École Doctorale d'Astrophysique d'Île-de-France

Thèse de doctorat de l'Université Paris XI

présentée pour obtenir le

grade de Docteur en Sciences de l'Université Paris XI

Spécialité : Astrophysique

par

Alain RIAZUELO

Signature de divers modèles d'Univers primordial dans les anisotropies du rayonnement fossile

Soutenue le 22 décembre 2000 à l'Université d'Orsay
devant la commission d'examen composée de :

M. Francis BERNARDEAU .... Rapporteur
M. Alain BLANCHARD .... Rapporteur
M. Pierre BINÉTRUY .... Président
M. François BOUCHET .... Examinateur
Mme Nathalie DERUELLE .... Directeur
Mme Ruth DURRER .... Examinateur
M. Jean-Loup PUGET .... Invité

À Hélène,
pour avoir dit oui

Remerciements

Je remercie Nathalie Deruelle pour avoir accepté de m'initier au métier de chercheur et pour la compétence dont elle a fait preuve durant mes trois années de thèse. Elle a su orienter mes recherches de façon pertinente tout en me laissant une grande liberté d'initiative, m'offrant ainsi un privilège rare pour un étudiant en thèse.

Le travail présenté ici doit beaucoup à nombre de personnes que j'ai eu la chance de croiser durant mon existence. Il est toujours difficile d'expliquer la naissance d'une vocation, mais il est certain que la mienne ne serait pas venue sans tous ceux qui ont su raconter la beauté d'une nuit étoilée, notamment les auteurs de "à la découverte du ciel", Leiji Matsumoto, Ciel & Espace, Akira Fuji, Astro-Queyras, et surtout Hubert Reeves pour "Patience dans l'azur" et "L'heure de s'enivrer". Mon goût pour la recherche vient aussi des contacts que j'ai eus avec de nombreux enseignants et professeurs que j'ai croisés durant ma scolarité. La liste est trop longue pour les citer tous ici, mais j'ai une pensée particulière pour Madame Zorlu, ainsi que MM. Guieu, Paulhan, Couchet, Travers, Grillet-Aubert et Blaizot, et tout particulièrement MM. Hennebois et Bouloumier pour la qualité de l'enseignement de physique qu'ils m'ont prodigué en Math. Sup. et en Math. Spé. Je tiens également à remercier les enseignants du DEA "Astrophysique et Techniques Spatiales" ainsi que Jacqueline Plancy et Érika Veia pour la qualité de leur travail et l'excellente année que j'ai passée en leur compagnie.

Ma thèse au Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie de l'Observatoire de Meudon ne se serait sans doute pas faite sans les conseils avisés de Thibault Damour et de Jean-Paul Zahn, ni le soutien d'Éric Gourgoulhon et de Luc Blanchet. J'ai été très sensible à l'accueil chaleureux de l'ensemble des membres du laboratoire, ce qui a grandement contribué à me mettre dans de bonnes dispositions dès mon arrivée. Les travaux présentés ici doivent beaucoup à tous ceux avec qui j'ai travaillé, Nathalie Deruelle, Jean-Philippe Uzan, Jérôme Martin, Mairi Sakellariadou, Estelle Asseo, Patrick Peter, David Langlois, Philippe Brax, François Bouchet et Dominik Schwarz, ainsi que tous ceux avec qui j'ai eu des discussions scientifiques (et parfois aussi extra-scientifiques !), notamment Alain Blanchard, Francis Bernardeau, Karim Benabed, Martin Lemoine, Julien Lesgourgues, Alejandro Gangui, David Scialom, Brandon Carter et Roberto Trotta. J'ai rencontré quelques difficultés imprévues pour faire accepter mon sujet de thèse à l'École Polytechnique, et je tiens à remercier Brigitte Rocca-Volmerange et Patrick Mora pour m'avoir soutenu à ce moment-là. Je remercie également Jim Rich et toute l'équipe de l'expérience EROS pour le mois passé à l'Observatoire Européen Austral de La Silla au Chili, ainsi que l'ensemble du personnel du DARC que j'ai cotoyé pendant trois ans et celui du Département de Physique Théorique de l'Université de Genève où j'ai achevé la rédaction de ce mémoire. Merci également à Guillaume van Baalen et Martin Hairer pour leur aide précieuse en TeX lors de la finition de ce document, et à tous ceux qui ont consacré souvent beaucoup de temps au travail ingrat de relecture de ce document. Je remercie enfin Francis Bernardeau, Alain Blanchard, Ruth Durrer, François Bouchet, Pierre Binétruy et Jean-Loup Puget d'avoir accepté de faire partie de mon jury, cautionnant ainsi la qualité scientifique de cette thèse.

Quelques pensées amicales vont également à ceux qui se sont trouvés près de moi durant ces trois ans, mes parents pour leur inestimable soutien financier, mes voisins de bureau, notamment Jean-Philippe Uzan, Olivier Poujade et Thierry Baertschiger, et tous ceux qui m'ont croisé de près ou de loin pendant ces trois ans et qui ont rendu mon existence infiniment plus agréable, Denis Richard, Xavier Bertou, Laurent et Laurent, Sébastien et Fleur, Éric, Hubert, Fabrice, Samuel et Lionel, Boris et Valérie, Isabelle et Isabelle, Anne et Art, Sophie et Denis, Christiane et Michel, l'UCPA, Yvan Estienne, Terre d'Aventures, Xavier Guilleux, Romain Berline, Kit-Kat, Twix, France 98, Ole Kirk Christiansen, Richard Garriott, Don Knuth, Linus Torvalds, Frank Ermel, Olivier Camus, Reinhardt Prix, Philippe Canitrot, Christophe Ringeval, mon grand père André, mon frère Gilles, et mon très cher oncle Claude, parti trop tôt un triste jour d'hiver.

Enfin et surtout, ma gratitude éternelle va à ma douce et tendre épouse Hélène, pour avoir si merveilleusement changé ma petite existence de célibataire, pour les croissants du samedi matin, pour le "Oui" du 1er juillet et pour bien d'autres choses encore.

Introduction

> *The story so far:*
>
> *In the beginning the Universe was created.*
>
> *This has made a lot of people very angry and been widely regarded as a bad move.*
>
> *Many races believe that it was created by some sort of God, though the Jatravartid people of Viltvodle VI believe that the entire Universe was in fact sneezed out of the nose of a being called the Great Green Arkleseizure.*
>
> *The Jatravartids, who live in perpetual fear of the time they call The Coming of The Great White Handkerchief, are small blue creatures with more than fifty arms each, who are therefore unique in being the only race in history to have invented the aerosol deodorant before the wheel.*
>
> *However, the Great Green Arkleseizure Theory is not widely accepted outside Viltvodle VI and so, the Universe being the puzzling place it is, other explanations are constantly being sought.*
>
> Douglas ADAMS
> *The Restaurant at the End of the Universe*

La formation des structures est un problème fondamental en cosmologie, et intervient dans beaucoup de domaines de l'astrophysique (planétologie, évolution stellaire, formation des galaxies, *etc*). On pense que les grandes structures observables aujourd'hui s'est se sont formées à partir de petites fluctuations générées par un phénomène encore mal connu dans l'Univers primordial. Leur observation peut donc en principe permettre de remonter jusqu'à l'époque où ont été produites ces fluctuations dites cosmologiques. Elle peut également nous donner des informations précieuses sur le contenu matériel de l'Univers, qui influe sur l'évolution de ces perturbations cosmologiques. Pour cela, on cherche donc à observer des structures dont l'évolution temporelle est connue ou calculable. Il est donc préférable d'observer les objets les plus primitifs de l'Univers, qui ont peu évolué depuis l'époque où ils ont été formés. L'objet auquel nous allons principalement nous intéresser est le rayonnement fossile (ou fond diffus cosmologique), qui représente la lumière qui a été émise à l'époque où l'espace est devenu transparent aux photons. Il s'agit donc là de la plus vieille image électromagnétique du monde. Elle a été émise relativement tôt dans l'histoire de l'Univers, seulement quelques centaines de milliers d'années après le Big Bang, mais bien après la génération des fluctuations primordiales, qui remonte aux premières fractions de seconde du Big Bang. Ce rayonnement fossile doit donc garder sous la forme de petites variations de température (ou d'*anisotropies*) la trace des fluctuations déjà présentes à l'époque de son émission.

La première détection de ces anisotropies fut faite en 1992 par le satellite COBE [Smoot *et al.*, 1992], et a été confirmée depuis par de nombreuses observations au sol [Smoot, 1997b]. Plus récemment, des expériences ballon (BOOMERanG [de Bernardis *et al.*, 2000] et MAXIMA [Hanany *et al.*, 2000]) ont réussi à dresser des cartes à haute résolution angulaire de petites régions du ciel avec un bon rapport signal sur bruit. En parallèle, l'Europe et les États-Unis ont décidé l'envoi de deux missions satellites, (projets MAP de la NASA [MAP, `http`] et PLANCK de l'ESA [PLANCK, `http`]). Ces deux missions devraient dans les dix ans qui viennent dresser des cartes quasiment complètes de tout le ciel infrarouge, avec une excellente sensibilité et une résolution sans précédent. L'expérience PLANCK devrait également pouvoir donner une carte des anisotropies de polarisation du fond diffus cosmologique, qui permettrait d'acquérir beaucoup d'informations supplémentaires sur l'Univers primordial et son contenu actuel.

Ce travail de thèse s'inscrit dans une phase préparatoire à l'arrivée de ces données. Il s'agit de passer en revue quelques-uns des scénarios pouvant générer des fluctuations dans l'Univers primordial, et des phénomènes plus récents qui peuvent influer sur leur évolution. Le but est de calculer le plus précisément possible la forme des cartes d'anisotropies qu'ils produisent, et d'en extraire des signatures observationnelles. Bien que ce travail ait déjà été commencé depuis plusieurs années, il reste beaucoup de pistes à explorer dans de nombreuses directions.

Dans la première partie de ce mémoire, je présente quelques généralités sur le sujet. Il s'agit d'un résumé de choses que l'on peut facilement trouver dans la littérature de ces dernières années. J'insiste essentiellement sur quelques aspects techniques qui m'ont semblé importants.

Le premier chapitre est consacré au cadre général dans lequel se place cette thèse. J'y rappelle les bases de la cosmologie actuelle. Le chapitre 2 donne ensuite une présentation qualitative du problème de la formation des structures. Le chapitre 3 est alors consacré à la présentation de certains des mécanismes qui pourraient avoir généré des fluctuations dans l'Univers primordial. Je présente ensuite les équations exactes d'évolution de ces perturbations cosmologiques au chapitre 4. Les espèces relativistes (photons, neutrinos) obéissent à une hiérarchie d'équations plus compliquée (l'équation de Boltzmann), que je détaille au chapitre 5. Avant de s'attaquer à la résolution numérique de cette équation, il convient d'avoir une bonne intuition de la physique qui régit les anisotropies du rayonnement fossile. C'est ce que j'étudie au chapitre 6. Enfin, dans le dernier chapitre de cette partie, je présente des techniques permettant de calculer numériquement les anisotropies du rayonnement fossile. J'illustre la façon dont elles dépendent des paramètres cosmologiques sur quelques exemples calculés à l'aide du code numérique que j'ai développé durant ma thèse et sur lequel repose la majeure partie des travaux présentés dans ce mémoire.

Les trois parties suivantes représentent la partie scientifique de cette thèse. Trois thèmes principaux sont abordés. J'étudie d'abord les scénarios de sources actives (partie II), qui supposent que les fluctuations de densité dans l'Univers sont générées constamment au cours du temps (par opposition aux scénarios d'inflation où celles-ci sont générées beaucoup plus tôt dans l'Univers primordial), scénarios qui incluent notamment les défauts topologiques et les champs magnétiques primordiaux. Je m'intéresse ensuite (partie III) à quelques aspects plus fins liés aux scénarios d'inflation, plus populaires et mieux étudiés que les précédents, et je discute trois des hypothèses souvent faites quand on calcule les anisotropies produites par ces modèles. Enfin, le dernier volet de mes travaux (partie IV) porte sur les scénarios de quintessence, qui représentent une alternative récente et prometteuse aux modèles avec constante cosmologique.

La partie II est consacrée à l'étude des perturbations cosmologiques dans les scénarios de sources actives. Il s'agit d'une approche assez générale, où je m'efforce d'extraire les aspects les plus génériques liés à ces modèles. Ce travail est donc assez complémentaire d'autres travaux réalisés dans le domaine, qui s'attachent en détail à seulement quelques modèles particuliers.

Dans un premier temps, j'introduis le concept de source active, qui englobe à peu près toute composante de l'Univers qui ne participe pas directement à la dynamique de l'expansion mais qui a une influence sur celle des perturbations.

Le chapitre 8 présente les aspects génériques liés aux scénarios dits de "sources cohérentes", qui comptent parmi les plus simples, mais aussi parmi les moins réalistes des modèles de sources actives. Ils ont cependant l'avantage de faire des prédictions facilement calculables. La conclusion de cette étude est qu'il n'est pas facile de trouver des jeux de paramètres qui imitent bien les modèles inflationnaires. Il n'y a donc pas de "dégénérescence" entre ces deux scénarios. Ce travail a été fait en collaboration avec Nathalie Deruelle et Jean-Philippe Uzan et a été publié dans les Comptes-Rendus du XIX$^{\text{ème}}$ Texas Symposium, qui s'est tenu à Paris en décembre 1998 [Uzan *et al.*, 2000a]. Une version écourtée est également parue dans les Comptes-Rendus des Journées Relativistes Espagnoles qui se sont déroulées à Salamanque en septembre 1998 [Riazuelo & Deruelle, 2000a].

Les scénarios de sources cohérentes ne sont pas réalistes, mais fournissent les éléments de base pour calculer les prédictions des scénarios dits de "sources incohérentes", qui représentent la classe la plus générale des modèles de sources actives. On les détaille au chapitre 9 en insistant notamment certains aspects génériques dus aux effets non linéaires inhérents à ces modèles, dont le plus important est la disparition des "pics Doppler" (*i.e.* des oscillations dans le spectre d'anisotropies du fond diffus cosmologique), présents dans les scénarios inflationnaires, ainsi que dans les scénarios de sources cohérentes. Ce travail, effectué avec Nathalie Deruelle a été publié dans *Annalen der Physik* [Riazuelo & Deruelle, 2000b].

Ces deux derniers chapitres portaient en fait sur les interactions *gravitationnelles* entre les sources actives et matière ordinaire. Il est cependant tout à fait possible que ces objets aient aussi d'autres interactions avec le reste de l'Univers. C'est notamment le cas des cordes cosmiques locales, qui représentent un des candidats les plus intéressants de sources actives. J'ai étudié certaines des conséquences observables de la présence de ces interactions non gravitationnelles avec Nathalie Deruelle et Patrick Peter. Ces travaux sont présentés au chapitre 10 et ont été publiés dans *Physical Review D* [Riazuelo *et al.*, 2000].

Enfin, le dernier chapitre de cette partie est consacré à défendre la viabilité des scénarios de défauts topologiques, souvent mise en cause récemment. S'il semble effectivement établi que les observations du rayonnement fossile ne semblent pas compatibles avec un scénario uniquement basé sur des défauts topologiques (modulo cependant toutes les remarques faites au chapitre 10), il est par contre clair qu'un scénario "hybride", c'est-à-dire basé à la fois sur la présence des fluctuations générées pendant une phase inflationnaire et par des défauts topologiques, est compatible avec les observations. C'est ce que j'ai étudié avec Mairi Sakellariadou, François Bouchet et Patrick Peter dans un article finalement paru (plus de vingt mois après sa soumission) dans *Physical Review D* [Bouchet *et al.*, 2002].

L'autre scénario intéressant pour la génération de fluctuations est celui d'inflation, abordé dans la partie III. Ces scénarios sont abondamment étudiés, cependant la tendance va parfois vers la trop grande simplification des prédictions dites "génériques" de l'inflation. Les trois chapitres de cette partie sont consacrés à une discussion des hypothèses qui mènent à ces prédictions génériques.

Dans un premier temps (chapitre 12) je discute l'hypothèse habituellement faite sur l'état initial des perturbations. Le plus souvent, on considère que cet état est le vide, dont une justification est l'hypothèse d'état “à symétrie maximale” cher à la théorie inflationnaire. Il n'est cependant pas clair qu'il n'y ait pas d'échelle privilégiée en inflation, puisque l'échelle de Planck est *a priori* une échelle au-delà de laquelle on s'attend à ce que la physique change drastiquement. Dans certains cas, la phase d'inflation peut durer suffisamment peu de temps pour que l'échelle de Planck en début d'inflation soit restée suffisamment petite pour être encore observable aujourd'hui. Certaines conséquences possibles de cette hypothèse ont été étudiées avec Mairi Sakellariadou et Jérôme Martin dans un article paru dans *Physical Review D* [Martin *et al.*, 2000a].

Une autre hypothèse fréquemment faite est celle d'une phase d'inflation à un seul champ scalaire. C'est évidemment une hypothèse minimale, mais rien ne dit qu'elle correspond au degré de complexité de la physique de l'Univers primordial. Il est donc important de regarder les conséquences de scénarios inflationnaires plus complexes comportant plusieurs champs scalaires. Une des conséquences importantes est la présence dans ces cas-là de fluctuations isocourbures, terme un peu erroné pour désigner en fait des perturbations d'entropie. Le chapitre 13, tiré de travaux faits en collaboration avec David Langlois et parus dans *Physical Review D* [Langlois & Riazuelo, 2000] et dans les Comptes-Rendus des XXXV$^{\text{ème}}$ Rencontres de Moriond [Riazuelo & Langlois, 2000], est consacré à l'étude de tels modèles.

Enfin, une autre hypothèse populaire est la forme très simple du spectre initial de fluctuations. Ce spectre est habituellement pris en loi de puissance, qui est effectivement une solution exacte d'un modèle d'inflation. Cependant ce modèle d'inflation (“power-law inflation”) est extrêmement particulier et nécessite une forme très *ad hoc* du potentiel de l'inflaton. Il est préférable à l'inverse d'utiliser d'autres techniques (par exemple le slow-roll) qui sont plus génériques, et d'une certaine manière traitent de modèles plus réalistes, mais qui prédisent un spectre initial de fluctuations légèrement plus compliqué. Dans un travail récent avec Jérôme Martin et Dominik Schwarz, paru dans *The Astrophysical Journal Letters* [Martin *et al.*, 2000b] et dans les Comptes-Rendus de la conférence CAPP 2000 [Martin *et al.*, 2001] et présenté au chapitre 14, nous insistons sur l'importance d'un choix raisonnable d'approximations pour estimer le spectre initial de perturbations.

La partie IV est consacrée aux scénarios de quintessence. L'idée est de rajouter aux différents fluides qui emplissent l'Univers un champ scalaire (appelé quintessence), dont l'équation d'état aujourd'hui est proche de celle d'une vraie constante cosmologique. Dans ce cas, on peut expliquer les observations de supernovae (entre autres) qui semblent indiquer la présence d'une telle composante dans l'Univers. Bien sûr, on doit toujours faire l'hypothèse qu'un mécanisme encore mal connu annule parfaitement la “vraie” constante cosmologique (il reste donc à résoudre ce problème, qui reste sans doute un des problèmes majeurs de la cosmologie actuelle), mais on peut par contre apporter une explication convaincante de la petitesse de la densité d'énergie du champ de quintessence aujourd'hui, en faisant quelques hypothèses simples sur la forme du potentiel dans lequel il évolue.

Mon travail dans ce cadre-là a consisté à regarder l'influence de ce champ scalaire sur l'évolution des perturbations cosmologiques. Je présente d'abord au chapitre 15 quelques généralités sur ces scénarios, et je démontre notamment un de leurs aspects les plus esthétiques, à savoir une certaine insensibilité aux conditions initiales du champ de quintessence, qui rejoint au bout d'un certain temps un attracteur. Je présente ensuite au chapitre 16 des travaux effectués avec Jean-Philippe Uzan sur l'évolution des ondes gravitationnelles dans de tels scénarios, en incluant le cas d'un champ scalaire non minimalement couplé, travaux parus cette année dans *Physical Review D* [Riazuelo & Uzan, 2000]. Je termine cette partie (chapitre 17) avec une présentation de travaux faits en collaboration avec Jérôme Martin et Philippe Brax sur le problème de l'évolution des modes de densité dans ces mêmes scénarios, problème un peu plus difficile du fait de la présence de modes de densité dans le champ de quintessence lui-même. Ces travaux sont également parus dans *Physical Review D* [Brax *et al.*, 2000], et une version écourtée sera publiée dans les Comptes-Rendus des IV$^{\text{ème}}$ Rencontres du Viet-Nam qui se sont tenues à Hanoï en juillet 2000 [Brax *et al.*, 2002].

Enfin, de nombreuses formules sont utilisées tout au long de cette thèse. Pour ne pas alourdir le propos, elles ont pour la plupart été placées en annexe (partie V), avant la bibliographie. On y trouve notamment des formules de récurrence sur les fonctions de Bessel, des formules d'addition des harmoniques sphériques, et certaines étapes intermédiaires du calcul de l'évolution des perturbations cosmologiques.

Conduite du projet de recherche

Depuis quelques années, le Ministère de l'Éducation Nationale et plusieurs Écoles Doctorales d'Île-de-France ont décidé de s'attacher à rendre les thèses plus professionnalisantes, en vue de permettre aux étudiants ne pouvant pas ou ne souhaitant pas continuer dans le domaine de la recherche de mieux valoriser leurs travaux de thèse vis-à-vis d'un employeur extérieur. Il a été mis en place une expérience pilote, qui consiste à demander à quelques étudiants en thèse d'inclure dans leur mémoire un chapitre présentant leurs travaux de thèse vus comme un projet de recherche. À terme (c'est-à-dire dès l'application prochaine de la réforme des Écoles Doctorales demandée par le Ministère), toutes les thèses devraient inclure un tel chapitre. Ce texte s'adresse également aux futurs étudiants en thèse qui trouveront peut-être matière à réflexion à la lumière du récit fait par un de leurs prédécesseurs.

Éléments de contexte

Choix du sujet

À l'issue de mon DEA "Astrophysique et Techniques Spatiales", effectué en 96-97 à l'Observatoire de Paris-Meudon, j'ai choisi de faire ma thèse en cosmologie. La cosmologie est un thème interdisciplinaire, à la frontière entre physique théorique et astrophysique, qui s'inscrivait naturellement dans la continuité des thèmes que j'avais étudiés en DEA. La cosmologie couvre essentiellement l'étude des origines dans l'Univers, sujet sans doute parmi les plus fascinants de l'astrophysique et de la science en général. Ce sujet connaît un fort regain d'intérêt car des observations rendues possibles depuis peu par les technologies actuelles devraient nous donner rapidement beaucoup d'informations sur l'Univers primordial. Ces investigations sur le plan observationnel s'accompagnent d'un foisonnement sans précédent d'idées sur le plan théorique dans le but de proposer des interprétations réalistes aux observations. Il s'agit donc d'un sujet en évolution très rapide, avec d'importants enjeux scientifiques et aussi philosophiques. En ce sens, ce thème constitue un "bon" sujet de thèse : très actif pour encore plusieurs années et permettant *a priori* d'espérer des débouchés intéressants dans les cinq ans qui viennent. La cosmologie est d'ailleurs présente dans les thématiques de deux sections du CNRS : section 02 ("Phénomènes physiques, théories et modèles") et section 14 ("Système solaire et Univers lointain").

Choix du laboratoire

Des discussions avec plusieurs chercheurs en poste m'ont fait réaliser l'importance du choix du laboratoire d'accueil et du directeur de thèse. J'ai donc consacré un soin particulier à ces questions. Le choix de mon futur laboratoire d'accueil s'est fait en tenant compte de plusieurs paramètres : situation géographique, implication scientifique du laboratoire dans les thèmes qui m'intéressaient, qualité des thèses soutenues récemment, et devenir des anciens thésitifs du laboratoire.

Le Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie (DARC) de l'Observatoire de Meudon m'a paru satisfaire à tous les critères que j'ai jugés importants. Il est situé dans un cadre agréable que je connaissais déjà, et se trouve à proximité de plusieurs autres laboratoires travaillant sur des sujets proches (SPhT du CEA à Saclay, Institut d'Astrophysique de Paris et Laboratoire de Physique Théorique de l'Université d'Orsay). C'est un laboratoire de renommée internationale pour ses travaux en Relativité Générale, et ce, malgré le faible nombre de chercheurs permanents (une vingtaine). Il possède une équipe de cosmologie jeune et dynamique, en pleine croissance. Les sujets étudiés sont plutôt de nature théorique, et si l'équipe n'est malheureusement pas directement impliquée dans des grands projets instrumentaux, ceci est compensé par la bonne qualité du travail effectué.

Enfin et surtout, le DARC fait preuve d'un souci louable (et rare, semble-t-il) de faire son possible pour assurer des débouchés à ses étudiants, notamment en limitant leur nombre pour rester en adéquation avec le nombre de postes à pourvoir, et en réfléchissant à quel thème il est plus stratégique de proposer chaque année à un étudiant désirant travailler dans un des domaines étudiés.

Les bons résultats de ce laboratoire lui ont permis d'avoir un recrutement très important récemment (sept embauches lors des sept dernières années), y compris parmi les étudiants y ayant effectué leur thèse (bien qu'une directive récente ne favorise plus l'embauche immédiate d'un thésitif par son laboratoire d'accueil). Une des clés de ce succès est sans doute de ne pas proposer "officiellement" de thèse, mais plutôt d'attendre que des étudiants motivés le contactent.

Budget et financement

Étant intéressé par un sujet théorique, les possibilités de financement étaient peu nombreuses. Grâce à mon diplôme de l'École Polytechnique, je n'ai cependant eu aucune difficulté à bénéficier d'une bourse AMX (incluant un monitorat à l'Université d'Orsay) du Ministère. Cette bourse représente un montant de 350 kF brut sur les trois ans, chiffre qui doit être multiplié par environ 1.5 pour tenir compte des charges patronales. La majeure partie de mes travaux a été faite en collaboration avec d'autres chercheurs. Il est difficile d'évaluer précisément le temps que chacun m'a consacré, mais j'estime le total à environ dix-huit mois, pour un coût salarial total probablement supérieur à 600 kF.

Ces deux montants couvrent la majorité du coût de ma thèse. À ceci, il faut ajouter le coût "normal" de fonctionnement d'un laboratoire (budget par nombre de personnes, incluant fournitures, secrétariat et informatique). Le DARC dispose d'un soutien de base de 600 kF par an, fourni pour moitié par le CNRS et pour moitié par l'Observatoire de Paris. Le personnel du DARC (incluant chercheurs permanents, chercheurs invités, étudiants et administratifs) se montant en moyenne à quarante personnes, j'ai bénéficié d'un apport d'environ 50 kF sur les trois ans. Cet apport a également partiellement financé les missions auxquelles j'ai pu participer. Je n'ai pas énormément voyagé durant ma thèse, mais j'ai participé à plusieurs colloques et effectué un séjour d'un mois à l'Observatoire Européen Austral au Chili, où je suis allé participer à l'expérience de recherche d'objets sombres EROS [EROS, http]. Les autres sources de financement de ces missions ont été assez diverses : financement CEE, formation permanente du CNRS, programme Alliance, et financement de l'IN2P3 pour le séjour au Chili. Je dois dire qu'il ne m'a jamais été difficile de trouver un financement pour les missions auxquelles j'ai voulu participer. Le coût total de ces missions doit avoisiner les 50 kF.

Enfin, il faut ajouter le coût des infrastructures mises à la disposition des personnels de l'Observatoire de Meudon (bureaux, restaurant, bibliothèque...), qui se monte sans doute sur une durée de trois ans à plusieurs plusieurs dizaines de milliers de francs par chercheur.

Le budget total avoisine donc les 1.3 MF. La majorité du budget est prise par les salaires et non les équipements ou les missions, ce qui s'explique par la nature théorique du sujet.

Il faut bien sûr rappeler que ces travaux théoriques ne sont pertinents que parce qu'on peut les comparer à des observations astronomiques. Ce domaine a pris tout son essor après la publication des premiers résultats du satellite COBE en 1992 [Smoot *et al.*, 1992], et la décision par l'Europe et les États-Unis de construire deux satellites beaucoup plus puissants pour acquérir des données plus précises. Ce sont le projet américain MAP (Microwave Anisotropy Probe) [MAP, `http`], mission MIDEX de la NASA, lancé en principe en décembre 2000 pour une durée de 27 mois (budget : 140 millions de dollars), et le projet européen PLANCK [PLANCK, `http`], mission moyenne (M3) de l'ESA, lancé en 2007 pour une durée d'opérations de trois ans et demi (budget : 350 millions d'euros)...

Évolution du projet

Situation dans le laboratoire

Suite aux contacts pris avec le DARC, j'ai été accepté en thèse dans le groupe de Cosmologie, qui avait précisément décidé de prendre un nouvel étudiant. Il allait s'agir pour moi de pérenniser des travaux déjà entrepris avec le précédent thésard du groupe, qui entamait alors sa dernière année de thèse. Nous avons donc passé une année ensemble, ce qui a permis une bonne passation des connaissances et m'a beaucoup aidé à m'insérer dans le groupe.

Le sujet proposé était un sujet de nature théorique et offrait de très nombreuses possibilités de travaux. Il était donc assez difficile de prévoir à l'avance quels résultats allaient être obtenus. Par exemple, le titre de la thèse a évolué entre le moment de ma demande de bourse il y a trois ans et demi et maintenant (on est passé de "Signature des divers candidats à la matière sombre dans les anisotropies du rayonnement fossile" à " Signature de divers modèles d'Univers primordial dans les anisotropies du rayonnement fossile"). Ainsi, le programme de recherche initialement prévu était volontairement vague, un des buts étant précisément de se montrer capable de changer d'orientation et d'avoir des idées nouvelles une fois la connaissance du domaine d'étude meilleure.

De la même façon, l'environnement de travail était un peu "flou" : j'avais un directeur de recherche "officiel", mais j'étais fortement encouragé à travailler avec d'autres membres du laboratoire. Cela présentait des risques certains de faire fausse route ou simplement de perdre du temps, mais m'offrait le privilège rare de pouvoir décider de l'orientation de mes recherches pendant ma thèse. Cette approche du travail de chercheur m'a paru particulièrement enrichissante, et a joué pour beaucoup dans mon choix définitif de faire ma thèse au DARC avec Nathalie Deruelle.

Élaboration du programme de travail

Il m'a paru difficile de me rendre compte en début de thèse de la pertinence de telle ou telle idée, car la quantité de savoir à accumuler pour avoir une vision synthétique du sujet était assez importante. À l'instigation de ma directrice de thèse Nathalie Deruelle, j'ai donc commencé par étudier certains aspects génériques liés aux scénarios de défauts topologiques. De tels scénarios sont assez complexes, et nous avons pensé qu'il serait sans doute intéressant de clarifier certains points assez obscurs mentionnés dans la littérature.

Dans le même temps, je me suis aperçu que le groupe de cosmologie du DARC souffrait d'un manque de compétences dans le domaine du numérique. J'ai donc proposé de me consacrer à l'élaboration d'un code numérique qui servirait à tous les chercheurs du groupe. Le code réalisé devait servir à calculer les anisotropies du rayonnement fossile dans le cadre de plusieurs modèles d'Univers primordial, notamment ceux de défauts topologiques. Il s'agissait d'un outil important, car il devait permettre le lien entre modèles théoriques et prédictions observationnelles. Le but était d'avoir à disposition un code avant la fin de ma première année de thèse, pour ensuite pouvoir l'utiliser les deux années suivantes, et le diffuser auprès des autres chercheurs.

De tels codes existaient déjà, notamment le célèbre CMBFAST [CMBFAST, `http`]. La présence d'un tel code est sans doute une bonne chose, car il donne une base de travail commune à tous les chercheurs du domaine et permet de s'affranchir des problèmes numériques et par conséquent de plus se focaliser sur d'autres aspects plus scientifiques (choix du modèle, des paramètres, *etc*). Il aurait donc été possible de modifier un code préexistant, cependant ce n'est pas l'option que j'ai choisie. En effet, le code CMBFAST était écrit en Fortran, langage que je ne connaissais pas, et était très mal commenté. Il était difficile dans ces conditions d'en comprendre toutes les subtilités sans passer beaucoup de temps dessus. À l'inverse, il était manifestement beaucoup plus formateur d'en réécrire un qu'il me serait ensuite plus facile de maintenir et de modifier quand nécessaire.

Stratégie d'approche

Faire une thèse suppose de pouvoir faire preuve d'initiative et savoir s'attaquer à des sujets variés. Il n'était donc pas souhaitable de me cantonner uniquement à l'élaboration d'un code et aux scénarios de défauts topologiques. J'avais plutôt intérêt à essayer de me diversifier et d'aborder d'autres aspects du domaine dans lequel je travaillais. J'ai donc commencé à m'intéresser à d'autres aspects des scénarios de formation des grandes structures qui me semblaient prometteurs. J'ai approfondi certains aspects liés aux scénarios inflationnaires, notamment en ce qui concerne l'état des perturbations en fin d'inflation. J'ai également travaillé sur les scénarios de quintessence, qui ont été développés assez récemment et qui ont connu un regain d'intérêt avec certaines mesures astrophysiques récentes. Il s'agissait là d'un sujet assez neuf, dans lequel il y avait possibilité d'être parmi les premiers à aborder certains problèmes essentiels liés à ces scénarios. Un travail sur les espaces à dimensions supplémentaires aurait également pu s'inscrire dans ce cadre-là, mais le temps m'a manqué pour m'y consacrer. Enfin, en marge de mon sujet principal, j'ai prolongé ma collaboration avec Estelle Asseo, entamée lors de mon stage de DEA, sur les mécanismes d'émission radio des pulsars.

Retombées scientifiques

Il a fallu faire preuve d'une certaine dose de patience avant de récolter les fruits de mes travaux, en raison de l'inévitable temps d'adaptation par lequel on passe en début de thèse, et du fait qu'il faut également un certain temps d'apprentissage avant d'être en mesure d'avoir une contribution nouvelle à apporter au sujet étudié. La décision d'écrire mon propre code a sans doute été la meilleure initiative de ma thèse, mais ce n'est qu'au bout d'un an que j'ai pu l'exploiter efficacement. En conséquence, je n'ai pas pu avoir de publication avant l'année 2000, soit plus de deux ans après le début de ma thèse. Par contre, une fois mon code réalisé et les contacts pris avec mes différents collaborateurs, j'ai pu avoir une production scientifique assez importante lors de ma dernière année (dix articles soumis, à paraître, ou publiés, plus quatre contributions à des comptes-rendus de conférences).

Ces travaux révèlent assez bien les efforts de diversification que j'ai faits durant ma thèse. Il y a eu seulement deux articles (et un compte-rendu de conférence) "planifiés", qui correspondent à des travaux qui avaient été envisagés dès le début de ma thèse [Uzan *et al.*, 2000a] [Riazuelo & Deruelle, 2000a] [Riazuelo & Deruelle, 2000b]. Ces articles ont pu être suivis de deux articles "d'approfondissement", qui ont été la continuation logique des précédents, mais dont le contenu exact ne s'est précisé qu'une fois les résultats des premiers travaux connus [Riazuelo *et al.*, 2000] [Bouchet *et al.*, 2002]. La réalisation de mon code m'a aussi permis de me consacrer à des sujets que j'avais moi-même envisagé d'approfondir [Langlois & Riazuelo, 2000] [Riazuelo & Langlois, 2000] [Brax *et al.*, 2000] [Brax *et al.*, 2002], et m'a permis de participer à des articles sur des sujets sur lesquels je n'avais initialement pas prévu de travailler [Martin *et al.*, 2000a] [Riazuelo & Uzan, 2000] [Martin *et al.*, 2000b]. Enfin, j'ai eu également l'occasion de travailler sur des sujets annexes [Asseo & Riazuelo, 2000a] [Asseo & Riazuelo, 2000b]. D'autres collaborations auraient également pu être entamées (notamment avec Martin Lemoine et Alejandro Gangui), et c'est surtout le manque de temps qui les a empêchées.

Compétences acquises et enseignements personnels

Sur le plan scientifique, les sujets abordés m'ont donné l'occasion de parfaire mes connaissances dans des domaines astrophysiques variés, allant de la relativité générale à la théorie des groupes, en passant par le transfert radiatif et certains aspects de physique des plasmas. J'ai également acquis des compétences plus générales, utiles dans tout travail d'ingénieur ou de chercheur : modélisation d'un problème, mise en équation, évaluation des difficultés qui peuvent se présenter et des étapes critiques à résoudre. À cela s'ajoutent des compétences assez nouvelles acquises en algorithmie, notamment dans le domaine du numérique, suite à l'élaboration de mon code.

Sur le plan technique, j'ai acquis une bonne maîtrise du langage C et de l'administration de systèmes Unix, et surtout j'ai eu l'occasion d'apprendre les différentes étapes dans le développement d'un code numérique, allant de la phase de définition des fonctionnalités à inclure, à celle de validation. J'ai d'ailleurs pu constater que c'est cette dernière étape qui a pris (de loin) le plus de temps. Le code réalisé comporte environ 10 000 lignes. C'est donc un code de taille moyenne, qui m'a cependant permis de passer en revue de nombreux aspects informatiques et numériques dont je n'avais pas vraiment de connaissance pratique. Il a fallu environ deux mois pour réaliser une version minimale de ce code (c'est-à-dire permettant de calculer quelques observables dans le cadre des modèles les plus simples), et trois de plus pour inclure (presque) toutes les fonctionnalités présentes dans les autres codes. Le code a été validé en le comparant quand c'était possible aux codes préexistants. Incidemment, cette étape a permis de détecter plusieurs bogues dans ces derniers.

J'ai su correctement évaluer la faisabilité du code, et le temps nécessaire à l'obtention d'une version minimale, temps suffisamment bref pour justifier que je développe mon propre code plutôt que je modifie d'autres codes existants, dont l'apprentissage n'aurait pas pris moins de temps. J'ai ensuite peu à peu enrichi mon code de fonctionnalités nouvelles au gré des besoins qui se sont présentés, certaines de ces fonctionnalités n'étant d'ailleurs pas présentes dans les codes concurrents. En même temps, je l'ai optimisé pour l'améliorer en rapidité et en précision. J'ai également su limiter mes ambitions en refusant d'ajouter certaines fonctionnalités intéressantes, mais qui m'auraient pris trop de temps à programmer. Par exemple, un des objectifs initiaux était d'arriver à complètement modéliser l'évolution d'un réseau de défauts topologiques. Il s'agissait là d'un projet extrêmement ambitieux, qui aurait pu représenter un travail de thèse à lui tout seul (alors que mon code ne représentait pas une fin en soi, mais plutôt un outil de travail). Il est vraisemblable que la réalisation d'un tel programme m'aurait pris plus de dix-huit mois, pour un résultat incertain, attendu que je ne pouvais pas espérer beaucoup d'aide de la part des membres de mon laboratoire d'accueil, et que de tels modèles pouvaient être exclus par les observations, aussi ai-je jugé plus sage de ne pas m'attaquer à ce problème.

Enfin, sur un plan plus personnel, mes trois années de thèse se sont bien passées car j'ai réussi à élaborer un projet de recherche cohérent et à gérer efficacement mon temps.

L'organisation de mon temps a été, avec la décision d'écrire mon code, une des clés du bon déroulement de ma thèse. J'ai d'abord pris le temps qu'il fallait pour me mettre au fait de ce qui se faisait dans le domaine. En parallèle je me suis efforcé de chercher de futurs collaborateurs. J'ai essayé de chercher des idées originales, et je me suis efforcé de faire preuve d'autonomie et de curiosité quand j'ai abordé des domaines qui ne m'étaient pas familiers. Une fois cela fait, j'ai eu plus de loisir pour faire des choix scientifiques quant aux thèmes que j'allais étudier, et pour mûrir des projets de recherche. Une fois les travaux entamés, j'ai également dû apprendre à travailler sur plusieurs projets simultanés, et à "faire attendre" mes collaborateurs quand j'étais un peu débordé, aspect qui s'est avéré important quand j'avais plusieurs articles en préparation avec des chercheurs différents (jusqu'à quatre en même temps).

J'ai aussi appris à rentabiliser mon temps de travail : j'ai par exemple bien évalué le temps à investir pour réaliser mon code, temps qui a été par la suite très bien exploité grâce aux nombreux articles que j'ai publiés, et grâce aux collaborations que j'ai pu tisser. J'ai utilisé mon code dans presque tous mes articles, et je me suis efforcé de respecter la philosophie "une idée, un article", tout en ajoutant un degré de complexité à chaque nouvel article dans un domaine donné. Ainsi, j'ai pu garder un progression constante et régulière dans mon travail, et tirer profit de chacune des étapes, tout en gardant un tout scientifiquement cohérent.

J'ai acquis une bonne expérience du travail en petit groupe, et notamment une bonne faculté d'adaptation aux méthodes de travail d'autres chercheurs (une dizaine de collaborateurs différents en trois ans). J'ai également pu me rendre compte des problèmes qui peuvent surgir lors d'un travail en groupe : délais qui s'allongent avec le nombre de chercheurs, retard pris dès qu'une personne est ralentie dans son travail, difficulté à travailler avec des collaborateurs distants, façons différentes d'approcher les problèmes, *etc*. D'une manière générale, j'ai pu me rendre compte que cet aspect "relationnel" revêtait au moins autant d'importance pour la qualité du résultat final que le contenu scientifique en lui-même.

Conclusion

J'ai eu l'occasion de travailler avec des gens et dans un domaine qui m'ont donné l'occasion de faire preuve d'initiative. J'ai plusieurs fois été amené à faire des choix importants, dont certains avant même le début de ma thèse. Certaines décisions n'étaient pas faciles à prendre car leurs conséquences auraient pu s'avérer désastreuses. Ces choix font cependant partie intégrante du travail de doctorant, et il eût été dommage de les occulter ou de ne pas les justifier dans ce mémoire. Ils ont eu une importance cruciale dans l'organisation de mon travail durant ces trois années, et sont à l'origine du bon déroulement de ma thèse, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. J'ai sans doute bénéficié d'un peu de chance par le fait que je me suis retrouvé avec des collaborateurs de qui j'ai vite su me faire apprécier, mais pour le reste, je pense avoir su faire preuve de discernement et mener de façon réfléchie et sensée mon projet de thèse. C'est un aspect du travail au moins aussi important que les résultats scientifiques en eux-mêmes, et qui mérite certainement beaucoup d'attention de la part des futurs étudiants en thèse.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Première partie

Cadre général

Chapitre 1

Le scénario du Big Bang chaud

Sommaire

1 Introduction

La cosmologie est la discipline qui s'intéresse à l'Univers en tant que système physique, et se propose d'étudier son histoire, sa structure et son évolution. La cosmologie telle qu'elle est étudiée à l'heure actuelle repose sur trois grandes hypothèses : l'universalité des lois de la physique, le fait que l'évolution de l'Univers soit gouvernée par la gravitation décrite par la Relativité Générale d'Einstein (*cf* par exemple [Misner *et al.*, 1973] [Wald, 1984] [Weinberg, 1972], et [Einstein, 1915a] [Einstein, 1915b] [Einstein, 1915c] [Hilbert, 1915] pour les articles historiques), et le fait qu'aux plus grandes échelles observables, l'Univers est homogène et isotrope. Cette dernière hypothèse, en accord avec les observations, a été introduite pour la première fois dans le cadre de la Relativité Générale par Einstein en 1917 [Einstein, 1917] et porte le nom de *principe cosmologique*[1].

