TRAVAUX DIRIGÉS DE RELATIVITÉ GÉNÉRALE
DEA DE PHYSIQUE THÉORIQUE

Jean–Philippe Uzan (jean-philippe.uzan@th.u-psud.fr)

(ENS 2000–2001)

(TD3 : 7 mai 2001)

Le but de ce TD est l'étude de la solution de Reissner-Nordström (Reissner, Ann. Phys. 50, 106, 1916) et la construction de son diagramme de Penrose-Carter.

Pour plus de détails on pourra consulter les références suivantes :

- S. Chandrasekhar, The mathematical theory of black holes, Oxford Science Publishing.
- Misner, Thorner, et Wheeler, Gravitation.
- Graves et Brill, Phys. Rev. 120, 1507, 1966.
- Carter, Phys. Lett. 21, 423, 1966.

Ce problème est constitué de deux parties. Nous commencerons par écrire les équations d'Einstein–Maxwell dans un cas général et les résoudrons pour un système à symétrie sphérique. Nous construirons ensuite le diagramme de Penrose–Carter de cet espace-temps.

I. EQUATION D'EINSTEIN-MAXWELL ET SOLUTION À SYMMÉTRIE SPHÉRIQUE

Les équations d'Einstein-Maxwell (i.e. les équations pour le tenseur d'Einstein ($G^{\mu\nu}$) et pour le tenseur électromagnétique ($F^{\mu\nu}$)) sont

$$G_{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \tag{1}$$

$$F^{\mu\lambda}_{;\lambda} = j^{\mu}, \tag{2}$$

$$F_{[\lambda\mu;\nu]} = 0 \Longleftrightarrow F_{\mu\nu} = A_{[\mu,\nu]}, \tag{3}$$

où $T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{mat} + T^{\mu\nu}_{em}$ ("*mat*" et "*em*" signifiant matière et électromagnétique) et $\kappa \equiv 8\pi G/c^4$.

1.a- Calculer ${T^{em}}^{\lambda}_{\mu;\lambda}$ en fonction du courant electromagnétique j^{μ}. Que peut-on en déduire pour ${T^{mat}}^{\lambda}_{\mu;\lambda}$?

1.b- Ces équations peuvent être obtenues par un principe variationel. Avec quel lagrangien ?

1.c- On se restreint au "vide" (i.e. $j^{\mu} = 0$ et $T^{\mu\nu}_{mat} = 0$). Montrer que l'on peut choisir $A_i = 0$, $A_0 = \phi(r, t)$, A^{μ} étant le potentiel vecteur associé . Calculer $F^{\mu\nu}$ en fonction de ϕ.

1.d- On écrit la métrique d'un espace-temps statique à symétrie sphérique sous la forme

$$ds^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{4}$$

Déduire des équations de Maxwell que $e^{-(\mu+\nu)/2}r^2\phi' = -q$. Donner une interprétation de la constante q.

1.e- Ecrire alors les équations d'Einstein et les résoudre. Cette solution est connue sous le nom de *Reissner-Nordström*.

1.f- On ne suppose plus la métrique statique (i.e $\nu = \nu(r, t)$ et $\lambda = \lambda(r, t)$). Montrer en reprenant l'étude ci-dessus que l'on arrive à la même solution.

Ceci n'est en fait qu'un cas particulier du *théorème de Birkhoff* ("Toute solution des équations d'Einstein du vide à symétrie sphérique est statique").

II. CONSTRUCTION DU DIAGRAMME DE PENROSE-CARTER

La métrique trouvée au paragraphe précédent se met sous la forme

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right).$$

2.a- Déterminer l'équation des géodésiques nulles radiales.

Nous allons maintenant construire le diagramme de Penrose-Carter de cet espace-temps dans le cas où $Q^2 < M^2$.

2.b- Combien y-a-t'il de singularités ? Pour quelles valeurs de r ? (on les notera r_0, r_+, r_-).

2.c- On écrit l'équation des géodésiques nulles sous la forme

$$t \pm r^*(r) = Constante$$

Donner l'expression de r^* en fonction de r, r_+ et r_-. Cette coordonnée est connue dans la littérature sous le nom de "turtle coordinate", pourquoi à votre avis ?

2.d- On effectue le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} \text{v=t+r}^* \\ \text{w=t-r}^*, \end{cases} \tag{5}$$

2.e- puis dans le cas où $r > r_+$,

$$\begin{cases} \text{V=exp}\left(\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} v\right) \\ \text{W=-exp}\left(-\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} w\right). \end{cases} \tag{6}$$

Ecrire ds^2 en fonction de ces variables et montrer que la métrique est régulière quand $r \to r_+$.

2.f- On effectue le changement de coordonnées suivant

$$\begin{cases} \text{x=arctan}\, V \\ \text{y=arctan}\, W... \end{cases} \tag{7}$$

...puis le nouveau changement de coordonnées

$$\begin{cases} \text{x=}\psi + \xi \\ \text{y=}\psi - \xi. \end{cases} \tag{8}$$

Montrer que ces deux changements de variables permettent de compactifier l'espace-temps.

Quelle est la "représentation en (ψ, ξ)", i.e dans le plan (ψ, ξ). Quelle zone représente les points physiques, quelles sont les lieux des géodésiques nulles, quelle est la signification des bords de ce domaine ?

On appellera ce diagramme I.

2.g- Comment étudier la régularité en r_- ?

2.h- Tracer les diagrammes équivalents au diagramme I dans le cas où $r_- < r < r_+$ (diagramme II),

2.i- et dans le cas où $r < r_-$ (diagramme III).

2.j- Tracer le diagramme de Penrose-Carter pour l'espace-temps de Reissner-Nordström.

2.k- *Que se passe-t-il dans le cas* $Q^2 = M^2$ *?*