutez qualitativement l'effet de la constante cosmologique sur les grandes structures de l'univers.
5. Nous considérons maintenant un modèle dans lequel l'accélération récente de l'expansion cosmique est due à un champ scalaire Q évoluant dans un potentiel $V(Q)$.
 - (a) Ecrire les équations de Klein-Gordon et de Friedmann si l'on ne considère que le champ Q et une composante de matière d'équation d'état w constante.
 - (b) Par analogie avec ce que nous avons vu en inflation, sous quelle(s) condition(s), ce champ scalaire peut-il induire une accélération de l'expansion ?
 - (c) Donnez l'expression de la densité d'énergie de Q . Nous nous restreignons à des potentiels de la forme

$$V(Q) = M^{4+\alpha} Q^{-\alpha}, \quad (1)$$

où M est une échelle de masse et α une constante positive. En négligeant l'énergie cinétique et admettant que $Q \sim M_p$ aujourd'hui en déduire l'échelle de masse M typique en fonction de H_0 , α et M_p . Application numérique pour $\alpha = 6$ and $\alpha = 11$. Discutez ce résultat au regard des échelles typiques de la physique des hautes énergies. Avez-vous une idée de théorie où des potentiels de ce type peuvent apparaître ?

- (d) Si l'on remonte dans le passé, Q ne domine pas le contenu de l'univers. Pour comprendre sa dynamique, nous allons donc supposer que le contenu de l'univers est dominé par un fluide d'équation d'état w constant (radiation puis matière sans pression). Exprimez $H = \dot{a}/a$ en fonction de t . Montrez que l'équation de Klein-Gordon avec le potentiel (1) a une solution de la forme

$$Q = Q_0(t/t_0)^\beta .$$

Exprimer β et Q_0 en fonction de α , M , w et t_0 . En déduire l'évolution de ρ_Q avec le temps cosmique t , puis en fonction du facteur d'échelle a . On pourra se limiter à $\rho_Q \propto t^x \propto a^y$. En déduire que Q se comporte comme un fluide d'équation d'état w_Q constante, mais fonction de w , que l'on déterminera.

- (e) Nous voulons maintenant déterminer la stabilité de cette solution. Pour cela, nous considérons une perturbation homogène et posons $Q(t) = \bar{Q}(t) + \delta Q(t)$ où $\bar{Q} = Q_0(t/t_0)^\beta$. Ecrire l'équation satisfaite par δQ . En cherchant des solutions du type $\delta Q \propto t^\gamma$ montrer que la partie réelle de γ est positive et que δQ décroît. Conclusions (sensibilité aux conditions initiales...) ?
- (f) La solution \bar{Q} est donc un attracteur de la dynamique. En choisissant $\alpha = 6$, déterminez l'équation d'état de Q pendant l'ère de matière et l'ère de radiation en supposant que Q a atteint sa solution d'attracteur \bar{Q} . Tracez l'évolution des densités d'énergie (échelle log) de Q , de la matière et de la radiation en fonction du redshift. On pourra essayer de représenter cela pour diverses conditions initiales pour Q . Initialement (i.e à grand redshift) Q n'a a priori pas atteint sa solution d'attracteur. En remarquant que Q est alors petit et que le potentiel est pentu, déduire et argumenter que l'on s'attend à ce que $\rho_Q \propto (1+z)^6$. Compléter le diagramme et tracer l'évolution de l'équation d'état en fonction de z .

6. Comparez les deux modèles (constante cosmologique et quintessence) de façon critique (phénoménologie, théorie, problèmes...).