Historiquement, ce sont Friedmann et Lemaître qui les premiers ont élaboré des scénarios cosmologiques relativistes incluant l'expansion de l'Univers [Friedmann, 1922] [Friedmann, 1924] [Lemaître, 1927]. En effet, tout semble indiquer que l'Univers n'est pas statique mais en expansion. La première justification observationnelle en a été donnée dans les années 1920 par l'observation

[1] Une dernière hypothèse, souvent implicite, est que la topologie de l'Univers est triviale. C'est l'hypothèse que nous ferons ici, mais il faut garder à l'esprit qu'elle n'est *a priori* pas une conséquence de la Relativité Générale et qu'elle peut donc être remise en question. On pourra par exemple consulter [Lachièze-Rey & Luminet, 1995] [Uzan *et al.*, 2000b] pour les intéressantes conséquences observables qui résultent de son abandon.

du décalage systématique vers le rouge des raies spectrales des “nébuleuses” (en fait les galaxies). Cet effet fut découvert par Slipher [Slipher, 1914] [Slipher, 1915], et les “nébuleuses” furent ensuite identifiées comme étant extragalactiques [Hubble, 1925] [Hubble, 1926a] [Hubble, 1926b]. La relation de proportionnalité entre décalage vers le rouge et distance (compatible avec un Univers qui reste homogène et isotrope au cours du temps) fut trouvée par Hubble peu après [Hubble, 1929] [Hubble & Humason, 1931]. Ces observations ont finalement mené au concept de *Big Bang chaud*, à savoir l'existence d'une époque reculée durant laquelle l'Univers était beaucoup plus dense et beaucoup plus chaud qu'il ne l'est aujourd'hui[2]. Ce modèle conduit alors à deux prédictions majeures : d'une part la présence d'un fond diffus cosmologique de photons, appelé *rayonnement fossile*[3], ayant un spectre de corps noir et une basse température du fait du refroidissement causé par l'expansion, et d'autre part l'abondance des éléments légers qui ont été synthétisés dans l'Univers primordial (*nucléosynthèse primordiale*), à l'époque où la température de l'Univers était de l'ordre de l'énergie de liaison des nucléons dans un noyau atomique. Ces deux prédictions ont été faites par Alpher et Gamov [Gamov, 1946] [Alpher *et al.*, 1948] [Alpher & Herman, 1948]. Le rayonnement fossile a été détecté et identifié comme tel en 1965 [Penzias & Wilson, 1965] [Dicke *et al.*, 1965]. L'excellent accord entre théorie et observations a donné une confirmation décisive au modèle.

Dans ce premier chapitre, nous allons revoir les différentes étapes du scénario de Big Bang chaud tel que nous l'avons rapidement esquissé dans cette introduction. Il s'agit d'un résumé des travaux que l'on peut trouver dans les ouvrages classiques traitant du sujet [Narlikar, 1983] [Kolb & Turner, 1990] [Padmanabhan, 1993] [Peebles, 1993] [Peacock, 1998] (voir aussi [Reeves, 1981] [Reeves, 1986] pour quelques aspects plus “journalistiques” mais non moins intéressants). Dans la prochaine section (§2), nous évoquerons brièvement les observations de l'Univers à grande échelle. Nous introduirons ensuite les éléments de Relativité Générale nécessaires à la description de l'Univers en cosmologie (§3), et en déduirons une partie de l'histoire thermique de l'Univers (§4). Les deux sections suivantes seront consacrées aux objets qui seront étudiés en détail durant toute cette thèse. Nous présenterons d'abord le rayonnement fossile (§5), puis nous introduirons les différentes grandeurs qui caractérisent le contenu matériel actuel de l'Univers (§6). Enfin, nous terminerons ce chapitre en mentionnant certains des problèmes de ce scénario tel qu'il aura été présenté (§7).

2 L'Univers observable

La majeure partie de l'énergie sous forme de photons n'est pas située dans le domaine visible, mais dans le domaine micro-onde. Il s'agit du rayonnement fossile dont nous avons déjà parlé (voir figure 1.1). En terme de densité d'énergie, il représente près de 99% de tout le rayonnement électromagnétique et c'est une radiation presque parfaitement isotrope : des anisotropies existent mais leur amplitude est seulement de quelques 10^{-5} ; de telles anisotropies nous apportent cependant de précieux renseignements sur l'Univers primordial car leur origine est cosmologique, *cf* §5 et chapitres suivants (c'est le sujet principal de ce mémoire...). Le spectre observé représente un corps noir parfait dans la limite des instruments de mesure. Toutes ces caractéristiques sont une indication très forte en faveur de son origine cosmologique : il n'existe absolument aucun mécanisme

[2]Il y a quelques décennies avait été introduit le *principe cosmologique parfait*, qui stipulait que l'Univers restait semblable à lui-même par toute translation dans l'espace mais aussi dans le temps. Dans ce cas, la densité et la température de l'Univers devaient être constantes au cours du temps, d'où le nom de *steady-state theory* [Bondi & Gold, 1948] [Hoyle, 1948]. Ces modèles ont depuis été exclus par les observations.

[3]ou fond cosmique micro-onde (FCM), ou Cosmic Microwave Background Radiation (CMBR), Cosmic Microwave Background (CMB), Cosmic Background Radiation (CBR)

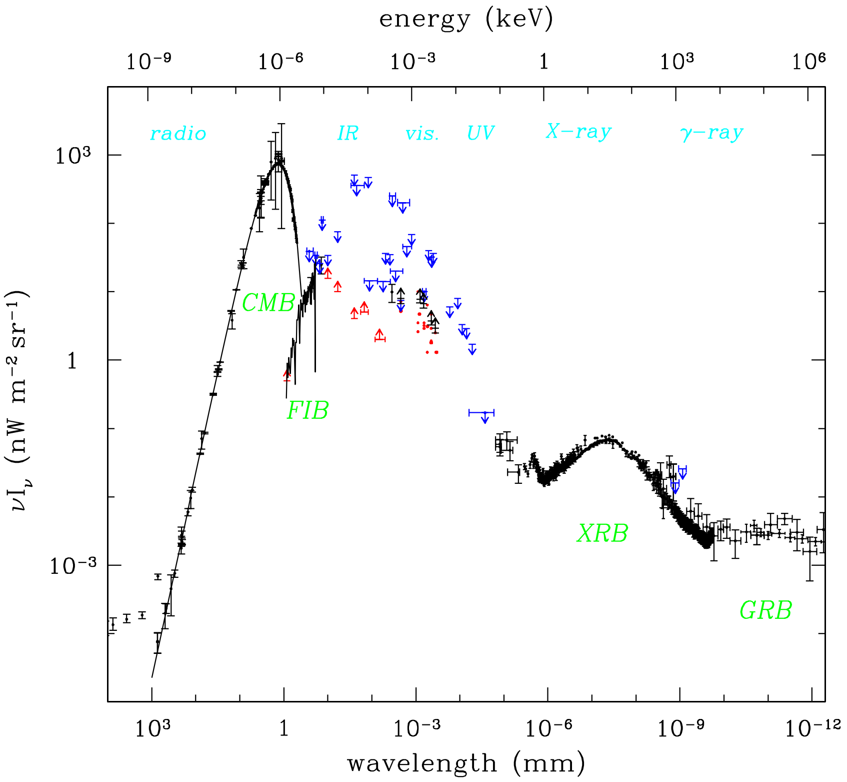


FIGURE 1.1 – Contribution à la densité d'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique par les fonds diffus extragalactiques. La principale contribution vient du rayonnement fossile dont on reconnaît la forme de corps noir au niveau des longueurs d'onde centimétriques. Les fonds diffus visibles et infrarouges sont difficiles à évaluer du fait de la contamination galactique. On a représenté diverses limites supérieures (gris foncé) et inférieures (gris clair) dans ces domaines de longueurs d'onde. Les autres longueurs d'onde ont une contribution énergétique beaucoup plus faible. Les fonds diffus infrarouge, visible, X et gamma s'expliquent tous par divers processus astrophysiques (lumière des étoiles, diffusion de celle-ci par le milieu interstellaire, gaz chaud dans les amas, restes de supernovae, *etc*). Tiré de [Halpern & Scott, 1999].

astrophysique pouvant produire un tel rayonnement.

La majeure partie de la matière visible est regroupée en galaxies, qui sont des entités de quelques 10^{11} étoiles en moyenne. Leur masse est évaluée à quelques 10^{45} g, soit environ 10^{12} masses solaires[4]. La répartition de ces galaxies dans l'Univers n'est pas aléatoire. Il existe des structures en forme de murs, de filaments ou d'amas dans lesquelles la densité de galaxies est plus élevée, et à l'inverse, il existe des zones avec très peu de galaxies. La plupart de ces structures résultent du mécanisme d'instabilité gravitationnelle que nous verrons au chapitre 2, et peuvent être reproduites à l'aide de simulations numériques. Par contre, les détails de ces structures dépendent

[4]On pourra par exemple consulter [Padmanabhan, 1993] ou [Padmanabhan, 1996] pour une explication de l'ordre de grandeur de ces chiffres. Noter que les galaxies ne sont pas uniquement composées d'étoiles. Par exemple, pour notre Voie Lactée, seule la moitié de la matière baryonique est contenue dans les étoiles, le reste formant des nuages de gaz et autres objets de faible luminosité. Il existe également un autre composante de matière (la matière noire), plus abondante que la matière ordinaire, et qui n'est pas non plus présente dans les étoiles

plus finement du contenu de l'Univers actuel et de la physique de l'Univers primordial comme nous le verrons dans les chapitres suivants.

L'étude détaillée des galaxies peut apporter des indications intéressantes sur la nature de la matière qui la compose. On peut ainsi analyser par spectroscopie la vitesse de rotation des étoiles autour du centre des galaxies, et reconstituer ainsi leur profil de densité par la troisième loi de Kepler. Si on fait l'hypothèse (raisonnable) que l'on peut décrire ces objets à l'aide de la gravitation newtonienne, il apparaît alors que la majeure partie de la masse des galaxies n'est pas sous la forme de matière visible, mais occupe un halo dont la densité décroît à peu près comme r^{-2} quand on s'éloigne du centre. Il est établi qu'une grande partie de cette masse non lumineuse n'est pas formée de matière baryonique. Cette "matière noire" ne fait semble-t-il pas partie du bestiaire prédit par le modèle standard de physique des particules[5]. D'une manière générale, cette matière noire semble répartie de façon plus homogène que la matière baryonique, ce qui est dû au fait qu'elle ne semble interagir que gravitationnellement avec le reste de l'Univers[6]. La première indication en faveur de l'existence de cette matière sombre remonte aux travaux de Zwicky [Zwicky, 1936].

3 L'Univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Nous allons maintenant donner une description mathématique de l'Univers à grande échelle. La Relativité Générale stipule que celui-ci peut être décrit à l'aide d'une *métrique* satisfaisant aux équations d'Einstein. Comme nous faisons l'hypothèse que l'Univers est homogène et isotrope, la forme de la métrique est assez simple dans certains systèmes de coordonnées particuliers (§3.1). On peut alors en déduire que l'Univers ne peut pas être statique, comme l'indiquent les observations (§3.2). Nous décrirons ensuite son contenu matériel (§3.3), avant d'écrire les équations d'Einstein qui régissent son évolution (§3.4).

3.1 Métrique d'un Univers homogène et isotrope

L'hypothèse d'isotropie implique qu'il n'y a pas de direction privilégiée dans l'Univers. Ainsi, il est possible de se placer dans un système de coordonnées x^μ dans lequel les éléments g_{0i} de la métrique sont nuls (l'indice 0 indique dorénavant une coordonnée de genre temps et les indices $i = 1,2,3$ dénotent les coordonnées de genre espace). En y rajoutant l'hypothèse d'homogénéité, on voit qu'il est également possible d'imposer au système de coordonnées que ses sections spatiales forment un espace dit à *symétrie maximale*, ce qui force la partie spatiale de la métrique à être proportionnelle à un tenseur γ_{ij} qui n'agit que sur des coordonnées de genre espace, et qui correspond à la métrique d'un espace à symétrie maximale (voir annexe A). Enfin, le temps doit s'écouler de la même façon en tout point de ce système de coordonnées, ce qui permet d'imposer que $g_{00} = c^2$. Les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie impliquent donc que l'Univers peut être décrit par une métrique dite de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW), dont l'élément de

[5]Une matière noire formée uniquement de neutrinos massifs ne permet de rendre compte des observations : ceux-ci sont trop légers, et donc pourvus d'une vitesse moyenne trop élevée pour rendre de la forme des halos, et de l'ensemble des grandes structures dans l'Univers. L'hypothèse la plus en vogue à l'heure actuelle est soit un WIMP (Weakly Interacting Massive Particle), qui serait en fait la particule supersymétrique la plus légère, soit un axion. Ces candidats s'insèrent naturellement dans la plupart des extensions du modèle standard. La détection directe de cette matière noire constitue bien sûr un des enjeux majeurs de la physique des particules.

[6]Du fait que la matière baryonique puisse rayonner, celle-ci peut dissiper de l'énergie et "creuser" des puits de potentiel. À l'inverse, une matière qui ne rayonne pas ne va pas pouvoir former des puits de potentiel aussi marqués. C'est ce qui explique que le profil de densité de la matière baryonique soit plus piqué que celui de la matière noire.

longueur correspondant peut s'écrire [Robertson, 1935] [Walker, 1936]

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - a^2(t) \gamma_{uv} \mathrm{d}x^u \mathrm{d}x^v \; . \tag{1.3.1}$$

Les coordonnées x^i sont appelées *coordonnées comobiles*. Elles définissent les positions d'une classe d'observateurs privilégiés (les *observateurs comobiles*, pour lesquels $x^i = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$) qui voient tous l'Univers homogène et isotrope, c'est-à-dire que tous ces observateurs sont équivalents. On pense qu'au mouvement propre de la Terre près, nous pouvons nous considérer comme des observateurs comobiles[7]. Le terme $a(t)$ est appelé *facteur d'échelle* et rend compte de l'expansion de l'Univers. Nous verrons plus tard qu'il ne peut pas être constant au cours du temps : les équations d'Einstein et le principe cosmologique impliquent que l'Univers est en expansion ou en contraction. Les "distances de coordonnées" Δx sont appelées *distances comobiles*. Il ne s'agit pas de vraies distances, puisqu'elle dépendent de la normalisation du facteur d'échelle. La distance $a\Delta x$ séparant deux objets à un instant donné sera appelée *distance physique*.

La coordonnée t est appelé *temps cosmique*, et correspond au temps propre des observateurs comobiles. Il est souvent commode d'introduire le *temps conforme*, que nous noterons η, obtenu par le changement de variable :

$$\mathrm{d}\eta \equiv \frac{c}{a(t)} \, \mathrm{d}t \; . \tag{1.3.2}$$

Dans ce qui suivra nous raisonnerons essentiellement en temps conforme, avec lequel l'élément de longueur s'écrit

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta) \left[\mathrm{d}\eta^2 - \gamma_{uv} \mathrm{d}x^u \mathrm{d}x^v \right] \; . \tag{1.3.3}$$

La métrique de Robertson-Walker est donc conformément plate[8]. Le temps conforme permet de calculer la distance comobile maximale parcourue par un photon, c'est-à-dire la taille de la région avec laquelle nous avons été en contact causal. La taille physique correspondante, $\eta a(\eta)$, s'appelle l'*horizon*[9].

3.2 Expansion et décalage vers le rouge

Avant d'étudier l'évolution temporelle du facteur d'échelle, regardons d'abord une conséquence fondamentale due à sa variation.

[7] La Terre tourne autour du Soleil à une vitesse d'environ 30 km s^{-1}. Celui-ci tourne autour du centre galactique à une vitesse estimée à 200 km s^{-1}. Notre Galaxie est animé d'un mouvement propre (en direction de l'amas Virgo) au sein groupe local, et possède une vitesse, mesurée grâce au dipole du rayonnement fossile, d'environ 600 km s^{-1}.

[8] C'est évident quand les sections spatiales sont plates, un peu moins sinon, voir par exemple [Hawking & Ellis, 1973].

[9] On peut en fait définir en cosmologie deux horizons différents. Le premier, déjà mentionné, est l'*horizon des particules*, c'est-à-dire la plus grande distance que peut avoir parcouru une particule depuis le Big Bang. Il est donc défini par

$$h_{\mathrm{part}} \equiv a(\eta_0) \int_{\eta_{\mathrm{min}}}^{\eta_0} \mathrm{d}\eta \; . \tag{1.3.4}$$

On peut également définir l'*horizon des événements*, qui est la taille maximale de la région sur laquelle on peut influer à partir d'aujourd'hui depuis un point de l'espace :

$$h_{\mathrm{ev}} \equiv a(\eta_0) \int_{\eta_0}^{\eta_{\mathrm{max}}} \mathrm{d}\eta \; , \tag{1.3.5}$$

la borne supérieure étant la valeur maximale (éventuellement infinie) que peut prendre le temps conforme. La taille de ces deux horizons dépend de la cosmologie considérée. Par exemple, un Univers rempli seulement de matière ou de radiation a un horizon des particules fini et un horizon des événements infini. C'est l'inverse pour un Univers vide de matière mais dominé par une constante cosmologique.

Deux observateurs comobiles situés à une distance coordonnée Δx vont voir leur distance physique varier au cours du temps comme $d \equiv a(t)\Delta x$, et vont s'éloigner l'un de l'autre à la vitesse apparente $v \equiv a'(t)\Delta x$ (un prime représente une dérivée par rapport au temps cosmique). Leur vitesse d'éloignement va donc être proportionnelle à leur distance :

$$v = Hd \,, \tag{1.3.6}$$

où on a défini le *paramètre de Hubble*[10] H :

$$H(t) \equiv \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{a'}{a} \,. \tag{1.3.7}$$

Soit maintenant un photon de quadri-vitesse p^μ (nous prenons à partir de maintenant un système de coordonnées comobiles, dans lequel la coordonnée temporelle est le temps conforme). L'équation des géodésiques d'un photon s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}p^\alpha}{\mathrm{d}\eta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0 \,. \tag{1.3.8}$$

Pour la composante temporelle, cela donne :

$$\dot{p}^0 \equiv \frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\eta} = -2\mathcal{H} p^0 \,, \tag{1.3.9}$$

où un point dénote la dérivée par rapport au temps conforme, et $\mathcal{H}$ représente le “paramètre de Hubble conforme”,

$$\mathcal{H} \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{aH}{c} \,. \tag{1.3.10}$$

On en déduit que $p^0 = A/a^2$ ou A est une constante et que $p_0 = A$. L'énergie d'un photon mesurée par un observateur comobile de quadri-vitesse $u_\mu = (a, \mathbf{0})$ (le facteur a vient du fait que $u_\mu u^\mu = 1$) est donc

$$E = p^\mu u_\mu = \frac{A}{a} \,. \tag{1.3.11}$$

Ainsi, l'énergie d'un photon décroît inversement proportionnellement au facteur d'échelle. Ce résultat peut être vu comme conséquence de l'allongement de la longueur d'onde du photon par l'expansion. On est donc amené à définir le concept de *redshift*[11] à partir du décalage en longueur d'onde (λ) ou en fréquence (ν) d'un photon entre son émission et son observation :

$$z \equiv \frac{\nu_{\mathrm{em}}}{\nu_{\mathrm{obs}}} - 1 = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}}}{\lambda_{\mathrm{em}}} - 1 \,. \tag{1.3.12}$$

C'est l'observation du décalage vers le rouge des raies spectrales des galaxies qui a donné corps à la théorie de l'expansion de l'Univers.

[10] On parle souvent de *constante de Hubble*, cependant cette appellation est ambiguë car le paramètre de Hubble n'est en général pas constant au cours du temps.

[11] ou décalage vers le rouge

3.3 Contenu matériel

Le fait que l'Univers soit homogène et isotrope implique que son contenu matériel a également une telle distribution, c'est-à-dire qu'il se comporte comme un *fluide parfait*. Il est en fait composé d'un ensemble de fluides parfaits : baryons, photons, ainsi que sans doute neutrinos, matière noire, et éventuellement champ scalaire et/ou constante cosmologique. Le tenseur énergie-impulsion de chacun de ces fluides a pour composantes

$$T^0_{\ 0} = \rho \ , \tag{1.3.13}$$

$$T^0_{\ i} = T^i_{\ 0} = 0 \ , \tag{1.3.14}$$

$$T^i_{\ j} = P\delta^i_{\ j} \ , \tag{1.3.15}$$

ρ et P étant respectivement la densité d'énergie et la pression du fluide considéré. Nous utiliserons le *paramètre de l'équation d'état*, ω, défini par

$$\omega \equiv \frac{P}{\rho} \ . \tag{1.3.16}$$

Pour de la matière non relativiste, on a $\omega = 0$, et pour de la matière relativiste, $\omega = \frac{1}{3}$. La donnée de ω permet de calculer l'évolution de la densité d'énergie au cours du temps par les équations de conservation $D_\mu T^{\mu\alpha} = 0$, qui se traduisent par

$$\dot{\rho} = -3\mathcal{H}(P+\rho) \ , \tag{1.3.17}$$

ce qui implique que

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \ . \tag{1.3.18}$$

Ainsi, la densité d'énergie de matière non relativiste décroît comme a^{-3}, ce qui résulte juste de l'augmentation d'un volume comobile comme a^3 au cours du temps et de la dilution de matière correspondante. La densité d'énergie de matière relativiste décroît comme a^{-4}, car en plus de l'expansion, s'ajoute l'effet de redshift mentionné plus haut : l'énergie individuelle de chaque photon (ou neutrino) décroît comme a^{-1}. Ce phénomène ne se produit pas pour de la matière non relativiste, puisque l'énergie d'une particule est uniquement donnée par l'énergie de masse, qui est constante au cours du temps.

Une conséquence fondamentale pour la cosmologie est que l'Univers primordial était dominé par la radiation. La domination par la matière n'est que "relativement récente"[12].

3.4 Les équations de Friedmann

Les équations d'Einstein appliquées à un Univers homogène et isotrope s'appellent les équations de Friedmann. En présence d'une éventuelle constante cosmologique Λ, elles s'écrivent[13]

$$3(\mathcal{H}^2 + K) - \Lambda a^2 = \kappa a^2 \sum_f \rho_f \ , \tag{1.3.19}$$

$$-(2\dot{\mathcal{H}} + \mathcal{H}^2 + K) + \Lambda a^2 = \kappa a^2 \sum_f P_f \ , \tag{1.3.20}$$

[12]La domination de la matière est "récente" en terme de redshift ($z \lesssim 10^4$, *cf* équation **1.4.7**), alors que l'époque de Planck remonte à $z \sim 10^{28}$, (*cf* équation **1.4.10**). En terme d'âge, la domination de la matière commence dès quelques centaines de milliers d'années après le Big Bang, dans un Univers aujourd'hui vieux d'environ 15 milliards d'années.

[13]Λ a ici la dimension $[L]^{-2}$.

où κ est la constante d'Einstein :

$$\kappa \equiv 8\pi \frac{\mathcal{G}}{c^4} , \tag{1.3.21}$$

$\mathcal{G}$ étant la constante de Newton. La somme dans les membres de droite concerne tous les fluides (parfaits) dont la densité d'énergie ou la pression contribuent significativement à la densité d'énergie ou à la pression totale. On voit immédiatement que la constante cosmologique se comporte comme un fluide parfait, de densité d'énergie et de pression

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{\kappa} , \tag{1.3.22}$$

$$P_\Lambda = -\frac{\Lambda}{\kappa} = -\rho_\Lambda , \tag{1.3.23}$$

soit un fluide dont le paramètre de l'équation d'état est $\omega_\Lambda = -1$. De même, on peut formellement considérer la courbure comme un fluide parfait de densité d'énergie et de pression

$$\rho_K = -\frac{3K}{\kappa a^2} , \tag{1.3.24}$$

$$P_K = \frac{K}{\kappa a^2} = -\frac{1}{3}\rho_K , \tag{1.3.25}$$

c'est-à-dire tel que $\omega_K = -\frac{1}{3}$. Nous appellerons densité d'énergie et pression *totales* la densité d'énergie et la pression obtenues en sommant les contributions de tous les fluides ainsi que la constante cosmologique, et nous noterons avec l'indice B [14] celles obtenues en incluant également la courbure :

$$\rho_{\rm tot} \equiv \rho_\Lambda + \sum_f \rho_f , \quad P_{\rm tot} \equiv P_\Lambda + \sum_f P_f , \tag{1.3.26}$$

$$\rho_{\rm B} \equiv \rho_K + \rho_\Lambda + \sum_f \rho_f , \quad P_{\rm B} \equiv P_K + P_\Lambda + \sum_f P_f . \tag{1.3.27}$$

Une fois connu le contenu matériel de l'Univers, il est possible de déduire la loi d'évolution du facteur d'échelle. Nous avons vu que la matière et la radiation avaient une densité qui décroissaient respectivement en a^{-3} et a^{-4}. De même la densité d'énergie associé à la constante cosmologique et la courbure décroissent respectivement en a^0 et a^{-2}. Pour ces quatre fluides, la forme de la pression permet d'associer un paramètre d'équation d'état, qui vaut respectivement 0, $\frac{1}{3}$, -1, $-\frac{1}{3}$, compatible avec la loi d'évolution de leur densité d'énergie respective (*cf* équation **1.3.18**). Il est alors possible de résoudre l'équation d'évolution du facteur d'échelle, qui donne :

$$a \propto \eta^{\frac{2}{1+3\omega_{\rm B}}} . \tag{1.3.28}$$

En principe, $\omega_{\rm B}$ est aussi une fonction du temps puisque les densité des différentes espèces n'évoluent pas de la même façon au cours du temps. En pratique, $\omega_{\rm B}$ est presque constant sur de longues périodes où un type de constituant (matière, radiation) domine l'Univers. Dans le cas limite d'un Univers dominé par la courbure[15] ($\omega_{\rm B} \to -\frac{1}{3}$), le paramètre de Hubble conforme est constant

[14] B pour "Background"

[15] Cela suppose que la densité d'énergie associée soit positive, c'est-à-dire que l'Univers soit ouvert. Dans le cas d'un Univers fermé, la densité d'énergie associée à la courbure est négative et donc au plus égale en valeur absolue à la somme des densités d'énergie des autres composantes.

($\mathcal{H} = \sqrt{-K}$), et l'expansion vue en temps conforme est exponentielle (ce qui représente la limite d'un exposant infini dans **1.3.28**). On peut de même raisonner en temps cosmique. Les équations de Friedmann s'écrivent alors

$$3\left(\frac{H^2}{c^2}+\frac{K}{a^2}\right)-\Lambda = \kappa\sum_f \rho_f\ , \qquad (\mathbf{1.3.29})$$

$$-\left(2\frac{H'}{c^2}+3\frac{H^2}{c^2}+\frac{K}{a^2}\right)+\Lambda = \kappa\sum_f P_f\ , \qquad (\mathbf{1.3.30})$$

La densité d'énergie totale évolue donc selon

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega_{\mathrm{B}})}}\ , \qquad (\mathbf{1.3.31})$$

ce qu'on pouvait directement voir en effectuant le changement de variable (**1.3.2**) dans (**1.3.28**). Dans le cas d'un Univers dominé par la constante cosmologique, le facteur d'échelle croît exponentiellement avec le temps et le paramètre de Hubble est constant. Il faut pour cela que la constante cosmologique soit positive. Un point intéressant est qu'en remontant dans le passé, le facteur d'échelle tend toujours vers 0. Il arrive d'ailleurs à 0 en un temps fini dès que $\omega > -1$. De même, il atteint 0 en un temps cosmique fini dès que $\omega > -\frac{1}{3}$. Ces deux contraintes sont réalisées par toute forme de matière connue[16], c'est-à-dire que le scénario de Big Bang chaud prédit un horizon et un âge fini à l'Univers. L'ensemble de ces résultats est résumé dans le tableau 1.1. Une autre conséquence importante est que la taille de l'horizon $\eta a(\eta)$ croît plus vite que les distances physiques (proportionnelles à $a(\eta)$). En d'autres termes, un observateur, "voit" des longueurs de plus en plus grandes "entrer dans l'horizon" à mesure que se déroule l'expansion. Notons qu'il s'agit d'un cas particulier, et que dans le cas d'un Univers dominé par la constante cosmologique, c'est le contraire qui se produit. Ceci a des conséquences importantes sur la physique de l'Univers primordial et sera développé au paragraphe 7.

Il est utile de définir le concept de *densité critique* ρ_{crit}, à savoir la densité qu'aurait un Univers avec le même taux d'expansion, mais avec des sections spatiales plates ($K = 0$) :

$$\rho_{\mathrm{crit}} \equiv \frac{3\mathcal{H}^2}{\kappa a^2}\ . \qquad (\mathbf{1.3.32})$$

On peut alors définir pour chaque espèce le *paramètre de densité* Ω_f par sa contribution à la densité critique :

$$\Omega_f \equiv \frac{\rho_f}{\rho_{\mathrm{crit}}}\ . \qquad (\mathbf{1.3.33})$$

Dans le cas d'un Univers plat, la somme des Ω_f vaut 1, elle est supérieure à 1 si l'Univers est fermé et inférieure à 1 s'il est ouvert[17] :

$$\sum_{i=f,\Lambda}\Omega_i = 1+\frac{K}{\mathcal{H}^2}\ . \qquad (\mathbf{1.3.34})$$

Les équations de Friedmann permettent également de calculer l'âge de l'Univers ainsi que la taille de l'horizon. En l'absence de champ scalaire et de constante cosmologique, on peut les

[16] Un Univers ouvert vide de matière n'y satisfait pas tout à fait car $\omega_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{3}$, mais dès qu'on y ajoute un peu de matière, la condition est à nouveau satisfaite.

[17] On peut aussi suivant (**1.3.24**) associer un paramètre de densité à la courbure $\Omega_K \equiv -K/\mathcal{H}^2$, auquel cas, la somme de tous les Ω (incluant la courbure) est de 1.

Type de matière	Symbole	ω	ρ	$a(t)$	$a(\eta)$	Notes
Cas général	f	ω_f	$\propto a^{-3(1+\omega_f)}$	$\propto t^{\frac{2}{3(1+\omega_f)}}$	$\propto \eta^{\frac{2}{1+3\omega_f}}$	
Champ scalaire en régime cinétique, $\rho_{\mathrm{k}} \simeq P_{\mathrm{k}}$	k	1	$\propto a^{-6}$	$\propto t^{\frac{1}{3}}$	$\propto \eta^{\frac{1}{2}}$	
Radiation	rad	$\frac{1}{3}$	$\propto a^{-4}$	$\propto t^{\frac{1}{2}}$	$\propto \eta$	
Matière	mat	0	$\propto a^{-3}$	$\propto t^{\frac{2}{3}}$	$\propto \eta^2$	
Courbure	K	$-\frac{1}{3}$	$\propto a^{-2}$	$\propto t$	$\propto \exp(\mathcal{H}\eta)$	$\mathcal{H} = \mathrm{C^{ste}}$, $K < 0$
Constante cosmologique ou champ scalaire en régime potentiel	Λ	-1	$\propto a^0$	$\propto \exp(Ht)$	$\propto -\eta^{-1}$	$H = \mathrm{C^{ste}}$, $\Lambda > 0$, $\eta < 0$

TABLEAU 1.1 – Évolution du facteur d'échelle selon le type de matière dominant dans l'Univers. Nous avons inclus les deux cas extrêmes d'un Univers dominé par un champ scalaire en régime cinétique (en "roulement rapide"), ou potentiel (en "roulement lent"), qui auront leur importance dans certains scénarios de quintessence (voir partie IV), ainsi que pendant l'inflation.

calculer exactement en résolvant les équations de Friedmann (*cf* annexe B). Signalons simplement la solution dans un espace plat rempli de matière non relativiste :

$$t_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0} . \qquad \textbf{(1.3.35)}$$

Ainsi, le *temps de Hubble* $t_H \equiv 1/H$, défini comme l'inverse du paramètre de Hubble H, donne un ordre de grandeur de l'âge de l'Univers. Les mesures du taux d'expansion aux alentours de 100 km s^{-1} Mpc^{-1} indiquent donc un âge de l'ordre de 15 milliards d'années, compatible avec les âges des plus vieilles étoiles et les abondances de certains éléments radioactifs. Il est possible de "rallonger" l'âge de l'Univers (*i.e.* d'augmenter la constante de proportionnalité entre t_0 et H_0^{-1}) en rajoutant de la courbure (négative) ou de la constante cosmologique (positive)[18]. Notons enfin que dans certains cas (courbure ou constante cosmologique non nulle) il se peut que l'expansion ne dure pas indéfiniment mais laisse place à une période de contraction de l'Univers, et que par le passé l'Univers ait déjà connu une phase de contraction pour ensuite "rebondir" sans passer par une singularité et entrer dans la phase d'expansion observée aujourd'hui (*cf* annexe B), mais ces scénarios ne s'inscrivent pas dans le cadre du modèles cosmologique standard.

4 L'histoire thermique de l'Univers

Nous avons vu que l'énergie des photons diminuait avec l'expansion. Un raisonnement similaire permet de voir que la température des photons (dans l'hypothèse où leur distribution est thermalisée) décroît inversement proportionnellement au facteur d'échelle. Un tel scénario est donc

[18]En effet, l'équation (**1.3.31**) nous assure que l'évolution du facteur d'échelle suit $a'' < 0$ dans un Univers dominé par la matière ou la radiation, ce qui correspond à l'intuition d'une expansion qui décélère au cours du temps. En rajoutant de la courbure ou une constante cosmologique, on augmente a'', c'est-à-dire qu'on rend l'expansion moins rapide dans le passé, ce qui rallonge d'autant l'âge de l'Univers.

appelé Big Bang chaud[19] : l'Univers primordial était dans le passé plus dense *et* plus chaud qu'aujourd'hui. À mesure que l'on remonte dans l'histoire de l'Univers, le contenu matériel de celui-ci varie avec sa température.

À très haute température, l'Univers est composé d'un mélange de plusieurs espèces relativistes en interactions. Les abondances relatives de chacune de ces espèces ne dépendent que du nombre d'états de spin ou autres degrés de liberté internes de chaque espèce, et de leur nature fermionique ou bosonique. Ces différentes espèces sont initialement relativistes et deviennent les unes après les autres non relativistes quand leur température descend en-dessous de leur énergie de masse. De plus, leurs interactions entre elles et avec le reste de la matière vont baisser avec la température. Le devenir de chaque espèce va ainsi dépendre de ses interactions. Si une espèce cesse d'interagir avant son passage à l'état non relativiste, elle va garder une distribution de corps noir et le même nombre de particules par volume comobile. C'est par exemple ce qui va se passer pour les neutrinos. Par contre, si les particules peuvent interagir entre elles après être devenues non relativistes, elles vont s'annihiler par paires et disparaître presque totalement (leur densité résiduelle sera proportionnelle à $\exp(-\Delta mc^2/k_B T)$, et ne cessera de diminuer qu'au moment où la dilution de ces particules sera telle que leur probabilité d'interactions sera devenue complètement négligeable). C'est ce qu'il se passe pour la majorité des particules du modèle standard.

On pense que la matière noire a peut-être été en équilibre thermique avec le reste de l'Univers, mais qu'elle s'en est découplée depuis longtemps. À l'heure actuelle, il en reste une fraction suffisamment grande pour jouer un rôle majeur dans l'histoire récente de l'Univers. Pour expliquer la forme des halos de galaxies, il faut que cette matière soit non relativiste. On parle alors de *matière noire froide*[20]. Il est aussi possible qu'une partie de cette matière noire soit composée de particules devenues non relativistes assez récemment (peu de temps avant la recombinaison). On parle alors de *matière noire chaude*[21]. Des neutrinos massifs feraient partie de cette catégorie.

À une température d'environ 10 MeV ($z \sim 3 \times 10^{10}$) le modèle standard de physique des particules prédit qu'il ne reste plus qu'un mélange de photons, neutrinos et paires électrons-positrons relativistes, ainsi que des protons et des neutrons (non relativistes) et d'éventuelles particules de matière noire n'interagissant plus que gravitationnellement avec le reste de l'Univers[22]. Les photons, neutrinos, électrons et positrons interagissent par interactions faible et électromagnétique et sont thermalisés. Tous ont même température.

Les calculs indiquent que quand la température descend en dessous de 1 MeV a lieu le *décou-*

[19]Par opposition à des scénarios dits de “steady-state”, reposant sur l'hypothèse du principe cosmologique parfait. De tels scénarios contrebalancent la dilution de la matière et le refroidissement dus à l'expansion par une création continue de matière. Outre le côté très *ad hoc* de cette explication, l'observation du rayonnement fossile, dont la forme est extrêmement proche du corps noir, rend ces théories très peu attrayantes.

[20]Cold Dark Matter, ou CDM

[21]Hot Dark Matter, ou HDM

[22]Il existe probablement aussi un fond cosmologique de gravitons qui ont sans doute été la première espèce à se découpler du reste de l'Univers. La détection de ce fond d'ondes gravitationnelles sera sans doute un des enjeux majeurs de la cosmologie du siècle prochain. Nous verrons que l'observation de la polarisation du rayonnement fossile pourrait apporter la première preuve indirecte de son existence.

plage des neutrinos, à un redshift d'environ[23]

$$z_\nu \simeq 3 \times 10^9 \,. \qquad \textbf{(1.4.4)}$$

Ceux-ci cessent d'interagir avec le reste de l'Univers. La distribution des neutrinos n'est plus en équilibre thermique, mais garde un spectre de corps noir dont la température décroît avec l'expansion (*cf* chapitre 5).

Quand la température descend en-dessous de l'énergie de masse des électrons-positrons ($m_e c^2 = 511$ keV), ceux-ci s'annihilent. Comme le découplage avec les neutrinos a déjà eu lieu, l'annihilation ne crée que des photons[24]. On a alors un réchauffement du fluide de photons par rapport au fluide de neutrinos, à un redshift d'environ

$$z_{e^+e^-} = \frac{m_e c^2}{k_B T_0} \simeq 2 \times 10^9 \,. \qquad \textbf{(1.4.5)}$$

Quand la température descend en dessous de 0.1 MeV, l'énergie des photons devient suffisamment basse pour permettre la formation de noyaux atomiques. C'est la *nucléosynthèse primordiale*, durant laquelle seuls des noyaux légers (deutérium, tritium, hélium et lithium) sont formés[25]. Le redshift correspondant est d'environ

$$z_{\rm nuc} \simeq 3 \times 10^8 \,. \qquad \textbf{(1.4.6)}$$

L'abondance des éléments légers dépend du rapport entre le nombre de photons et de baryons, de la durée de la nucléosynthèse, et du rapport des abondances de neutrons et protons, directement relié à la durée de vie du neutron. La durée de la nucléosynthèse dépend du contenu matériel de l'Univers à cette époque-là. Les observations de l'abondance des éléments légers donnent ainsi des

[23] La méthode utilisée pour ce calcul est la suivante : il faut comparer les temps caractéristiques qui interviennent dans le problème, à savoir le taux d'expansion (le paramètre de Hubble) et le taux de collision. Les équations de Friedmann nous assurent que, pour des espèces relativistes

$$H^2 \propto \kappa\rho \propto \frac{\mathcal{G}}{c^2}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \,. \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

D'autre part, le taux de collision Γ s'écrit $\Gamma = n\langle\sigma v\rangle$, où σ représente la section efficace de collision et v la vitesse relative entre deux particules, dont on moyenne le produit sur la distribution de vitesse des particules. Pour des neutrinos sans masse, $v = c$, et la section efficace est celle de l'interaction faible à basse énergie (c'est-à-dire à des énergies inférieures à l'énergie de masse des bosons de l'interaction faible, ~ 100 GeV), qui est de la forme

$$\sigma \propto G_F^2 E^2 \,, \qquad \textbf{(1.4.2)}$$

où E est l'énergie des neutrinos et G_F est la constante de couplage de Fermi, $G_F \simeq (293\ \mathrm{GeV})^{-2}$. L'arrêt des réactions se produit quand le taux de réaction devient plus petit que le taux d'expansion. Ici,

$$\frac{\Gamma}{H} \propto \frac{(k_B T)^3}{(\hbar c)^3}\frac{c G_F^2 (k_B T)^2 (\hbar c)^2}{\sqrt{\frac{\mathcal{G}}{c^2}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}}} = (k_B T)^3 G_F^2 E_{\rm Pl} \,, \qquad \textbf{(1.4.3)}$$

dont on déduit que le découplage se produit aux alentours de 1 MeV.

[24] En fait, l'annihilation a lieu peu de temps après le découplage des neutrinos. Le découplage n'est alors pas tout à fait terminé à ce moment-là, et le fluide de neutrinos est légèrement réchauffé. En pratique, cela revient à considérer un nombre "effectif" de neutrinos égal à 3.04 au lieu de 3 [Lopez *et al.*, 1999].

[25] La raison à cela est que la nucléosynthèse forme majoritairement des noyaux d'hélium-4. En effet, il n'existe pas de noyaux atomiques stables à cinq ou huit nucléons, et il est par conséquent difficile de créer des noyaux plus lourds à l'aide d'hélium-4. Pour cela, il faut faire interagir trois noyaux d'hélium-4, processus beaucoup trop lent pour se produire durant les quelques minutes que dure la nucléosynthèse. Il peut par contre se produire ultérieurement au cœur des étoiles massives[Burbidge *et al.*, 1957]. C'est la *nucléosynthèse stellaire*.

contraintes très fortes sur l'état de l'Univers à cette époque-là, et sont un des plus beaux succès du modèle de Big Bang chaud. Notons que la température à laquelle se produit la nucléosynthèse (0.1 MeV) est bien plus basse que l'énergie de liaison de l'atome d'hélium (28.3 MeV). Ceci est dû au fait que la densité de photons est beaucoup plus élevée que la densité de baryons (contrairement à ce qu'il se passe lors de l'annihilation électrons-positrons, qui sont en nombre semblable aux photons), ce qui recule d'autant la température de transition.

Comme la densité d'énergie sous forme de matière relativiste décroît plus vite que celle de matière non relativiste, il se produit à un moment la *transition radiation-matière*, aussi appelée *équivalence*, dont le redshift exact n'est pas bien connu du fait des incertitudes sur la densité de matière noire :

$$z_{\rm eq} = \frac{\Omega^0_{\rm mat}}{\Omega^0_{\rm rad}} - 1 \sim 10^4 \ . \qquad (\mathbf{1.4.7})$$

Enfin, quand la température de l'Univers est de l'ordre de l'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène ou d'hélium (~ 13.6 eV), a lieu la *recombinaison*. Là encore, la recombinaison a lieu à un température plus basse car le rapport du nombre de photons au nombre de baryons est très élevé, et que la matière ne peut se (re)combiner que quand la fraction la plus chaude des photons n'est pas trop énergétique. Nous verrons plus loin que la température de la recombinaison est d'environ 3300 K, c'est-à-dire que le découplage s'est produit à un redshift d'environ

$$z_{\rm rec} \simeq 1200 \ , \qquad (\mathbf{1.4.8})$$

À l'issue de la recombinaison, la quasi totalité des électrons sont liés aux noyaux atomiques. La diffusion d'un photon se faisant (à basse énergie) essentiellement à l'aide d'électrons libres, l'Univers devient soudainement transparent aux photons. C'est le *découplage des photons*. Les photons du rayonnement fossile ont commencé à se propager librement peu de temps après, à un redshift d'environ

$$z_{\rm dec} \simeq 1100 \ . \qquad (\mathbf{1.4.9})$$

La région d'émission de ces photons forme une sphère centrée sur nous et est appelée *surface de dernière diffusion*[26]. Le rayonnement fossile représente donc la plus vieille image électromagnétique du monde. De la même façon, il existe un rayonnement fossile de neutrinos, émis lors du découplage des neutrinos à une époque plus ancienne ($z_\nu \simeq 3 \times 10^9$). Ce rayonnement est très difficile à détecter, mais des preuves indirectes de son existence sont données par les résultats de la nucléosynthèse[27]. Un rayonnement fossile de gravitons, émis beaucoup plus tôt dans l'histoire de l'Univers, devrait aussi exister, et son intensité est également contrainte par la nucléosynthèse.

Actuellement, l'Univers est dominé par de la matière non relativiste (et peut-être depuis peu par une composante qui pourrait être une constante cosmologique ou un champ scalaire). L'Univers est "froid" : la température du rayonnement fossile est seulement d'environ 2.7 K. Notons ceci dit que les observations (notamment le test de Gunn-Peterson[28]) indiquent que la quasi-totalité de la

[26]Last Scattering Surface, ou LSS, à ne pas confondre avec Large Scale Structure qui possède également la même abréviation.

[27]Pour rendre compte de l'abondance des élément légers, il faut que la nucléosynthèse ait duré un certain temps. Cette durée ainsi déduite est compatible avec l'existence de ce fond cosmologique de neutrinos via les équations d'Einstein, qui relient le taux d'expansion au contenu matériel de l'Univers.

[28]Ce test [Gunn & Peterson, 1965] consiste à observer l'absorption Lyman-α de l'hydrogène neutre situé entre une source à haut redshift et un observateur. Le fait que l'absorption des spectres des quasars ne soit pas totale à ces longueurs d'onde permet de donner des contraintes très fortes sur la proportion d'hydrogène neutre dans l'Univers *cf* par exemple [Steidel & Sargent, 1987] [Songaila *et al.*, 1999].

matière baryonique est ionisée, alors que les calculs indiquent que la recombinaison est presque totale. On suppose donc qu'une *réionisation* s'est produite entre l'émission du rayonnement fossile et maintenant, sans doute à l'époque de la formation des premiers objets compacts, mais il s'agit là d'un phénomène encore mal compris (*cf* par exemple [Madau, 2000]).

Notons enfin que plusieurs autres événements d'importance se sont produits dans l'histoire de l'Univers. Un des plus importants est la *baryogenèse* : l'Univers observable est composé uniquement de matière et non d'antimatière[29]. Or, pour des raisons de symétrie, on pense qu'à des époques plus reculées, il y avait la même densité de baryons et d'antibaryons. Il faut donc invoquer un mécanisme qui produise légèrement plus de baryons pour expliquer l'asymétrie observée aujourd'hui. L'asymétrie matière-antimatière est cependant assez faible, de l'ordre de 10^{-9}, mais le mécanisme qui l'a générée n'est pas bien connu. De même, il a du se produire, sans doute au même moment, une asymétrie électrons-positrons (*leptogenèse*)[30], ainsi éventuellement qu'une asymétrie neutrinos-antineutrinos[31]. Du fait que le paramètre de densité totale est de l'ordre de 1 (*cf* §6), on peut déduire de (**1.4.7**) l'époque où la densité d'énergie était de l'ordre de celle de Planck. On trouve

$$z_{\rm Pl} \equiv \left(\frac{\rho_{\rm Pl}}{\rho^0_{\rm rad}}\right)^{\frac{1}{4}} \sim 10^{31} . \qquad \textbf{(1.4.10)}$$

Il s'agit de la limite au-delà de laquelle la physique connue n'est certainement plus applicable.

5 Le rayonnement fossile

La température du rayonnement fossile a été mesurée avec précision avec l'expérience FIRAS montée sur le satellite COBE [Mather *et al.*, 1990] [Fixsen *et al.*, 1996]. Il a été trouvé une température de

$$T_\gamma = 2.728 \pm 0.004 \text{ K} , \qquad \textbf{(1.5.1)}$$

les barres d'erreur étant à 2σ. Le spectre observé est compatible avec celui d'un corps noir, *i.e.*

$$I(\nu) \propto \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} . \qquad \textbf{(1.5.2)}$$

Le fait qu'on ait un spectre de corps noir prouve que celui-ci a pu être thermalisé, essentiellement grâce aux interactions avec les électrons. Cependant, à un redshift inférieur à $z \sim 10^6$, le rayonnement fossile n'a plus le temps de se thermaliser [Hu & Silk, 1993] [Stebbins, 1997]. Toute injection d'énergie peut donc être vue aujourd'hui par un écart au spectre de corps noir. Entre $z \sim 2 \times 10^6$ et $z \sim 10^5$, la diffusion Compton permet encore de thermaliser le spectre, mais sans pouvoir modifier le nombre de photons. Le spectre obtenu ne sera plus un spectre de corps noir, mais un spectre de

[29] Sans quoi les zones frontières entre les deux types de matière seraient détectables par le fort rayonnement gamma qu'elles émettraient.

[30] Une telle asymétrie est nécessaire pour que l'Univers soit électriquement neutre, sans quoi les effets électrostatiques agiraient comme une force répulsive qui affecterait l'expansion. Du fait que des tels effets ne sont pas observés (ou n'ont lieu que depuis une époque récente), on déduit que l'écart à la neutralité électrique est extrêmement faible, inférieur au rapport des forces électriques et gravitationnelles qui vaut $4\pi\varepsilon_0 \mathcal{G} m_{\rm p}^2 / q^2 \simeq 8.1 \times 10^{-37}$, chiffre nettement inférieur à l'asymétrie matière-antimatière.

[31] Comme il n'y a pas eu d'annihilation neutrinos-antineutrinos, cela se traduit par un très léger excès de neutrinos (également de l'ordre de 10^{-9}, donc probablement inobservable).

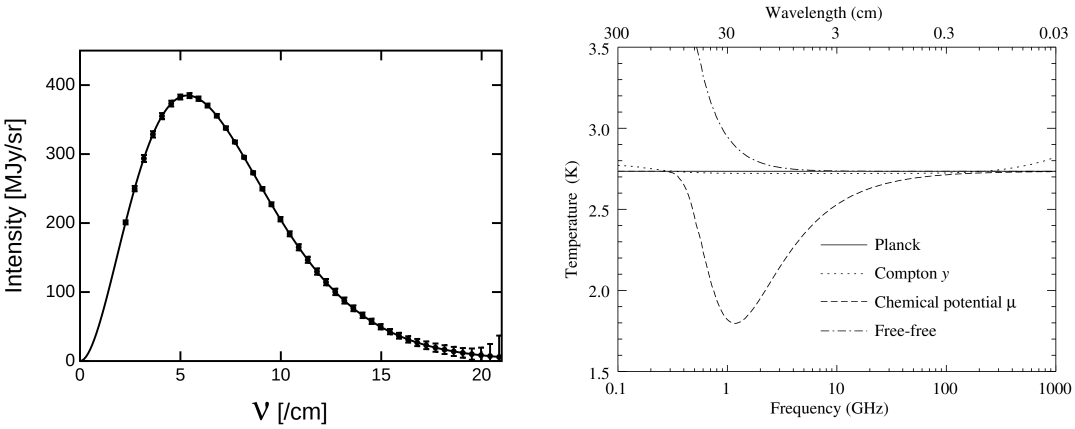


FIGURE 1.2 – Spectre du rayonnement fossile mesuré par le satellite COBE, et différents types de distorsions au spectre de corps noir. Aucune de ces distorsions n'a été observée dans le rayonnement fossile. Tiré de [Smoot, 1997a].

Bose-Einstein avec un potentiel chimique $\mu \equiv \tilde{\mu} k_B T$ non nul :

$$I(\nu) \propto \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T} - \tilde{\mu}} - 1} \ . \tag{1.5.3}$$

Une injection d'énergie à un redshift inférieur à $z \sim 10^4$ ne sera plus thermalisée. Elle va provoquer un dépeuplement des basses fréquences au profit des hautes fréquences. Quand les photons interagissent de cette façon avec un gaz plus chaud d'électrons, on parle d'*effet Sunyaev-Zel'dovich* (ou *S-Z*). Si le gaz d'électrons se déplace par rapport au référentiel au repos des photons, on parle d'effet S-Z *cinétique*, qui affecte principalement les photons se déplaçant dans la même direction que le gaz d'électrons. Dans les autres cas, on parle d'effet S-Z *thermique*. La déformation est proportionnelle au facteur y, donné par

$$y \equiv \int \sigma_{\mathrm{Th}} n_{\mathrm{e}} c \frac{k_B (T_{\mathrm{e}} - T_\gamma)}{m_{\mathrm{e}} c^2} \, \mathrm{d}t \ . \tag{1.5.4}$$

Enfin, il est possible qu'il y ait des distorsions free-free, essentiellement dues à l'émission de photons par des électrons diffusant sur des particules chargées. L'effet sur le rayonnement de fond est proportionnel au paramètre Y_{ff}, donné par

$$Y_{\mathrm{ff}} \equiv \int \varkappa \frac{T_{\mathrm{e}} - T_\gamma}{T_{\mathrm{e}}} \, \mathrm{d}t \ , \tag{1.5.5}$$

avec

$$\varkappa \equiv \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \right)^3 \frac{8\sqrt{\pi} g}{3\sqrt{6}} \frac{h^2 n_{\mathrm{e}}^2}{m_{\mathrm{e}} (k_B T_\gamma)^3 \sqrt{m_{\mathrm{e}} k_B T_{\mathrm{e}}}} \ . \tag{1.5.6}$$

La quantité g est appelée facteur de Gaunt et vaut environ 2.

Le spectre du rayonnement fossile mesuré par COBE et les trois types de distorsions que nous venons de présenter sont représentés sur la figure 1.2. Le spectre observé est très proche d'un spectre de corps noir : les contraintes sur les paramètres $\tilde{\mu}$, y et Y_{ff} sont [Smoot, 1997a]

$$|\tilde{\mu}| < 9 \times 10^{-5} \ , \tag{1.5.7}$$

$$|y| < 15 \times 10^{-6} \ , \tag{1.5.8}$$

$$|Y_{\mathrm{ff}}| < 1.9 \times 10^{-5} \ . \tag{1.5.9}$$

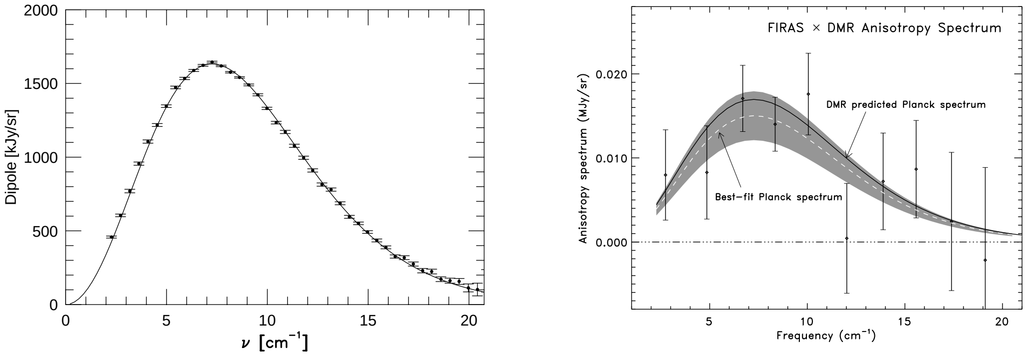


FIGURE 1.3 – Spectre du dipole et spectre des anisotropies à plus petite échelle angulaire. Ces deux spectres sont compatibles avec des fluctuations de température, interprétées respectivement comme un effet Doppler et une fluctuation "primordiale" de température. Tiré de [Smoot, 1997a].

Ces valeurs très faibles donnent des contraintes très fortes sur tous les processus qui ont pu se produire depuis $z \sim 10^6$ et même depuis la nucléosynthèse primordiale. En effet une injection d'énergie entre la nucléosynthèse et $z \sim 10^6$ aurait détruit certains éléments légers produits par photodissociation, modifiant ainsi les rapport d'abondance des éléments légers dans des proportions incompatibles avec les observations.

Comme nous l'avons dit, le rayonnement fossile n'est pas parfaitement isotrope. Après soustraction du monopole de température, il reste quelques anisotropies résiduelles. La principale anisotropie observée est compatible avec un dipole résultant d'un effet Doppler, c'est-à-dire essentiellement une fluctuation de température $\delta T \sim \frac{v}{c} T_0 \cos\theta$, où θ est l'angle entre la direction d'observation et le dipole. La direction vers laquelle pointe de dipole (l'amas Virgo), ainsi que son intensité (de l'ordre de $600\,\mathrm{km\,s^{-1}}$) sont compatibles avec une origine cinématique locale, *i.e.* pourrait être expliquée par le mouvement de notre propre galaxie dans l'Univers local. Aux échelles angulaires plus petites, une partie des anisotropies observées vient de la contribution de divers avant-plans (émission galactique, synchrotron, free-free, poussières, *etc*...). Le spectre de ces émissions est très différent d'un corps noir, ce qui permet de soustraire ces contributions pour ne garder que la composante uniquement due au rayonnement fossile. Les anisotropies résiduelles sont alors de simples fluctuations de température, compatibles avec une origine purement cosmologique (voir figure 1.3). C'est au spectre (angulaire) de ces anisotropies auquel nous allons nous intéresser dans les chapitres suivants.

6 Les paramètres cosmologiques

L'Univers contient des photons et des baryons. L'étude des courbes de rotations des galaxies suggère qu'il existe une autre forme de matière, non relativiste, que nous appelons matière noire, et il existe vraisemblablement un fond cosmologique de neutrinos assez semblable au fond cosmologique de photons. Un des buts de la cosmologie est de déterminer les abondances de ces quatre "éléments" ainsi que le taux d'expansion de l'Univers.

Il existe de nombreuses méthodes pour estimer plus ou moins directement le paramètre de Hubble (voir par exemple [Bahcall *et al.*, 1999] [Freedman, 2000]) : luminosité des Céphéides, des supernovae de type Ia ou II, effet S-Z cinétique, variations temporelles des images multiples des quasars.

L'ensemble de ces méthodes donne une valeur du paramètre de Hubble égale à

$$h = 0.65 \pm 0.08 \quad (2\sigma) \,, \tag{1.6.1}$$

où on a posé, selon l'usage en vigueur,

$$H_0 \equiv 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \,. \tag{1.6.2}$$

L'âge de l'Univers peut être évalué à l'aide de l'âge des plus vieilles structures ou des éléments radioactifs. Ces deux méthodes sont en accord et donnent [Rowan-Robinson, 1998],

$$t_0 = 13.5 \pm 2 \text{ Gan} \,. \tag{1.6.3}$$

Cet âge n'est pas pas compatible avec l'âge déduit de la valeur de la constante de Hubble dans un Univers dominé par la matière (**1.3.35**). C'est une des nombreuses indications en faveur de la présence d'une constante cosmologique, dont on aimerait mesurer plus directement la contribution à la densité d'énergie de l'Univers.

La température du rayonnement fossile (**1.5.1**) permet de déduire directement la densité d'énergie correspondante,

$$\Omega_\gamma^0 h^2 = 2.48 \times 10^{-5} \,. \tag{1.6.4}$$

On pense qu'il existe également un fond cosmologique de neutrinos possédant un spectre de corps noir, mais à température légèrement plus basse. On peut montrer (*cf* **5.2.38**) que sa densité d'énergie est dans un rapport fixé avec celle des photons. Plus précisément, on a

$$\Omega_\nu^0 h^2 = 1.69 \times 10^{-5} \,. \tag{1.6.5}$$

Une détection indirecte de ce fond cosmologique a été faite à l'aide des résultats de la nucléosynthèse, qui dépendent directement du taux d'expansion de l'Univers à cette époque-là, donc de la densité d'énergie sous forme de particules relativistes. Comme nous l'avons déjà dit, la densité de neutrinos est probablement légèrement plus élevée (d'environ 1%) car l'annihilation électrons-positrons a cédé un peu d'énergie aux neutrinos. Il est également possible que les neutrinos aient une masse. Cette masse est relativement faible, ce qui prouve qu'ils se sont découplés avant de devenir non relativistes. L'abondance actuelle de neutrinos reste donc la même que s'ils étaient relativistes, et leur contribution à la densité critique est dans ce cas

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{\sum_\nu m_\nu[\text{eV}]}{91.5} \,, \tag{1.6.6}$$

$m_\nu[\text{eV}]$ désignant la masse de chaque famille de neutrinos exprimée en électron-Volts.

La nucléosynthèse primordiale permet de calculer l'abondance des éléments légers en fonction du rapport entre densité de photons n_γ et densité baryonique n_b. Ce rapport est paramétrisé par le paramètre η_{10}, défini par

$$\eta_{10} \equiv 10^{10} \frac{n_\mathrm{b}}{n_\gamma} \,. \tag{1.6.7}$$

À l'aide de calculs de physique nucléaire assez compliqués mais désormais classiques, il est possible de déterminer l'abondance d'hélium-4, d'hélium-3, de deutérium, de lithium-7 en fonction de η_{10} (*cf* par exemple [Olive, 2000]). Ces résultats sont résumés sur la figure 1.4. Les mesures les

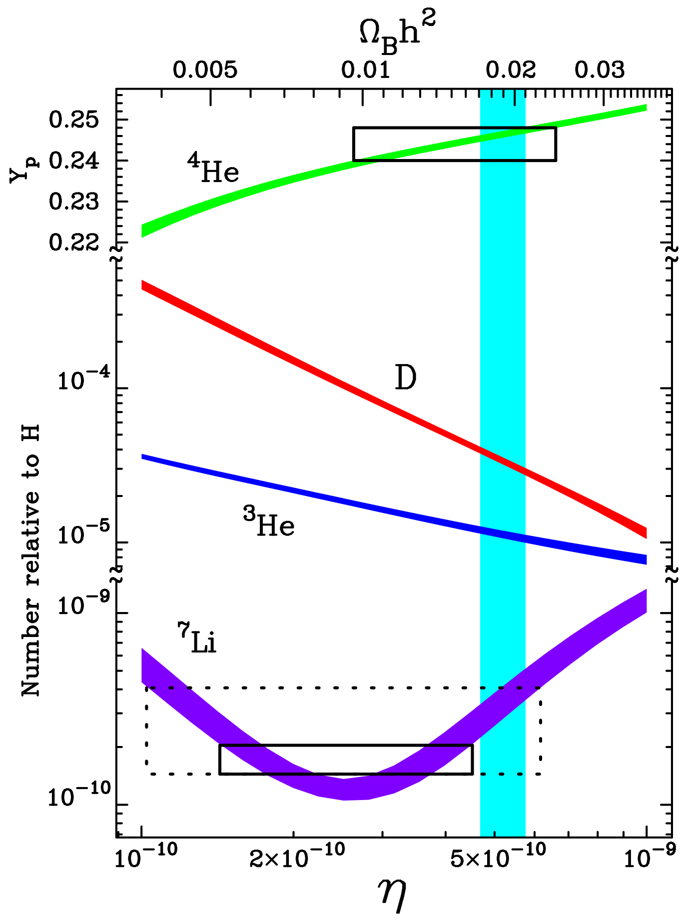


FIGURE 1.4 – Abondance des élément légers produits pendant la nucléosynthèse primordiale en fonction de la densité baryonique. Les barres d'erreur résultent des incertitudes sur les sections efficaces des réactions nucléaires entrant en jeu et sur la durée de vie du neutron. Il est fait l'hypothèse qu'il existe un fond cosmologique de trois familles de neutrinos non dégénérées. La barre verticale représente la densité baryonique déduite de l'abondance de deutérium, en bon accord avec les autres mesures. Tiré de [Nolleth & Burles, 2000].

plus conservatives donnent η_{10} compris entre 3 et 10, soit

$$0.011 < \Omega_b h^2 < 0.037 \; . \qquad \textbf{(1.6.8)}$$

Les mesures apparemment les plus fiables sont celles (récentes) de l'abondance de deutérium, qui est fortement dépendante de la densité baryonique (en $\rho_b^{-1.7}$, *cf* [Burles *et al.*, 2001]). Les mesures actuelles sont désormais très précises et donnent [Tytler *et al.*, 2000]

$$\Omega_b h^2 = 0.019 \pm 0.002 \quad (2\sigma) \; . \qquad \textbf{(1.6.9)}$$

Cette quantité est supérieure à la densité de matière lumineuse, évaluée à

$$\Omega_{lum} h^2 \sim 0.01 \; . \qquad \textbf{(1.6.10)}$$

Ainsi, seule une petite partie de la matière baryonique est condensée sous forme d'étoiles. La partie non lumineuse des baryons est cependant largement insuffisante pour expliquer les courbes de rotation des galaxies. La répartition de la matière noire est d'ailleurs différente de celle des baryons. Elle est plus homogène, ce qui est caractéristique d'une matière interagissant faiblement, et qui n'a pu dissiper son énergie pour tomber dans des puits de potentiel, contrairement aux baryons dont la densité croît beaucoup plus rapidement quand on s'approche du centre des galaxies.

Jusqu'à récemment, la tendance était à considérer que la matière noire était en quantité suffisante pour que l'Univers soit plat. Il semble qu'une valeur élevée de la densité de matière soit favorisée par les observations des grandes structures [Rowan-Robinson, 1998]. Depuis, la tendance est à considérer que l'Univers est plat, mais qu'il existe en plus de la matière noire une constante cosmologique. Les mesures récentes à l'aide des supernovae de type Ia [Perlmutter *et al.*, 1998] [Perlmutter *et al.*, 1999a] [Riess *et al.*, 1998] sont compatibles avec

$$\Omega_\Lambda \sim 0.7 \ , \quad \Omega_c \sim 0.3 \ . \tag{1.6.11}$$

Ces mesures semblent également en accord avec les résultats (peu précis) des expérience de weak lensing [Fort *et al.*, 1997]. Par contre, les résultats avec les comptages des amas semblent plus indécis [Sadat *et al.*, 1997] [Bahcall, 2000].

Comme nous allons le voir au chapitre 6, les anisotropies du rayonnement fossile devraient donner des contraintes très fortes sur l'ensemble de ces paramètres cosmologiques. Les résultats actuels sont compatibles avec un Univers plat avec constante cosmologique, mais en désaccord avec la nucléosynthèse [Jaffe *et al.*, 2001] [Burles *et al.*, 2001].

7 Les problèmes du scénario "standard"

Le modèle de Big Bang chaud que nous venons de présenter (et que nous appellerons désormais "scénario standard") donne une image assez convaincante de l'histoire récente de l'Univers, mais cependant certains problèmes subsistent. La physique qui régit l'Univers est *a priori* connue jusqu'aux plus hautes énergies accessibles en laboratoire (quelques centaines de GeV). On peut donc considérer comme fiable le modèle présenté jusqu'à ces énergies-là (qui incluent notamment la nucléosynthèse, l'annihilation électrons-positions et le découplage des neutrinos). Aux énergies plus élevées, le modèle est moins fiable (par exemple, on ne sait pas bien quel processus donne lieu à la baryogenèse), mais il est raisonnable d'espérer qu'on sait extrapoler, du moins qualitativement, la physique des accélérateurs jusqu'à l'énergie de Grande Unification (GUT), *i.e.* environ 10^{16} GeV. Au-delà, et certainement au-delà de l'énergie de Planck (10^{19} GeV) où on s'attend à voir des effets de gravité quantique, la physique est beaucoup plus spéculative. Ceci explique pourquoi certains problèmes que nous allons mentionner n'ont pas encore trouvé d'explication satisfaisante dans le cadre du modèle présenté ci-dessus. Une des ambitions de la cosmologie est de donner une réponse à certains de ces problèmes à l'aide des observations astrophysiques.

7.1 Les problèmes de l'horizon, de l'homogénéité et de la platitude

D'un point de vue théorique, le principe cosmologique repose principalement sur des arguments de simplicité et de symétrie. Il permet donc d'élaborer des scénarios cosmologiques simples sans trop de paramètres arbitraires. Cependant, il serait infiniment plus satisfaisant de trouver une justification naturelle à ce principe dans le cadre d'un modèle d'Univers primordial.

Observationnellement, le rayonnement fossile est très isotrope. Une telle isotropie s'explique facilement en supposant que l'ensemble des photons de l'Univers observable ont été à un moment donné en contact causal entre eux. Comme ceux du rayonnement fossile ont été émis à $z \sim 1000$ et n'ont plus interagi depuis, il faut qu'ils aient tous été en contact causal avant la surface de dernière diffusion. Or l'Univers observable est par définition le volume qui a la taille de l'horizon actuel, c'est-à-dire, dans le cadre du scénario standard, le volume "qui vient juste de rentrer dans l'horizon", volume qui n'avait jamais été par la passé à l'intérieur de l'horizon. Par conséquent, le modèle standard prédit que seules de petites régions de la surface de dernière diffusion peuvent être corrélées entre elles alors que les grandes échelles sont nécessairement décorrélées[32].

Plus près de nous, la répartition des galaxies dans le ciel semble homogène à grande échelle[33], et ce depuis un redshift supérieur à 3. Là encore, le modèle standard ne peut expliquer cette homogénéité.

Enfin, les mesures actuelles des paramètres cosmologiques indiquent que l'Univers est "presque plat". En terme de paramètre de densité, on a (avec des hypothèses extrêmement conservatrices)

$$0.1 < \Omega^0_{\rm tot} < 3\ . \qquad (\mathbf{1.7.3})$$

Or les équations de Friedmann indiquent que "l'état" $\Omega_{\rm tot} = 1$ est instable : quelques manipulations permettent de transformer les équations de Friedmann (**1.3.29**, **1.3.30**) en l'équation dite de Raychaudhuri qui s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(\Omega - 1) = \mathcal{H}(1 + 3\omega)\Omega(\Omega - 1)\ . \qquad (\mathbf{1.7.4})$$

Un petit écart de Ω à 1 va donc croître rapidement au cours du temps (comme a dans l'ère de matière et comme a^2 dans l'ère de radiation). La valeur actuelle du paramètre de densité implique qu'à l'ère de Planck, Ω déviait de 1 par moins de 10^{-60}, ce qui apparaît peu naturel[34].

Dans ces trois cas, on arrive à la conclusion que l'Univers devait à l'époque de Planck être extrêmement homogène et plat sur des distances alors non reliées causalement, ce qu'aucun principe fondamental n'explique naturellement dans le cadre du modèle standard. C'est d'ailleurs une conclusion assez ironique de la démarche effectuée : on impose, pour des arguments de simplicité, que l'Univers possède certaines symétries, ce qui permet de faire des calculs, puis des prédictions remarquablement vérifiées par l'expérience, mais après coup on se rend compte que les arguments de simplicité initialement invoqués n'ont en fait rien de naturel... En fait, ces trois problèmes proviennent d'une cause commune. Pour de la matière ordinaire, l'expansion de l'Univers est en loi de puissance, $a \propto t^p$, avec un exposant p inférieur à 1 (*cf* équation **1.3.31**). Le rayon de Hubble (ou l'horizon) croît comme a/a', c'est-à-dire comme t. La taille de l'Univers observable croît donc

[32] On peut reformuler le problème en disant que l'horizon à la surface de dernière diffusion, $a_{\rm LSS}\eta_{\rm LSS}$, devait être plus grand que la taille l'Univers observable aujourd'hui (qui est de l'ordre du rayon de Hubble, soit c/H_0), tel qu'elle était à la surface de dernière diffusion, soit $1 + z_{\rm LSS}$ fois plus petite. On doit donc avoir

$$a_{\rm LSS}\eta_{\rm LSS} > \frac{c}{H_0}\frac{1}{1 + z_{\rm LSS}} \Longleftrightarrow \mathcal{H}_0\eta_{\rm LSS} > 1\ . \qquad (\mathbf{1.7.1})$$

Un calcul précis (voir annexe B) donne le temps conforme en fonction du redshift dans le cadre du scénario standard comme :

$$\mathcal{H}_0\eta = 2\frac{\sqrt{2 + z_{\rm eq}}}{\sqrt{2 + z_{\rm eq}} + 1}\left(\frac{\sqrt{\frac{2 + z_{\rm eq} + z}{1 + z}} - 1}{\sqrt{2 + z_{\rm eq}} - 1}\right)\ . \qquad (\mathbf{1.7.2})$$

L'application numérique donne $\mathcal{H}_0\eta_{\rm LSS} \simeq 4.6 \times 10^{-2}$, soit un résultat au moins vingt fois plus petit que ce que nous indiquent les observations.

[33] Il existe une controverse à ce sujet, voir par exemple [Sylos Labini *et al.*, 1996].

[34] On voit immédiatement qu'à l'inverse, une phase pendant laquelle $\omega \lesssim -\frac{1}{3}$ va faire tendre le paramètre de densité vers 1. C'est la motivation essentielle des scénarios d'inflation (voir plus loin).

plus vite que les longueurs physiques. Un observateur "voit" donc des longueurs physiques de plus en plus grandes "entrer dans" l'Univers observable. Observationnellement, c'est donc un Univers homogène sur des échelles de plus en plus grandes qui nous apparaît au cours du temps. Or il est plutôt naturel de penser qu'il existe un processus *local*, c'est-à-dire à petite échelle qui soit responsable de l'homogénéisation, de l'isotropie ou de la platitude de l'Univers. Le modèle standard ne peut donc qu'échouer pour expliquer la structure homogène et isotrope à grande échelle de l'Univers.

7.2 Le problème des monopoles et autres reliques massives

Un aspect que nous n'avons pas encore mentionné est celui des transitions de phase. Nous en donnerons des détails plus loin (*cf* chapitre 3) et nous limiterons ici à une description très qualitative.

La physique des hautes énergies stipule que toute matière peut être décrite par un ou plusieurs champs, qui sont des grandeurs à N composantes possédant diverses interactions et évoluant dans un potentiel dont la forme exacte dépend en général de la température. Il est assez facile de trouver des formes de potentiel qui ne possèdent qu'un minimum global à haute température, mais plusieurs minima à basse température. Lors de cette transition, deux régions causalement connectées vont voir leur champ prendre le même minimum, mais sur des zones plus éloignées (supérieures à la longueur de corrélation du champ), le champ va "choisir" deux minima différents. On parle alors de *brisure spontanée de symétrie*. Entre ces deux zones le champ va passer d'un minimum du potentiel à un autre, et la densité d'énergie va prendre des valeurs supérieures à celle des minima. On aura donc apparition d'une surdensité locale (un défaut), qui ici aura la forme d'une surface.

Les défauts ainsi créés sont des surfaces appelées *murs de domaine*. Selon les détails du schéma de brisure de symétrie et le nombre de composantes du champ, la topologie du défaut peut être plus compliquée (d'où le terme de *défaut topologique*). Dans certains cas, le défaut peut être ponctuel, c'est-à-dire se comporter comme une particule non relativiste (plus précisément, ces objets sont initialement relativistes, mais sont rapidement freinés par l'expansion). On parle alors de *monopole*. Dans une classe très générale de modèles de physique des hautes énergies, on crée des monopoles dont les sections efficaces sont très faibles. Ainsi, il n'existe pas de mécanisme qui permette de faire disparaître ces monopoles, qui restent en nombre élevé au cours du temps, et finissent par se comporter comme de la matière non relativiste. Il est donc possible qu'à un moment donné une partie significative de l'énergie contenue dans l'Univers ait été transférée à de la matière non relativiste interagissant faiblement. L'échelle d'énergie d'une telle transition de phase est probablement très élevée (supérieure à 100 GeV, car sinon elle aurait été vue dans les accélérateurs de particules) et s'est donc produite à très haut redshift ($z > 10^{15}$). Or la transition radiation-matière est beaucoup plus récente ($z \simeq 10^4$). Il faut donc soit imaginer qu'il n'y a pas de transition de phase produisant ce type de monopoles (ce qui n'est *a priori* pas naturel), soit imaginer un processus qui diminue de façon drastique la densité de ces objets. Notons aussi qu'il existe d'autres types de défauts qui eux aussi peuvent générer des catastrophes cosmologiques. Il faut donc trouver un mécanisme pour se débarrasser de toutes ces reliques massives produites au cours de l'histoire de l'Univers.

7.3 Le problème de la formation des structures

Un autre problème non résolu est celui de la formation des grandes structures (galaxies, amas, super-amas...). On sait que des structures peuvent se former sur des grandes échelles par le mécanisme classique d'instabilité de Jeans, mais ce processus n'est en fait pas très efficace dans un

Univers en expansion (*cf* chapitre suivant). On a donc besoin d'un autre mécanisme qui puisse auparavant générer des fluctuations d'amplitude non négligeable (de l'ordre de 10^{-5}) sur de grandes échelles (jusqu'à plusieurs centaines de Mégaparsecs). Le problème est qu'il n'existe pas de phénomène physique à basse énergie qui puisse produire de telles fluctuations. Il faut donc faire appel à de la physique "non standard" (ou en tout cas ayant lieu a très haute température, typiquement 10^{16} GeV) pour expliquer l'existence de ces fluctuations.

7.4 Quelques autres problèmes

Comme nous l'avons déjà dit, la baryogenèse n'est pas un processus bien compris. En fait, on ne sait même pas à quelle époque elle a eu lieu, ni quel mécanisme en est à l'origine (transition de phase électro-faible, désintégration de particules massives, défauts topologiques, évaporation de trous noirs, *etc...* ; voir par exemple [Olive, 1994] [Dolgov, 1997] [Riotto & Trodden, 1999] pour des revues récentes). Un des principaux problèmes est en fait d'arriver à trouver un mécanisme qui produise une asymétrie matière-antimatière aussi grande que celle observée ($\sim 10^{-9}$).

Un autre problème, inhérent aux scénarios d'Univers en expansion est celui des modes trans-planckiens : toutes les longueurs physiques actuellement observables ont été à une époque passée plus petites que la longueur de Planck, c'est-à-dire décrites par une physique que nous ne connaissons pas (la gravitation quantique). Cette physique trans-planckienne pourrait très bien avoir des conséquences cosmologiques observables (voir par exemple [Martin & Brandenberger, 2001]).

Terminons cette énumération en mentionnant un dernier problème, rarement abordé dans la littérature (à l'exception de [Peacock, 1998]), à savoir celui de l'expansion elle-même. Nous avons vu que la Relativité Générale interdit des Univers statiques solutions des équations d'Einstein, sauf dans quelques cas très particuliers. Il est donc naturel d'avoir un Univers non statique, mais encore faut-il trouver un processus physique (plutôt qu'une nécessité mathématique) qui explique "naturellement" le fait que l'Univers se soit "mis" à un moment donné en expansion[35].

7.5 Quelques solutions possibles

Le "problème de la causalité", qui englobe les trois problèmes du paragraphe 7.1 a pour origine le fait que le rayon de Hubble ou l'horizon croissent plus vite que le facteur d'échelle. Comme le rayon de Hubble $r_H \propto 1/H$ croît comme t, le problème est dû au fait que l'expansion *décélère au cours du temps*. Pour résoudre ces problèmes, il suffit donc d'invoquer une *phase d'expansion accélérée*. Le tableau 1.1 nous indique que ce peut être le cas dès que l'Univers est dominé par une composante dont le paramètre de l'équation d'état ω est inférieur à $-\frac{1}{3}$. Aucune matière connue ne possède une telle équation d'état (qui suppose une pression négative), mais un *champ scalaire* peut, dans certain cas, satisfaire à ces contraintes. L'idée de l'*inflation* est basée sur ce principe : on suppose qu'une des composantes de l'Univers est, dans l'Univers primordial, un champ scalaire, qui pour une raison ou pour une autre se met à dominer la densité d'énergie de l'Univers, se comportant ainsi approximativement comme une constante cosmologique. C'est ce qu'il peut se passer si on suppose qu'en raison d'effets quantiques, le champ "saute" brutalement de son minimum d'énergie à une valeur d'énergie plus élevée. Le champ va alors peu à peu regagner son minimum de potentiel, mais pendant tout le temps où il varie peu (*i.e.* tant que sa dérivée temporelle reste faible)[36], il se comporte presque comme une constante cosmologique, et l'Univers connaît une

[35] Même dans la théorie de l'inflation, on suppose encore que l'Univers était, avant la phase inflationnaire, déjà en expansion. Ce problème de l'expansion demeure donc antérieur à la phase inflationnaire.

[36] On parle de régime de *slow-roll*.

phase d'expansion accélérée, qui s'arrête quand le champ sort de ce régime de roulement lent en rejoignant son minimum.

Cette phase d'inflation peut considérablement augmenter le facteur d'échelle (d'où son nom), et une expansion d'un facteur e^{60} est nécessaire[37] pour résoudre les problèmes liés à la causalité[38]. En général, la plupart des modèles d'inflation prédisent des phases d'expansion beaucoup plus importantes.

À l'issue de cette phase d'inflation, l'Univers a été considérablement dilué. Il est donc presque vide et "froid" au sens que la température et la densité des différentes espèces ont fortement décru. Ce mécanisme permet donc éventuellement de se débarrasser de plusieurs reliques massives, pourvu que celles-ci se forment avant la dernière phase d'inflation. Pour retrouver le scénario cosmologique standard, il faut donc invoquer un mécanisme pour convertir en fin d'inflation une partie de l'énergie du champ scalaire en matière ou radiation (sans pour autant recréer des reliques massives...). Ce mécanisme existe, et se produit pendant que le champ scalaire (aussi appelé *inflaton*) oscille quand il rejoint à nouveau le minimum de son potentiel. Le processus est alors appelé *réchauffage*[39], et est initié par une phase explosive de création de particules (*préchauffage*[40]) [Kofman *et al.*, 1997]. La température finale de la radiation ainsi créée dépend du modèle considéré, et est toujours plus basse que la température avant la phase d'inflation.

Reste à résoudre le problème de la génération de fluctuations à l'origine des grandes structures observées dans l'Univers. Il existe à l'heure actuelle plusieurs possibilités pour cela, dont deux semblent particulièrement prometteuses :

- une transition de phase qui génère des *défauts topologiques*,
- l'*inflation*, qui peut, à partir des fluctuations d'origine quantique, générer des fluctuations de densité macroscopiques pour former des structures[41].

Les défauts topologiques apportent une explication assez "classique" à la génération de fluctuations. Lors d'une brisure spontanée de symétrie, on peut créer des objets topologiquement stables, dont la densité interne reste constante au cours du temps. Ces objets agissent donc au bout d'un certain temps comme des surdensités, favorisant ainsi l'accrétion de la matière environnante.

L'aspect le plus séduisant en faveur de l'inflation en tant que mécanisme générant des fluctuations dans l'Univers primordial est celui de simplicité : on réutilise un mécanisme déjà nécessaire pour résoudre d'autres problèmes. Les défauts topologiques ne "résolvent" pas d'autres problèmes que celui de la formation des structures, et en cela peuvent apparaître au yeux de certains comme un épicycle inutile à la cosmologie, même s'ils sont une conséquence inévitable de la physique des

[37]On parle de 60 *e-folds*

[38]En supposant que la phase d'inflation ait lieu avant la domination de la matière (ce qui est raisonnable car elle se produit certainement à haute température), on calcule facilement (voir annexe B) que l'horizon croît d'un facteur

$$\Delta\eta = \frac{1}{\mathcal{H}_0} e^N \frac{\sqrt{1+z_{\rm eq}}}{1+z_f} , \qquad (1.7.5)$$

où e^N représente le facteur duquel a crû le facteur d'échelle (N est donc le nombre d'e-folds), et z_f est le redshift de la fin de la phase inflationnaire. La contrainte la plus forte sur l'horizon est celle qui vient des observations portant sur les objets vus aux époques les plus reculées possible, à savoir le rayonnement fossile, pour lequel il faut que $\mathcal{H}\Delta\eta \gtrsim 1$. En imposant que l'inflation a lieu pendant l'époque de grande unification, c'est-à-dire $z_f \sim T_{\rm GUT}/T_0 \sim 10^{28}$, on trouve

$$N \geq \ln(10^{26}) \simeq 60 . \qquad (1.7.6)$$

Ce nombre devient plus faible si la phase d'inflation a lieu à plus bas redshift.

[39]reheating

[40]preheating

[41]Alors qu'historiquement, elle n'a pas du tout été invoquée pour résoudre ce problème. C'est ce point qui rend la théorie d'autant plus séduisante

hautes énergies[42]. Une de leurs qualités la plus remarquable est de prédire par des arguments très simples l'amplitude des fluctuations primordiales, en accord avec les observations, ce que peu de modèles d'inflation expliquent de façon très naturelle (voir cependant [Tegmark & Rees, 1998] pour une autre interprétation de cette valeur par le principe anthropique).

Un des grands enjeux de la cosmologie théorique et observationnelle actuelle est de déterminer lequel de ces deux mécanismes est celui qui est prépondérant pour la formation des structures[43]. Notons que les structures observables à l'heure actuelle dépendent non seulement du mécanisme qui a généré les fluctuations initiales, mais aussi du contenu matériel de l'Univers actuel, qui influe directement sur l'évolution de ces fluctuations. Une étude détaillée de la formation des grandes structures peut donc en principe nous donner des renseignements très précieux *à la fois* sur l'Univers primordial *et* sur l'Univers actuel[44].

Insistons sur le fait que ces deux phénomènes ne sont pas "concurrents". Une phase d'inflation est utile (nécessaire ?) pour résoudre plusieurs problèmes déjà mentionnés, et dans le scénario de Big Bang chaud dans lequel nous nous plaçons, il est inévitable d'avoir des transitions de phase créant des défauts topologiques. Une des questions à laquelle nous nous intéresserons dans cette thèse est celle des moyens observationnels de quantifier les contributions respectives de ces deux scénarios à la formation des structures. Il n'est pas exclu que les deux y apportent une contribution non négligeable.

[42] C'est par exemple le même type de mécanisme de brisure spontanée de symétrie qui est invoqué pour expliquer l'existence des masses des particules élémentaires (le mécanisme de Higgs).

[43] Ces deux mécanismes ne sont bien sûr pas les seuls qui ont été envisagés. Les scénarios de Pré-Big Bang (*cf* [Gasperini, `http`] pour une introduction) pourraient représenter une alternative intéressante pour la formation des structures et la cosmologie primordiale en général, quoique des résultats préliminaires semblent indiquer qu'ils s'accordent moins bien avec les observations [Vernizzi *et al.*, 2001].

[44] Selon les goûts de chacun, tel ou tel aspect du problème est considéré comme prépondérant par rapport à l'autre. La tendance actuelle semble être à négliger la possible complexité de la phase initiale de génération de fluctuations, pour ne se focaliser presque que sur la mesure du contenu matériel de l'Univers.

Chapitre 2

Formation des structures

Sommaire

1 Introduction

Avant d'étudier en détail les fluctuations de température du rayonnement fossile (qui est le sujet principal de cette thèse), nous allons donner quelques idées générales sur la formation des structures par le mécanisme d'instabilité gravitationnelle, aussi appelé instabilité de Jeans [Jeans, 1902]. L'idée de base est assez simple : la gravité est une force attractive, et joue donc un rôle opposé à celui de la pression. Dans certain cas, la gravité peut prendre le pas sur la pression, et permettre la formation d'objets gravitationnellement liés (§2). Quelques applications astrophysiques de ce phénomène sont données au paragraphe 3. Dans un Univers FLRW, la dynamique des perturbations est affectée par l'expansion, ce qui a tendance à atténuer l'effet de la gravité (§4). L'instabilité gravitationnelle peut quand même se produire mais sur une période finalement assez restreinte (§5). Cela explique pourquoi les fluctuations observées dans le rayonnement fossile sont déjà mesurables sur la surface de dernière diffusion : elles doivent être suffisamment importantes lors de la recombinaison pour pouvoir atteindre les valeurs observées aujourd'hui.

2 L'instabilité de Jeans

2.1 Un modèle simplifié

Considérons dans un premier temps un problème simplifié. Intéressons-nous à la propagation en ondes planes du son dans un espace euclidien, contenant un seul fluide, initialement homogène, de densité de masse ρ_0 et de pression P_0. Plaçons-nous dans le référentiel au repos de ce fluide et négligeons dans un premier temps l'influence de la gravité. L'équation de conservation de la masse et l'équation d'Euler s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \, , \tag{2.2.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^2 + (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} P \, . \tag{2.2.2}$$

Linéarisons ces équations dans le référentiel au repos du fluide. Il vient :

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \, , \tag{2.2.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} \delta P \, , \tag{2.2.4}$$

soit :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial^2 t} - \frac{1}{\rho_0} \Delta \delta P = 0 \, . \tag{2.2.5}$$

En général, il est possible de relier la perturbation de pression à la perturbation de densité. Selon les propriétés physiques du fluide considéré, son évolution peut être isotherme (à température T constante) ou adiabatique (à entropie S constante). On définit ainsi un *coefficient de compressibilité isotherme* ou *adiabatique* χ par :

$$\chi_X \equiv \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_X \, , \tag{2.2.6}$$

où X représente T ou S. Quand le temps de propagation de la chaleur est bref, l'écoulement peut être considéré comme isotherme, alors que si l'équilibre thermique n'a pas le temps de s'installer, l'écoulement est adiabatique. Comme la chaleur se propage suivant une équation de diffusion, son temps de propagation augmente quadratiquement avec la distance. Ainsi, seules les petites longueurs d'onde correspondent à un écoulement isotherme, les autres correspondant à un écoulement adiabatique. C'est donc ce cas que nous allons considérer par la suite car c'est le seul pertinent pour les problèmes auxquels nous allons nous intéresser. L'équation (**2.2.5**) se réécrit alors :

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial^2 t} - \rho_0 \chi_s \Delta \delta\rho = 0 \, . \tag{2.2.7}$$

Cette dernière équation décrit la propagation du son, à la vitesse

$$c_{\mathrm{s}} \equiv \sqrt{\rho_0 \chi_s} \, . \tag{2.2.8}$$

Incluons maintenant la gravité dans notre problème. L'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}^2 + (\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} P + \boldsymbol{g} \, . \tag{2.2.9}$$

où $\boldsymbol{g}$ est le champ gravitationnel créé par le fluide. Ce champ dérive d'un potentiel $\bar{\Phi}$ qui peut être relié à la répartition de matière par l'équation de Poisson :

$$\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla} \bar{\Phi} \, , \tag{2.2.10}$$

$$\Delta \bar{\Phi} = 4\pi \mathcal{G} \delta\rho \, . \tag{2.2.11}$$

Les fluctuations de densité obéissent alors à l'équation

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c_\mathrm{s}^2 \Delta \delta\rho - 4\pi \mathcal{G} \rho_0 \delta\rho = 0 \, , \tag{2.2.12}$$

et la nouvelle relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = c_\mathrm{s}^2 \left(k^2 - \frac{4\pi \mathcal{G} \rho_0}{c_\mathrm{s}^2} \right) \, . \tag{2.2.13}$$

On voit donc qu'il existe une longueur caractéristique, la *longueur de Jeans* λ_J, au-delà de laquelle la propagation est instable :

$$\delta\rho \propto \exp \left(\frac{2\pi c_\mathrm{s}}{\lambda_\mathrm{J}} t \sqrt{1 - \frac{\lambda_\mathrm{J}^2}{\lambda^2}} \right) \, , \tag{2.2.14}$$

$$\lambda > \lambda_\mathrm{J} \equiv c_\mathrm{s} \sqrt{\frac{\pi}{\mathcal{G} \rho_0}} \, . \tag{2.2.15}$$

Pour les grandes longueurs d'onde, la fréquence de l'onde devient imaginaire pure : l'onde s'amplifie ou se dissipe exponentiellement, en un temps caractéristique de l'ordre de $\lambda_\mathrm{J}/c_\mathrm{s}$.

2.2 Interprétation

Un tel comportement peut s'expliquer en regardant les deux temps caractéristiques qui interviennent dans notre problème :

- Le *temps sonore* t_s, défini par le temps que met une onde sonore à traverser une longueur d'onde λ. C'est simplement la période d'une onde sonore de longueur d'onde λ :

$$t_\mathrm{s} \equiv \lambda c_\mathrm{s} \, . \tag{2.2.16}$$

- Le *temps (d'effondrement) gravitationnel* t_grav, mis par une structure de densité ρ_0 pour s'effondrer. D'après la troisième loi de Kepler, ce temps est de l'ordre de :

$$t_\mathrm{grav} \propto \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G} \rho_0}} \, . \tag{2.2.17}$$

À petites longueurs d'ondes, le temps sonore est inférieur au temps gravitationnel : la pression a le temps de contrer l'effondrement gravitationnel du fluide, qui reste ainsi (presque) homogène. Quand la longueur d'onde augmente, le temps sonore est aussi augmenté, et le fluide a cette fois le temps de s'effondrer sur lui-même avant que cet effondrement ne soit contré par la pression. Des inhomogénéités importantes peuvent ainsi apparaître.

D'un point de vue énergétique, chaque point du fluide traversé par une onde sonore se comporte comme un oscillateur. L'énergie de celui-ci se scinde en une composante d'énergie cinétique, une composante d'énergie potentielle élastique et éventuellement une contribution due au potentiel gravitationnel. Appelons $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ le déplacement d'un élément de fluide au passage de l'onde sonore. La vitesse de cet élément de fluide va donc être $\dot{\boldsymbol{\xi}}$. D'après l'équation de conservation de la masse, la perturbation de densité va être donnée par $\delta\rho = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi}$. L'équation d'Euler s'écrit alors en terme de $\boldsymbol{\xi}$ sous la forme (*cf* équation **2.2.12**)

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} - c_\mathrm{s}^2 \Delta \boldsymbol{\xi} = 4\pi \mathcal{G} \rho_0 \boldsymbol{\xi} \, . \tag{2.2.18}$$

Posant $k_{\mathrm{J}} \equiv 2\pi/\lambda_{\mathrm{J}} = \sqrt{4\pi\mathcal{G}\rho_0}/c_{\mathrm{s}}$, on retrouve l'équation de dispersion

$$\omega^2 = c_{\mathrm{s}}^2(k^2 - k_{\mathrm{J}}^2)\ . \tag{2.2.19}$$

L'énergie par unité de masse du système s'obtient en multipliant (**2.2.18**) par $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ et en intégrant sur un petit volume. Il vient

$$\frac{1}{2}\left\langle \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 \right\rangle + \frac{1}{2}c_{\mathrm{s}}^2\langle(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\xi})^2\rangle - 2\pi\mathcal{G}\rho_0\left\langle \boldsymbol{\xi}^2 \right\rangle = \langle e_{\mathrm{s}}\rangle\ , \tag{2.2.20}$$

les crochets représentant des moyennes des quantités considérés sur le volume en question. On reconnaît successivement dans l'équation ci-dessus le terme cinétique, le terme potentiel élastique et le terme d'énergie de liaison gravitationnelle. La fréquence de l'onde étant ω, on a

$$\frac{1}{2}\left\langle \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\omega^2\left\langle \boldsymbol{\xi}^2 \right\rangle . \tag{2.2.21}$$

L'énergie d'un élément de fluide est donc

$$\langle e_{\mathrm{s}}\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\xi}^2 \right\rangle \left[\omega^2 + c_{\mathrm{s}}^2(k^2 - k_{\mathrm{J}}^2)\right]\ . \tag{2.2.22}$$

En utilisant la relation de dispersion, il est clair qu'on a toujours équirépartition entre le terme cinétique et le terme potentiel, ce dernier comportant la contribution (négative) due à la gravité. À cause de ce terme, l'énergie totale peut donc être négative :

$$\langle e_{\mathrm{s}}\rangle = \omega^2\left\langle \boldsymbol{\xi}^2 \right\rangle = c_{\mathrm{s}}^2(k^2 - k_{\mathrm{J}}^2)\left\langle \boldsymbol{\xi}^2 \right\rangle . \tag{2.2.23}$$

C'est ce qui se passe pour des longueurs d'onde suffisamment grandes ($k < k_{\mathrm{J}}$), pour lesquelles l'amplitude de l'onde croît au cours du temps ($\omega^2 < 0$).

3 Applications astrophysiques

3.1 Formation d'objets virialisés

Considérons une surdensité de forme quelconque initialement au repos. Sous l'effet de la gravité, cette structure va s'effondrer sur elle-même si elle est plus grande que sa longueur de Jeans. Si elle était initialement parfaitement sphérique, l'effondrement finirait par former une singularité. Cependant, sauf choix extraordinairement particulier de conditions initiales, ça n'est pas le cas, et la structure va se déformer au cours de son effondrement. Si les particules qui la composent suivaient des trajectoires rectilignes, la structure se déformerait, atteindrait une taille minimale (moment où les vitesses des particules serait maximales), puis se dilaterait à nouveau pour atteindre la taille qu'elle avait initialement, et continuerait ainsi à osciller indéfiniment. Cependant, les particules sont déviées par la présence du champ gravitationnel de la structure, qui varie sur des temps brefs. Ceci va avoir pour effet de permettre aux particules d'échanger de l'énergie au cours du temps. Il en résulte alors que la distribution des vitesses des particules est considérablement élargie et devient indépendante de la distance au centre de la structure. On obtient alors une configuration stationnaire à peu près sphérique et plus petite que la structure initiale. C'est le phénomène dit de *relaxation violente*, découvert assez tardivement [Lynden-Bell, 1967]. Une autre conséquence est que l'énergie cinétique de l'ensemble des particules devient du même ordre que l'énergie de liaison gravitationnelle. On dit alors que la structure est *virialisée*. Les énergies cinétique K et potentielle U_{grav} sont reliées à l'énergie totale E_{tot} par les relations

$$E_{\mathrm{tot}} = K + U_{\mathrm{grav}} \ , \tag{2.3.1}$$

$$E_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2} U_{\mathrm{grav}} < 0 \ , \tag{2.3.2}$$

$$K = \frac{1}{2} |U_{\mathrm{grav}}| \ . \tag{2.3.3}$$

Comme la distribution des vitesses des particules est partout la même, la pression est partout proportionnelle à la densité, et on parle alors de *sphère isotherme*. D'après la loi de l'équilibre hydrostatique $\boldsymbol{\nabla} P = -\rho \boldsymbol{g}$, cela implique que la densité et la pression évoluent selon

$$P, \rho \propto \frac{1}{r^2} \ . \tag{2.3.4}$$

La masse contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon r croît donc proportionnellement à r, et la troisième loi de Kepler ($v_{\mathrm{rot}}^2 r \propto M$) nous indique que les vitesses kepleriennes de rotation de particules tests sont constantes. C'est précisément ce que l'on observe dans les courbes de rotation des galaxies. Nous avons ici supposé que les particules pouvaient échanger de l'énergie entre elles mais que l'énergie totale du système était conservée. Or la matière baryonique est collisionnelle et dissipe de l'énergie par rayonnement électromagnétique. Une structure de matière baryonique va donc avoir un profil de densité plus piqué vers le centre, c'est-à-dire former une structure plus compacte. Cela prouve que les profils de densité observés en dans les régions externes des galaxies sont formés par de la matière *non collisionnelle*, très probablement d'origine non baryonique.

3.2 Évolution ultérieure

L'instabilité gravitationnelle se produit selon que les objets que l'on considère sont plus ou moins grands devant la longueur de Jeans correspondante. La longueur de Jeans étant proportionnelle à la vitesse du son, elle-même étant en général une fonction croissante de la température, un objet peut devenir instable s'il se refroidit. Ce sont donc les différents taux de chauffage et de refroidissement de l'objet qui vont déterminer son évolution ultérieure.

Considérons le cas simple d'une structure sphérique de masse M, et de rayon R. On note T sa température ρ sa densité et P sa pression, que nous supposerons uniformes[1]. Nous supposerons la structure composée de N objets identiques de masse $m = M/N$. Son énergie cinétique et son énergie potentielle valent alors

$$K = \frac{3}{2} N k_B T \ , \tag{2.3.5}$$

$$U_{\mathrm{grav}} = -\frac{3}{5} \xi \frac{\mathcal{G} M^2}{R} \ , \tag{2.3.6}$$

où ici le facteur ξ vaut 1 (il devient en réalité plus grand dès qu'on prend un profil de densité plus réaliste). Nous supposerons de plus que cette structure est virialisée. On peut alors calculer la

[1] Du fait de la présence de la gravité, on n'a pas le droit de supposer que la pression est uniforme. En effet, la loi d'équilibre hydrostatique $\boldsymbol{\nabla} P = \rho \boldsymbol{g}$ implique que la pression décroît quand on s'éloigne du centre. Nous ferons néanmoins ici l'hypothèse simplificatrice que la température, la densité et la pression sont simultanément uniformes, c'est-à-dire que nous ne considérerons que leurs valeurs moyennes.

longueur de Jeans, qui vaut (en introduisant l'indice adiabatique γ défini par $P \propto \rho^\gamma$)

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{4\xi\pi^2\gamma}{15}} R > R\,. \tag{2.3.7}$$

La structure est ainsi toujours (légèrement) plus petite que la longueur de Jeans, ce qui garantit sa stabilité. Si cette structure se refroidit ou se réchauffe lentement, elle va évoluer de façon quasiment adiabatique, c'est-à-dire en restant virialisée. Un échauffement va provoquer une augmentation de l'énergie totale, c'est-à-dire une dilatation ainsi qu'une baisse de sa température, alors qu'un refroidissement va se traduire par une contraction et une élévation de température[2]. Si maintenant la structure se réchauffe brutalement, il n'y aura pas de transfert entre énergie cinétique et énergie potentielle. On va alors se retrouver avec une structure de même taille, mais plus chaude. La longueur de Jeans va donc augmenter et la structure sera d'autant plus stable. Si au contraire elle se refroidit brutalement, sa longueur de Jeans va diminuer, ce qui va se traduire par une fragmentation en plusieurs sous-systèmes. Chacun de ces sous-systèmes sera virialisé (par relaxation violente, *cf* §3.1), et aura une taille de l'ordre de sa longueur de Jeans. Chaque sous-système considéré comme une macro-particule sera animé d'une vitesse moyenne élevée, conférant à l'ensemble une "température effective" suffisamment grande pour assurer sa stabilité.

En conclusion, ce sont les processus de refroidissement les plus efficaces qui vont conférer aux objets astrophysiques une éventuelle instabilité. Ces processus de refroidissement varient en fonction de la température : à haute température, c'est le rayonnement free-free (Bremstrahlung), à basse température, c'est le rayonnement dû à des état faiblement excités de certains éléments lourds (notamment l'ion C^+), et à température intermédiaire, c'est le rayonnement de recombinaison de l'hydrogène et de l'hélium. Les détails de tous ces processus restent encore difficiles à modéliser précisément, mais donnent une interprétation qualitativement correcte des observations.

4 Application à un Univers en expansion

Nous allons maintenant poursuivre notre analyse dans le cas d'un Univers homogène et isotrope en expansion. Ce problème est plus simple que celui de la section précédente, dans la mesure où la microphysique va jouer un rôle moins important car nous allons essentiellement nous intéresser à l'évolution des perturbations "cosmologiques", c'est-à-dire de grande longueur d'onde, bien avant leur entrée dans le régime non linéaire. Ici, ce ne sont pas uniquement les variations de la longueur de Jeans qui vont être prépondérantes[3], mais aussi les variations des distances vraies lors de l'expansion.

Nous restreindrons ici à donner une interprétation qualitative de l'évolution des perturbations cosmologiques dans un Univers FLRW perturbé, en renvoyant la dérivation à un chapitre suivant. Dans cette étude simplifiée, nous ne considérerons que des longueurs d'onde petites devant le rayon de Hubble. L'expansion de l'Univers va alors jouer le rôle d'une *force de freinage* sur toute particule animée d'une vitesse propre par rapport aux observateurs comobiles (*cf* §3.1). En anticipant sur la forme exacte des équations d'évolution des perturbations cosmologiques (que nous

[2]C'est aussi ce qui se passe en évolution stellaire : quand la température centrale augmente du fait des réactions nucléaires, l'étoile se dilate sous l'effet de l'augmentation de la pression de radiation, et sa température moyenne ainsi que sa température de surface baissent.

[3]En fait, dans la majeure partie des cas, les longueurs que nous allons considérer seront toujours plus grandes que la longueur de Jeans de la matière baryonique. Ce sera également vrai pour la matière noire que nous supposerons toujours froide.

détaillerons au chapitre 4, équations **4.4.16**, **4.4.17**, **4.4.28**), l'équation d'évolution du contraste de densité $\delta_f \equiv \delta\rho_f/\rho_f$ du fluide f s'écrit[4] :

$$\ddot{\delta}_f + \mathcal{H}(1-3u_{s,f}^2)\dot{\delta}_f - u_{s,f}^2\Delta\delta_f = (1+\omega_f)(1+3u_{s,f}^2)\Delta\Phi\,, \qquad (\mathbf{2.4.1})$$

où nous avons introduit ω_f, le paramètre de l'équation d'état du fluide f, sa vitesse du son $u_{s,f}$, normalisée à la vitesse de la lumière, et Φ, le potentiel gravitationnel normalisé :

$$u_{s,f} \equiv \frac{c_{s,f}}{c}\,, \qquad (\mathbf{2.4.2})$$

$$\Phi \equiv \frac{\overline{\Phi}}{c^2}\,. \qquad (\mathbf{2.4.3})$$

Mis à part le terme d'amortissement en $\mathcal{H}\dot{\delta}_f$ et le facteur correctif $(1+\omega_f)(1+3u_{s,f}^2)$ au potentiel gravitationnel, cette équation est la même que celle précédemment trouvée en (**2.2.12**).

4.1 Système de plusieurs fluides

L'Univers contient plusieurs fluides : baryons, matière noire, photons, neutrinos, et éventuellement champ scalaire (inflaton, quintessence). En général, un de ces fluides domine en terme de densité d'énergie tous les autres. C'est souvent ce même fluide qui a la contribution dominante au potentiel gravitationnel Φ. Nous allons donc étudier les différents cas qui s'offrent à nous.

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas d'un Univers dominé par un fluide de radiation (§4.2–4.3). C'est le cas de l'Univers primordial, au moins depuis la nucléosynthèse, et jusqu'à un redshift z_{eq} d'environ $10^3 - -10^4$. Nous étudierons ensuite (§4.4) le cas d'un Univers dominé par la matière.

Avant d'aborder ces différents cas, remarquons que l'équation de Poisson (**2.2.11**) peut se réécrire en utilisant les paramètres de densité des différents fluides (ρ désigne désormais une densité d'énergie). Dans un système de coordonnées comobiles, on a :

$$\Delta\Phi = 4\pi\frac{\mathcal{G}}{c^2}a^2\sum_f \delta\rho_f = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\sum_f \Omega_f\delta_f\,. \qquad (\mathbf{2.4.4})$$

4.2 Perturbations de radiation dans un Univers dominé par la radiation

Dans un Univers dominé par la radiation, le paramètre de Hubble vaut $\mathcal{H} = \eta^{-1}$, et les perturbations de radiation évoluent selon

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta_{\mathrm{rad}}}{\mathrm{d}X^2} + \left(1 - \frac{4}{X^2}\right)\delta_{\mathrm{rad}} = 0\,, \qquad (\mathbf{2.4.5})$$

où nous avons introduit la variable X :

$$X \equiv k\eta\, u_{\mathrm{s,rad}}\,. \qquad (\mathbf{2.4.6})$$

L'équation (**2.4.5**) admet des solutions sous la forme de fonctions de Bessel et de Neumann (*cf* annexe D) :

$$\delta_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{osc}} \propto X^{\frac{1}{2}}\left[A_1 J_\nu(X) + A_2 N_\nu(X)\right]\,, \qquad (\mathbf{2.4.7})$$

$$\nu = \frac{\sqrt{17}}{2}\,. \qquad (\mathbf{2.4.8})$$

[4]Nous négligeons ici les éventuelles pressions anisotropes des fluides.

Dans la limite des petites longueurs d'onde, $X \gg \nu = \mathcal{O}(1)$, on obtient simplement des oscillations non amorties :

$$\delta_{\rm rad} \propto A_{\pm} \exp(\pm i k u_{\rm s,rad} \eta) , \qquad \textbf{(2.4.9)}$$

$$k \gg \frac{1}{\eta u_{\rm s,rad}} \equiv \frac{1}{r_{\rm s,rad}} \simeq \mathcal{H} . \qquad \textbf{(2.4.10)}$$

Ce régime est donc valable à l'intérieur du "rayon sonore" $r_{\rm s}$, où l'influence de la gravité est négligeable. Dans le cas présent, le rayon sonore est du même ordre que le rayon de Hubble $r_{\mathcal{H}} \equiv \mathcal{H}^{-1}$. Ainsi, dès qu'un mode entre dans le rayon de Hubble, il se met à osciller, et il n'existe pas d'instabilité de Jeans à l'intérieur du rayon de Hubble.

4.3 Perturbations de matière dans un Univers dominé par la radiation

Considérons maintenant de la matière non relativiste, découplée de la radiation et évoluant dans un Univers dominé par de la radiation. D'après (**2.4.1**), les perturbations de matière évoluent selon (*cf* **2.4.4**) :

$$\ddot{\delta}_{\rm mat} + \mathcal{H}\dot{\delta}_{\rm mat} - u^2_{\rm s,mat}\Delta\delta_{\rm mat} = \Delta\Phi , \qquad \textbf{(2.4.11)}$$

où nous avons ici négligé devant 1 tous les termes en $u^2_{\rm s,mat}$ ou $\omega_{\rm mat}$. Comme la matière possède une densité d'énergie négligeable devant celle de la radiation, et qu'il est raisonnable de supposer que les contrastes initiaux de densité d'énergie de la matière et de la radiation sont du même ordre, le potentiel gravitationnel Φ est uniquement généré par la radiation, c'est-à-dire qu'il est négligeable à l'intérieur du rayon de Hubble. Il existe deux régimes à cette équation selon les valeurs respectives de $ku_{\rm s,mat}$ et de $\mathcal{H}$. À l'extérieur du rayon sonore, c'est-à-dire quand $ku_{\rm s,mat} \ll \mathcal{H}$, les deux solutions de l'équation homogène correspondante sont :

$$\delta^0_{\rm mat} \propto a^0 , \qquad \textbf{(2.4.12)}$$

$$\delta^+_{\rm mat} \propto \ln a . \qquad \textbf{(2.4.13)}$$

et à l'intérieur du rayon sonore ($ku_{\rm s,mat} \gg \mathcal{H}$), les deux solutions de l'équation homogène correspondante s'écrivent :

$$\delta^{\rm osc}_{\rm mat} \propto \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(\pm i k u_{\rm s,mat} \eta) . \qquad \textbf{(2.4.14)}$$

On retrouve dans ce cas des ondes sonores qui sont ici amorties par l'expansion en $a^{-\frac{1}{2}}$. À l'extérieur du rayon sonore, on a un mode instable. La croissance des fluctuations est cependant très lente, seulement logarithmique. Ceci vient du fait de la présence du terme d'amortissement (sans lequel les fluctuations pourraient croître en $a^{\frac{1}{2}}$), et du fait que le potentiel gravitationnel ne joue pas son rôle déstabilisateur habituel puisque ce n'est pas la matière non relativiste qui y contribue (ce mode instable n'est donc pas directement lié à l'instabilité de Jeans, mais simplement à l'absence de pression).

4.4 Perturbations de matière dans un Univers dominé par la matière

Plaçons-nous enfin dans le cas d'un Univers dominé par de la matière (non relativiste). Il est facile de voir que les perturbations de radiation ne vont pas donner lieu à des instabilités à l'intérieur du rayon de Hubble du fait de leur pression trop élevée. Reste à étudier les perturbations de matière, dont l'évolution est désormais donnée par :

$$\ddot{\delta}_{\rm mat} + \frac{2}{\eta}\dot{\delta}_{\rm mat} - u^2_{\rm s,mat}\Delta\delta_{\rm mat} = \frac{6}{\eta^2}\delta_{\rm mat} \; . \qquad \textbf{(2.4.15)}$$

À l'intérieur du rayon sonore, on retrouve des solutions amorties en $a^{-\frac{1}{2}}$ du paragraphe précédent :

$$\delta^{\rm osc}_{\rm mat} \propto \frac{1}{\sqrt{a}}\exp(\pm iku_{\rm s,mat}\eta) \; . \qquad \textbf{(2.4.16)}$$

Par contre, à l'extérieur du rayon sonore, il existe deux solutions, l'une croissante, l'autre décroissante :

$$\delta^+_{\rm mat} \propto a \; , \qquad \textbf{(2.4.17)}$$

$$\delta^-_{\rm mat} \propto a^{-\frac{3}{2}} \; . \qquad \textbf{(2.4.18)}$$

Ces deux solutions sont les stricts analogues des solutions (**2.2.14**) en $\exp(\pm kc_{\rm s}t)$ dans un Univers euclidien sans expansion transposées à un Univers FLRW, où l'expansion modifie les taux de croissance et d'amortissement des solutions. Notons que pour de la matière non relativiste, le rayon sonore est petit devant le rayon de Hubble. Il existe donc une période, d'autant plus longue que le rayon sonore est faible, c'est-à-dire qu'on a affaire à de la matière froide, pendant laquelle les fluctuations de densité peuvent croître. C'est en fait le seul moment de l'histoire de l'Univers où un tel phénomène se produit (*cf* §6)[5].

5 Quelques raffinements

Avant d'effectuer un traitement numérique exact, nous allons étudier d'autres effets, comme le couplage entre matière baryonique et photons (§5.1), l'évolution des modes en dehors du rayon de Hubble (§5.2), et l'influence de la courbure des sections spatiales ou d'une constante cosmologique (§5.3).

5.1 Perturbations de matière baryonique

L'analyse portant sur les perturbations de matière supposait que la matière n'interagissait pas avec les autres composantes de l'Univers autrement que gravitationnellement. Cependant, on sait que les électrons peuvent interagir avec les photons par diffusion Compton. Les ions étant liés aux électrons par interaction coulombienne, c'est l'ensemble de la matière baryonique qui peut "suivre" les photons dans leur mouvement (plus précisément, la diffusion Thomson va isotropiser la distribution de photons dans le référentiel au repos des baryons). Ainsi, tant que la diffusion

[5] Strictement parlant, ça n'est pas tout à fait vrai. Si l'on reprend l'équation (**2.4.11**) pour de la matière non relativiste dans un Univers d'équation d'état quelconque, une des solutions s'écrit

$$\delta_{\rm mat} \propto a^{\frac{3\omega_{\rm B}-1}{2}} \; , \qquad \textbf{(2.4.19)}$$

c'est-à-dire qu'il existe une solution croissante pour $\omega_{\rm B} > \frac{1}{3}$ (l'autre solution est simplement une constante, sauf dans un Univers de radiation où elle croît logarithmiquement, *cf* équations **2.4.12**–**2.4.13**). C'est par exemple ce qu'il va se passer quand on est dominé par un champ scalaire en roulement rapide. Il reste cependant à voir si ces modèles peuvent ou non mener à des catastrophes cosmologiques (trous noirs primordiaux, *etc*).

Thomson est efficace (c'est-à-dire pour tous les modes plus grands que la longueur de diffusion associée), photons et baryons ne forment qu'un seul fluide. La longueur de diffusion Thomson vaut

$$l_{\mathrm{Th}} = \frac{1}{n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{Th}}} \,, \qquad \textbf{(2.5.1)}$$

où n_{e} représente la densité d'électrons et σ_{Th} est la section efficace de diffusion Thomson. À la transition radiation-matière, à un redshift d'environ 10^4, cette longueur vaut[6] :

$$l_{\mathrm{Th}}^{\mathrm{dec}}(t_{\mathrm{dec}}) = 10^{-12} \frac{8\pi}{3} \frac{m_{\mathrm{p}} \mathcal{G}}{\sigma_{\mathrm{Th}} H^2} \frac{1}{\Omega_{\mathrm{b}}(1 - \frac{1}{2} Y_{\mathrm{He}})} \simeq 4.3 (\Omega_{\mathrm{b}} h^2)^{-1} (1 - \tfrac{1}{2} Y_{\mathrm{He}})^{-1} \times 10^{-8} \text{ Mpc} \,. \qquad \textbf{(2.5.4)}$$

Cette longueur correspond aujourd'hui à

$$l_{\mathrm{Th}}^{0}(t_{\mathrm{dec}}) \simeq 4.3 \Omega_{\mathrm{b}}^{-1} h^{-2} (1 - \tfrac{1}{2} Y_{\mathrm{He}})^{-1} \times 10^{-4} \text{ Mpc} \,. \qquad \textbf{(2.5.5)}$$

Ainsi, toutes les perturbations baryoniques "d'intérêt cosmologique" (c'est-à-dire qui aujourd'hui valent plus d'une fraction de Mégaparsecs) étaient, jusque peu de temps avant le découplage, fortement couplées aux photons. Par conséquent, seules les perturbations de matière non baryonique peuvent croître avant le découplage (*cf* équations **2.4.13–2.4.17**), le comportement de la matière baryonique étant dicté par les perturbations dans le fluide de photons. Après le découplage, les perturbations baryoniques peuvent évoluer librement. La différence $\Delta\delta \equiv \delta_{\mathrm{c}} - \delta_{\mathrm{b}}$ entre les contrastes de densité de la matière noire et des baryons évolue selon :

$$\ddot{\Delta\delta} + \mathcal{H} \dot{\Delta\delta} = 0 \,, \qquad \textbf{(2.5.6)}$$

En supposant le découplage entre baryons et photons instantané à $\eta = \eta_{\mathrm{dec}}$ dans un Univers alors complètement dominé par la matière, la solution de cette équation s'écrit :

$$\Delta\delta(\eta) = \Delta\delta(\eta_{\mathrm{dec}}) + \dot{\Delta\delta}(\eta_{\mathrm{dec}}) \eta_{\mathrm{dec}} \left(1 - \frac{\eta_{\mathrm{dec}}}{\eta}\right) \,. \qquad \textbf{(2.5.7)}$$

Ainsi, alors que le contraste de densité total (baryons et matière noire froide) croît au cours du temps comme le facteur d'échelle [*cf* (**2.4.15**, **2.4.17**)], la différence des contrastes de densité individuels tend vers une constante. Les baryons "tombent" donc dans les puits de potentiel déjà créés par la matière noire et les deux contrastes de densité deviennent à peu près égaux.

5.2 Perturbations des modes avant leur entrée dans le rayon de Hubble

Nous n'avons pour l'instant pas encore traité l'évolution des modes plus grands que le rayon de Hubble. Elle comporte quelques subtilités qui ont trait à la liberté du choix de coordonnées en

[6]La densité d'électrons est reliée à la densité d'hydrogène et d'hélium-4 par

$$n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{H}} + 2 n_{\mathrm{He}} \,, \qquad \textbf{(2.5.2)}$$

qu'on peut ensuite relier à la densité baryonique à l'aide de la formule

$$n_{\mathrm{e}} = \frac{\rho_{\mathrm{b}}}{m_{\mathrm{p}} c^2} \left((1 - Y_{\mathrm{He}}) + \frac{1}{2} Y_{\mathrm{He}} \right) \,. \qquad \textbf{(2.5.3)}$$

La densité baryonique s'exprime ensuite en fonction de la densité critique selon les formules habituelles, *cf* équations (**1.3.32–1.3.33**).

Relativité Générale. En anticipant sur les résultats que nous obtiendrons au chapitre 4, l'équation d'évolution des modes qui contribuent au potentiel gravitationnel peut s'écrire[7] :

$$\ddot{\delta}_f - 6\mathcal{H}u_{s,f}^2\dot{\delta}_f + \frac{1}{3}\Delta\delta_f = \Delta\Phi\,. \tag{2.5.8}$$

Cette équation nous assure que si δ_f est initialement non nul (nous verrons que c'est en général le cas dans les scénarios d'inflation), alors sa dérivée est d'ordre

$$\dot{\delta}_f = \mathcal{O}(k^2\eta\delta_f)\,. \tag{2.5.9}$$

On en déduit que tant que le mode reste hors du rayon de Hubble, il est "gelé" : son amplitude est constante, et n'évolue significativement que lorsqu'il commence à entrer dans le rayon de Hubble (*i.e.* quand $k\eta \sim 1$). De même, le potentiel gravitationnel est lui aussi gelé durant cette époque.

Enfin, pour les modes qui ne contribuent pas au potentiel gravitationnel, leur équation reste la même que (**2.4.1**), avec le potentiel gravitationnel constant. Pour de la matière non relativiste (pour laquelle $u_s \to 0$), les solutions homogènes s'écrivent :

$$\delta^0 = a^0\,, \tag{2.5.10}$$

$$\delta^- = a^{-1}\,, \tag{2.5.11}$$

et une solution particulière est (en utilisant le fait que $\mathcal{H} \propto \eta^{-1}$) :

$$\delta^{\rm part} = \frac{\Delta\Phi}{1+\mathcal{H}\eta}\frac{\eta^2}{2} = k^2\eta^2\mathcal{O}(\Phi)\,. \tag{2.5.12}$$

En négligeant le mode décroissant δ^-, on voit donc que la solution générale de l'équation varie peu avant l'entrée du mode dans le rayon de Hubble. De même, dès que la vitesse du son du fluide ne s'annule pas, les solutions homogènes de l'équation s'expriment en terme de fonctions de Bessel d'argument $u_s k\eta$, et il existe une solution particulière constante.

$$\delta^{\rm part} = -\frac{\Delta\Phi}{u_s}\,. \tag{2.5.13}$$

Là aussi, excepté pour un mode décroissant, le tout varie peu tant que le mode est en dehors du rayon de Hubble. La conclusion de cette étude est qu'il n'y a pas d'évolution significative des perturbations avant leur entrée dans le rayon de Hubble.

5.3 Perturbations de matière dans un Univers dominé par la courbure ou une constante cosmologique

Dans le cas où l'Univers est dominé par la courbure ou une constante cosmologique, la contribution des fluctuations au potentiel gravitationnel va décroître, car les paramètres de densité Ω_f des différents fluides vont tendre vers 0 (*cf* équation **2.4.4**). Nous allons donc supposer que le potentiel gravitationnel est négligeable dans ce cas-là. À l'intérieur du rayon sonore, on va retrouver l'équation (**2.4.1**), qui en l'absence de gravité, se réécrit

$$\ddot{\delta}_f + \mathcal{H}(1-3u_{s,f}^2)\dot{\delta}_f - u_{s,f}^2\Delta\delta_f = 0\,. \tag{2.5.14}$$

[7] Pour traiter ce problème, il faut choisir un système de coordonnées, soit encore une *jauge*. L'interprétation des résultats dépend bien sûr de la jauge choisie. Nous avons ici choisi la jauge de feuilletage plat. La raison principale est que c'est dans cette jauge que sont définies les variables canoniques de Mukhanov pendant l'inflation, dont le comportement est relativement intuitif, *cf* partie III.

On obtient donc à nouveau des oscillations, qui sont amorties tant que la matière n'est pas relativiste. À l'extérieur du rayon sonore, en supposant encore que le potentiel gravitationnel est négligeable, l'équation (**2.4.1**) se réécrit

$$\ddot{\delta}_f + \mathcal{H}(1 - 3u_{s,f}^2)\dot{\delta}_f = 0 \, . \tag{2.5.15}$$

Pour de la matière non relativiste, cette équation n'admet qu'un mode constant et un mode décroissant, ce qui justifie *a posteriori* que le potentiel gravitationnel est négligeable. Pour la radiation, il existe un mode croissant en η. Cependant, la densité de radiation decroît en a^{-4}, au lieu de a^{-3} pour de la matière non relativiste. De plus, dans une ère dominée par la courbure ou la constante cosmologique, la facteur d'échelle croît en $\exp(\mathcal{H}\eta)$ ou $|\eta|^{-1}$ respectivement. Le produit $\Omega_{\rm rad}\delta_{\rm rad}$ décroît donc plus vite que le produit $\Omega_{\rm mat}\delta_{\rm mat}$.

On obtient les mêmes résultats si une constante cosmologique domine. Ainsi, après l'ère dominée par la matière, la croissance des fluctuations de grandes longueurs d'onde se fige à nouveau.

6 Conclusion

Au vu de ces résultats, nous pouvons donc résumer un scénario de formation des structures dans l'Univers de la façon suivante :

- Un processus physique commence par générer des fluctuations. Ces fluctuations peuvent être de faible amplitude, et sont (presque) toujours gelées en dehors du rayon de Hubble[8]. Tant que l'Univers n'est pas dominé par de la courbure ou une constante cosmologique, les modes entrent les uns après les autres dans le rayon de Hubble et peuvent alors commencer à évoluer.
- Dans un Univers dominé par de la radiation (*i.e.* après l'éventuelle phase d'inflation), les fluctuations de radiation oscillent et celles de matière non baryonique non relativiste croissent lentement.
- Quand l'Univers est dominé par la matière, les fluctuations de matière non baryonique croissent proportionnellement au facteur d'échelle.
- Les fluctuations de matière baryonique oscillent avec celles de photons tant que la diffusion Thomson couple les deux espèces. Ensuite, les fluctuations de matière baryonique se comportent comme celles de matière non baryonique, pendant que celles de radiation continuent à osciller.
- Quand, plus récemment, l'Univers devient éventuellement dominé par la courbure, les modes cessent d'entrer dans le rayon de Hubble et l'instabilité gravitationnelle s'atténue, du fait de la décroissance du potentiel gravitationnel.
- Si l'Univers devient dominé par une constante cosmologique, les modes sortent les uns après les autres du rayon de Hubble, et la croissance des fluctuations s'arrête peu à peu.

Il nous reste maintenant à trouver un processus physique pouvant générer des fluctuations dans l'Univers primordial. C'est ce que nous allons décrire au prochain chapitre.

[8]Dans la jauge présentée ici, voir chapitre 4.

Chapitre 3

Genèse des fluctuations primordiales

Sommaire

1 Introduction

Le premier problème lié à la formation des structures est de trouver un mécanisme qui puisse générer des fluctuations d'amplitude suffisamment élevée et d'extension suffisamment grande pour pouvoir jouer un rôle cosmologique important. On pourrait penser que la nature exacte de ce mécanisme n'a pas beaucoup d'importance et qu'on peut se contenter de "choisir" un ensemble de conditions initiales pour les perturbations, ensemble qu'on peut ensuite essayer de contraindre par l'observation des grandes structures existant à l'heure actuelle. La réalité est cependant plus complexe car il existe une très grande variété de mécanismes pouvant les générer et que ceux-ci ont une importance cruciale sur leur évolution ultérieure. Il existe en fait deux grands types de fluctuations pouvant être produites dans l'Univers primordial : les fluctuations dites "actives" et les fluctuations dites "passives".

Les fluctuations de type *passif* évoluent essentiellement selon les équations décrites au chapitre précédent. La dénomination de passif vient du fait qu'entre le moment de leur génération et celui où elles entrent dans le rayon de Hubble, elles n'évoluent pas[1]. Pour générer de façon causale des perturbations sur des échelles aussi grandes que celles observées par le satellite COBE, il faut que ces échelles aient été à un instant donné à l'intérieur du rayon de Hubble, duquel elles sont sorties ultérieurement. Comme nous l'avons dit au chapitre 1, le seul moyen de réaliser ceci est d'avoir un Univers à un instant dominé par une matière se comportant comme une constante cosmologique, ou en tout cas, d'avoir un paramètre de Hubble croissant au cours du temps plus vite que le facteur

[1]L'évolution des perturbations en dehors du rayon de Hubble dépend, comme nous l'avons déjà dit, du choix du système de coordonnées, mais dans tous les cas, l'évolution de ces perturbations est triviale.

d'échelle. Nous savons que les théories de type inflation (*cf* par exemple [Linde, 1990]) permettent d'avoir une telle phase dans l'Univers primordial, permettant ainsi d'expliquer l'homogénéité et l'isotropie apparente de l'Univers. Nous allons voir ici (§2) comment elles peuvent également générer des petites fluctuations dans les différents fluides.

Comme leur nom le suggère, les fluctuations de type *actif* sont générées constamment au cours du temps. Pour cela, on fait en général appel à un type de matière exotique, comme des défauts topologiques [Vilenkin & Shellard, 1994] [Hindmarsh & Kibble, 1995] ou éventuellement des champs magnétiques, dont on suppose qu'ils se sont formés lors d'une transition de phase dans l'Univers primordial (§3). Ces objets évoluent au cours du temps selon une dynamique qui leur est propre, et qui n'est pas affectée par la présence des autres fluides (en fait, seul le taux d'expansion de l'Univers, c'est-à-dire la densité d'énergie totale, a une influence sur leur évolution). Par contre, ces objets produisent des perturbations de la métrique, qui agissent alors comme des termes supplémentaires (des "sources") dans les équations d'Einstein. De même, ces objets peuvent avoir des interactions non gravitationnelles avec les autres fluides, modifiant ainsi les équations de conservation de ces derniers. On parle alors de *sources actives*.

Nous allons maintenant donner une description plus détaillée de ces deux scénarios, en commençant par l'inflation.

2 Inflation

Une des plus grandes avancées de la cosmologie de ces dernières années a été la découverte du concept de l'inflation comme mécanisme qui pouvait résoudre les problèmes de l'horizon, de l'homogénéité et de la platitude. Le principe revient à supposer que l'expansion de l'Univers connaît une phase accélérée sous l'influence d'un champ scalaire ϕ.

Un champ scalaire évoluant dans un potentiel $V(\phi)$ a pour lagrangien

$$L = \int \left[-\frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi + V(\phi) \right] \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}^4 x \, , \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

dont on déduit la densité d'énergie et la pression dans un espace homogène et isotrope :

$$\rho = \frac{1}{2} \phi'^2 + V \, , \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

$$p = \frac{1}{2} \phi'^2 - V \, . \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

Le paramètre de l'équation d'état peut alors varier entre -1 et $+1$. S'il reste au voisinage de -1 pendant un certain temps et que le champ domine en terme de densité d'énergie, alors l'Univers peut entrer dans une phase inflationnaire, qui dure jusqu'à ce que l'équation d'état du champ change suffisamment. Les moyens pour amorcer la phase inflationnaire sont variés : le champ peut, suite à une transition de phase, quitter son minimum de potentiel (c'est l'idée originale de la "vieille" inflation et de la "nouvelle" inflation), ou bien il peut quitter son minimum suite à une fluctuation quantique macroscopique (c'est par exemple le cas de l'inflation chaotique).

2.1 Un peu d'histoire

Historiquement, l'idée d'utiliser l'inflation pour résoudre certains problèmes cosmologiques a été introduite par Alan Guth [Guth, 1981]. Depuis est apparue une très vaste zoologie de modèles d'inflation [Liddle & Lyth, 1993] (old [Guth, 1981], new [Linde, 1982] [Albrecht & Steinhard, 1982], chaotic [Linde, 1983], power-law [Abbott & Wise, 1984b], R^2 [Starobinsky, 1980], extended, natural, supernatural, thermal, topological, hyperextended, induced gravity, double field, moduli, hybrid, tilted, *etc*...) mais tous reposent sur l'idée simple que nous venons de donner[2]. L'intérêt de cette phase pour la formation des structures est que les perturbations (d'origine quantique) du champ ne sont pas amorties alors qu'elles sortent du rayon de Hubble. Cela permet à la fois de générer des fluctuations d'amplitude éventuellement élevée, et de les générer sur des échelles arbitrairement grandes [Starobinsky, 1979] [Guth & Pi, 1982] [Hawking, 1982] [Starobinsky, 1982] [Bardeen *et al.*, 1983].

2.2 Hypothèses fondamentales

Selon les conditions initiales du champ et la forme de son potentiel, il existe une grande richesse de dynamiques de type inflationnaire et de spectres de perturbations produits. On veut cependant que l'inflation dure suffisamment longtemps (pour résoudre le problème de l'horizon, *cf* chapitre 1), que le potentiel du champ soit naturel d'un point de vue de physique des hautes énergies, et que le scénario dans son ensemble ne soit pas inutilement compliqué et sans trop de paramètres libres. C'est pourquoi, la majeure partie des scénarios inflationnaires repose plus ou moins implicitement sur trois hypothèses :

– L'inflation ne fait intervenir qu'un seul champ scalaire. C'est par économie qu'on envisage cette hypothèse, et il existe de nombreux modèles avec plusieurs champs scalaires. Les équations d'Einstein pour ce champ scalaire (que nous noterons ϕ) s'écrivent alors, en utilisant le temps cosmique[3],

$$3H^2 = \kappa\left(\frac{\phi'^2}{2} + V(\phi)\right) , \tag{3.2.4}$$

$$2H' = -\kappa\phi'^2 . \tag{3.2.5}$$

auxquelles on peut ajouter l'équation de Klein-Gordon, obtenue par $D_\mu T_\phi^{\mu 0} = 0$:

$$\phi'' + 3H\phi' + V^{(1)} = 0 , \tag{3.2.6}$$

$V^{(n)}$ désignant la dérivée n-ème de V par rapport à ϕ.

– L'inflation dure suffisamment longtemps et pendant cette période le champ se comporte quasiment comme une constante cosmologique. Dans ce cas, le paramètre de Hubble est pratiquement constant, c'est-à-dire,

$$|H'| \ll H^2 . \tag{3.2.7}$$

Cette contrainte peut se réécrire en disant que le champ doit avoir une équation d'état proche de celle d'une constante cosmologique, c'est-à-dire que le terme cinétique doit être négligeable devant le terme potentiel :

$$\phi'^2 \ll V(\phi) . \tag{3.2.8}$$

Pour que cette deuxième condition soit satisfaite suffisamment longtemps, il faut que ϕ reste à peu près constant au cours du temps, c'est-à-dire que le champ accélère lentement.

[2] sachant bien sûr que parmi tous ces modèles, un seul *au mieux* décrit correctement cette phase de l'Univers primordial !

[3] Nous nous mettons ici dans un système d'unité où $\hbar = c = 1$.

On parle alors de *roulement lent*, ou *slow-roll*. Cette dernière contrainte peut se réécrire à l'aide de l'équation de Klein-Gordon :

$$|\phi''| \ll 3H|\phi'| \,. \tag{3.2.9}$$

À l'aide des équations du mouvement, on peut alors calculer au premier ordre les quantités H' et ϕ'', supposées petites :

$$H' = -\frac{1}{6}\frac{(V^{(1)})^2}{V} \,, \tag{3.2.10}$$

$$\phi'' = \frac{1}{3}\frac{V^{(1)}}{\kappa}\left[\frac{V^{(2)}}{V} - \frac{1}{2}\left(\frac{V^{(1)}}{V^2}\right)^2\right] \,. \tag{3.2.11}$$

On déduit alors les deux *paramètres du slow-roll* [Lyth, 1985], notés ε et δ, qui doivent être petits durant l'inflation[4] :

$$\varepsilon \equiv \frac{M_{\rm Pl}^2}{16\pi}\left(\frac{V^{(1)}}{V}\right)^2 \,, \tag{3.2.12}$$

$$\delta \equiv \frac{M_{\rm Pl}^2}{8\pi}\left[\frac{V^{(2)}}{V} - \frac{1}{2}\left(\frac{V^{(1)}}{V}\right)^2\right] \,. \tag{3.2.13}$$

Ces deux paramètres sont liés entre eux par la relation

$$\delta = -\frac{\varepsilon'}{2H\varepsilon} + \varepsilon \,. \tag{3.2.14}$$

– L'état initial des perturbations est le vide, c'est-à-dire que quand on quantifie les perturbations, on suppose qu'elles sont initialement dans l'état

$$|0\rangle \equiv \bigotimes_{\boldsymbol{k}} |0_{\boldsymbol{k}}\rangle \,. \tag{3.2.15}$$

Il n'existe pas de principe fondamental qui justifie cette hypothèse, mais c'est l'état le plus naturel qu'on puisse envisager, et c'est celui qu'on prend en théorie quantique des champs en espace euclidien. Nous discuterons le choix de cet état au chapitre 12.

Ces trois hypothèses permettent de calculer le spectre des perturbations produites par l'inflation en terme des paramètres du slow-roll. Nous traiterons ce problème plus en détail dans la partie III, et nous nous contenterons ici de montrer ce qu'il se passe pour les ondes gravitationnelles.

2.3 Évolution des perturbations cosmologiques durant la phase inflationnaire

Durant la phase inflationnaire, l'Univers est considérablement dilué, aussi est-il raisonnable de considérer qu'il est uniquement rempli par le ou les champs scalaires responsables de l'inflation. D'une manière générale, les choses se passent de la façon suivante : les seules fluctuations présentes en début d'inflation sont simplement les fluctuations d'origine quantique des différents

[4]Le paramètre δ est parfois noté η. Les contraintes exactes sont en fait $\varepsilon \ll 1$ et $|\delta| \ll 3$. Notons que la condition de slow-roll n'est pas strictement nécessaire à l'inflation, mais simplement à ce qu'elle dure longtemps. La seule condition nécessaire à l'inflation est uniquement $a'' > 0$, ce qui se traduit d'après (**1.3.31**) par $\varepsilon < 1$.

champs présents dans l'Univers à cette époque-là. L'amplitude de ces fluctuations quantique est fixée par la forme du potentiel et la valeur du paramètre de Hubble. Lors de leur évolution, ces fluctuations subissent une "transition quantique-classique", qui fait qu'on se retrouve en fin d'inflation avec des champs stochastiques classiques suivant une statistique gaussienne. Des détails sur ce processus sont données dans l'introduction de la partie III. Le problème revient donc à étudier l'évolution d'un ou plusieurs champs scalaires perturbés dans un Univers homogène et isotrope, qu'on prend en général à sections spatiales plates. Ces perturbations sont couplées à celles de la métrique et c'est en fait à l'évolution de ces dernières à laquelle nous allons nous intéresser. On peut simplifier le problème en se restreignant à l'étude de la partie tensorielle de la métrique, dont le comportement est plus simple du fait de son couplage plus faible au(x) champ(s) scalaire(s). À titre d'exemple, nous allons donc regarder l'évolution des ondes gravitationnelles dans un espace purement de Sitter. Leur équation d'évolution dans l'espace de Fourier s'écrit alors (*cf* équations **1.3.28** et **4.4.7**),

$$\ddot{\widehat{\bar{\bar{E}}}}_{ij} - \frac{2}{\eta}\dot{\widehat{\bar{\bar{E}}}}_{ij} + k^2 \widehat{\bar{\bar{E}}}_{ij} = 0\,, \qquad \textbf{(3.2.16)}$$

dont la solution s'exprime en terme de fonction de Bessel d'indice $\pm 3/2$ (*cf* annexe D),

$$\widehat{\bar{\bar{E}}}_{ij} = A^{-}_{ij}(k\eta)^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}} + A^{+}_{ij}(k\eta)^{\frac{3}{2}} J_{-\frac{3}{2}}\,. \qquad \textbf{(3.2.17)}$$

Pendant l'inflation, le temps conforme est négatif et tend vers 0, et on a $a \propto |\eta^{-1}|$. En $\eta \to -\infty$, les deux solutions se comportent en $\cos(k\eta + \phi)/a$, et correspondent comme attendu à des ondes amorties par l'expansion. En 0, la situation est différente. Le terme en $J_{3/2}$ tend vers 0 comme a^{-3}, par contre, le terme en $J_{-3/2}$ tend vers une valeur finie non nulle[5], c'est-à-dire que le mode cesse d'être amorti, ce comportement commençant au moment où il sort du rayon de Hubble ($k/\mathcal{H} \sim k|\eta| \sim 1$). Ici, tous les modes sont affectés de la même façon, mais si la dynamique de l'expansion change au cours du temps, l'évolution d'un mode à l'autre peut varier. Il faut donc suivre en détail l'évolution précise du facteur d'échelle et du champ pour pouvoir prédire avec précision le spectre des perturbations produites. On pense cependant que les modes d'intérêt cosmologiques ont tous été générés alors que l'Univers connaissait une phase d'expansion quasi-de Sitter, aussi pense-t-on que le spectre de fluctuations produit est presque invariant d'échelle. Un tel spectre est appelé *spectre de Harrison-Zel'dovich* [Harrison, 1970] [Zel'dovich, 1972].

3 Défauts topologiques

Les défauts topologiques sont des conséquences génériques des phénomènes de brisure spontanée de symétrie. Ce type d'objet est fréquemment observé dans diverses transitions de phase reproductibles en laboratoire. On peut par exemple citer l'apparition de tubes de vorticité dans un superfluide, ou de tubes de champ magnétique dans un supraconducteur. Nous allons dans un premier temps présenter les idées de bases expliquant la formation de ces objets, avant de nous intéresser à certaines de leurs conséquences cosmologiques.

[5] Il s'agit en fait de la fonction de Bessel sphérique $j_0(-k\eta)$ (*cf* annexe D).

3.1 Brisure spontanée de symétrie

3.1.1 Approche physique

Considérons un champ réel à N composantes ϕ^A évoluant dans un potentiel du type

$$V(\phi^A) = \frac{1}{2}\mu \sum_A (\phi^A)^2 + \frac{1}{4}\lambda \left[\sum_A (\phi^A)^2 \right]^2 , \tag{3.3.1}$$

où λ est un réel positif. Le paramètre μ est par contre autorisé à varier en fonction d'un paramètre extérieur, comme la température T. On peut par exemple supposer que μ est de la forme

$$\mu \propto (T - T_{\text{crit}}) . \tag{3.3.2}$$

Quand μ est positif (*i.e.* quand la température est supérieure à la température critique T_{crit}), le potentiel a un minimum global en $\phi^A = 0$. Le champ aura donc tendance à s'annuler en tout point de l'espace. Quand la température baisse et passe en-dessous de la température critique, le paramètre μ devient négatif, et il apparaît un minimum pour $|\phi|^2 = -\mu/\lambda > 0$. Le champ va donc prendre des valeurs de module $\sqrt{-\mu/\lambda}$ (que nous prendrons égal à 1 dans ce qui suit), et de direction arbitraire, dépendant en fait des petites fluctuations du champ au moment du changement de signe de μ. Un tel changement dans les valeurs du champ correspondant au minimum de potentiel est appelé *transition de phase*. La "variété du vide", (*i.e.* l'espace des ϕ^A dans lequel le potentiel est minimum), initialement réduite au point 0 de $\mathbb{R}^N$ est devenue la sphère $\mathbb{S}^{N-1}$. Sur des régions petites (de taille inférieure à la longueur de corrélation du champ au moment de la transition de phase), l'orientation du champ va être à peu près constante alors qu'elle sera totalement décorrélée sur des distances plus grandes.

Considérons maintenant la transformation

$$\phi^A(\boldsymbol{x}) \mapsto R^A{}_B(\boldsymbol{x})\phi^B(\boldsymbol{x}) , \tag{3.3.3}$$

où pour chaque point de l'espace, $R^A{}_B(\boldsymbol{x})$ est un élément du groupe $G = \mathrm{O}(N)$. Quand μ est positif, les composantes du champ sont nulles et le champ est par conséquent invariant sous l'ensemble des transformations (**3.3.3**). Par contre, quand μ est négatif la configuration que prend le champ n'est pas invariante sous ce même groupe de transformations. En effet l'ensemble des transformations de $\mathrm{O}(N)$ laissant invariant le champ ne peut agir que sur l'hyperplan orthogonal à la direction du champ, c'est-à-dire qu'il est isomorphe au groupe $H = \mathrm{O}(N-1)$. On parle alors de *brisure spontanée de symétrie*, selon le schéma

$$\mathrm{O}(N) \to \mathrm{O}(N-1) . \tag{3.3.4}$$

C'est en fait à la structure du groupe quotient G/H, ici isomorphe à la sphère $\mathbb{S}^{N-1}$, à laquelle nous allons nous intéresser, car c'est essentiellement de celle-ci dont dépend la structure des défauts topologiques produits lors de la transition de phase.

3.1.2 Approche mathématique

D'un point de vue plus mathématique, pour tout espace topologique X, on peut définir des fonctions du type

$$\begin{aligned} \Gamma_n : \mathbb{S}^n &\to X \\ x &\mapsto \Gamma^n(x) . \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Nous imposerons de plus que ces fonctions sont continues. De telles fonctions sont appelées des *n-boucles*. L'ensemble des 0-boucles représente évidemment l'ensemble des points sur X, celui des 1-boucles représente l'ensemble des contours fermés sur X, celui des 2-boucles représente l'ensemble des surfaces simplement connexes fermées sur X, et ainsi de suite.

On peut ensuite définir la relation d'*homotopie* [Nakahara, 1990] : deux n-boucles Γ_n^a et Γ_n^b sont dites homotopes s'il existe une application continue de $[0,1]$ dans l'ensemble des n-boucles qui permet de passer de Γ_n^a à Γ_n^b. Cette relation définit trivialement une relation d'équivalence, que nous noterons par le symbole $\rightsquigarrow$. À tout point x de X, on donc peut associer $\pi_n(X,x)$, l'ensemble des classes d'équivalence des n-boucles passant par x, et on peut définir $\pi_n(X)$ comme l'ensemble de ces classes d'équivalence, appelé aussi *n-ème groupe d'homototopie*.

Intéressons-nous dans un premier temps au cas $n = 0$. Nous voyons immédiatement que si X est connexe par arcs, alors

$$\forall(x,y),\ \pi_0(X,x) \rightsquigarrow \pi_0(X,y)\ . \tag{3.3.6}$$

Ainsi, l'ensemble des classes d'équivalence est réduit à un seul élément, qui est la classe d'équivalence de l'identité :

$$\pi_0(X) = \{\mathbf{1}\}\ . \tag{3.3.7}$$

De même, si X est non connexe, le cardinal de $\pi_0(X)$ donne le nombre de composantes non connexes de X. Intéressons-nous maintenant au cas où $n = 1$. Les 1-boucles appartiennent toujours à une seule région connexe de X, aussi peut-on sans perte de généralité nous restreindre au cas où $\pi_0(X) = \{\mathbf{1}\}$. Supposons que toute 1-boucle passant par un point x soit contractile en un point. Du fait que X est connexe, cela implique que toute 1-boucle passant par x est homotope à toute 1-boucle passant par y, soit

$$\forall(x,y),\ \pi_1(X,x) \rightsquigarrow \pi_1(X,y)\ , \tag{3.3.8}$$

c'est-à-dire que

$$\pi_1(X) = \{\mathbf{1}\}\ . \tag{3.3.9}$$

Or le fait que toute 1-boucle de X soit contractile en un point signifie que X est simplement connexe. Ainsi, $\pi_0(X)$ recense le nombre d'éléments disjoints, $\pi_1(X)$ classifie les chemins non contractiles, et de même π_2 classifie les surfaces non contractiles, *etc*. On peut continuer ainsi pour des valeurs de n plus élevées, même si l'interprétation géométrique des groupes d'homotopie d'ordre supérieur devient très vite moins intuitive.

3.1.3 Deux exemples simples

Considérons la sphère $\mathbb{S}^1$. Elle est connexe mais par contre elle n'est pas simplement connexe, car une boucle s'enroulant n fois autour de $\mathbb{S}^1$ n'est pas contractile en une boucle s'enroulant m fois ($m \neq n$) autour de $\mathbb{S}^1$: on a donc

$$\pi_0(\mathbb{S}^1) \approx \{\mathbf{1}\}\ , \quad \pi_1(\mathbb{S}^1) \approx \mathbb{Z}\ , \tag{3.3.10}$$

le signe des éléments de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ désignant le sens d'enroulement autour du cercle.

Considérons maintenant la sphère $\mathbb{S}^2$. Elle est manifestement simplement connexe. Soient alors les 2-boucles

$$\Gamma_2^p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$$
$$(\theta, \varphi) \mapsto \begin{cases} x^1 = & \sin(2\theta)\cos(\varphi) \\ x^2 = & \sin(2\theta)\sin(\varphi) \\ x^3 = & \cos(2\theta) \end{cases} . \quad \textbf{(3.3.11)}$$

La 2-boucle Γ_2^0 est l'application identique qui à tout point de $[0,1]^2$ associe le point $(0,0,1)$ de $\mathbb{S}^2$, et les 2-boucles Γ_2^p, $p > 0$ sont des surfaces qui "enveloppent p fois" la sphère $\mathbb{S}^2$. Γ_2^1 n'est pas homotope à Γ_2^0 : il n'est pas possible de passer de Γ_2^1 à Γ_2^0 sans "déchirer" la surface. Ainsi,

$$\pi_0(\mathbb{S}^2) \approx \pi_1(\mathbb{S}^2) \approx \{\mathbf{1}\} , \quad \textbf{(3.3.12)}$$

et

$$\pi_2(\mathbb{S}^2) \not\approx \{\mathbf{1}\} . \quad \textbf{(3.3.13)}$$

Nous allons maintenant examiner les différents types de défauts qui peuvent être produits lors de ces transitions de phase. Ces défauts seront en fait déterminés par la topologie du groupe quotient G/H, notamment par l'indice n du premier groupe d'homotopie non trivial, et par la structure de ce groupe.

3.2 Zoologie des défauts topologiques

3.2.1 Murs de domaine

Le cas le plus simple se présente quand le champ ϕ ne possède qu'une composante réelle. Dans ce cas, un champ dans un potentiel du type (**3.3.1**) ne peut prendre après brisure de symétrie que des valeurs de $+1$ ou -1, c'est-à-dire qu'on a

$$\pi_0(G/H) \approx \mathbb{Z}_2 . \quad \textbf{(3.3.14)}$$

On dit que le vide est non connecté : les zones où le champ vaut $+1$ seront séparées des zones où il vaut -1 par des surfaces bidimensionnelles. Par continuité, le champ va prendre des valeurs nulles sur cette surface. Étant donnée la forme du potentiel, cela se traduira par une densité d'énergie plus importante sur cette surface, alors appelée *mur de domaine*[6]. Un mur ne peut avoir de bord : il est soit fermé, soit infini. La topologie du mur ainsi formé dépend de la probabilité pour le champ d'atteindre les valeurs $+1$ et -1. Si l'une des deux valeurs (par exemple $+1$) est beaucoup plus probable que l'autre, le champ prendra dans une grande partie de l'espace la valeur $+1$, avec quelques "bulles" dans lesquelles il prendra la valeur -1. Si au contraire les deux valeurs sont équiprobables, la structure des surfaces de séparation sera essentiellement dominée par un seul mur infini, de topologie assez complexe (du même type que la surface d'une éponge).

3.2.2 Cordes Cosmiques

Des cordes cosmiques peuvent se former quand le schéma de brisure de symétrie est de type $G/H \approx \mathrm{U}(1)$, c'est-à-dire qu'on a

$$\pi_0(G/H) \approx \{\mathbf{1}\} , \quad \pi_1(G/H) \approx \mathbb{Z} . \quad \textbf{(3.3.15)}$$

[6] domain wall

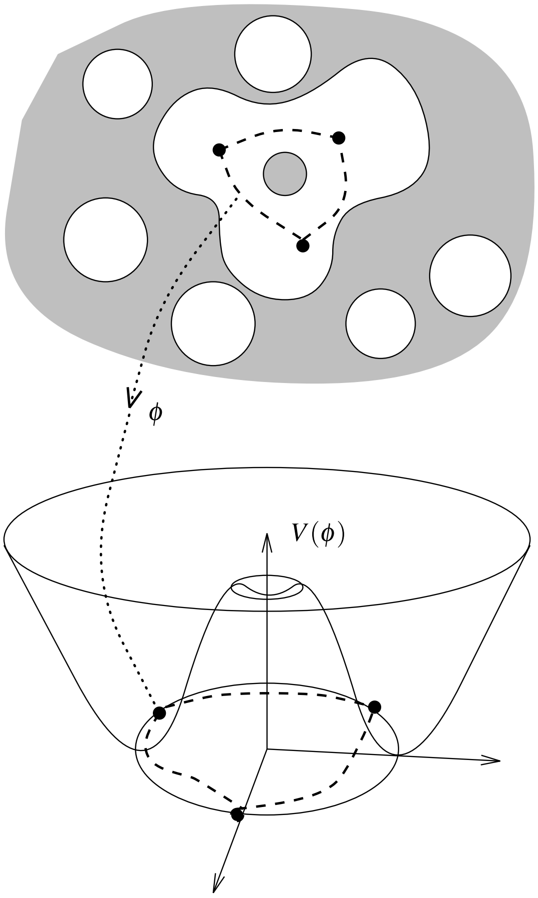


FIGURE 3.1 – Formation d'une corde cosmique lors d'une transition de phase. La figure du haut représente les régions de l'espace où le champ a atteint son minimum de potentiel (*NB* : il s'agit ici d'une transition de phase du premier ordre par nucléation, mais le type de transition de phase n'a pas d'influence sur la nature du défaut produit), et celle du bas représente les valeurs champ correspondantes dans son potentiel. Tiré de [Hindmarsh & Kibble, 1995].

C'est par exemple le cas si le champ est à deux composantes réelles et évolue dans un potentiel du type (**3.3.1**). Après brisure de symétrie, le champ sera de module 1 presque partout, et sa phase sera arbitraire. Sur un contour fermé où le champ est toujours de module 1, il est alors possible de calculer la variation de sa phase. La phase étant univaluée, cette variation doit être un multiple de 2π. Si la variation n'est pas nulle, il est alors facile de voir que toute surface s'appuyant sur ce contour fermé va posséder au moins un point auquel le champ sera de module nul, et par conséquent où la densité d'énergie est plus grande qu'ailleurs (*cf* figure 3.1). Par continuité, une surface proche de la précédente va également posséder un autre point de ce type. Il existe donc toute une courbe sur laquelle la densité d'énergie est plus grande que dans le vide, c'est une *corde cosmique*[7]. Toujours du fait de continuité de la phase, il est clair qu'une corde ne peut être que fermée sur elle-même, ou alors infinie.

[7]cosmic string

3.2.3 Monopoles

Quand le schéma de brisure de symétrie est du type $G/H = \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(2) \approx \mathbb{S}^2$, on peut visualiser le champ en attachant à chaque point d'espace un vecteur tridimensionnel. Ce vecteur va presque partout être de module 1. Il existe cependant des configurations où sur une surface simplement connexe et fermée, le champ est toujours orienté selon la normale extérieure à cette surface (configuration en "hérisson"). Dans ce cas, il existe au moins un point à l'intérieur de celle-ci où le module du champ doit s'annuler : c'est un *monopole*. On a donc

$$\pi_0(G/H) \approx \pi_1(G/H) \approx \{\mathbf{1}\} \ , \quad \pi_2(G/H) \not\approx \{\mathbf{1}\} \ . \tag{3.3.16}$$

3.2.4 Textures

Une texture est définie comme le type de défauts que l'on peut avoir quand le schéma de brisure de symétrie du champ est du type $G/H = \mathrm{O}(4)/\mathrm{O}(3) \approx \mathbb{S}^3$, auquel cas on a

$$\pi_0(G/H) \approx \pi_1(G/H) \approx \pi_2(G/H) \approx \{\mathbf{1}\} \ , \quad \pi_3(G/H) \not\approx \{\mathbf{1}\} \ . \tag{3.3.17}$$

Visualiser une texture n'est pas facile car cela suppose de visualiser des vecteurs à quatre composantes. On peut cependant avoir une intuition du problème en regardant à quoi ressemble un défaut issu d'une brisure de symétrie $G/H = \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(2)$ dans un espace à deux dimensions.

Considérons donc un espace tridimensionnel qui représente l'espace dans lequel vit le champ. Attachons à chaque point un vecteur unitaire radial $\hat{\boldsymbol{u}}_r$. À l'origine des coordonnées, on attache le vecteur nul. Plongeons dans cet espace tridimensionnel un espace-temps de dimension $2+1$, où les coordonnées (x,y) sont de genre espace et où la coordonnée z est de genre temps[8]. Les surfaces $z = \mathrm{C^{ste}}$ sont donc de genre espace. Supposons maintenant que vecteur $\hat{\boldsymbol{u}}_r$ décrit le champ ϕ^A. Sur toutes les surfaces $z \neq 0$, le champ est de module 1 et son énergie y est minimale. Par contre, sur la surface $z = 0$, il y a un point (l'origine) où le champ est de module nul et où son énergie est plus grande. Visuellement, le champ est initialement orienté "vers le bas", se "retourne" au voisinage du temps $z = 0$, et se réoriente progressivement "vers le haut". C'est au moment où il se retourne que son module peut prendre des valeurs différentes de 1. Un tel défaut est appelé *texture*. Évidemment, si le champ garde la même orientation en tout point de l'espace (x,y) à un instant donné z, le module du champ peut rester partout égal à 1. Ici, ce n'est pas le cas car le champ se retourne en empruntant des orientations différentes selon le point d'espace.

Nous pouvons maintenant retourner à notre espace-temps quadri-dimensionnel. Sur chaque point de l'espace, on associe un champ ϕ^A à quatre composantes, que nous scinderons formellement en une partie "vectorielle" à trois indices $\boldsymbol{\phi}$, et une partie "scalaire" ϕ^0. Introduisons aussi une fonction $f(t)$ passant de 0 à π sur un intervalle compact centré autour de $t = 0$. Supposons qu'en tout point de l'espace, le champ prenne les valeurs

$$\phi^A(t,\boldsymbol{x}) = (\phi^0, \boldsymbol{\phi}) \ , \tag{3.3.18}$$

$$\phi^0 = \cos[f(t)] \ , \tag{3.3.19}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \hat{\boldsymbol{n}} \sin[f(t)] \ , \tag{3.3.20}$$

où nous avons défini le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{n}}$ par $\boldsymbol{x} = x\hat{\boldsymbol{n}}$. Au point $\boldsymbol{x}$, le champ passe de la valeur $(1,\mathbf{0})$ à la valeur $(-1,\mathbf{0})$ en se "dépliant le long de la direction $(0,\hat{\boldsymbol{n}})$". Seul le point d'espace $(0,0,0)$

[8] Évidemment, l'espace dans lequel vit le champ n'a rien à voir avec l'espace temps tridimensionnel, mais on peut "superposer" ces deux espaces pour représenter la structure du champ, de même que nous l'avons fait au paragraphe précédent pour les monopoles dans un espace-temps à $3+1$ dimensions.

voit alors son énergie varier au voisinage de l'instant $t = 0$, où le module du champ n'est plus égal à 1. Une texture se caractérise donc essentiellement comme un événement de l'espace-temps où l'énergie est plus élevée qu'ailleurs. Dans certains cas, ce genre d'événement peut avoir une durée et une extension spatiale plus grandes et jouer un rôle cosmologique important.

3.2.5 Textures non topologiques

Nous pouvons poursuivre l'analogie commencée au paragraphe précédent pour une brisure de symétrie de type $G/H = \mathrm{O}(N)/\mathrm{O}(N-1) \simeq \mathbb{S}^{N-1}$, avec $N > 4$. Dans ce cas,

$$\pi_i(G/H) \approx \{\mathbf{1}\}\ , \quad i = 0, ..., N-2\ , \quad \pi_{N-1}(G/H) \not\approx \{\mathbf{1}\}\ . \qquad \textbf{(3.3.21)}$$

Pour visualiser ce type de textures, nous pouvons comme au paragraphe précédent considérer une brisure de symétrie du type $G/H = \mathrm{O}(3)/\mathrm{O}(2)$ dans un espace-temps à $1+1$ dimensions. (Le cas à des dimensions plus grandes se généralise facilement.) Plongeons donc dans l'espace tridimensionnel introduit précédemment un espace-temps de dimension $1+1$, où z est une coordonnée de genre temps et où les hypersurfaces de genre espace ont pour équation $x = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \neq 0$, $z = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$. Cette fois, même si le champ se "retourne" en $z = 0$, il n'existe pas d'événement où le champ a un module différent de 1. (Il en existe évidemment si les sections spatiales ont pour équation $x = 0$, $z = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$, mais de tels événements ne sont pas favorisés énergétiquement.) Il n'y a donc pas de défaut topologique à proprement parler, puisque le module du champ reste constant. Cependant, dans le cas où les gradients du champ possèdent une énergie, l'influence du champ peut se faire sentir loin du défaut. On parle alors de *texture non topologique*[9].

3.3 Quelques conséquences cosmologiques

Le comportement d'un type de défaut topologique dépend essentiellement de deux facteurs : sa taille, et de la nature de ses interactions. Les défauts topologiques peuvent être discrets (c'est le cas des monopoles et des textures) ou étendus (cordes ou murs). Des défauts topologiques qui n'ont pas d'interaction à longue portée sont appelés *défauts locaux*, par opposition aux *défauts globaux*. La présence ou non de ces interactions dépend en fait de la façon dont se comporte le champ au voisinage du défaut. Si le champ qui crée le défaut est couplé à un champ de jauge, ce champ de jauge peut en général compenser le gradient du champ à l'extérieur du défaut. La quasi-totalité de l'énergie est alors condensée sur le défaut, et on a donc des défauts locaux. C'est ce que prédisent la majeure partie des modèles réalistes de brisure spontanée de symétrie. À l'inverse, s'il n'y a pas de champ de jauge, le champ qui crée le défaut va varier lentement à l'extérieur du défaut, sur des distances de l'ordre de sa longueur de corrélation. Dans ce cas, l'énergie est majoritairement présente sous la forme de gradients, loin du défaut proprement dit. On parle alors de défauts globaux.

Signalons aussi que la stabilité de ces objets n'est assurée que localement, et que certaines configurations du champ sont en fait équivalentes à une configuration triviale sans le moindre défaut. Ainsi, les murs et les cordes infinis sont topologiquement stables, alors que les murs et les boucles fermés peuvent se contracter un en point. De même, un monopole seul dans l'espace est stable, alors qu'une paire monopole-antimonopole est instable.

[9] ou n. t. texture, terme sans doute dû à son inventeur Neil Turok...

3.3.1 Existence et observabilité des défauts topologiques

La physique des hautes énergies prédit de façon très générique l'existence de défauts topologique, aussi est-il raisonnable d'imaginer que certains de ces objets ont pu être créés dans l'Univers primordial. Par contre, les modèles laissent beaucoup de liberté quant à leur nature et l'époque de leur formation. Nous allons voir dans les paragraphes qui suivent que par des considérations assez générales, l'existence de certains types de défauts topologiques est déjà exclue par les observations. Reste à savoir si les autres défauts sont détectables quand ils existent. Les défauts les plus facilement observables sont *a priori* les défauts étendus. Étant donné que l'existence des murs de domaines est exclue (*cf* §3.3.2) et que la plupart des modèles ne prédisent pas la formation de défauts globaux, le candidat le plus prometteur est celui des cordes cosmiques locales. L'effet le plus caractéristique de la présence d'une corde cosmique est celui de lentille gravitationnelle. On peut montrer que l'angle de déflexion de la lumière causé par une corde cosmique est de l'ordre de $(M_{\rm BS}/M_{\rm Pl})^2$, soit au mieux quelques secondes d'arc ($M_{\rm BS}$ étant l'échelle de brisure de symétrie). Un moyen de détection serait l'observation d'une série d'images doubles alignées le long de la corde (*cf* par exemple [Bernardeau & Uzan, 2001]). Un autre moyen de détection est l'empreinte de la corde sur le rayonnement fossile. Si la corde se déplace transversalement à l'observateur, celui-ci verra un excès de photons venant du côté vers lequel se déplace la corde (effet Kaiser-Stebbins [Kaiser & Stebbins, 1984]). Là encore, on s'attend à des discontinuités de température d'au mieux quelques 10^{-5} K le long de la corde. Nous verrons dans les chapitres suivants comment les cordes cosmiques peuvent laisser des signatures autres que l'effet Kaiser-Stebbins dans les fluctuations du rayonnement fossile.

3.3.2 Défauts étendus

Les deux premiers défauts que nous avons présentés ont une grande extension spatiale, éventuellement infinie. Une propriété importante des cordes et des murs est qu'ils vont se déformer sous l'effet de leur propre tension. Par exemple, un mur ou une boucle fermés vont se contracter sous l'effet de leur tension pour finalement se désintégrer une fois que leur taille aura atteint la longueur d'onde Compton du champ. On s'attend ainsi que ne subsistent que les défauts (cordes ou murs) infinis, les autres ayant une durée de vie assez courte. Les probabilités de rencontres entre deux cordes ou deux murs sont assez élevées. En effet, les simulations numériques indiquent que des portions de cordes ou de murs se déplacent à des vitesse faiblement relativistes (entre $v \sim 0.15c$ et $v \sim 0.5c$ pour des cordes [Allen & Shellard, 1990] [Bennett & Bouchet, 1990]). Deux cordes ou deux murs présents dans un même volume de Hubble vont donc presque nécessairement se croiser en un temps de l'ordre de quelques temps de Hubble.

À cause de leur tension, la rencontre de deux murs va provoquer une diminution de leur surface totale[10]. Pour les cordes cosmiques, une rencontre va donner lieu au phénomène d'*intercommutation*, c'est-à-dire que deux cordes qui se croisent vont échanger leur extrémités. L'action de la tension des cordes va alors avoir tendance à diminuer la longueur totale de cordes présentes (voir figure 3.2), et par suite le nombre de cordes présentes dans un volume comobile donné. Comme ces rencontres ne peuvent avoir lieu que s'il y a plusieurs objets dans un même volume de Hubble, on devine qu'il doit exister des configurations stationnaires, dites

[10] C'est la même chose qui se passe quand deux gouttes d'eau fusionnent : on obtient finalement une seule goutte de surface minimale à cause de la tension de surface. Bien sûr, il existe une différence fondamentale entre les surfaces des gouttes d'eau et murs de domaines, qui est que le volume intérieur des gouttes est fixé ! Les gouttes sont donc (si l'on peut dire) topologiquement stables, contrairement aux murs. Cependant, l'influence de la tension est à peu près la même dans les deux cas.

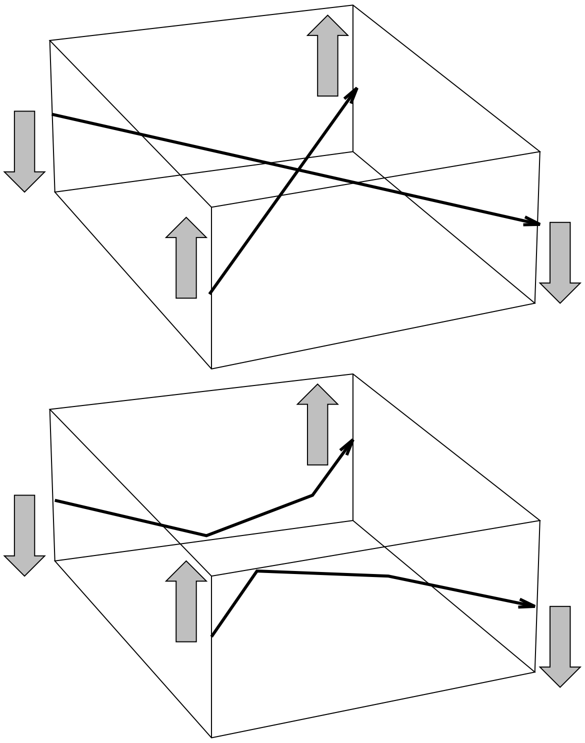


FIGURE 3.2 – Phénomène d'intercommutation entre deux cordes cosmiques. On a initialement deux portions de cordes rectilignes, qui échangent leurs extrémités pour former deux portions de cordes courbes. Les cordes produites vont ensuite se contracter sous l'effet de leur propre tension. Dans le cas où les cordes sont parcourues par un courant, l'échange d'extrémités des cordes est dicté par le sens du courant (ici symbolisé par les petites flèches). Tiré de [Hindmarsh & Kibble, 1995].

de *scaling*, où un petit nombre d'objets de ce type est présent par volume de Hubble, et où par conséquent l'énergie contenue dans ces objets est toujours une fraction de l'énergie totale [Bennett & Bouchet, 1988].

Visuellement, si on regarde l'évolution d'un réseau de cordes sur un volume de Hubble, on va "voir" au cours du temps des longues cordes "entrer dans la rayon de Hubble", et ensuite rapetisser du fait de l'expansion et des intercommutations, les petites échelles étant évacuées par la disparition des boucles. C'est le même type de comportement qu'on retrouve en turbulence, par exemple. Sur un volume comobile, qui croît moins vite qu'un volume de Hubble, la densité de corde va au contraire diminuer (voir [DAMTP, `http`] pour de jolies simulations numériques de ce phénomène). Ceci nous suggère que l'évolution du réseau va dépendre de la vitesse de l'expansion, c'est-à-dire de l'équation d'état de la matière qui domine l'Univers. D'autre part, on aura sans doute perte de scaling si l'expansion est trop rapide (quand la courbure ou la constante cosmologique dominent) car alors, si on peut toujours évacuer de l'énergie aux petites échelles, il n'y a plus "d'injection" d'énergie aux grandes échelles (les modes cessent d'entrer dans le rayon de Hubble).

Calculons à présent la densité d'énergie moyenne associée à ces objets. À l'intérieur d'une corde, on a une énergie de l'ordre de l'énergie de brisure de symétrie, $M_{\rm BS}$. Pour des défauts locaux, l'épaisseur d'un tel objet est de l'ordre de la longueur Compton associée, $l_{\rm c} \propto M_{\rm BS}^{-1}$. L'énergie par unité de longueur est donc proportionnelle à $M_{\rm BS}^2$. De même, l'énergie surfacique d'un mur est proportionnelle à $M_{\rm BS}^3$ (résultats qu'on pouvait déduire d'une simple analyse dimensionnelle). En supposant qu'on est en régime de scaling, la densité d'énergie est alors :

$$\rho_{\mathrm{DT}} \propto H_0^4 \left(\frac{M_{\mathrm{BS}}}{H_0}\right)^{d+1} , \tag{3.3.22}$$

où d est la dimension du défaut ($d = 2$ pour un mur et $d = 1$ pour une corde). On obtient alors :

$$\frac{\rho_{\mathrm{DT}}}{\rho_{\mathrm{crit}}} \simeq 10^{61(d-1)} \left(\frac{M_{\mathrm{BS}}}{M_{\mathrm{Pl}}}\right)^{d+1} . \tag{3.3.23}$$

On voit donc que pour qu'un mur ne domine pas tout l'Univers, il faut que l'échelle de brisure de symétrie soit très basse (inférieure au GeV) ce qui est exclu par les mesures réalisées dans les accélérateurs de particules qui imposent qu'une telle brisure de symétrie se produise au-delà de 100 GeV : pour une telle énergie, le paramètre de densité d'un mur serait de déjà l'ordre de 10^8. Par contre, des cordes cosmiques peuvent exister, et elles créent alors des fluctuations d'amplitude

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \frac{\rho_{\mathrm{DT}}}{\rho_{\mathrm{crit}}} \propto \frac{M_{\mathrm{BS}}^2}{M_{\mathrm{Pl}}^2} , \tag{3.3.24}$$

c'est-à-dire de l'ordre de 10^{-6} si l'échelle de brisure de symétrie est celle de grande unification.

Terminons enfin cette présentation en mentionnant que les défauts étendus peuvent avoir une structure interne assez riche. Il peut par exemple apparaître spontanément des courants dans les cordes, modifiant ainsi leur énergie et leur équation d'état [Peter, 1997] (on parle alors de cordes cosmiques supraconductrices [Witten, 1985]). La présence de ces courants peut par exemple stabiliser les boucles par force centrifuge, permettant ainsi la formation de boucles stables appelées *vortons* [Carter, 1991] [Carter, 1995]. On peut même avoir des défauts “hybrides”, comme par exemple un mur délimité par une corde ou une corde ouverte terminée par des monopoles.

3.3.3 Monopoles locaux

Les défauts qui ne sont pas étendus (monopoles, textures) évoluent de façon significativement différente. Des monopoles locaux n'ont pas d'interactions à longue portée, et leur section efficace d'interaction est très faible, de l'ordre de M_{BS}^{-2}. Le nombre de ces objets par volume de Hubble est donc constant au cours du temps, et ils se comportent comme de la matière non relativiste car ils subissent eux aussi le freinage dû à l'expansion de l'Univers. Lors de leur création, la densité d'énergie des monopoles est de l'ordre de

$$\rho_{\mathrm{mon}}(t_{\mathrm{BS}}) \propto M_{\mathrm{BS}}^4 , \tag{3.3.25}$$

et est donc maintenant de

$$\rho_{\mathrm{mon}}(t_0) \propto \frac{M_{\mathrm{BS}}^4}{(1+z_{\mathrm{BS}})^3} . \tag{3.3.26}$$

Reliant l'échelle de brisure de symétrie à la température actuelle des photons du rayonnement fossile, on en déduit le paramètre de densité des monopoles :

$$\Omega_{\mathrm{mon}}^0 \simeq 10^{13} \Omega_\gamma^0 M_{\mathrm{BS}}[\mathrm{GeV}] , \tag{3.3.27}$$

$M_{\mathrm{BS}}[\mathrm{GeV}]$ étant l'échelle de brisure de symétrie exprimée en GeV, supérieure à 100 d'après le modèle standard de physique des particules et les mesures faites en accélérateur. Ainsi, la présence de ces objets est-elle exclue, sans quoi ils apporteraient une contribution beaucoup trop grande à la densité d'énergie de l'Univers[11].

[11] C'est d'ailleurs, comme nous l'avons déjà dit, en partie pour se débarrasser de ces objets que la théorie de l'inflation a été inventée.

3.3.4 Autres défauts compacts

Bien que rien n'exclut leur existence, les textures ou textures non topologiques locales n'ont aucun intérêt pour la formation des structures, car les épisodes où leur densité d'énergie est non négligeable sont beaucoup trop rares, durent beaucoup trop peu de temps et se produisent sur des zones beaucoup trop petites pour avoir un intérêt cosmologique quelconque. Dans le cas où les défauts ont des interactions à longue portée (défauts globaux), la distance les séparant les uns des autres va croître comme la longueur de corrélation du champ, c'est-à-dire comme le rayon de Hubble. Pour ces défauts globaux, le tenseur énergie-impulsion est par définition dominé par les termes en gradient :

$$T^{\mathrm{DT}}_{\alpha\beta} \sim \sum_A D_\alpha \phi^A D_\beta \phi^A \; . \tag{3.3.28}$$

En supposant les dérivées spatiales et temporelles proportionnelles à l'inverse de la longueur de corrélation du champ, les composantes du tenseur sont toutes du même ordre :

$$T^{\mathrm{DT}}_{\alpha\beta} \propto \rho_{\mathrm{DT}} a^2 \propto M^2_{\mathrm{BS}} H^2 a^2 \; . \tag{3.3.29}$$

Ainsi, la densité d'énergie de ces objets décroît comme la densité d'énergie totale, et les fluctuations qu'elle génère dans l'Univers sont toujours de l'ordre

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \frac{\rho_{\mathrm{DT}}}{\rho_{\mathrm{crit}}} \propto \frac{M^2_{\mathrm{BS}}}{M^2_{\mathrm{Pl}}} \; , \tag{3.3.30}$$

résultat qui, contrairement aux défauts locaux, ne dépend pas de la dimension du défaut.

3.3.5 Conclusion

En conclusion, des arguments cosmologiques très simples permettent d'exclure l'existence des murs de domaines, ainsi que des monopoles locaux, sauf si ceux-ci ont été dilués lors d'une phase d'inflation dans l'Univers primordial. Pour la formation des structures, ne sont pertinents que les cordes cosmiques[12], ainsi que les cordes, monopoles et textures globaux, et ce uniquement si l'échelle de brisure de symétrie est proche de l'échelle de grande unification. Les textures locales ou les défauts créés lors d'une brisure de symétrie à plus basse énergie peuvent exister, mais ne sont pas à l'origine du processus dominant pour la formation des structures.

4 Comparatif entre les deux mécanismes

Terminons ce chapitre en résumant brièvement les différences entre les perturbations produites par l'inflation est celles produites par des défauts topologiques :

- Les perturbations inflationnaires sont parfois qualifiées (à tort) d'"acausales", dans le sens où les perturbations sont produites sur des échelles aussi grandes que l'horizon, qui en inflation peut être immensément plus grand que l'Univers observable (d'un facteur e^{10^6} pour l'inflation chaotique). À l'inverse, les perturbations générées par les défauts topologiques sont "causales", c'est-à-dire totalement décorrélées sur des distances plus grandes que l'horizon calculé dans le cadre d'un modèle sans inflation.

[12]En général, quand on parle simplement de "cordes cosmiques", il s'agit en fait de cordes locales.

– Une conséquence à ceci est que le spectre des fluctuations inflationnaires va présenter plus de puissance à grande échelle que celui des fluctuations générées par des défauts topologiques. Pour l'inflation, on va avoir un spectre à peu près invariant d'échelle (*i.e.* en k^{-3}, *cf* partie III) contre un spectre en bruit blanc pour les défauts (*i.e.* en k^0, *cf* par exemple chapitre 8).
– Les fluctuations inflationnaires vont en général être gaussiennes (propriété liée à la nature gaussienne de la fonction d'onde de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique, *cf* par exemple [Lesgourgues, 1998]), alors qu'on s'attend à ce que celles générées par les défauts ne le soient pas. Plus précisément, ces dernières peuvent éventuellement être gaussiennes à grande échelle en vertu du théorème central limite, mais sont certainement non gaussiennes à petite échelle (par exemple, les discontinuités causées par l'effet Kaiser-Stebbins sont manifestement fortement non gaussiennes). C'est à l'heure actuelle le moyen considéré comme le plus sûr pour distinguer entre ces deux modèles, même si la forme exacte de la non gaussianité produite par les modèles de défauts topologiques n'a pas été bien calculée.
– L'évolution des perturbations inflationnaires est linéaire tant que l'amplitude des fluctuations reste faible. Pour les défauts topologiques, l'évolution des perturbations est non linéaire du fait de la dépendance quadratique du champ dans le tenseur énergie-impulsion (**3.3.28**). Ceci aura des conséquences importantes sur les anisotropies générées par les défauts topologiques (*cf* chapitre 9).

Chapitre 4

Perturbations cosmologiques

Sommaire

1 Introduction

Maintenant que nous avons une intuition "newtonienne" de la physique des perturbations et des processus qui peuvent les avoir générées, nous allons écrire les équations d'évolution des perturbations cosmologiques dans le cadre de la Relativité Générale. Il s'agit d'un problème étudié pour la première fois par Lifchitz [Lifchitz, 1946] [Lifchitz & Khalatnikov, 1963]. La Relativité Générale se caractérise en particulier par son invariance dans les transformations de coordonnées (aussi appelées *jauge*, *cf* §2), ce qui amène à certaines subtilités dans la définition des quantités perturbées (§3). Une fois ces quantités correctement définies, on peut écrire leurs équations d'évolution à l'aide des équations d'Einstein perturbées (§4). En fait, nous n'aurons jusque là pas encore écrit toutes les équations d'évolution des perturbations, mais seulement celles qui sont liées aux perturbations de la métrique. Il nous restera à écrire les équations d'évolution des quantités thermodynamiques, ce que nous ferons au chapitre 5.

2 Système de coordonnées

Il existe une différence importante entre perturbations en Relativité Générale et perturbations en théorie des champs à géométrie fixée. En théorie des champs à géométrie fixée, l'espace est absolu, et une fois un système de coordonnées $(t, \boldsymbol{x})$ choisi, une perturbation d'une quantité ϕ quelconque est définie par

$$\delta\phi(t, \boldsymbol{x}) \equiv \phi(t, \boldsymbol{x}) - \bar{\phi}(t, \boldsymbol{x}) , \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

où on a au préalable défini une configuration (“non perturbée”) de référence $\bar{\phi}(t, \boldsymbol{x})$. En Relativité Générale, la forme exacte de l'espace dépend de son contenu matériel, et, pour le cas qui nous intéresse, la variété d'espace-temps est différente selon que l'espace est homogène et isotrope ou pas. La situation est donc différente dans la mesure où nous avons *deux* variétés : celle qui décrit un Univers FLRW, et celle qui décrit un espace légèrement perturbé autour de cette solution.

Pour retrouver la notion de perturbation que nous venons de définir par (**4.2.1**), nous allons devoir dans un premier temps associer à chaque point P_0 de la variété non perturbée un point P de la variété perturbée, c'est-à-dire qu'une fois un système de coordonnées choisi dans la variété non perturbée, nous allons choisir le système de coordonnées dans la variété perturbée telle que les points P_0 et P ait le même label, *i.e.* soient repérés par le *même* quadruplet $(t, \boldsymbol{x})$. Bien sûr, pour que tout ceci ait un sens, nous devons choisir P suffisamment “proche” de P_0. Cette notion est inévitablement assez floue, puisque ces points sont définis sur des variétés différentes. Une façon de *contraindre* (et non pas définir) P à être suffisamment “proche” de P_0 est d'imposer que la métrique en ces deux points soit à peu près la même. On comprend alors qu'il n'existe aucune identification “naturelle” entre les deux systèmes de coordonnées définis sur deux variétés différentes : il existe une liberté dans le choix de l'identification entre P_0 et P, ce qui se traduit, une fois choisi le système de coordonnées sur la variété non perturbée, par une liberté dans le choix du système de coordonnées sur la variété perturbée. Ainsi, dans la variété perturbée, les perturbations des différentes quantités repérées par le même label $(t, \boldsymbol{x})$ dans deux systèmes de coordonnées ne vont pas avoir les mêmes valeurs, puisqu'il s'agit de deux points distincts de la variété. Il existe ainsi un certain nombre de degrés de liberté non physiques dus au choix du système de coordonnées dont il convient de s'affranchir pour ne s'intéresser qu'aux perturbations intrinsèques à la variété.

2.1 Les différents types de perturbation

La forme la plus générale de l'élément de longueur d'une métrique FLRW perturbée est

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left[(1+2A)\mathrm{d}\eta^2 + 2B_u \mathrm{d}x^u \mathrm{d}\eta - (\gamma_{uv} + h_{uv})\mathrm{d}x^u \mathrm{d}x^v\right] , \qquad (\mathbf{4.2.2})$$

où A, B_i et h_{ij} représentent des petites perturbations qui dépendent *a priori* des quatre coordonnées (η, x^i). B_i est un tenseur ayant uniquement des composantes spatiales, de même que h_{ij}. Nous utiliserons la convention habituelle selon laquelle la métrique non perturbée γ_{ij} permet de monter et descendre les indices de ces tenseurs ($B^i \equiv \gamma^{iu} B_u$, *etc*). Les composantes B_i peuvent être décomposées en une *partie scalaire* $\nabla_i B$ et une *partie vectorielle*[1] $\bar{B}_i$, de divergence nulle :

$$B_i = \nabla_i B + \bar{B}_i , \qquad (\mathbf{4.2.4})$$

$$\nabla_u \bar{B}^u = 0 , \qquad (\mathbf{4.2.5})$$

où l'opérateur ∇_i n'agit que sur les coordonnées spatiales x^i. De même, on peut décomposer h_{ij} en une partie diagonale $2C\gamma_{ij}$, une autre partie scalaire $2\nabla_{ij}E$, une partie vectorielle $2\nabla_{(i}\bar{E}_{j)}$, et une *partie tensorielle* $2\bar{\bar{E}}_{ij}$:

$$h_{ij} = 2C\gamma_{ij} + 2\nabla_{ij}E + 2\nabla_{(i}\bar{E}_{j)} + \bar{\bar{E}}_{ij} , \qquad (\mathbf{4.2.6})$$

[1]Les parties scalaire et vectorielle sont en fait les parties potentielle et rotationnelle du champ de vecteur B_i. La formule (**4.2.4**) peut s'inverser en remarquant que

$$\nabla_u B^u = \Delta B , \qquad (\mathbf{4.2.3})$$

ce qui permet d'extraire la partie scalaire en imposant par exemple que B soit la solution régulière de (**4.2.3**).

où $\bar{E}_i$ est un vecteur sans divergence ($\nabla_u \bar{E}^u = 0$) et $\bar{\bar{E}}_{ij}$ est un tenseur symétrique, sans divergence ($\nabla_u \bar{\bar{E}}^{ui} = 0$) et sans trace ($\gamma_{uv} \bar{\bar{E}}^{uv} = 0$). Nous avons donc perturbé les dix composantes de la métrique en quatre quantités scalaires (A, B, C et E), deux quantités vectorielles ($\bar{B}_i$ et $\bar{E}_i$), et une quantité tensorielle ($\bar{\bar{E}}_{ij}$). Les composantes vectorielles sont deux vecteurs à trois composantes et à divergence nulle, et possèdent donc $2 \times (3-1) = 4$ degrés de liberté. La composante tensorielle est un tenseur spatial à deux indices, symétrique, sans divergence et sans trace, avec par conséquent $3(3+1)/2 - 3 - 1 = 2$ degrés de liberté : on retrouve bien les dix degrés de liberté de la métrique perturbée.

2.2 Transformation de coordonnées

La décomposition (**4.2.2**) suppose implicitement que nous avons choisi un système de coordonnées particulier. En changeant le système de coordonnées, on va changer la forme des coefficients A, B, *etc*. Pour illustrer ceci, plaçons-nous dans le cas d'une métrique FLRW plate non perturbée, et effectuons le changement de variables $x'^i = x^i - \xi^i$. L'élément de longueur se réécrit

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta) \left[\mathrm{d}\eta^2 + 2\dot{\xi}_u \mathrm{d}x'^u \mathrm{d}\eta - (\delta_{uv} - 2\partial_u \xi_v \eta) \mathrm{d}x'^u \mathrm{d}x'^v \right] . \qquad (\mathbf{4.2.7})$$

Les termes $B_i = v_i + \dot{\xi}_i$ et $h_{ij} = -2\partial_{(i}\xi_{j)}$ ne correspondent pas vraiment à une perturbation de la métrique mais plutôt à un choix (peu judicieux) de système de coordonnées. On cherche donc à séparer la dépendance des quantités perturbées qui est intrinsèque à la variété dans laquelle évoluent les perturbations, de celle qui provient du choix du système de coordonnées. On sait que sur les dix composantes de la métrique, quatre d'entre elles peuvent être redéfinies à peu près arbitrairement à l'aide d'un changement de coordonnées. On s'attend donc à ce que sur les quatre composantes scalaires, les quatre composantes vectorielles et les deux composantes tensorielles, quatre d'entre elles ne correspondent pas à de vraies perturbations de la métrique.

Pour voir l'influence du système de coordonnées sur les perturbations de la métrique, considérons le changement de coordonnées infinitésimal

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha , \qquad (\mathbf{4.2.8})$$

c'est-à-dire que nous avons défini deux correspondances $P_0 \to P$ et $P_0 \to P'$ entre la variété non perturbée et la variété perturbée, et que point P' a pour coordonnées x'^α dans le système de coordonnées où P a pour coordonnées x^α. Les $\xi^\alpha(x^\mu)$ représentent donc l'écart entre P et P' (deux points différents de la même variété perturbée) que nous avons associés à un même point P_0 de la variété non perturbée. Les quantités $\xi^\alpha(x^\mu)$ sont donc supposées être toujours petites. Les nouvelles composantes d'un tenseur quelconque $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{}_{\beta_1 \ldots \beta_m}$ dans le système de coordonnées x'^μ s'écrivent alors

$$T'^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}{}_{\beta_1 \ldots \beta_m}(x'^\mu) = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\alpha_n}}{\partial x^{\rho_n}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_m}}{\partial x'^{\beta_m}} T^{\rho_1 \ldots \rho_n}{}_{\sigma_1 \ldots \sigma_m}(x^\mu) . \qquad (\mathbf{4.2.9})$$

Ensuite, en utilisant le fait que le changement de coordonnées est infinitésimal, on a

$$\frac{\partial x'^{\alpha_i}}{\partial x^{\rho_i}} = \delta^{\alpha_i}_{\rho_i} + \frac{\partial \xi^{\alpha_i}}{\partial x^{\rho_i}} , \qquad (\mathbf{4.2.10})$$

$$\frac{\partial x^{\sigma_j}}{\partial x'^{\beta_j}} \simeq \delta^{\sigma_j}_{\beta_j} - \frac{\partial \xi^{\sigma_j}}{\partial x^{\beta_j}} , \qquad (\mathbf{4.2.11})$$

$$f(x'^\mu) = f(x^\mu) + \xi_\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu} . \qquad (\mathbf{4.2.12})$$

On obtient alors la relation entre les nouvelles et les anciennes composantes du tenseur, prises au même point x^μ :

$$\mathcal{L}_\xi(T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}_{\beta_1\ldots\beta_m}) = T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}_{\beta_1\ldots\beta_m}(x^\mu) - T'^{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}_{\beta_1\ldots\beta_m}(x^\mu)\ , \tag{4.2.13}$$

où le terme $\mathcal{L}_\xi(T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}_{\beta_1\ldots\beta_m})$ est la *dérivée de Lie de T par rapport à ξ*, et a pour expression

$$\mathcal{L}_\xi(T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}_{\beta_1\ldots\beta_m}) \equiv \xi^\mu D_\mu T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}_{\beta_1\ldots\beta_m} - D_{\rho_i}\xi^{\alpha_i} T^{\alpha_1\ldots\rho_i\ldots\alpha_n}{}_{\beta_1\ldots\beta_m} + D_{\beta_j}\xi^{\sigma_j} T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}_{\beta_1\ldots\sigma_j\ldots\beta_m}\ . \tag{4.2.14}$$

(*NB* : cette expression est aussi valable avec des dérivées droites au lieu des dérivées covariantes, la somme des termes faisant intervenir des symboles de Christoffel étant nulle.) Pour les composantes du tenseur métrique, on a notamment

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = 2D_{(\alpha}\xi_{\beta)}\ . \tag{4.2.15}$$

À l'aide cette formule, il est possible de voir comment se transforment les différentes quantités de la métrique perturbée par changement de coordonnées. Avant cela, décomposons le quadri-vecteur ξ^μ en sa composante temporelle $\xi^0 \equiv T$ et ses composante spatiales ξ^i, elles-mêmes décomposées comme précédemment en une partie scalaire L et une partie vectorielle $\bar{L}^i$:

$$\xi^\mu \equiv (T, \nabla^i L + \bar{L}^i)\ . \tag{4.2.16}$$

On a alors les lois de transformation suivantes pour les perturbations de la métrique[2] :

$$A \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} A - \dot{T} - \mathcal{H}T\ , \tag{4.2.19}$$
$$B \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} B + \dot{L} - T\ , \tag{4.2.20}$$
$$C \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} C - \mathcal{H}T\ , \tag{4.2.21}$$
$$E \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} E - L\ , \tag{4.2.22}$$

$$\bar{B}_i \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} \bar{B}_i + \dot{\bar{L}}_i\ , \tag{4.2.23}$$
$$\bar{E}_i \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} \bar{E}_i - \bar{L}_i\ , \tag{4.2.24}$$

$$\bar{\bar{E}}_{ij} \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} \bar{\bar{E}}_{ij}\ . \tag{4.2.25}$$

La quantité $\bar{\bar{E}}_{ij}$ reste inchangée par cette transformation de coordonnées. C'est une quantité *invariante de jauge*. Sa définition n'est donc pas ambiguë. Par contre les six autres quantités sont modifiées par changement de coordonnées. Les "vraies" perturbations de la métrique sont définies

[2] Par loi de transformation, on signifie la loi

$$X(x^\mu) \mapsto X'(x^\mu) = X(x^\mu) - \mathcal{L}_\xi(X)\ . \tag{4.2.17}$$

Pour des quantités perturbées, il vient

$$\delta X(x^\mu) \mapsto \delta X'(x^\mu) = \delta X(x^\mu) - \mathcal{L}_\xi(X)\ . \tag{4.2.18}$$

comme étant les combinaisons qui ne peuvent être annulées par changement de coordonnées. Les quatre quantités scalaires A, B, C et E se transforment par l'action de seulement deux quantités scalaires T et L. Il existe donc deux combinaisons indépendantes qui restent inchangées par transformation de coordonnées. Habituellement, on prend les deux quantités Φ et Ψ, aussi appelées *potentiels de Bardeen* :

$$\Phi \equiv -C + \mathcal{H}(B + \dot{E}) , \tag{4.2.26}$$

$$\Psi \equiv A - \mathcal{H}(B + \dot{E}) - (\dot{B} + \ddot{E}) . \tag{4.2.27}$$

On peut former d'autres quantités invariantes de jauges, comme par exemple

$$\mathrm{X} \equiv A - C - \frac{\dot{C}}{\mathcal{H}} + \frac{\dot{\mathcal{H}} C}{\mathcal{H}^2} , \tag{4.2.28}$$

mais elles peuvent toujours s'exprimer en fonction des deux potentiels de Bardeen. Ici, par exemple,

$$\mathrm{X} \equiv \Psi + \Phi + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \left(\frac{\Phi}{\mathcal{H}} \right) . \tag{4.2.29}$$

De même, il n'existe qu'une quantité vectorielle invariante de jauge, à savoir

$$\bar{V}_i \equiv \bar{B}_i + \dot{\bar{E}}_i . \tag{4.2.30}$$

On peut vérifier facilement que dans l'exemple (**4.2.7**) donné précédemment, les quantités Φ, Ψ et $\bar{V}^i$ sont nulles, ce qui correspond bien à l'idée que les perturbations B_i et h_{ij} n'étaient qu'un artéfact du choix de coordonnées.

2.3 Choix d'une jauge

Nous pouvons maintenant aborder le problème du choix du système de coordonnés. Insistons sur le fait qu'il n'y a pas de jauge "meilleure que les autres". Tout dépend de l'importance qu'on attache à telle ou telle propriété. Par exemple, si on considère l'interprétation de la définition de la jauge, la jauge synchrone (§2.3.1) apparaît très naturelle. Si on regarde la forme des équations de conservation, il vaut mieux être en jauge de feuilletage plat (§2.3.4), alors que si on regarde l'équation de Poisson, il vaut mieux être en jauge comobile (§2.3.3). Notons aussi que localement tous les systèmes de coordonnées sont équivalents. Ce n'est par conséquent qu'à grande échelle qu'on s'attend à trouver des différences notables entre les jauges. Nous verrons que c'est effectivement le cas sur des distances supérieures au rayon de Hubble.

Passons maintenant en revue quelques unes des jauges fréquemment utilisées.

2.3.1 Jauges synchrones

La *jauge synchrone*[3] est définie par le fait que seules les sections spatiales sont perturbées, *i.e.* par les contraintes

$$A = 0 , \tag{4.2.31}$$

$$B_i = 0 . \tag{4.2.32}$$

[3] synchronous gauge

Intuitivement, cela revient à considérer un système de coordonnées dont chaque point serait un observateur en chute libre et dont le temps serait localement défini par le temps propre mesuré par l'observateur correspondant. Cette interprétation physique très simple a rendu ce système de coordonnées extrêmement populaire, bien qu'il possède plusieurs pathologies assez gênantes. La première, qui ne nous nuira pas parce que nous nous restreindrons à l'ordre linéaire des perturbations, est que deux observateurs peuvent au bout d'un certain temps entrer en collision, ce qui signifie que le système de coordonnées cesse au bout d'un certain temps d'être défini. Un autre problème, plus gênant pour notre propos, est que la jauge n'est pas entièrement définie. En effet, partant d'une jauge synchrone, il est possible de faire des changements de coordonnées de la forme

$$T = \frac{1}{a} C_T(x^i) \, , \tag{4.2.33}$$

ou alors

$$L = C_L(x^i) + \int T \, \mathrm{d}\eta \, , \tag{4.2.34}$$

pour lesquels les contraintes (**4.2.31**) et (**4.2.32**) restent satisfaites. Ces changements de coordonnées ont une interprétation simple : la transformation (**4.2.33**) montre que l'origine du temps propre de chaque observateur peut être définie arbitrairement, et (**4.2.34**) montre que le choix du système de coordonnées des sections spatiales est également arbitraire. La présence d'un tel arbitraire dans la définition de la jauge se traduit par l'apparition de *modes de jauge* quand on résout les équations d'évolution des perturbations. Ces modes de jauge ne correspondent pas à des perturbations physiques et doivent être enlevés.

Signalons aussi que de par sa définition, cette jauge permet d'identifier les observateurs en chute libre à une des espèces présentes, si celle-ci n'a pas d'interactions non gravitationnelles avec le reste de l'Univers. Par conséquent, il est possible d'imposer que la vitesse d'un de ces fluides est nulle dans cette jauge. Habituellement, on prend la jauge qui "suit" la matière noire[4], c'est-à-dire telle que $v_{\mathrm{c}} = 0$.

Dans cette jauge, la partie spatiale scalaire de l'élément de longueur perturbé s'écrit

$$\mathrm{d}l^2 = (2C\gamma_{uv} + 2\nabla_{uv}E)\mathrm{d}x^u \mathrm{d}x^v \, . \tag{4.2.35}$$

On définit habituellement les deux perturbations scalaires de la métrique par une partie purement transverse h et une partie transverse sans trace η (à ne pas confondre avec le temps conforme) :

$$\mathrm{d}l^2 = \left[\Delta^{-1}\nabla_{uv}h + \left(\Delta^{-1}\nabla_{uv} - \frac{1}{3}\gamma_{uv}\right) 6\eta\right] \mathrm{d}x^u \mathrm{d}x^v \, , \tag{4.2.36}$$

c'est-à-dire, par rapport aux quantités définies précédemment,

$$h = 6C + 2\Delta E \, , \tag{4.2.37}$$

$$\eta = -C \, . \tag{4.2.38}$$

(*NB* : h représente aussi la trace de la perturbation.) Ces deux quantités ne sont pas invariantes de jauge et ne peuvent par conséquent pas s'exprimer en fonction des potentiels de Bardeen.

[4]Imposer que la partie scalaire de la vitesse est nulle dans un certain système de coordonnées est possible d'après (**4.3.6**). Pour expliquer ceci, considérons le cas d'un écoulement potentiel stationnaire. Le théorème de Stokes nous assure alors que les trajectoires des particules ne sont pas fermées mais infinies, et que les trajectoires de particules différentes ne s'intersectent pas. On peut alors bien définir un système de coordonnées qui suit les particules tout en se déformant éventuellement. À l'inverse, la partie vectorielle de la vitesse correspond à des configurations où les trajectoires des particules bouclent sur une trajectoire fermée. Il existe donc des configurations où les particules tournent les unes autour des autres, ce qui ne peut pas être effacé par changement de coordonnées, comme l'indique la formule (**4.3.7**).

2.3.2 Jauge longitudinale

La *jauge longitudinale* (ou *jauge newtonienne*)[5] est comme son nom l'indique celle dans laquelle la partie scalaire de la métrique perturbée est sous forme diagonale c'est-à-dire

$$B = 0\,, \tag{4.2.39}$$

$$E = 0\,. \tag{4.2.40}$$

Cette jauge est correctement définie, puisque d'après (**4.2.20**) et (**4.2.22**), il n'existe qu'un seul jeu de fonctions T et L pouvant annuler exactement en tout point B et E. D'après (**4.2.26**, **4.2.27**), l'élément de longueur de la partie scalaire s'écrit

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left[\mathrm{d}\eta^2(1+2\Psi) - \delta_{uv}(1-2\Phi)\mathrm{d}x^u\mathrm{d}x^v\right]\,. \tag{4.2.41}$$

On a donc dans cette jauge une interprétation simple de la signification des potentiels de Bardeen : Φ représente la courbure, *i.e.* la gravité ressentie par n'importe quelle particule (c'est d'ailleurs Φ qui interviendra dans l'équation de Poisson), alors que Ψ représente l'effet de dilatation du temps. Nous verrons plus loin que les deux potentiels de Bardeen sont presque égaux. La partie vectorielle de la métrique ne peut pas être définie par la contrainte que la métrique soit diagonale. On prend donc en général (et de façon un peu arbitraire),

$$\bar{B}_i = 0\,, \tag{4.2.42}$$

qui est la contrainte qui rend la plus simple l'évolution des modes vectoriels (en apparence seulement, *cf* chapitre 5).

2.3.3 Jauges comobiles

Les *jauges comobiles*[6] sont définies par le fait que la vitesse d'ensemble d'un des fluides est nulle. Plus précisément, on la définit par le fait que pour un des fluides (ou un mélange de fluides), certaines composantes du tenseur énergie-impulsion perturbé sont nulles :

$$\delta T^0{}_i = 0\,. \tag{4.2.43}$$

Une telle contrainte ne peut en général pas être satisfaite, mais il est cependant toujours possible de la satisfaire pour la partie scalaire de $\delta T^0{}_i$ (pour la partie vectorielle, une telle contrainte ne peut en général être satisfaite pour la même raison qu'en jauge synchrone, *cf* note de bas de page numéro 4). Dans ce cas, cette contrainte n'est plus suffisante pour fixer complètement la jauge. On y rajoute alors les conditions

$$E = 0\,, \tag{4.2.44}$$

$$\bar{E}_i = 0\,. \tag{4.2.45}$$

Cette jauge est donc d'une certaine façon intermédiaire entre la jauge synchrone et la jauge newtonienne. La jauge comobile totale (*i.e.* définie par $\sum \delta T^0{}_i = 0$) possède de plus la particularité agréable de donner une équation de Poisson strictement identique à celle qu'on a en physique newtonienne.

---

[5] longitudinal or Newtonian gauge

[6] comoving gauge

2.3.4 Jauge de feuilletage plat

La *jauge de feuilletage plat*[7] est définie par le fait que les sections spatiales sont plates[8], *i.e.*

$$C = 0\,, \tag{4.2.46}$$

$$E = 0\,, \tag{4.2.47}$$

$$\bar{E}_i = 0\,. \tag{4.2.48}$$

Elle est bien définie d'après (**4.2.21**), (**4.2.22**) et (**4.2.24**). Un de ses principaux avantages[9] est que les équations de conservation y ont la forme la plus proche de celles de la physique newtonienne (*cf* équations **4.4.16–4.4.18**).

3 Quantités perturbées

Regardons maintenant comment se transforment diverses autres quantités par changement de coordonnées. Nous séparerons les quantités scalaires, vectorielles et tensorielles.

3.1 Quantités scalaires

L'équation (**4.2.14**) implique qu'une quantité scalaire se transforme selon

$$\delta f \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} \delta f - \xi^\mu \partial_\mu f\,. \tag{4.3.1}$$

Dans le cas d'une quantité scalaire homogène (*i.e.* ne dépendant pas des coordonnées spatiales), on a

$$\delta f \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} \delta f - T \dot{f}\,. \tag{4.3.2}$$

Ceci donne notamment les lois de transformation des perturbations de densité et de pression (qui sont toutes deux des quantités scalaires homogènes car obtenues par exemple par $\rho = T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ et $P = (u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}) T^{\mu\nu}/3$).

3.2 Quadri-vitesse

Soit u^μ la quadri-vitesse d'un observateur comobile. De $u_\mu u^\mu = 1$, on tire

$$u^\alpha = \frac{1}{a}(1, \mathbf{0})\,, \quad u_\alpha = a(1, \mathbf{0})\,. \tag{4.3.3}$$

Notons par δu^μ la partie perturbée de la quadri-vitesse. Du fait que la quadri-vitesse perturbée est de module 1, seules trois des quatre composantes perturbées sont indépendantes : on a en effet la relation

$$u^\mu \delta u_\mu + u_\mu \delta u^\mu = 0\,. \tag{4.3.4}$$

[7] flat-slicing gauge

[8] Bien sûr, la partie tensorielle $\bar{\bar{E}}_{ij}$ ne peut jamais être annulée par changement de coordonnées, et est présente dans cette jauge ainsi que dans toutes les autres.

[9] Et c'est la raison pour laquelle c'est cette jauge qui sera utilisée, sauf mention contraire, dans ce mémoire.

On en déduit

$$\delta u^\alpha = \frac{1}{a}(-A, v^i) , \quad \delta u_\alpha = a(A, B_i - v_i) , \qquad \mathbf{(4.3.5)}$$

où les indices du vecteur tridimensionnel v^i sont montés et descendus à l'aide de la métrique γ_{ij}. La partie spatiale v_i de la quadri-vitesse peut être décomposée en une partie scalaire $\nabla_i v$ et une partie vectorielle (*i.e.* sans divergence) $\bar{v}_i$. Lors d'une transformation de coordonnées, ces quantités se transforment selon

$$v \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} v + \dot{L} , \qquad \mathbf{(4.3.6)}$$

$$\bar{v}_i \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} \bar{v}_i + \dot{\bar{L}}_i . \qquad \mathbf{(4.3.7)}$$

3.3 Tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion le plus général d'un fluide peut s'écrire[10]

$$T_{\alpha\beta} = (P+\rho)u_\alpha u_\beta - u_\mu u^\mu P g_{\alpha\beta} + \Pi_{\alpha\beta} . \qquad \mathbf{(4.3.8)}$$

La quantité $\Pi_{\alpha\beta}$ peut être prise symétrique, orthogonale à la quadri-vitesse ($u_\mu \Pi^{\mu\alpha} = 0$) et sans trace ($g_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} = 0$). C'est la *pression anisotrope* (ou *tenseur des contraintes*) du fluide. Un fluide est dit parfait lorsque sa pression anisotrope est nulle.

On peut alors calculer les composantes perturbées du tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait. Pour les composantes covariantes, on trouve :

$$\delta T_{00} = \rho a^2 (\delta + 2A) , \qquad \mathbf{(4.3.9)}$$

$$\delta T_{0i} = \rho a^2 (-(1+\omega)v_i + B_i) , \qquad \mathbf{(4.3.10)}$$

$$\delta T_{ij} = P a^2 \left(\pi_{ij} + h_{ij} + \frac{\delta P}{P}\gamma_{ij} \right) , \qquad \mathbf{(4.3.11)}$$

où nous avons introduit $\delta \equiv \delta\rho/\rho$ le contraste de densité et $\pi_{ij} \equiv \delta\Pi_{ij}/P$ la perturbation de pression anisotrope. C'est un tenseur de trace nulle qui n'a que des composantes spatiales. Il peut être décomposé en une partie scalaire sans trace π, une partie vectorielle $\bar{\pi}_i$ et une partie tensorielle $\bar{\bar{\pi}}_{ij}$:

$$\pi_{ij} \equiv \left(\nabla_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\Delta \right) \pi + \nabla_{(i}\bar{\pi}_{j)} + \bar{\bar{\pi}}_{ij} . \qquad \mathbf{(4.3.12)}$$

3.4 Pression anisotrope

Du fait que la partie non perturbée de la pression anisotrope du tenseur énergie-impulsion est nulle (pour être compatible avec l'hypothèse de fluide parfait), la pression anisotrope perturbée se transforme selon :

$$\pi_{ij} \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} \pi_{ij} . \qquad \mathbf{(4.3.13)}$$

[10]Le terme $u_\mu u^\mu$ a été laissé pour que la formule soit indépendante du choix de la signature de la métrique et sera enlevé par la suite. On peut aussi rajouter un terme $2u_{(\alpha}Q_{\beta)}$, avec $Q_\mu u^\mu = 0$, représentant un *flux de chaleur*. Un tel terme n'est présent que pour des fluides ayant des interactions non gravitationnelles, comme par exemple pour les photons et les baryons couplés par diffusion Thomson (*cf* chapitre 5, §5).

Ceci nous amène a une propriété importante, le *lemme de Stewart-Walker* [Stewart & Walker, 1984] : Les perturbations d'une quantité dont la partie non perturbée est toujours nulle sont invariantes de jauge. C'est la raison pour laquelle les perturbations tensorielles de la métrique sont invariantes de jauge (*cf* équation **4.2.25**). C'est aussi ce qui assurera au chapitre 5 que les moments d'ordre supérieur ou égal à deux de l'équation de Boltzmann sont invariants de jauge.

3.5 Quantités invariantes de jauge

Nous nous intéressons maintenant aux quantités invariantes de jauge que l'on peut construire à partir des quantités perturbées du tenseur énergie-impulsion. Pour des quantités scalaires, l'équation (**4.2.21**) permet de voir que la quantité

$$\delta f^\flat \equiv \delta f - \dot{f}\frac{C}{\mathcal{H}} \tag{4.3.14}$$

est invariante de jauge. $\delta f^\flat$ s'identifie à δf dans une jauge où $C = 0$, comme par exemple dans la jauge de feuilletage plat (nous repérerons dorénavant les quantités invariantes de jauge qui s'identifient à leur valeur dans la jauge de feuilletage plat par un indice $\flat$). On peut ainsi définir les contrastes de densité et de pression invariants de jauge :

$$\delta^\flat \equiv \frac{\delta\rho^\flat}{\rho} = \delta - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\frac{C}{\mathcal{H}} , \tag{4.3.15}$$

$$\frac{\delta P^\flat}{P} = \frac{\delta P}{P} - \frac{\dot{P}}{P}\frac{C}{\mathcal{H}} . \tag{4.3.16}$$

On peut aussi définir la *perturbation d'entropie* Γ par

$$(1+\omega)\Gamma \equiv \omega\frac{\delta P}{P} - u_{\rm s}^2\delta = \frac{1}{\rho}(\delta P - u_{\rm s}^2\delta\rho) , \tag{4.3.17}$$

où dorénavant

$$u_{\rm s}^2 \equiv \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} . \tag{4.3.18}$$

Γ représente bien une perturbation d'entropie, car une perturbation adiabatique ($\Gamma = 0$) est caractérisée par le fait que

$$\left.\frac{\delta P}{\delta\rho}\right|_{\rm adia} \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S = \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} \equiv u_{\rm s}^2 , \tag{4.3.19}$$

et que l'expansion de l'Univers est en général adiabatique (*cf* chapitre 5, §2.3).

On peut de même trouver des quantités invariantes de jauges liées aux parties scalaires et vectorielles de la vitesse :

$$v^\flat = v + \dot{E} , \tag{4.3.20}$$

$$\bar{v}_i^\flat = v + \dot{\bar{E}}_i . \tag{4.3.21}$$

Ces deux quantités correspondent encore à leur équivalent non invariant de jauge mesuré dans la jauge de feuilletage plat.

Il est aussi possible de définir des quantités invariantes de jauge qui s'identifient à leur valeur en jauge newtonienne. Nous les repérerons par un indice $\sharp$:

$$\delta^\sharp = \delta - \frac{\dot\rho}{\rho}(B + \dot E) \,, \tag{4.3.22}$$

$$\frac{\delta P^\sharp}{P} = \frac{\delta P}{P} - \frac{\dot P}{P}(B + \dot E) \,, \tag{4.3.23}$$

$$v^\sharp = v + \dot E \,, \tag{4.3.24}$$

$$\bar v_i^\sharp = v - \dot{\bar B}_i \,. \tag{4.3.25}$$

Enfin, en jauge comobile, repérée par un indice $\natural$, on a[11]

$$\delta^\natural = \delta - \frac{\dot\rho}{\rho}(B - v) \,, \tag{4.3.26}$$

$$\frac{\delta P^\natural}{P} = \frac{\delta P}{P} - \frac{\dot P}{P}(B - v) \,, \tag{4.3.27}$$

$$v^\natural = 0 \,, \tag{4.3.28}$$

$$\bar v_i^\natural = v + \dot{\bar E}_i \,. \tag{4.3.29}$$

Bien sûr, on peut passer d'une variable invariante de jauge à l'autre par l'intermédiaire d'autres variables invariantes de jauge. Par exemple,

$$\delta^\sharp = \delta^\flat - \frac{\dot\rho}{\rho}\frac{\Phi}{\mathcal{H}} \,, \qquad v^\sharp = v^\flat \,, \qquad \bar v_i^\sharp = \bar v_i^\flat - \bar V_i \,, \tag{4.3.30}$$

$$\delta^\natural = \delta^\sharp + \frac{\dot\rho}{\rho} v^\sharp \,, \qquad v^\natural = v^\sharp - v^\flat \,, \qquad \bar v_i^\natural = \bar v_i^\sharp + \bar V_i \,. \tag{4.3.31}$$

4 Dynamique des perturbations

4.1 Équations d'Einstein perturbées

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les composantes perturbées du tenseur d'Einstein et des tenseurs énergie-impulsion des différents fluides.

Nous utiliserons dans la mesure du possible les variables définies dans la jauge de feuilletage plat et les potentiels de Bardeen. Un calcul désormais classique permet d'obtenir les composantes perturbées du tenseur énergie-impulsion total et du tenseur d'Einstein, qui sont données dans l'annexe C. Après quelques manipulations, on obtient finalement les équations d'Einstein perturbées, qu'on peut séparer en quatre équations portant sur des quantités scalaires (la composante $_{00}$ des équations d'Einstein, la partie scalaire de la composante $_{0i}$, et deux parties scalaires des compo-

[11] Rendons à César ce qui lui appartient : c'est au clarinettiste Jean-Philippe Uzan [Uzan, 1998b] que l'on doit cette terminologie d'indice pour repérer la jauge. L'indice $\flat$ (flat en anglais) repère la jauge de feuilletage plat, l'indice $\sharp$ (sharp) repère la jauge newtonienne car il semble plus difficile d'y faire des calculs numériques (la raison est qu'il apparaît des dérivées temporelles du potentiel de Bardeen dans l'équation de conservation de la masse, *cf* [Ma & Bertschinger, 1995]), et l'indice $\natural$ (natural) repère la jauge comobile car c'est celle où l'équation de Poisson y a sa forme la plus naturelle...

santes ${}_{ij}$, à savoir la partie en γ_{ij} et la partie en $\gamma_{ij}\Delta - \nabla_{ij}$),

$$\Delta\Phi - 3\mathcal{H}^2 \mathrm{X} = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \delta_f^\flat \,, \tag{4.4.1}$$

$$\mathcal{H}\mathrm{X} - \mathcal{H}\Phi + \frac{\dot{\mathcal{H}}}{\mathcal{H}}\Phi = -\frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f (1+\omega_f) v_f^\flat \,, \tag{4.4.2}$$

$$\Psi - \Phi = -3\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \omega_f \pi_f \,, \tag{4.4.3}$$

$$\mathcal{H}^2 \mathrm{X} + \mathcal{H}\dot{\mathrm{X}} + 2\dot{\mathcal{H}}\mathrm{X} = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \left[(1+\omega_f)\Gamma_f + u_{\mathrm{s},f}^2 \delta_f^\flat + \frac{2}{3}\omega_f \Delta\pi_f\right] \,, \tag{4.4.4}$$

deux équations portant sur des quantités vectorielles (les parties vectorielles des composantes ${}_{0i}$ et ${}_{ij}$ des équations d'Einstein),

$$\left(\Delta + 4\dot{\mathcal{H}} - 4\mathcal{H}^2 - 2K\right) \bar{V}_i = -6\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f (1+\omega_f) \bar{v}_i^\flat \,, \tag{4.4.5}$$

$$\dot{\bar{V}}_i + 2\mathcal{H}\bar{V}_i = 3\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \omega_f \bar{\pi}_{i,f} \,, \tag{4.4.6}$$

et une équation portant sur les composantes tensorielles,

$$\ddot{\bar{\bar{E}}}_{ij} + 2\mathcal{H}\dot{\bar{\bar{E}}}_{ij} + (2K - \Delta)\bar{\bar{E}}_{ij} = 3\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \omega_f \bar{\bar{\pi}}_{ij,f} \,. \tag{4.4.7}$$

Sur les quatre équations scalaires, deux sont redondantes du fait des identités de Bianchi. Il suffit donc d'en garder seulement deux. En jauge de feuilletage plat, il est commode de ne garder que celles qui ne font pas intervenir de dérivées des composantes de la métrique. On peut donc garder une combinaison des deux premières équations scalaires et la troisième,

$$\left[\Delta + 3(\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}^2)\right]\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \left[\delta_f^\flat - 3\mathcal{H}(1+\omega_f) v_f^\flat\right] \,, \tag{4.4.8}$$

$$\Psi - \Phi = -3\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \omega_f \pi_f \,. \tag{4.4.9}$$

L'équation (**4.4.9**) ne fait intervenir que des quantités qui sont les mêmes dans toutes les jauges, et reste donc valable en jauge newtonienne ou dans toute jauge comobile, ce qui n'est pas le cas de (**4.4.8**), qui est changée en

$$[\Delta + 3K]\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \left[\delta_f^\sharp - 3\mathcal{H}(1+\omega_f) v_f^\sharp\right] \,, \tag{4.4.10}$$

$$[\Delta + 3K]\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \delta_f^\natural \,, \tag{4.4.11}$$

la dernière équation valant pour la jauge comobile totale uniquement. Les trois équations (**4.4.8**, **4.4.10**, **4.4.11**) donnant le potentiel de Bardeen Φ en fonction de la jauge illustrent le fait que la forme exacte d'une équation dépend explicitement du système de coordonnées choisi. On voit également que les trois membres de gauche deviennent équivalents à petite échelle ($k \gg \mathcal{H}$) alors qu'ils diffèrent significativement comme annoncé à grande échelle. Il en est de même, bien que cela soit moins évident pour les membres de droite.

De même, sur les deux équations vectorielles, une seule est indépendante, l'autre résultant juste des identités de Bianchi. Nous verrons cependant qu'en jauge de feuilletage plat, il est possible, voire commode, de garder ces deux équations. La raison est qu'il existe une grande similarité entre les équations scalaires (**4.4.8**, **4.4.9**) et les équations vectorielles (**4.4.5**, **4.4.6**) : en introduisant, par analogie aux potentiels de Bardeen Φ et Ψ, les deux nouvelles quantités vectorielles invariantes de jauge

$$\bar{\Phi}_i \equiv \mathcal{H}(\bar{B}_i + \dot{\bar{E}}_i) = \mathcal{H}\bar{V}_i \,, \tag{4.4.12}$$

$$\bar{\Psi}_i \equiv -\mathcal{H}(\bar{B}_i + \dot{\bar{E}}_i) - (\dot{\bar{B}}_i + \ddot{\bar{E}}_i) = -\mathcal{H}\bar{V}_i - \dot{\bar{V}}_i \,, \tag{4.4.13}$$

il vient alors

$$\left[\Delta - 2K + 4(\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}^2)\right] \bar{\Phi}_i = 2\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \left[-3\mathcal{H}(1+\omega_f)\bar{v}^\flat_{i,f}\right] \,, \tag{4.4.14}$$

$$\bar{\Psi}_i - \bar{\Phi}_i = -3\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \omega_f \bar{\pi}_{i,f} \,, \tag{4.4.15}$$

qui ressemblent beaucoup à leurs analogues scalaires (**4.4.8**) et (**4.4.9**).

4.2 Équations de conservation perturbées

Il nous reste maintenant à écrire les équations de conservation perturbées. Nous nous limiterons ici à des fluides dont les tenseurs énergie-impulsion sont séparément conservés ($D_\mu T_f^{\mu\alpha} = 0$). Les composantes scalaires δ_f, v_f, π_f et Γ_f obéissent en tout à deux équations perturbées ($\delta[D_\mu T_f^{\mu 0}] = 0$ et la partie scalaire de $\delta[D_\mu T_f^{\mu i}] = 0$). Les composantes vectorielles $\bar{v}_f^i$ et $\bar{\pi}_f^i$ obéissent à une équation de conservation (la partie vectorielle de $\delta[D_\mu T_f^{\mu i}] = 0$). Pour chaque fluide, on a donc

$$\dot{\delta}^\flat = -(1+\omega)\Delta v^\flat - 3\mathcal{H}(1+\omega)\Gamma + 3\mathcal{H}(\omega - u_s^2)\delta^\flat \,, \tag{4.4.16}$$

$$\dot{v}^\flat = -(1-3u_s^2)\mathcal{H}v^\flat - \Psi - 3u_s^2\Phi - \Gamma - \frac{u_s^2}{1+\omega}\delta^\flat - \frac{2}{3}\frac{\omega}{1+\omega}(\Delta + 3K)\pi \,, \tag{4.4.17}$$

$$\dot{\bar{v}}_i^\flat = -(1-3u_s^2)\mathcal{H}\bar{v}_i^\flat - \bar{\Psi}_i - 3u_s^2\bar{\Phi}_i - \frac{1}{2}\frac{\omega}{1+\omega}(\Delta + 2K)\bar{\pi}_i \,. \tag{4.4.18}$$

On notera là encore la ressemblance entre l'équation scalaire (**4.4.17**) et son équivalent vectoriel (**4.4.18**).

4.3 Interprétation

Les trois équations (**4.4.16–4.4.18**) sont en principe l'analogue relativiste de leur équivalent newtonien, à savoir l'équation de conservation de la masse $D_\mu T^{\mu 0} = 0$ et l'équation d'Euler $D_\mu T^{\mu i} = 0$ que nous avons ici scindée en une partie scalaire et une partie vectorielle[12].

Nous nous placerons dans un premier temps dans un cas statique ($\mathcal{H} = 0$), avec de la matière non relativiste ($\omega \simeq u_s^2 \simeq 0$). Dans ce cas, densité de masse et densité d'énergie sont égales (à un facteur c^2 près), ainsi que les contrastes d'énergie correspondants. Pour des perturbations adiabatiques de matière non relativiste, on retrouve bien à partir de (**4.4.16**) la version perturbée de

[12]En physique newtonienne, on parlerait de partie potentielle (où le champ de vitesse découle d'un potentiel, $\boldsymbol{v}_{\rm pot} = -\boldsymbol{\nabla}U$) et de partie rotationnelle ($\boldsymbol{v}_{\rm rot} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{C}$, d'où $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{v}_{\rm rot} = 0$).

l'équation classique de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \,. \tag{4.4.19}$$

On retrouve de même à partir de (**4.4.17**) et (**4.4.18**) l'équation d'Euler linéarisée

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{\boldsymbol{\nabla} P}{\rho_m} - \boldsymbol{\nabla}\Phi \,, \tag{4.4.20}$$

(où ρ_m représente la densité de masse, le terme de pression venant de $-\Gamma - u_s^2\delta^\flat$ et celui de gravité de $-\Psi$), et (**4.4.8**) redonne l'équation de Poisson

$$\frac{1}{a^2}\Delta\Phi = -4\pi\mathcal{G}\sum_f \delta\rho_f \,, \tag{4.4.21}$$

$$\Phi = \Psi \,. \tag{4.4.22}$$

Dans l'avant-dernière équation, le terme en a^{-2} en facteur du laplacien vient du fait qu'il ne faut pas être en coordonnées comobile (η, x^i) pour retrouver les équations de la physique newtonienne, mais en coordonnées “minkowskienne”, $(t, X^i \equiv ax^i)$. En regardant le cas le plus général, il y a bien sûr plusieurs différences par rapport à la mécanique des fluides newtonienne :

– La présence de composantes vectorielles ($\bar{\Phi}_i$, $\bar{\Psi}_i$) et tensorielles ($\bar{\bar{E}}_{ij}$) de perturbations de la métrique. En mécanique newtonienne, il n'y a qu'une perturbation scalaire, Φ. Ici on en a deux (Φ et Ψ), qui sont égales dans le cas particulier où on n'a que de la matière non relativiste [*cf* équation (**4.4.9**)]. De plus, la forme de l'équation de Poisson (**4.4.8**) diffère à grande échelle de la formule classique (**2.2.11**). Évidemment, la forme exacte de toutes ces équations dépend de la jauge, et comme nous l'avons dit, il est toujours possible de choisir une jauge dans laquelle telle ou telle équation a la forme voulue. Ici, nous avons donc *choisi* la jauge de feuilletage plat, dans laquelle les équations de conservation perturbées avaient la forme la plus proche de leur analogue newtonien[13]. Dans d'autres systèmes de coordonnées, il en irait différemment. Par exemple, en jauge synchrone, les perturbations de la métrique n'apparaissent plus dans l'équation d'Euler, en accord avec l'interprétation qu'il s'agit d'une jauge dans laquelle la matière est en chute libre. Le prix à payer est bien sûr l'apparition de perturbations de la métrique dans l'équation de conservation de la masse[14].

[13] Ce qui n'était pas évident *a priori*. En effet, on se serait plutôt attendu à ce que ce soit la jauge newtonienne qui jouisse de cette propriété !

[14] En jauge synchrone, les équations de conservation (**4.4.16–4.4.18**) s'écrivent

$$\dot{\delta} = -(1+\omega)\Delta v - 3\mathcal{H}(1+\omega)\Gamma + 3\mathcal{H}(\omega - u_s^2)\delta - \frac{1+\omega}{2}\dot{h} \,, \tag{4.4.23}$$

$$\dot{v} = -(1-3u_s^2)\mathcal{H}v - \Gamma - \frac{u_s^2}{1+\omega}\delta - \frac{2}{3}\frac{\omega}{1+\omega}(\Delta + 3K)\pi \,, \tag{4.4.24}$$

$$\dot{\bar{v}}_i = -(1-3u_s^2)\mathcal{H}\bar{v}_i - \frac{1}{2}\frac{\omega}{1+\omega}(\Delta + 2K)\bar{\pi}_i \,. \tag{4.4.25}$$

Cette jauge représente un ensemble d'observateurs en chute libre. Les perturbations de la métrique n'apparaissent donc pas dans l'équation d'Euler mais dans l'équation de conservation de la masse où elles rendent compte des variations des éléments de volume sous l'effet de la gravité. Ce dernier effet est également présent en jauge newtonienne ($C \neq 0$), mais pas en jauge de feuilletage plat où il est par définition exclu ($C = E = 0$). Une autre différence entre la jauge synchrone et les autres apparaît dans l'équation d'évolution de la pression anisotrope (donnée par l'équation de Boltzmann, *cf* chapitre suivant), où les perturbations de la métrique apparaissent en jauge synchrone uniquement. Cela est encore dû au fait que des observateurs en chute libre ne ressentent pas de force (dans l'équation d'Euler), mais seulement les effets de marée (qui agissent comme un tenseur des contraintes et modifient la pression anisotrope).

– Dans l'équation de conservation de la masse, un terme $(1+\omega)$ apparaît en facteur du terme $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$. Ceci est dû au fait que ce terme décrit le *flux d'énergie* et non le flux de masse, le flux d'énergie étant proportionnel à $P+\rho$ et non seulement à ρ.
– Il y a un terme en $-\mathcal{H}(1-3u_{\rm s}^2)$ dans l'équation d'Euler. Ce terme illustre le fait que pour des particules non relativistes, la vitesse décroît en $1/a$ (l'expansion agit comme une force de freinage). Par contre, ce terme est nul pour de la matière relativiste. Cela vient du fait que pour de la matière relativiste, la quantité v_i n'est pas une vitesse à proprement parler, mais signale la présence d'un dipole dans la distribution de particules, *i.e.* qu'il y a plus de particules qui vont dans une direction que de particules qui vont dans la direction opposée. Un tel dipole n'est pas amorti par l'expansion : si la distribution est homogène il y a toujours la même proportion de particules qui se déplace dans un sens au cours du temps.
– Le terme de gravité est $\Psi+3u_{\rm s}^2\Phi$. Pour de la matière non relativiste, on retrouve Φ, mais pour de la matière relativiste, on a $\Phi+\Psi$, qui est égal à 2Φ quand les pressions anisotropes π des espèces relativistes sont négligeables. Ce terme, double de l'intuition newtonienne vient du fait que les photons ne "voient" pas la gravité de la même façon que la matière non relativiste[15].

4.4 Évolution des perturbations

Terminons cette section en passant en revue l'évolution générale des différentes perturbations. Nous négligerons dans un premier temps la présence de pression anisotrope, que nous étudierons séparément.

4.4.1 Modes tensoriels

Les modes tensoriels ont l'évolution la plus simple des trois types de perturbations. Ils ne découlent que d'une seule équation (**4.4.7**) qui représente un oscillateur (termes $\ddot{\bar{\bar{E}}}_{ij}$ et $\Delta\bar{\bar{E}}_{ij}$) amorti (terme $2\mathcal{H}\dot{\bar{\bar{E}}}_{ij}$) forcé (terme $\bar{\bar{\pi}}_{ij}$). En général le terme de forçage est négligeable, ce qui ne laisse qu'un oscillateur amorti. Ces modes se propagent donc sans instabilité. Il est à noter cependant un point important, à savoir que le mode n'est amorti que s'il "rentre" dans le rayon de Hubble (rapport $k/\mathcal{H}$ croissant au cours du temps). Dans le cas inverse, le mode ne va pas nécessairement en s'amortissant. Ce point est extrêmement important, puisqu'il explique la génération d'ondes gravitationnelles durant la phase d'inflation à partir de fluctuations quantiques.

4.4.2 Modes vectoriels

L'équation des modes vectoriels prend une forme plus simple en jauge newtonienne ou synchrone, où les perturbations de la métrique disparaissent de l'équation d'Euler. On se retrouve alors avec l'équation

$$\dot{\bar{v}}_i = -(1-3u_{\rm s}^2)\mathcal{H}\bar{v}_i - \frac{1}{2}\frac{\omega}{1+\omega}(\Delta+2K)\bar{\pi}_i\ . \qquad (\mathbf{4.4.26})$$

Toujours en négligeant la présence de pression anisotrope, cette équation admet la solution

$$\bar{v}_i \propto a^{-(1-3u_{\rm s}^2)}\ , \qquad (\mathbf{4.4.27})$$

[15] C'est en fait le même facteur 2 qu'on obtient quand on calcule la déviation de la lumière par le soleil et qu'on compare Relativité Générale et théorie newtonienne "naïve" appliquée à l'étude de la trajectoire des photons.

qui est décroissante pour de la matière non relativiste (et ce, quel que soit le rapport $k/\mathcal{H}$), mais pas pour de la matière relativiste. En jauge de feuilletage plat, il faut ajouter un terme proportionnel à $\bar{V}_i$, qui est généré par la pression anisotrope. Sauf cas particulier (*cf* §4.4.4), celle-ci est négligeable, et par conséquent $\bar{V}_i$ l'est aussi et ces modes sont tout aussi petits dans cette jauge. Il n'est donc pas possible de former des structures à l'aide des modes vectoriels, quand bien même il existerait un processus qui les générerait (ce qui n'est de toute façon pas le cas en inflation).

4.4.3 Modes scalaires

Les modes scalaires ont une structure plus riche que les modes vectoriels ou tensoriels. Cela vient du fait qu'il sont régis par une équation du second degré, qui présente un régime stable et un régime instable. En effet, en ne considérant que des perturbations adiabatiques à $\omega = u_s^2$ constants, la combinaison des deux équations de conservation scalaires donne

$$\ddot{\delta}^\flat + \mathcal{H}(1 - 3u_s^2)\dot{\delta}^\flat - u_s^2 \delta^\flat = (1 + \omega)(1 + 3u_s^2)\Phi \,. \qquad \textbf{(4.4.28)}$$

C'est l'équation (**2.4.1**) que nous avions déjà écrite au chapitre 2. Le membre de gauche de cette équation est comme pour les modes tensoriels un oscillateur amorti. Le taux d'amortissement n'est pas tout à fait le même, ni la relation de dispersion (la vitesse du son n'est pas égale à la vitesse de la lumière, même pour des espèces relativistes). Par contre, il apparaît dans le membre de droite de cette équation un terme qui, contrairement à ce qui se passe pour les modes tensoriels, ne peut pas être négligé[16]. La raison en est que la contribution due au potentiel gravitationnel est de signe opposé à celle de la pression. C'est ce qui est à l'origine de l'instabilité de Jeans que nous avons déjà évoquée au chapitre 2 et qui est à l'origine de la formation des grandes structures observées dans l'Univers. Ainsi, seuls les modes scalaires contribuent à la formation des grandes structures, même s'il est possible (et c'est en général le cas) que d'autres types de perturbations soient générés dans l'Univers primordial.

4.4.4 Influence de la pression anisotrope

La partie spatiale du tenseur énergie-impulsion T^i_j d'un fluide représente la densité du flux d'impulsion orientée dans la direction x^i à travers une surface orthogonale à x^j [Landau & Lifchitz, 1989b]. Cette densité d'impulsion possède une partie macroscopique, négligeable dans notre cas au premier ordre des perturbations, et une partie microscopique représentant le transfert irréversible d'impulsion. Cette partie microscopique joue donc le rôle d'une *force dissipatrice*. elle peut être scindée en une partie diagonale (la pression) et une partie sans trace (la pression anisotrope). La comparaison entre les équations d'Euler que nous avons écrites et celles qu'on obtient en mécanique des fluides nous montre que ces composantes jouent le rôle d'un *tenseur des contraintes*. Expérimentalement, on peut mesurer ce tenseur des contraintes. Par exemple, pour un écoulement laminaire dans la direction x^i et dont les vitesses dépendent de x^j, le tenseur des contraintes s'écrit

$$T^i_j = -\mu \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \,, \qquad \textbf{(4.4.29)}$$

où le coefficient positif μ est appelé *coefficient de viscosité de cisaillement*. L'équation d'Euler se réécrit alors (pour un fluide non relativiste)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho_m} \boldsymbol{\nabla} P = \frac{1}{\rho} \mu \Delta \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\mu}{3} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v}) \,, \qquad \textbf{(4.4.30)}$$

[16] On a par contre négligé la contribution due à la pression anisotrope.

et est appelée *équation de Navier-Stokes*. Pour les parties scalaires et vectorielles, cela se traduit par

$$\frac{\partial v}{\partial t} = ... + \frac{1}{\rho}\frac{4}{3}\mu\Delta v \,, \qquad (\mathbf{4.4.31})$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = ... + \frac{1}{\rho}\mu\Delta\bar{v} \,. \qquad (\mathbf{4.4.32})$$

Il est alors clair que le coefficient de viscosité apparaît comme une force dissipatrice. Ce coefficient agit de façon légèrement différente sur les modes scalaires et vectoriels (à cause du facteur $\frac{4}{3}$ présent dans l'équation des modes scalaires), comme l'indiquaient les équations d'Euler que nous avions déjà écrites. L'influence de ce facteur va être plus grande pour les espèces relativistes du fait du facteur $\frac{\omega}{1+\omega}$ présent dans les équations d'Euler. Nous verrons au chapitre suivant comment ce résultat se généralise au cas des perturbations de matière relativiste dans un Univers en expansion.

5 Conclusion

La section précédente nous a permis d'écrire l'évolution des perturbations de densité et de vitesse, ainsi que des perturbations de la métrique. Nous n'avons pour l'instant pas calculé l'évolution des autres quantités, à savoir les perturbations d'entropie Γ et la pression anisotrope π_{ij}. Le même problème se présente en mécanique des fluides classique : l'équation de conservation de la masse et l'équation d'Euler (dont nous n'avons fait qu'écrire les équivalents en Relativité Générale linéarisée au voisinage d'une solution homogène et isotrope en expansion) permettent de calculer l'évolution des champs de vitesse et de densité pourvu qu'on fasse des hypothèses supplémentaires sur le fluide étudié : fluide parfait, non visqueux, irrotationnel, *etc*. Dans le cas où on ne fait aucune hypothèse simplificatrice, il faut en plus résoudre les équations *thermodynamiques* régissant l'évolution des autres quantités (température, pression, *etc*).

Les fluctuations de température sont en principe calculables à l'aide de l'équation de la chaleur. Cette équation est une équation de diffusion, qui nous dit que la chaleur se propage d'autant plus lentement que les distances sont grandes (*cf* chapitre 2, §2.1). Toutes les perturbations d'intérêt cosmologique sont suffisamment grandes pour que l'on puisse négliger les flux de chaleur au cours de l'évolution des perturbations. On peut donc, avec une très bonne approximation négliger les fluctuations d'entropie et poser :

$$\Gamma_f = 0 \,. \qquad (\mathbf{4.5.1})$$

Cette équation sera d'ailleurs rigoureusement vérifiée pour les espèces relativistes comme nous le verrons plus loin[17].

Il ne nous reste donc plus qu'à calculer l'évolution de la pression anisotrope. Il s'agit là d'un problème assez compliqué si on veut faire les choses rigoureusement. En mécanique du solide, la pression anisotrope apparaît souvent sous la forme d'un tenseur des contraintes. Ici, nous nous intéressons à des espèces fluides, dont le tenseur des contraintes est nécessairement nul. Ici, la pression de pression anisotrope signifie en fait que la *distribution des particules* est anisotrope. Ce cas se produit rarement, dans la mesure où on considère que les collisions entre particules sont suffisamment nombreuses pour finalement isotropiser le fluide. C'est d'ailleurs l'état vers lequel tend un fluide avec suffisamment d'interactions, ce qui justifie *a posteriori* l'approche fluide

[17] Par contre, nous verrons que l'équation (**4.5.1**) n'est pas vérifiée par un champ scalaire, ce qui a une grande importance durant une phase inflationnaire et lors de l'évolution d'un champ de quintessence, *cf* chapitre 17.

souvent utilisée. Cette approche fluide n'est cependant valable que lorsque toutes les longueurs en considération sont grandes devant le libre parcours moyen des particules[18]. Or, en cosmologie certains fluides sont non collisionnels. C'est par exemple le cas des neutrinos à basse température, et des photons quand la diffusion Thomson est négligeable. Il convient donc d'adopter une autre approche pour ces espèces, basée sur le concept de fonction de distribution et sur l'équation de Boltzmann linéarisée. Elle ne sera nécessaire que pour les espèces relativistes, car la pression (et à plus forte raison la pression anisotrope) est de toute façon négligeable pour les espèces non relativistes. Cette approche appliquée aux photons nous permettra à peu de frais de gérer également l'évolution de leur polarisation.

[18]On définit parfois le *nombre de Knüdsen* par le rapport du libre parcours moyen à la longueur caractéristique du problème. Ce nombre doit donc rester petit pour justifier l'approche fluide.

Chapitre 5

Équation de Boltzmann

Sommaire

1 Introduction

Nous allons dans ce chapitre tenter de décrire l'évolution des fluides à l'aide d'une *fonction de distribution*. Nous nous intéresserons essentiellement aux fluides relativistes, pour lesquels cette approche est nécessaire en cosmologie du fait de leur grand libre parcours moyen.

L'équation de Boltzmann, qui décrit l'évolution de la fonction de distribution, a été abondamment utilisée dans de nombreux domaines de la physique statistique (*cf* par exemple [Diu *et al.*, 1989]). La première application aux perturbations cosmologiques a été semble-t-il faite par Peebles [Peebles & Yu, 1970]. Ont suivi de nombreux travaux [Tomita, 1982] [Bond & Efstathiou, 1984] [Bond & Efstathiou, 1986] [Abbott & Schaefer, 1986] [Ma & Bertschinger, 1995] [Hu & White, 1997a]. Plus récemment, des travaux pour inclure une description de la polarisation ont été faits à la fois par Seljak et Zaldarriaga [Seljak & Zaldarriaga, 1997] [Zaldarriaga & Seljak, 1997], et Kamionkowski, Kosowski et Stebbins [Kamionkowski *et al.*, 1997a] [Kamionkowski *et al.*, 1997b]. Le tout a été finalisé par Hu et White dans le cas où les sections spatiales sont plates [Hu & White, 1997b] et généralisé peu après aux cas ouverts [Hu *et al.*, 1998] puis fermés [Lewis *et al.*, 2000].

L'idée sous-jacente est de s'intéresser à la distribution des particules d'un fluide non seulement en fonction de la position et du temps, mais aussi en fonction de leur direction de propagation et de leur énergie. L'évolution de cette distribution est alors à la fois dictée par les équations de conservation habituelles mais aussi par les équations des géodésiques des particules. En pratique, nous allons décomposer la dépendance "angulaire" de la fonction de distribution (*i.e.* la partie qui décrit le nombre de particules se propageant dans une direction donnée) en terme d'harmoniques sphériques, c'est-à-dire en *multipoles*, un multipole ℓ donné décrivant les variations de cette partie angulaire sur des échelles de l'ordre de $\theta \sim 2\pi/\ell$. Le maniement de cette fonction de distribution est en général assez lourd : si l'on veut calculer les anisotropies du rayonnement fossile jusqu'au ℓ-ème multipole, il faut en principe résoudre un système d'un peu plus de ℓ équations différentielles couplées, auquel il faut éventuellement rajouter d'autres systèmes identiques pour les ondes gravitationnelles, la polarisation, *etc*. Nous nous contenterons ici de dériver l'équation de Boltzmann dans le cadre des perturbations cosmologiques, ce qui représente déjà en soi un calcul assez délicat, c'est pourquoi ce chapitre assez long a été organisé de la façon la plus progressive possible.

Nous allons dans un premier temps définir la fonction de distribution (§2.1). À partir de celle-ci, nous pourrons reconstituer toutes les composantes du tenseur énergie-impulsion (§2.2). Cette fonction de distribution possède une partie homogène et isotrope qui correspond à un spectre de corps noir (§2.3) dont l'évolution n'est pas très difficile à calculer (§2.4). Nous étudierons ensuite les perturbations de cette fonction de distribution et en déduirons son équation d'évolution (§3). Cette partie perturbée se comporte de façon assez inhabituelle lors d'un changement de coordonnées car elle ne dépend pas uniquement des coordonnées x^μ, mais aussi des impulsions p_ν. Cela aura pour principale conséquence que les versions invariantes de jauge des différentes quantités n'auront pas la forme habituelle (§3.1) que nous avons vue au chapitre précédent. Finalement, à l'aide d'une décomposition multipolaire, nous pourrons calculer une première version de l'équation de Boltzmann (§3.2). Cette équation fait intervenir une succession de tenseurs, chacun décrivant un multipole de la fonction de distribution. Chaque multipole peut être décomposé en une partie scalaire, deux parties vectorielles, deux parties tensorielles, *etc* (§3.3), qui peuvent chacune être décrites par des tenseurs symétriques sans trace (§3.5).

Cependant l'équation de Boltzmann ainsi écrite (équation **5.3.25**) n'a pas un sens physique très explicite. La suite du chapitre sera donc consacrée à une dérivation plus facilement utilisable de cette équation. Pour mieux comprendre sa structure, il est en fait préférable d'effectuer la décomposition multipolaire en terme d'harmoniques sphériques (§4.1, 3.4), dont le maniement n'est hélas pas plus commode, mais nous trouverons quand même une nouvelle hiérarchie d'équations (§4.2), à laquelle il existe des solutions assez simples en terme de fonctions de Bessel (§4.3, 4.4, 4.5). Ces solutions ont l'avantage d'avoir une interprétation physique (§4.6) ainsi que des propriétés géométriques (§4.7) plus esthétiques. Enfin, il faut tenir compte des éventuelles interactions non gravitationnelles entre les différents fluides. C'est le cas des photons qui peuvent interagir avec les électrons libres par diffusion Thomson (§5). Ce processus a tendance a polariser la radiation, ce qui induit quelques modifications de son évolution.

2 Équation de Boltzmann non perturbée

2.1 Fonction de distribution

La forme du tenseur énergie-impulsion d'un fluide résulte de celui d'une particule ponctuelle. Une particule ponctuelle de masse m est décrite par l'action

$$S = \int mc^2 \, \mathrm{d}\tau \, . \tag{5.2.1}$$

Cette action est invariante par changement de coordonnées. Plaçons-nous dans un système de coordonnées tel que x^0 soit de genre temps. On peut réécrire l'action (**5.2.1**) comme

$$S = \int \mu \frac{1}{c} \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}^4 x \,, \tag{5.2.2}$$

en posant

$$\mu \equiv \frac{c\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x^0} \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p(x^0)) \frac{1}{\sqrt{|g|}} mc^2 \,, \tag{5.2.3}$$

où $\boldsymbol{x}_p(x^0)$ décrit la trajectoire de la particule au cours du temps. En variant l'action par rapport à la métrique, on obtient le tenseur énergie-impulsion de la particule :

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}^4 x \,, \tag{5.2.4}$$

$$T^{\alpha\beta} \equiv \mu U^\alpha U^\beta \,, \tag{5.2.5}$$

où $U^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}$ est la quadri-vitesse de la particule. Le tenseur énergie-impulsion d'un ensemble de particules sans interactions est alors la somme des tenseurs énergie-impulsion individuels.

$$T_f^{\alpha\beta} = \sum_p \mu_p U_p^\alpha U_p^\beta \,. \tag{5.2.6}$$

Tant qu'on s'intéresse à des distances grandes devant la distance moyenne entre particules, on peut moyenner ce tenseur sur un volume $V(\boldsymbol{x})$ centré autour d'un point $\boldsymbol{x}$, suffisamment grand pour contenir beaucoup de particules, mais de taille petite devant les dimensions du problème (*NB* : il ne s'agit pas nécessairement du référentiel au repos des particules) :

$$\left\langle T_f^{\alpha\beta} \right\rangle (x^0, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{V} \int_{V(\boldsymbol{x})} T_f^{\alpha\beta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{V(\boldsymbol{x})\sqrt{|g|(\boldsymbol{x})}} \sum_{p \in V(\boldsymbol{x})} m_p c^2 \frac{U_p^\alpha U_p^\beta}{U_p^0} \,. \tag{5.2.7}$$

En supposant qu'on a N particules dans le volume V, le tenseur énergie-impulsion peut se réécrire

$$\left\langle T_f^{\alpha\beta} \right\rangle (x^\mu) = \frac{N}{V} \frac{c}{\sqrt{|g|(\boldsymbol{x})}} \left\langle \frac{P_p^\alpha P_p^\beta}{P_p^0} \right\rangle_{p \in V(\boldsymbol{x})} \,. \tag{5.2.8}$$

La quantité $n \equiv N/V$ représente la densité numérique de particules (*NB* : ce n'est *pas* un scalaire), et P_p^α est la quadri-impulsion de la particule p. On a ici moyenné la quantité $P^\alpha P^\beta / P^0$ sur l'ensemble des N particules présentes dans le volume V. Il est alors "naturel"[1] d'introduire une fonction $h(x^\alpha, p_\beta)$ qui représente la distribution de probabilité des quadri-impulsions des particules situées dans un voisinage de $\boldsymbol{x}$ à l'instant x^0/c. Pour des particules de masse m, h est de la forme

$$h(x^\alpha, p_\beta) = 2\delta(p_\mu p^\mu - m^2) \tilde{h}(x^\alpha, p_i) \,. \tag{5.2.9}$$

[1] Il y a là en fait un saut conceptuel assez important. D'abord, on est passé des composantes *contravariantes* aux composantes *covariantes* pour la quadri-impulsion. La raison en est qu'on adopte désormais une *approche hamiltonienne*, où les impulsions sont des variables indépendantes des positions. Notamment, la relation $p^\alpha = mu^\alpha$ n'est plus posée *a priori* mais résultera des équations du mouvement. De plus, on est passé de quantités définies dans l'espace-temps quadri-dimensionnel à des quantités définies sur un espace deux fois plus gros (positions et impulsions), appelé l'*espace des phases*. Un des avantages de la formulation hamiltonienne est que l'élément de volume de l'espace des phases $\mathrm{d}^4 x^\mu \mathrm{d}^4 p_\nu$ est un invariant, ce qui va assurer que la fonction de distribution f est une quantité scalaire (*cf* équation **5.2.14**).

Le facteur 2 provient du fait que la fonction δ de Dirac peut se réécrire

$$\delta(p_\mu p^\mu - m^2) = \frac{1}{2p^0}\left[\delta(p_0 - p_0^+) + \delta(p_0 - p_0^-)\right] \ , \tag{5.2.10}$$

où les $p_0^\pm$ sont les deux solutions de l'équation $p_\mu p^\mu - m^2 = 0$, une seule de ces solutions ayant une énergie $E = cp_\mu u^\mu$ positive. De plus, $\delta(p_\mu p^\mu - m^2)$ est invariant par changement de coordonnées alors l'élément de volume $\mathrm{d}^4 p_\mu$ se transforme comme $\sqrt{|g|}$. On a alors

$$\frac{1}{\sqrt{|g|(\boldsymbol{x})}}\left\langle \frac{P_p^\alpha P_p^\beta}{P_p^0}\right\rangle_{p\in V(\boldsymbol{x})} = \int h(x^\mu, p_\nu) p^\alpha p^\beta \frac{\mathrm{d}^4 p_\nu}{\sqrt{|g|}} = \int \tilde{h}(x^\mu, p_i) \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0}\frac{\mathrm{d}^3 p_i}{\sqrt{|g|}} \ . \tag{5.2.11}$$

Par définition, $h(x^\alpha, p_\beta)$ est d'intégrale unité :

$$\int h(x^\alpha, p_i)\frac{\mathrm{d}^4 p_\mu}{\sqrt{|g|}} = \int \tilde{h}(x^\alpha, p_i)\frac{\mathrm{d}^3 p_i}{p^0\sqrt{|g|}} = 1 \ . \tag{5.2.12}$$

Cela prouve que h n'est pas un scalaire, pas plus que $\tilde{h}$. Le tenseur énergie-impulsion se réécrit finalement

$$\left\langle T_f^{\alpha\beta}\right\rangle(x^0, x^i) = \int c\frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} f(x^0, x^i, p_j)\frac{\mathrm{d}^3 p_j}{\sqrt{|g|}} \ , \tag{5.2.13}$$

où on a posé

$$f(x^0, x^i, p_j) \equiv n(t, x^i)\tilde{h}(x^0, x^i, p_j) \ . \tag{5.2.14}$$

Notons que de par sa construction, la quantité f est un scalaire[2], qu'on appelle *fonction de distribution.*

2.2 Quantités thermodynamiques

La fonction de distribution d'une espèce homogène en équilibre thermique à la température T s'écrit, dans son référentiel au repos,

$$f = \frac{s}{\hbar^3}\frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right) \pm 1} \ . \tag{5.2.15}$$

Le nombre d'états de spin de la particule est s, son potentiel chimique est μ et le terme ± 1 dépend de la nature fermionique $(+1)$ ou bosonique (-1) de la particule considérée. L'énergie d'une particule de quadri-impulsion p^α mesurée par un observateur de quadri-vitesse u^α s'écrit $E = cp^\mu u_\mu$. On peut décomposer la quadri-impulsion p^α d'une particule en une partie parallèle à la quadri-vitesse u^α d'un observateur, et une partie orthogonale, repérée par un quadri-vecteur N^α.

[2]Ceci vient du fait que lors d'une transformation de Lorentz, les volumes dans l'espace réel et dans l'espace des impulsions sont tous deux modifiés d'un facteur γ_0, où γ_0 est le facteur de Lorentz de la transformation, *cf* par exemple [Landau & Lifchitz, 1989a].

Ce quadri-vecteur représente la direction de propagation de la particule, c'est donc un vecteur de genre espace qu'on peut prendre unitaire. Du fait de la définition de l'énergie, on a donc

$$p^\alpha = \frac{E}{c} u^\alpha + p N^\alpha \,, \tag{5.2.16}$$
$$u_\mu u^\mu = 1 \,, \tag{5.2.17}$$
$$u_\mu N^\mu = 0 \,, \tag{5.2.18}$$
$$N_\mu N^\mu = -1 \,, \tag{5.2.19}$$

p représentant le module de l'impulsion de la particule ($E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$). Dans notre système de coordonnées comobiles, le vecteur N^μ peut ensuite être décomposé sous la forme d'un vecteur tridimensionnel orthonormé n^i. On obtient alors, pour la quadri-impulsion d'une particule relativiste,

$$p^\alpha = \frac{p}{a}\left(1, n^i\right) \,, \tag{5.2.20}$$
$$p_\alpha = ap\left(1, -n_i\right) \,, \tag{5.2.21}$$
$$n_i = \gamma_{im} n^m \,, \tag{5.2.22}$$
$$n_m n^m = 1 \,. \tag{5.2.23}$$

À l'aide de la fonction de distribution, on peut alors définir localement une densité de particules n, une densité d'énergie ρ et une pression P :

$$n = \int f(\eta, x^i, p_j) \frac{a^{-3}\,\mathrm{d}^3 p_j}{\sqrt{a^{-8}|g|}} \,, \tag{5.2.24}$$
$$\rho = \int E f(\eta, x^i, p_j) \frac{a^{-3}\,\mathrm{d}^3 p_j}{\sqrt{a^{-8}|g|}} \,, \tag{5.2.25}$$
$$P = \frac{1}{3}\int \frac{p^2}{E} f(\eta, x^i, p_j) \frac{a^{-3}\,\mathrm{d}^3 p_j}{\sqrt{a^{-8}|g|}} \,. \tag{5.2.26}$$

On retrouve bien le résultat attendu, à savoir que

$$T^0_0 = \rho \,, \tag{5.2.27}$$
$$T^i_j = P\delta^i_j \,. \tag{5.2.28}$$

La composante $_{00}$ du tenseur énergie-impulsion représente la densité d'énergie interne, et les composantes diagonales $_{ii}$ de la partie spatiale représentent la pression.

2.3 Quelques résultats importants

L'équation de conservation $D_\mu T^{\mu 0} = 0$ se réécrit

$$\mathrm{d}(\rho V) + P\mathrm{d}V = 0 \,, \tag{5.2.29}$$

où V est un volume comobile proportionnel à a^3. Cette équation est l'analogue de la première loi de la thermodynamique

$$\mathrm{d}(U+K) = \delta W + \delta Q + \delta C \,. \tag{5.2.30}$$

Le terme ρV s'identifie à la somme de l'énergie interne U et de l'énergie cinétique macroscopique K (qui ici est nulle car nous sommes dans le référentiel au repos des particules). La quantité de travail reçue est $\delta W = -P\mathrm{d}V$, la quantité de chaleur reçue est $\delta Q = T\mathrm{d}S$, et le "travail chimique" $\delta C = \mu \mathrm{d}N$ représente l'énergie reçue des réactions qui font varier le nombre de particules. On voit donc qu'un fluide qui n'interagit que gravitationnellement est tel que

$$\frac{\mathrm{d}S}{k_B} = -\frac{\mu}{k_B T}\mathrm{d}N \,. \tag{5.2.31}$$

Quand le nombre de particules par unité de volume est conservé ($\delta C = 0$), cela implique que l'expansion est adiabatique[3]. Cela justifie le terme de "vitesse du son" que nous avons déjà utilisé pour l'expression $c_{\mathrm{s}} = c\sqrt{\dot{P}/\dot{\rho}}$. De plus, dans la majeure partie des cas, le potentiel chimique est faible, ce qui fait que même quand il y a variation du nombre de particules, l'expansion se fait à entropie constante[4].

Les différentes quantités thermodynamiques peuvent être calculées dans certains cas limites avec la fonction de distribution (**5.2.15**). Pour des bosons et des fermions de potentiel chimique nul, on trouve respectivement

$$\rho_{\mathrm{B}} = g_{\mathrm{B}}\frac{\pi^2}{30}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \,, \tag{5.2.32}$$

$$\rho_{\mathrm{F}} = \frac{7}{8}g_{\mathrm{F}}\frac{\pi^2}{30}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \,, \tag{5.2.33}$$

où g_{B} et g_{F} représentent le nombre de degrés de liberté internes de la particule considérée. De même, la densité d'entropie vaut respectivement

$$s_{\mathrm{B}} = k_B g_{\mathrm{B}}\frac{2\pi^2}{45}\left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \,, \tag{5.2.34}$$

$$s_{\mathrm{F}} = \frac{7}{8}k_B g_{\mathrm{B}}\frac{2\pi^2}{45}\left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \,. \tag{5.2.35}$$

Du fait que l'entropie contenue dans un volume comobile est constante au cours du temps, on peut calculer de combien est réchauffé le fluide de photons par rapport au fluide de neutrinos lors de l'annihilation électrons-positrons. La variation de température est uniquement liée au nombre d'états de spin des espèces présentes. D'après (**5.2.34–5.2.35**), on a

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left(\frac{g_\gamma}{g_\gamma + \frac{7}{8}g_{\mathrm{e^+e^-}}}\right)^{\frac{1}{3}} \,, \tag{5.2.36}$$

soit un rapport $(\frac{4}{11})^{\frac{1}{3}} \simeq 0.714$. Le fond cosmologique de neutrinos devrait donc probablement avoir une température d'environ

$$T_\nu \simeq 1.95\ \mathrm{K} \,, \tag{5.2.37}$$

[3]Cela signifie que la densité d'entropie s, qui s'écrit $s = (\rho + P - \mu n)/T$, décroît comme a^{-3} (*cf* par exemple [Padmanabhan, 1993]).

[4]En effet, même quand dN est non nul, comme par exemple lors de l'annihilation électrons-positrons, le rapport $\frac{\mu}{k_B T}$ est très faible. Pour les électrons relativistes, il est de l'ordre de l'asymétrie baryonique, soit 10^{-9}.

et leur densité d'énergie est d'environ

$$\rho_\nu = \frac{7}{8}\frac{6}{2}\left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}}\rho_\gamma \simeq 0.681\rho_\gamma\,. \tag{5.2.38}$$

D'une manière générale, le rapport des températures entre les photons et une espèce relativiste qui s'est découplée à une époque lointaine dépend uniquement de l'évolution du nombre de degré de liberté total des espèces couplées aux photons. Dans le modèle standard, ce nombre varie[5] au cours du temps de 106.75 à 2.

2.4 Équation de Boltzmann

À partir de maintenant, nous allons nous placer en coordonnées comobiles, et considérer un système de coordonnées cartésiennes pour les sections spatiales.

Intuitivement, f représente la densité de particules présentes à l'instant η au voisinage du point de coordonnées x^i, et d'impulsion $\boldsymbol{p}$, c'est-à-dire la densité de particules présentes au même endroit et dont les géodésiques sont voisines les unes des autres. Considérons un ensemble de particules sans interactions non gravitationnelles. Ces particules suivent donc des géodésiques de l'espace-temps, et l'évolution temporelle de f suit celle des particules sur les géodésiques qu'elles parcourent. Soit λ un paramètre affine de la trajectoire des photons (*i.e.* tel que $p^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\lambda$). La fonction de distribution $f(x^\alpha, p_i)$ évolue selon :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\mathrm{d}p_u}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial f}{\partial p_u}\,. \tag{5.2.39}$$

L'équation des géodésiques d'une particule s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}p^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0\,. \tag{5.2.40}$$

On en déduit alors l'évolution temporelle de la fonction de distribution :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + n^u\frac{\partial f}{\partial x^u} - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\frac{p^\nu p^\rho}{p^0}\frac{\partial f}{\partial p^\mu}\,. \tag{5.2.41}$$

(*NB* : noter qu'on est passé des p_i aux p^μ. Cela est rendu possible par le fait que $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0$.) Au lieu des variables p^α, on peut utiliser les grandeurs E et n^i qui caractérisent la quadri-impulsion des photons. L'équation des géodésiques (**5.2.40**) donne alors

$$\dot{E} = -\mathcal{H}E\,, \tag{5.2.42}$$
$$\dot{n}^i = -\Gamma^i{}_{uv}n^u n^v\,, \tag{5.2.43}$$

dont on déduit :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}(\eta, x^i, E, n^j) = \frac{\partial f}{\partial \eta} + n^u\frac{\partial f}{\partial x^u} - \mathcal{H}E\frac{\partial f}{\partial E} - \Gamma^v{}_{rs}n^r n^s\frac{\partial f}{\partial n^v}\,. \tag{5.2.44}$$

[5] Ce résultat inclut les contributions des trois familles d'électrons ($\frac{21}{2}$), des trois familles de neutrinos ($\frac{21}{4}$), des six quarks (63), du photon (2), des bosons de l'interaction faible (6), des gluons (16), auxquelles il faut rajouter le graviton (2) et le doublet de Higgs (2).

Cette équation a été dérivée dans l'hypothèse où les particules du fluide suivent des géodésiques, et donc ne subissent pas de collisions. Dans ce cas, le nombre de particules sur une géodésique donnée est contant au cours du temps, et on a donc

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}(\eta, x^i, E, n_j) = 0 \,. \qquad \mathbf{(5.2.45)}$$

Il s'agit de l'*équation de Boltzmann non collisionnelle*. Quand les particules présentes subissent des collisions, il faut ajouter dans le membre de droite un *terme de collision* $C[f]$, qu'on peut séparer en une partie entrante $C^+[f] > 0$ et une partie sortante $-C^-[f] < 0$, et l'équation de Boltzmann se réécrit alors

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}(\eta, x^i, E, n_j) = C^+[f] - C^-[f] \,. \qquad \mathbf{(5.2.46)}$$

Une des difficultés de l'équation de Boltzmann réside dans la recherche d'un terme de collision correct. Dans beaucoup de cas, le terme de collision fait tendre la fonction de distribution vers une certaine limite. Dans ce cas particulier, une fois la limite atteinte, le terme de collision est nul (plus précisément, les termes entrant et sortant sont opposés). Dans ce cas, tout se passe comme si on avait un ensemble de particules non collisionnelles.

On connaît en espace plat la forme que peuvent prendre les fonctions de distribution à l'équilibre : c'est tout simplement l'équation (**5.2.15**), où la température et le potentiel chimique sont constants au cours du temps. Il est naturel de garder la même fonction de distribution comme point de départ dans un espace FLRW. En effet, le temps de Hubble est très grand devant tous les autres temps caractéristiques microscopiques qui vont intervenir dans notre problème. Nous allons donc maintenant regarder l'évolution de la fonction de distribution (**5.2.15**) dans un espace FLRW. Pour une distribution homogène et isotrope, f ne dépend pas de x^i ni de n^j. On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} - \mathcal{H} E \frac{\partial f}{\partial E} = 0 \,. \qquad \mathbf{(5.2.47)}$$

Cette équation se réécrit, en terme de la température et du potentiel chimique :

$$\frac{\dot{E} - \dot{\mu}}{E - \mu} - \frac{\dot{T}}{T} = 0 \,. \qquad \mathbf{(5.2.48)}$$

Pour une distribution de photons, $\mu = 0$ et $\dot{E} = -\mathcal{H} E$, ce qui permet de trouver la variation de la température,

$$T_\gamma \propto \frac{1}{a} \,, \qquad \mathbf{(5.2.49)}$$

comme nous l'avions déjà annoncé au chapitre 1. Il en est bien sûr de même pour toute espèce relativiste. Pour des espèces non relativistes, on a $E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$ et le potentiel chimique est d'environ[6] $\mu \simeq mc^2$. L'équation des géodésiques donne encore $p \propto a^{-1}$, et on a alors

$$T_{\mathrm{NR}} \propto \frac{1}{a^2} \,. \qquad \mathbf{(5.2.51)}$$

[6]Un calcul précis donne

$$\mu - mc^2 \propto k_B T \log\left(\sqrt{\frac{k_B T}{mc^2}}\frac{mc^2}{hn^{\frac{1}{3}}}\right) \,, \qquad \mathbf{(5.2.50)}$$

dont on vérifie facilement qu'il reste toujours petit devant mc^2 dans toutes les situations qui vont nous intéresser.

ceci est conforme à l'intuition : la quantité de mouvement $\boldsymbol{p}$ et la vitesse $\boldsymbol{v}$ décroissent en a^{-1}, par conséquent la température (qui dans le cas non relativiste est une mesure de l'énergie cinétique moyenne des particules) décroît en a^{-2}. Ceci nous prouve qu'une fonction de distribution en forme de corps noir reste un corps noir au cours de l'expansion[7].

3 Équation de Boltzmann perturbée

3.1 Définitions

Nous allons maintenant nous intéresser à une fonction de distribution perturbée autour de l'équilibre thermique, qu'on va écrire $\delta f(\eta, x^i, E, n_j)$ ou $\delta f(\eta, x^i, p_j)$. Pour simplifier la discussion, nous poserons une nouvelle variable, q_i qui sera un 3-vecteur de module E :

$$q^i = pn^i \ , \qquad \textbf{(5.3.1)}$$

$$q^i = \gamma^{iu} q_u \ , \qquad \textbf{(5.3.2)}$$

$$q_u q^u = E^2 \ , \qquad \textbf{(5.3.3)}$$

et nous allons désormais considérer $\delta f(\eta, x^i, q_j)$. La partie perturbée est inhomogène (dépendance en x^i) et anisotrope (dépendance en q_j/E). Un exemple d'une telle fonction de distribution est bien sûr donnée par la distribution des photons du rayonnement fossile dont nous mesurons les anisotropies (*i.e.* la dépendance en n_j) au point où nous nous trouvons. Nous allons d'abord regarder comment se transforme cette partie perturbée lors d'un changement de coordonnées. Le vecteur q_j est un 3-vecteur, du même type que le vecteur vitesse v_i défini en (**4.3.5**), à ceci près que le module de sa partie non perturbée est E et non 1. Par conséquent, lors d'un changement de variable infinitésimal, les coordonnées et les moments se transforment respectivement selon

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha \ , \qquad \textbf{(5.3.4)}$$

$$q'_i = q_i + E\dot{L}_i \ . \qquad \textbf{(5.3.5)}$$

Dans le dernière équation, nous avons utilisé le fait que le vecteur q_i est défini sur une hypersurface de genre espace, et n'a que trois composantes. Comme la fonction de distribution est un scalaire, on a par définition

$$f'(x'^\alpha, q'_i) = f(x^\alpha, q_i) \ . \qquad \textbf{(5.3.6)}$$

Par conséquent,

$$f(x^\alpha, q_i) = f'(x^\alpha + \xi^\alpha, q_i + E\dot{L}_i) = f'(x^\alpha, q_i) + \xi^\mu \partial_\mu f + E\dot{L}_u \frac{\partial f}{\partial q_u} \ . \qquad \textbf{(5.3.7)}$$

Cette dernière formule donne la façon dont se transforme la fonction de distribution par changement de coordonnées. Ce n'est *pas* la formule habituelle de transformation d'une quantité scalaire, car la fonction de distribution ne dépend pas uniquement des coordonnées, mais aussi des impulsions des particules. On a donc finalement

$$\mathcal{L}_\xi(f) = \xi^\mu \partial_\mu f + E\dot{L}^u \frac{\partial f}{\partial q^u} \ . \qquad \textbf{(5.3.8)}$$

[7]Le fait que la fonction de distribution reste un corps noir au cours du temps n'est en fait pas tout à fait trivial, et en l'absence d'un processus de thermalisation n'est vrai que pour des particules ultra relativistes ou non relativistes. Lors du passage de l'un à l'autre de ces régimes, un spectre de corps noir se déforme. Pour plus de détails, on pourra par exemple consulter [Bernstein, 1988].

Cependant, f ne dépend que de $E = \sqrt{q_u q^u}$. Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial E}\frac{q^i}{E} = \frac{\partial f}{\partial E} n^i \ . \tag{5.3.9}$$

On en déduit alors

$$\delta f \underset{\mathcal{L}_\xi}{\longrightarrow} \delta f - \dot{f} T - n^u \dot{L}_u E \frac{\partial f}{\partial E} \ . \tag{5.3.10}$$

Ainsi, l'expression suivante est-elle invariante de jauge :

$$\delta f^\flat = \delta f - \dot{f}\frac{C}{\mathcal{H}} - E\frac{\partial f}{\partial E} n^u \dot{E}_u \ . \tag{5.3.11}$$

Cette expression s'identifie à la partie perturbée de la fonction de distribution en jauge de feuilletage plat. (*NB* : dans la dernière équation, la quantité E représente l'énergie de la particule, alors que E_i représente les parties scalaire et vectorielle de la perturbation spatiale de la métrique, *i.e.* $E_i = \nabla_i E + \bar{E}_i$, où ce dernier E est cette fois une perturbation de la métrique, *cf* équation **4.2.6**).

3.2 Dérivation

Perturbons l'équation de Boltzmann que nous avons déjà écrite en (**5.2.44**). On trouve alors

$$\dot{\delta f} + n^u \partial_u \delta f - \mathcal{H} E \frac{\partial \delta f}{\partial E} - \Gamma^v{}_{rs} n^r n^s \frac{\partial \delta f}{\partial n^v} = (n^u \nabla_u A - n^v \dot{B}_v + \frac{1}{2} n^r n^s \dot{h}_{rs}) E \frac{\partial f}{\partial E} + C[\delta f] \ . \tag{5.3.12}$$

Outre le membre de gauche et le terme de collision perturbé qui sont les analogues des termes présents dans (**5.2.44**), il apparaît des termes issus des symboles de Christoffel perturbés (voir annexe C), qui décrivent l'influence de la gravité sur l'évolution de la fonction de distribution. Le terme en A est le terme de dilatation du temps, le terme en B_i est le terme d'entraînement, le terme proportionnel à la trace de h_{ij} représente l'influence de la courbure de l'espace, et la partie sans trace de h_{ij} représente les effets de marée.

Intégrons d'abord cette équation sur l'énergie. On pose donc

$$I(\eta) = \int f(\eta, E) E^3 \, \mathrm{d}E \ , \tag{5.3.13}$$

$$\delta I(\eta, x^i, n_j) = \int \delta f(\eta, x^i, E, n_j) E^3 \, \mathrm{d}E \ , \tag{5.3.14}$$

$$C[\delta I] = \int C[\delta f] E^3 \, \mathrm{d}E \ . \tag{5.3.15}$$

Le terme I représente la densité d'énergie se propageant dans la direction $\hat{\boldsymbol{n}}$ (ou *brillance*). D'après (**5.2.47**), il évolue selon l'équation

$$\dot{I} = -4\mathcal{H} I \ , \tag{5.3.16}$$

soit $I \propto a^{-4}$, comme attendu puisqu'il s'agit d'une densité d'énergie de particules relativistes. En utilisant ces résultats dans l'équation de Boltzmann, on trouve alors

$$\dot{\delta I} + n^u \partial_u \delta I + 4\mathcal{H}\delta I - \Gamma^v{}_{rs} n^r n^s \frac{\partial \delta I}{\partial n^v} = -4I(n^u \nabla_u A - n^v \dot{B}_v + \frac{1}{2} n^r n^s \dot{h}_{rs}) + C[\delta I] \ , \tag{5.3.17}$$

que l'on peut réécrire en

$$\left[\frac{\partial}{\partial\eta}+n^u\partial_u+4\mathcal{H}\right]\left(\delta I+4I\left(C+n^v(\nabla_v\dot{E}+\dot{\bar{E}}_v)\right)\right)+n^un^v(\nabla_u-\partial_u)(\nabla_v\dot{E}+\dot{\bar{E}}_v)$$
$$+4I\left(n^u\nabla_u(\Psi+\Phi)+n^v(\bar{\Psi}_v+\bar{\Phi}_v)+n^un^v\ddot{\bar{\bar{E}}}_{uv}\right)-\Gamma^w{}_{uv}n^un^v\frac{\partial\delta I}{\partial n^w}=C[\delta I]\,. \quad \mathbf{(5.3.18)}$$

Nous allons maintenant entrer dans la partie technique de la dérivation. On peut décomposer $\delta I(\eta,x^i,n_j)$ en sa partie angulaire dépendant de n_j uniquement. Pour cela, on définit une famille de tenseurs à ℓ indices,

$$n^{i_1\ldots i_\ell}\equiv n^{i_1}\ldots n^{i_\ell}\,, \quad \mathbf{(5.3.19)}$$

où n^i est la i-ème composante du vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{n}}$. On peut alors décomposer δI selon

$$\delta I(\eta,x^i,n^j)=\sum_\ell n^{u_1\ldots u_\ell}\tilde{\delta}I_{u_1\ldots u_\ell}(\eta,x^i)\,. \quad \mathbf{(5.3.20)}$$

Notons que d'après les équations (**5.3.10**) et (**5.3.11**), seules les composantes $\tilde{\delta}I$ et $\tilde{\delta}I_{i_1}$ vont être modifiées par transformation de jauge. Cela résulte du lemme de Stewart-Walker : seuls les multipoles d'ordre 0 et 1 de la fonction de distribution non perturbée sont non nulles, ce qui implique que tous les autres multipoles d'ordre $\ell\geq 2$, sont invariantes de jauge.

La décomposition ci-dessus n'est pas unique. Pour éviter ce problème, il faut imposer des conditions supplémentaires sur les termes $\tilde{\delta}I_{i_1\ldots i_\ell}$. On peut par exemple prendre les $\tilde{\delta}I_{i_1\ldots i_\ell}$ symétriques (car les $n^{i_1\ldots i_\ell}$ le sont), et sans trace[8]. Dans ce cas, il n'y a que $2\ell+1$ composantes indépendantes[9]. Enfin, on peut dans ce cas également changer les tenseurs $n^{i_1\ldots i_\ell}$ en leur partie sans trace, que nous noterons $\tilde{n}^{i_1\ldots i_\ell}$.

On peut maintenant commencer à simplifier l'équation (**5.3.12**). Les termes en ∂_i appliqués à la décomposition multipolaire (**5.3.20**) ne vont concerner que les tenseurs $\tilde{\delta}I_{i_1\ldots i_\ell}$ (car x^i et n_j sont des variables *indépendantes*). On peut les combiner aux symboles de Christoffel de (**5.3.12**) auquel cas le tout se simplifie pour ne laisser que des dérivées covariantes. On obtient alors

$$\left[\frac{\partial}{\partial\eta}+4\mathcal{H}\right]\delta I^\flat+\sum_\ell\tilde{n}^v\tilde{n}^{u_1\ldots u_\ell}\nabla_v\tilde{\delta}I_{u_1\ldots u_\ell}$$
$$+4I\left(\tilde{n}^p\nabla_p(\Psi+\Phi)+\tilde{n}^q(\bar{\Psi}_q+\bar{\Phi}_q)+\tilde{n}^{rs}\ddot{\bar{\bar{E}}}_{rs}\right)=C[\delta I]\,, \quad \mathbf{(5.3.21)}$$

où on a défini la variable invariante de jauge $\delta I^\flat$ de la même façon que $\delta f^\flat$ (pour des raisons de lisibilité, nous omettrons cependant l'indice $\flat$ dans les termes de la décomposition multipolaire). Posons enfin

$$\Delta^\flat\equiv\frac{\delta I^\flat}{I}\,, \quad \mathbf{(5.3.22)}$$

$$\Theta^\flat\equiv\frac{1}{4}\Delta^\flat\,, \quad \mathbf{(5.3.23)}$$

$$C[\Theta]\equiv\frac{1}{4}\frac{C[\delta I]}{I}\,. \quad \mathbf{(5.3.24)}$$

[8] Prenons un exemple simple pour illustrer ceci. Supposons qu'on ait tous les $\tilde{\delta}I_{i_1\ldots i_\ell}$ nuls à l'exception de $\ell=2$ pour lequel $\tilde{\delta}I_{ij}=I^A\gamma_{ij}+I^B_{ij}$, avec I^B_{ij} de trace nulle. On a alors $\delta I=I^A+I^B_{uv}n^un^v$. Le terme en I^A peut alors être mis dans le terme $\tilde{\delta}I$.

[9] En effet, un tenseur à ℓ indices possède en principe 3^ℓ composantes indépendantes. Si on impose que le tenseur soit symétrique, le nombre de composantes indépendantes est égal au nombre de solutions entières positives de l'équation $a+b+c=\ell$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(\ell+1)(\ell+2)$. Si on impose en plus que le tenseur soit sans trace, on rajoute $\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ équations de contraintes, ce qui fait passer le nombre de composantes indépendantes à $2\ell+1$.

La quantité $\Delta^\flat$ représente donc le contraste de densité d'énergie des particules se propageant dans la direction $\boldsymbol{\hat{n}}$ et mesuré dans la jauge de feuilletage plat. La quantité $\Theta^\flat$ représente le contraste de température correspondant[10]. On trouve alors[11]

$$\dot{\Theta}^\flat + \sum_\ell \tilde{n}^v \tilde{n}^{u_1 \ldots u_\ell} \nabla_v \tilde{\Theta}_{u_1 \ldots u_\ell} + \left(\tilde{n}^p \nabla_p (\Psi + \Phi) + \tilde{n}^q (\bar{\Psi}_q + \bar{\Phi}_q) + \tilde{n}^{rs} \dot{\bar{\bar{E}}}_{rs} \right) = C[\Theta] . \qquad \textbf{(5.3.25)}$$

Il nous faut maintenant décomposer cette dernière expression en terme de tenseurs symétriques et sans trace. Dans un premier temps, nous allons regarder de quelle façon on peut décomposer les perturbations $\tilde{\Theta}_{i_1 \ldots i_\ell}$ (§3.3), puis nous nous intéresserons à la forme des tenseurs $\tilde{n}^{i_1 \ldots i_\ell}$ (§3.4).

3.3 Décomposition SVT

De même que pour la pression anisotrope, qui était déjà un tenseur symétrique et sans trace, nous allons décomposer les multipoles de la fonction de distribution en partie scalaire, vectorielle, tensorielle, *etc*. On parle donc de *décomposition SVT*[12]. La partie scalaire de $\tilde{\Theta}_{i_1 \ldots i_\ell}$, que nous noterons $\tilde{\Theta}^{\rm S}_{i_1 \ldots i_\ell}$, va être définie à partir d'une quantité scalaire notée $\tilde{\Theta}^{\rm S}_\ell$ par

$$\tilde{\Theta}^{\rm S}_{i_1 \ldots i_\ell} \propto \left[\nabla_{i_1 \ldots i_\ell} \tilde{\Theta}^{\rm S}_\ell \right]^{\rm STF} \qquad \textbf{(5.3.26)}$$

(le facteur de proportionnalité dans cette relation sera fixé plus tard). Le terme STF signifie ici qu'on prend la partie symétrique sans trace[13] de la quantité en question (voir paragraphe suivant). On peut définir de même les parties vectorielle $\tilde{\Theta}^{\rm V}_{i_1 \ldots i_\ell}$ et tensorielle $\tilde{\Theta}^{\rm T}_{i_1 \ldots i_\ell}$ par

$$\tilde{\Theta}^{\rm V}_{i_1 \ldots i_\ell} \propto \left[\nabla_{i_1 \ldots i_{\ell-1}} \tilde{\Theta}^{\rm V}_{\ell, i_\ell} \right]^{\rm STF} , \qquad \textbf{(5.3.27)}$$

$$\tilde{\Theta}^{\rm T}_{i_1 \ldots i_\ell} \propto \left[\nabla_{i_1 \ldots i_{\ell-2}} \tilde{\Theta}^{\rm T}_{\ell, i_{\ell-1} i_\ell} \right]^{\rm STF} , \qquad \textbf{(5.3.28)}$$

et ainsi de suite. Pour que la décomposition soit unique, il est clair que nous devons imposer que les vecteurs $\tilde{\Theta}^{\rm V}_{\ell, i_\ell}$, tenseurs $\tilde{\Theta}^{\rm T}_{\ell, i_{\ell-1} i_\ell}$, *etc* soient tous de divergence et de trace nulles. Nous avons vu qu'il y avait en tout $2\ell + 1$ composantes indépendantes pour un tenseur STF. Il est clair que sur ces $2\ell + 1$ composantes, il n'y a qu'une seule composante scalaire. En faisant $\ell = 1$, on voit aussi qu'il y a deux composantes vectorielles indépendantes[14]. En faisant $\ell = 2$, on déduit qu'il y a également deux composantes tensorielles indépendantes, et ainsi de suite. Le monopole de la fonction de distribution $\tilde{\Theta}$ est une quantité scalaire qui dans nos notations s'écrit $\tilde{\Theta}^{\rm S}_0$. Le dipole de la fonction de distribution $\tilde{\Theta}_i$ est un vecteur qui possède une composante scalaire $\nabla_i \tilde{\Theta}^{\rm S}_1$ et deux composantes vectorielles indépendantes $\tilde{\Theta}^{\rm V}_{1,i}$. Le quadrupole de la fonction de distribution $\tilde{\Theta}_{ij}$ comporte une composante scalaire $\tilde{\Theta}^{\rm S}_2$, deux composantes vectorielles $\tilde{\Theta}^{\rm V}_{2,i}$ et deux composantes tensorielles $\tilde{\Theta}^{\rm T}_{2,ij}$, et ainsi de suite.

[10] Si la distribution est anisotrope mais thermalisée, il existe effectivement un contraste de température $\Theta^\flat(x^\alpha, n_i)$. Dans le cas où la distribution n'est pas thermalisée, on peut par analogie définir la quantité $\Theta^\flat$ en prenant simplement le quart du contraste de densité d'énergie correspondant. C'est ce que nous ferons implicitement ici.

[11] Nous nous plaçons en jauge de feuilletage plat, mais pour des raisons de lisibilité, nous omettrons l'indice $\flat$ dans les termes de la décomposition multipolaire **5.3.20**.

[12] Le terme "tensoriel" désigne ici un tenseur d'ordre deux uniquement, il n'y a pas d'appellation pour les tenseurs d'ordre plus élevé.

[13] Symmetric TraceFree

[14] C'est évident dans l'espace de Fourier où les composantes vectorielles "vivent" sur le plan orthogonal au vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$.

Pour un multipole donné, nous noterons la nature de la perturbation par l'indice $^{(m)}$, où m vaudra 0 pour la composante scalaire, ± 1 pour les composantes vectorielles, ± 2 pour les composantes tensorielles, *etc*. Pour un multipole ℓ donné, les $2\ell+1$ composantes indépendantes vont donc être indexées par l'entier relatif m, avec

$$-\ell \leq m \leq \ell\,. \tag{5.3.29}$$

Par exemple, pour la composante tensorielle du multipole $\ell = 2$, notée $\tilde{\Theta}^{\mathrm{T}}_{i_1 i_2}$, il existe une base de deux tenseurs STF, que nous noterons $\tilde{b}^{(\pm 2)}_{i_1 i_2}$ telle que

$$\tilde{\Theta}^{\mathrm{T}}_{i_1 i_2} = \Theta^{(-2)}_2 \tilde{b}^{(-2)}_{i_1 i_2} + \Theta^{(2)}_2 \tilde{b}^{(2)}_{i_1 i_2}\,. \tag{5.3.30}$$

Nous allons maintenant chercher une base pour chacune de ces différentes quantités.

3.4 Formalisme STF

Cherchons maintenant une base des tenseurs STF de rang ℓ. Un tenseur STF est construit de la façon suivante : d'abord, on prend la partie symétrique S d'un tenseur T,

$$S_{i_1 \ldots i_\ell} = \frac{1}{\ell!} \sum_{\pi \in \mathcal{U}_\ell} T_{i_{\pi(1)} \ldots i_{\pi(\ell)}}\,, \tag{5.3.31}$$

où π représente un élément du groupe de permutations à ℓ éléments $\mathcal{U}_\ell$. Puis on enlève toutes les traces de T. Pour cela, on contracte T $E[\ell/2]$ fois ($E[\ell/2]$ représentant la partie entière de $\ell/2$). On obtient alors un tenseur à 0 ou 1 indice, selon que ℓ est pair ou impair. On enlève ensuite ce terme multiplié par $\frac{3}{5}\gamma_{ij}$ puis symétrisé à T contracté $E[\ell/2]-1$ fois (qui est un tenseur à 2 ou 3 indices), et ainsi de suite. La partie STF de T se calcule ainsi par récurrence, et on obtient finalement [Thorne, 1980]

$$[T_{i_1 \ldots i_\ell}]^{\mathrm{STF}} = \sum_{j=0}^{E[\ell/2]} a^{\ell j} \gamma_{(i_1 i_2} \ldots \gamma_{i_{2j-1} i_{2j}} S_{i_{2j+1} \ldots i_\ell) u_1 u_2 \ldots u_{2j-1} u_{2j}} \gamma^{u_1 u_2} \ldots \gamma^{u_{2j-1} u_{2j}}\,, \tag{5.3.32}$$

$$a^{\ell j} \equiv \frac{2^\ell (\ell!)^2}{(2\ell)!} \frac{(-)^j (2\ell - 2j)!}{2^\ell (2\ell - j)! (\ell - j)! j!}\,. \tag{5.3.33}$$

On peut se convaincre qu'une base de tenseurs STF peut être construite en prenant les parties STF des tenseurs $\tilde{\mathcal{Y}}^{\ell m}$ de composantes

$$\tilde{\mathcal{Y}}^{\ell m}_{i_1 \ldots i_\ell} = i^{m - |m|} C^{\ell m} \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell! (\ell - m)!} (\delta^1_{i_1} \pm i \delta^2_{i_1}) \ldots (\delta^1_{i_{|m|}} \pm i \delta^2_{i_{|m|}}) \delta^3_{i_{|m|+1}} \ldots \delta^3_{i_\ell}\,, \tag{5.3.34}$$

où m varie de $-\ell$ à ℓ, et où on prend le signe $+$ quand $m > 0$ et le signe $-$ quand $m < 0$. La constante de normalisation $C^{\ell m}$ sera fixée plus tard. Après quelques manipulations (voir annexe E), on obtient finalement

$$\mathcal{Y}^{\ell m}_{i_1 \ldots i_\ell} = C^{\ell m} \sum_{j=0}^{E[(\ell - m)/2]} a^{\ell m j} \delta^+_{(i_1} \ldots \delta^+_{i_m} \delta^3_{i_{m+1}} \ldots \delta^3_{i_{\ell - 2j}} \gamma_{i_{\ell-2j+1} i_{\ell-2j+2}} \ldots \gamma_{i_{\ell-1} i_\ell)}\,, \tag{5.3.35}$$

$$\delta^+_p = \delta^1_p + i \delta^2_p\,, \tag{5.3.36}$$

$$a^{\ell m j} = \frac{(-)^\ell}{2^\ell j! (\ell - j)!} \frac{(2\ell - 2j)!}{(\ell - m - 2j)!}\,, \tag{5.3.37}$$

pour $m > 0$, et

$$\mathcal{Y}^{\ell m}_{i_1 \ldots i_\ell} = (-)^m \mathcal{Y}^{\ell |m| *}_{i_1 \ldots i_\ell} , \qquad \textbf{(5.3.38)}$$

pour $m < 0$. Il existe bien sûr de nombreux autres choix possibles de bases de tenseurs STF. Cependant, l'intérêt de celle-ci est qu'en prenant

$$C^{\ell m} = (-)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} , \qquad \textbf{(5.3.39)}$$

la contraction de $\mathcal{Y}^{\ell m}_{i_1 \ldots i_\ell}$ avec le tenseur $n^{i_1} \ldots n^{i_\ell}$, où $\hat{\boldsymbol{n}}$ est un vecteur unitaire de composantes $n^x = \sin\theta\cos\varphi$, $n^y = \sin\theta\sin\varphi$, $n^z = \cos\theta$, donne alors une harmonique sphérique :

$$\mathcal{Y}^{\ell m}_{u_1 \ldots u_\ell} n^{u_1} \ldots n^{u_\ell} = \mathcal{Y}^{\ell m}_{u_1 \ldots u_\ell} [n^{u_1} \ldots n^{u_\ell}]^{\rm STF} = Y^m_\ell(\theta,\varphi) , \qquad \textbf{(5.3.40)}$$

c'est-à-dire qu'il existe une équivalence entre harmoniques sphériques et tenseurs STF. Cela signifie que tout problème traité à l'aide d'un de ces deux outils peut être traité de façon strictement équivalente avec l'autre. Cela n'a en fait rien de surprenant, et nous aurions très bien pu dès le début décomposer la partie angulaire de la fonction de distribution en harmoniques sphériques (mais le terme en $\partial \delta f / \partial n^j$ aurait été un peu plus difficile à gérer). Finalement, une fonction des coordonnées angulaires θ et φ, notée $f(\theta,\varphi) = f(n^i)$ peut ainsi être décomposée comme

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell,m} f^\ell_m Y^m_\ell(\theta,\varphi) , \qquad \textbf{(5.3.41)}$$

$$f(n^i) = \sum_\ell \mathcal{F}_{u_1 \ldots u_\ell} [n^{u_1} \ldots n^{u_\ell}]^{\rm STF} , \qquad \textbf{(5.3.42)}$$

avec

$$f^\ell_m = \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{2^\ell (\ell!)^2}{(2\ell)!} \mathcal{F}^{u_1 \ldots u_\ell} \mathcal{Y}^{\ell m *}_{u_1 \ldots u_\ell} , \qquad \textbf{(5.3.43)}$$

$$\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_\ell} = \sum_m f^\ell_m \mathcal{Y}^{\ell m}_{i_1 \ldots i_\ell} . \qquad \textbf{(5.3.44)}$$

3.5 Classification des perturbations

Il nous faut maintenant discuter de la forme des tenseurs symétriques sans trace $\tilde{\Theta}_{i_1 \ldots i_\ell}$. Nous allons supposer à partir de maintenant que nous sommes en espace plat, et nous allons nous placer dans l'espace de Fourier. Choisissons une base telle que le vecteur $\boldsymbol{k}$ soit de même direction et de même sens que le vecteur de base $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ (soit $\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{e}}_3$). D'après (**5.3.26**), la partie scalaire de $\widehat{\tilde{\Theta}}_{i_1 \ldots i_\ell}$ va ainsi être proportionnelle à $\tilde{k}_{i_1 \ldots i_\ell} \widehat{\tilde{\Theta}}{}^{\rm S}_0$. En contractant avec le tenseur STF $\tilde{n}^{i_1 \ldots i_\ell}$, il est clair que l'on va obtenir un terme proportionnel au polynôme de Legendre P_ℓ, c'est-à-dire à l'harmonique sphérique Y^0_ℓ. Ainsi, le mode scalaire du multipole ℓ est-il lié à l'harmonique sphérique Y^0_ℓ :

$$\tilde{n}^{u_1 \ldots u_\ell} \widehat{\tilde{\Theta}}{}^{\rm S}_{u_1 \ldots u_\ell} \propto Y^0_\ell \widehat{\Theta}{}^{(0)}_\ell . \qquad \textbf{(5.3.45)}$$

La quantité physiquement intéressante qui décrit la partie scalaire du ℓ-ème multipole sera donc notée $\widehat{\Theta}{}^{(0)}_\ell$. Nous fixerons le facteur de proportionnalité ultérieurement. De même, les modes vectoriels peuvent être générés par des vecteurs orthogonaux à $\boldsymbol{k}$, c'est-à-dire avec notre choix de base, contenus dans le plan généré par les vecteurs $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ et $\hat{\boldsymbol{e}}_2$. On peut donc prendre $\hat{\boldsymbol{e}}_1 \pm i\hat{\boldsymbol{e}}_2$ comme base des modes vectoriels. Dans ce cas, la contraction avec le tenseur STF $\tilde{n}^{i_1\dots i_\ell}$ va donner des termes proportionnels aux harmoniques sphériques $Y_\ell^{\pm 1}$:

$$\tilde{n}^{u_1\dots u_\ell}\widehat{\tilde{\Theta}}^{\mathrm{V}}_{u_1\dots u_\ell} \propto Y_\ell^{\pm 1}\widehat{\Theta}_\ell^{(\pm 1)} . \quad \textbf{(5.3.46)}$$

On peut procéder de même pour les indices $|m|$ plus élevés, qui vont être générés par les tenseurs STF

$$\tilde{b}^{(\pm m)}_{i_1\dots i_{|m|}} = (\hat{\boldsymbol{e}}_1 \pm i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_{i_1} \otimes \dots \otimes (\hat{\boldsymbol{e}}_1 \pm i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_{i_{|m|}} , \quad \textbf{(5.3.47)}$$

en prenant des signes $+$ quand $m > 0$ et des signes $-$ sinon. Ainsi, les différentes composantes de chaque multipole sont de la forme

$$\widehat{\tilde{\Theta}}^{(\pm m)}_{i_1\dots i_\ell} \propto \left[k_{i_{\ell-m+1}}\dots k_{i_\ell}(\hat{\boldsymbol{e}}_1 \pm i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_{i_1} \otimes \dots \otimes (\hat{\boldsymbol{e}}_1 \pm i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_{i_m}\right]^{\mathrm{STF}}\widehat{\Theta}_\ell^{(\pm m)} . \quad \textbf{(5.3.48)}$$

Ce sont manifestement des tenseurs sans trace et orthogonaux à $\hat{\boldsymbol{e}}_3$. Ces modes vont alors être liés aux harmoniques sphériques $Y_\ell^{\pm m}$, justifiant ainsi le choix de la notation $^{(m)}$ pour classifier les perturbations.

4 Approche harmonique

Les paragraphes précédents nous permettent maintenant d'aborder le problème de l'évolution des multipoles de la fonction de distribution δf sous un angle légèrement différent : plutôt que de décomposer la partie angulaire de la fonction de distribution de température en terme de tenseurs symétriques sans trace, nous allons la décomposer à l'aide des harmoniques sphériques.

4.1 Partie angulaire

Plaçons-nous en coordonnées sphériques (r,θ,φ). Soit $(\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi)$ la base orthonormée associée à chaque point. Nous allons nous intéresser à la façon dont évolue la radiation reçue par un observateur situé à l'origine des coordonnées, c'est-à-dire à la radiation émise d'un point $\boldsymbol{r}$ et se propageant selon la direction $-\boldsymbol{r}$. Les quantités observables sont l'intensité de la radiation, et éventuellement sa polarisation.

Un rayonnement polarisé peut être décrit à l'aide des quatre *paramètres de Stokes* I, Q, U et V. Le paramètre $I(\hat{\boldsymbol{n}})$ décrit l'intensité totale de la radiation se propageant dans la direction $\hat{\boldsymbol{n}}$. Le paramètre V décrit le degré de polarisation circulaire de la radiation. Nous ne nous intéresserons pas à ce paramètre car le rayonnement fossile n'est pas polarisé circulairement[15]. La polarisation linéaire est décrite par les deux paramètres Q et U. Le paramètre Q mesure l'intensité du champ électrique du rayonnement électromagnétique le long de deux directions orthogonales entre elles et à la direction de propagation, par exemple $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ et $\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$. Le paramètre U mesure la différence d'intensité du champ électrique le long de deux directions orthogonales tournées de 45° par rapport aux directions définissant Q (ici, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \pm \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi)$). Signalons enfin que pour des raisons de commodité, nous allons légèrement changer la définition des paramètres de Stokes Q et U. En appelant $\overline{I}$, $\overline{Q}$, $\overline{U}$

[15]La seule polarisation "cosmologique" du rayonnement fossile est générée par la diffusion Thomson qui ne produit que de la polarisation linéaire [Chandrasekhar, 1960].

les “vrais” paramètres de Stokes, les quantités que nous allons utiliser vont être

$$\Theta \equiv \frac{1}{4}\frac{\delta I}{\overline{I}} , \tag{5.4.1}$$

$$Q \equiv \frac{1}{4}\frac{\overline{Q}}{\overline{I}} , \tag{5.4.2}$$

$$U \equiv \frac{1}{4}\frac{\overline{U}}{\overline{I}} . \tag{5.4.3}$$

Pour la radiation, il est naturel de décomposer la carte vue par l’observateur en harmoniques sphériques. Les paramètres de Stokes Q et U de la polarisation posent plus de problèmes car ils ne sont pas invariants quand on tourne les vecteurs $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ et $\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ autour de $\hat{\boldsymbol{e}}_r$, c’est-à-dire qu’ils dépendent du choix de l’orientation des axes. Par exemple, si on tourne la base $(\hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi)$ de 45° autour de $\hat{\boldsymbol{e}}_r$, on transforme Q en $-U$ et U en Q. On peut pallier ce problème en considérant les quantités $Q \pm iU$, qui sont multipliées par $\exp(\mp i2\psi)$ quand on tourne le doublet $(\hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi)$ d’un angle ψ autour de $\hat{\boldsymbol{e}}_r$. Même dans ce cas, il n’est pas commode de décomposer $Q \pm iU$ en terme d’harmoniques sphériques, car celles-ci sont invariantes par la même rotation. Il est donc préférable de décomposer ces quantités en terme d’*harmoniques sphériques spinorielles*[16], notées ${}_sY_\ell^m$, dont l’indice s dénote qu’elle est multipliée par $\exp(-is\psi)$ lors d’une rotation des vecteurs $(\hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi)$ d’un angle ψ autour de $\hat{\boldsymbol{e}}_r$. L’expression de ces harmoniques sphériques est donnée dans l’annexe E.

Appelons $G_\ell^m(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{n}})$ une base de décomposition de la radiation située au point $\boldsymbol{x}$ et se propageant selon la direction $\hat{\boldsymbol{n}}$. Sans perte de généralité, il est clair qu’une base admissible est de la forme

$$G_\ell^m(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{n}}) = (-i)^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}}) , \tag{5.4.4}$$

où le facteur numérique $(-i)^\ell\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}$ sera justifié ultérieurement. De même, les paramètres de Stokes $Q \pm iU$ peuvent être décomposés sur la base des fonctions

$${}_{\pm 2}G_\ell^m(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{n}}) = (-i)^\ell \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) {}_{\pm 2}Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}}) . \tag{5.4.5}$$

On va donc décomposer la partie spatiale de ces quantités en terme d’exponentielles complexes et leur partie angulaire en terme d’harmoniques sphériques spinorielles. On peut alors poser, d’après (**5.3.45**, **5.3.46**, **5.3.48**),

$$\Theta(\eta, \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{n}}) \equiv \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\ell,m} (2\ell+1) \widehat{\Theta}_\ell^{(m)}(\eta, \boldsymbol{k}) G_\ell^m(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{n}}) , \tag{5.4.6}$$

$$(Q \pm iU)(\eta, \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{n}}) \equiv \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\ell,m} (2\ell+1) \left[\widehat{E}_\ell^{(m)} \mp i\widehat{B}_\ell^{(m)}\right] (\eta, \boldsymbol{k}) {}_{\pm 2}G_\ell^m(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{n}}) , \tag{5.4.7}$$

où là encore, le choix du facteur $(2\ell+1)$ sera justifié plus tard. C’est cette normalisation qui va fixer les constantes de proportionnalité dans (**5.3.26–5.3.28**) et (**5.3.45–5.3.48**). Le choix des noms de variables E et B viennent de propriétés liées à la parité. Lors d’une réflexion par rapport au plan passant par $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ et $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$, Q reste inchangé, mais U se transforme en $-U$. De même, lors d’une transformation de parité, les propriétés des harmoniques sphériques spinorielles impliquent que

[16] spin-weighted spherical harmonics

les quantités $E_\ell^{(m)}$ se transforment en $(-)^\ell E_\ell^{(m)}$, tout comme les harmoniques sphériques Y_m^ℓ, alors que les quantités $B_\ell^{(m)}$ se transforment comme $(-)^{\ell+1} B_\ell^{(m)}$. On parle alors de *partie électrique* (ou partie scalaire) et de *partie magnétique* (ou partie pseudo-scalaire) de la polarisation. On peut enfin effectuer une décomposition du même type pour les termes de collision intervenant dans les équations d'évolution du contraste de température ($C[\Theta]$) et des paramètres de Stokes ($C[Q \pm iU]$). C'est désormais à l'évolution des quantités $\widehat{\Theta}_\ell^{(m)}$, $\widehat{E}_\ell^{(m)}$ et $\widehat{B}_\ell^{(m)}$ à laquelle nous allons nous intéresser. Du fait du lemme de Stewart-Walker, les quantités $\widehat{E}_\ell^{(m)}$ et $\widehat{B}_\ell^{(m)}$ sont invariantes de jauge, de même que tous les termes de collision.

4.2 Équation de Boltzmann

De même qu'au paragraphe 3.5, nous allons nous placer dans l'espace de Fourier, en décomposant pour chaque mode $\boldsymbol{k}$ la partie angulaire de la radiation selon une base orthonormée $(\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3)$ telle que $\boldsymbol{k}$ soit de même direction et de même sens que $\hat{\boldsymbol{e}}_3$. Le terme en gradient de l'équation de Boltzmann se transforme alors en

$$n^p \partial_p = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \to i \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{k} = ik \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3 = ikn_z = ik \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0(\hat{\boldsymbol{n}}) \ . \tag{5.4.8}$$

Or, dans les décompositions (**5.4.6**, **5.4.7**), il apparaît des harmoniques sphériques de *même* argument $\hat{\boldsymbol{n}}$. Il est donc possible de les combiner à l'aide des formules de produit des représentations du groupe des rotations (voir annexe E) :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left[Y_1^0 \right] \left[{}_s Y_\ell^m \right] = & \frac{{}_s\kappa_\ell^m}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell-1)}} \left[{}_s Y_{\ell-1}^m \right] + \frac{{}_s\kappa_{\ell+1}^m}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}} \left[{}_s Y_{\ell+1}^m \right] \\ & - \frac{ms}{\ell(\ell+1)} \left[{}_s Y_\ell^m \right] \ , \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

$${}_s\kappa_\ell^m \equiv \ell \sqrt{1 - \frac{m^2}{\ell^2}} \sqrt{1 - \frac{s^2}{\ell^2}} \ . \tag{5.4.10}$$

Après quelques manipulations, on en déduit la forme des équations auxquelles obéissent les multipoles de la fonction de distribution. Pour la température, on a

$$\dot{\widehat{\Theta}}_\ell^{(m)} = \frac{k}{2\ell+1} \left[{}_0\kappa_\ell^m \widehat{\Theta}_{\ell-1}^{(m)} - {}_0\kappa_{\ell+1}^m \widehat{\Theta}_{\ell+1}^{(m)} \right] + \widehat{C}[\Theta]_\ell^{(m)} + \widehat{S}_\ell^{(m)} \ , \tag{5.4.11}$$

où le terme $S_\ell^{(m)}$ représente l'influence des termes de gravité présents dans l'équation (**5.3.25**). Ces termes s'écrivent

$$\widehat{S}_1^{(0)} = k(\widehat{\Phi} + \widehat{\Psi}) \ , \tag{5.4.12}$$

$$\widehat{S}_1^{(\pm 1)} = k(\widehat{\Phi}^{(\pm 1)} + \widehat{\Psi}^{(\pm 1)}) \ , \tag{5.4.13}$$

$$\widehat{S}_2^{(\pm 2)} = -\dot{\widehat{E}}^{(\pm 2)} \ , \tag{5.4.14}$$

tous les autres termes étant nuls. On a ici décomposé les parties vectorielles et tensorielles de la métrique de la même façon que les multipoles de la fonction de distribution, *i.e.* en

$$\bar{\widehat{\Phi}}_i = \widehat{\Phi}^{(1)} (\hat{\boldsymbol{e}}_1 + i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_i + \widehat{\Phi}^{(-1)} (\hat{\boldsymbol{e}}_1 - i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_i \ , \tag{5.4.15}$$

$$\bar{\widehat{\Psi}}_i = \widehat{\Psi}^{(1)} (\hat{\boldsymbol{e}}_1 + i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_i + \widehat{\Psi}^{(-1)} (\hat{\boldsymbol{e}}_1 - i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_i \ , \tag{5.4.16}$$

$$\bar{\bar{\widehat{E}}}_{ij} = \widehat{E}^{(2)} (\hat{\boldsymbol{e}}_1 + i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_i \otimes (\hat{\boldsymbol{e}}_1 + i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_j + \widehat{E}^{(-2)} (\hat{\boldsymbol{e}}_1 - i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_i \otimes (\hat{\boldsymbol{e}}_1 - i\hat{\boldsymbol{e}}_2)_j \ . \tag{5.4.17}$$

Le choix des facteurs dans (**5.4.4–5.4.7**) a été fait de façon à ce que l'équation (**5.4.11**) ait la forme présentée ci-dessus. Pour la polarisation, on obtient de même

$$\dot{\widehat{E}}_\ell^{(m)} = \frac{k}{2\ell+1}\left[{}_2\kappa_\ell^m \widehat{E}_{\ell-1}^{(m)} - \frac{2m(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)}\widehat{B}_\ell^{(m)} - {}_2\kappa_{\ell+1}^m \widehat{E}_{\ell+1}^{(m)}\right] + \widehat{C}[E]_\ell^{(m)} , \qquad (\mathbf{5.4.18})$$

$$\dot{\widehat{B}}_\ell^{(m)} = \frac{k}{2\ell+1}\left[{}_2\kappa_\ell^m \widehat{B}_{\ell-1}^{(m)} + \frac{2m(2\ell+1)}{\ell(\ell+1)}\widehat{E}_\ell^{(m)} - {}_2\kappa_{\ell+1}^m \widehat{B}_{\ell+1}^{(m)}\right] + \widehat{C}[B]_\ell^{(m)} . \qquad (\mathbf{5.4.19})$$

Une interprétation géométrique de ces équations sera donnée au paragraphe 4.6.

4.3 Partie radiale

Revenons maintenant au problème posé au début du paragraphe 4.1, où la radiation se propage vers un observateur situé à l'origine. La radiation est émise en $\boldsymbol{x}$ et se propage selon la direction $\hat{\boldsymbol{n}}$, où $\boldsymbol{x} = -r\hat{\boldsymbol{n}}$. On peut alors décomposer l'exponentielle en harmoniques sphériques, et il vient, selon la formule classique,

$$\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) = \sum_\ell (-i)^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\, j_\ell(kr) Y_\ell^0(\hat{\boldsymbol{n}}) . \qquad (\mathbf{5.4.20})$$

Les fonctions ${}_sG_\ell^m$ contiennent alors *dans ce cas particulier* le produit de deux harmoniques sphériques ayant *même* argument. Il est alors possible de les combiner en utilisant les propriétés de produit des représentations du groupe des rotations et les coefficients de Clebsch-Gordan (voir annexe E) :

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell_1+1}}\left[{}_{s_1}Y_{\ell_1}^{m_1}\right]\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell_2+1}}\left[{}_{s_2}Y_{\ell_2}^{m_2}\right] = \sum_\ell \left\langle \begin{matrix}\ell_1\ \ell_2\\ m_1 m_2\end{matrix}\middle| \begin{matrix}\ell\\ m_1+m_2\end{matrix}\right\rangle \left\langle \begin{matrix}\ell_1 \quad \ell_2\\ -s_1 - s_2\end{matrix}\middle| \begin{matrix}\ell\\ -s_1-s_2\end{matrix}\right\rangle \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\left[{}_{s_1+s_2}Y_\ell^{m_1+m_2}\right] . \qquad (\mathbf{5.4.21})$$

On en déduit la forme de la base de décomposition des différentes quantités

$${}_sG_{\ell'}^m = \sum_\ell (-i)^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\, {}_sj_\ell^{(\ell' m)}(kr) Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}}) , \qquad (\mathbf{5.4.22})$$

$${}_sj_\ell^{(\ell' m)} \equiv \sum_{\ell''} (-i)^{\ell'+\ell''-\ell} \frac{2\ell''+1}{2\ell+1} \left\langle \begin{matrix}\ell'\ell''\\ m\,0\end{matrix}\middle| \begin{matrix}\ell\\ m\end{matrix}\right\rangle \left\langle \begin{matrix}\ell'\ \ell''\\ -s\,0\end{matrix}\middle| \begin{matrix}\ell\\ -s\end{matrix}\right\rangle j_{\ell''} , \qquad (\mathbf{5.4.23})$$

où on a posé ${}_0G_{\ell'}^m \equiv G_{\ell'}^m$. La normalisation des ${}_sG_{\ell'}^m$ est très semblable à l'expression de l'exponentielle en terme de fonctions de Bessel et d'harmoniques sphériques, ce qui donne une autre justification *a posteriori* du choix des facteurs $(2\ell+1)^{-\frac{1}{2}}$ dans les équations (**5.4.4**, **5.4.5**). On peut calculer ces fonctions pour les premières valeurs de $(\ell' m)$. On trouve alors, pour la température (*i.e.* $s = 0$; nous omettrons l'indice s dans ce cas-là) :

$$j_\ell^{(00)}(x) = j_\ell(x) , \qquad (\mathbf{5.4.24})$$

$$j_\ell^{(10)}(x) = j'_\ell(x) , \qquad (\mathbf{5.4.25})$$

$$j_\ell^{(20)}(x) = \frac{1}{2}\left(3j''_\ell(x) + j_\ell(x)\right) , \qquad (\mathbf{5.4.26})$$

$$j_\ell^{(11)}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}\ell(\ell+1)}\frac{j_\ell(x)}{x} , \quad \textbf{(5.4.27)}$$

$$j_\ell^{(21)}(x) = \sqrt{\frac{3}{2}\ell(\ell+1)}\left(\frac{j_\ell(x)}{x}\right)' , \quad \textbf{(5.4.28)}$$

$$j_\ell^{(22)}(x) = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}}\frac{j_\ell(x)}{x^2} . \quad \textbf{(5.4.29)}$$

Pour les valeurs négatives de m, on trouve le même résultat :

$$j_\ell^{(\ell' m)} = j_\ell^{(\ell' |m|)} . \quad \textbf{(5.4.30)}$$

Cela vient du fait que les seuls coefficients de Clebsch-Gordan qui contribuent aux résultats sont tels que $\ell'' = \ell \pm 1$ quand $\ell' = 1$ et $\ell'' = \ell, \ell \pm 2$ quand $\ell' = 2$, tous ces coefficients étant identiques quand on change m en $-m$. Il en reste de même pour les ordres plus élevés, tant que $s = 0$.

On peut de même calculer ${}_s j_\ell^{(\ell' m)}$ pour $s \neq 0$. Les seuls termes qui nous intéressent sont ceux concernant la polarisation, pour lesquels $s = \pm 2$. Pour $\ell' = 2$, on pose alors

$${}_2 j_\ell^{(2|m|)} \equiv \varepsilon_\ell^{(|m|)} + i\beta_\ell^{(|m|)} , \quad \textbf{(5.4.31)}$$

où $\varepsilon_\ell^{(|m|)}$ et $\beta_\ell^{(|m|)}$ sont des fonctions réelles. Ici, ce sont les coefficients de Clebsch-Gordan tels que $\ell'' = \ell \pm 1$ qui vont contribuer aux fonctions $\beta_\ell^{(|m|)}$, et ceux tels que $\ell' = \ell, \ell \pm 2$ qui vont contribuer aux fonctions $\varepsilon_\ell^{(|m|)}$. En changeant s en $-s$, on voit que $\beta_\ell^{(|m|)}$ change de signe, de même que quand on change m en $-m$. Par contre, $\varepsilon_\ell^{(|m|)}$ ne change dans aucun des cas. On a donc

$${}_{\pm 2} j_\ell^{(2m)} = \varepsilon_\ell^{(m)} \mp i\beta_\ell^{(m)} , \quad \textbf{(5.4.32)}$$

$$\varepsilon_\ell^{(-m)} = \varepsilon_\ell^{(m)} , \quad \textbf{(5.4.33)}$$

$$\beta_\ell^{(-m)} = -\beta_\ell^{(m)} . \quad \textbf{(5.4.34)}$$

Les expressions des $\varepsilon_\ell^{(m)}$ et $\beta_\ell^{(m)}$ sont :

$$\varepsilon_\ell^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}}\frac{j_\ell(x)}{x^2} , \quad \textbf{(5.4.35)}$$

$$\varepsilon_\ell^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(\ell-1)(\ell+2)}\left(\frac{j_\ell(x)}{x^2} + \frac{j'_\ell(x)}{x}\right) , \quad \textbf{(5.4.36)}$$

$$\varepsilon_\ell^{(2)}(x) = \frac{1}{4}\left(-j_\ell(x) + 2\frac{j_\ell(x)}{x^2} + 4\frac{j'_\ell(x)}{x} + j''_\ell(x)\right) , \quad \textbf{(5.4.37)}$$

$$\beta_\ell^{(0)}(x) = 0 , \quad \textbf{(5.4.38)}$$

$$\beta_\ell^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(\ell-1)(\ell+2)}\frac{j_\ell(x)}{x} , \quad \textbf{(5.4.39)}$$

$$\beta_\ell^{(2)}(x) = \frac{1}{4}\left(4\frac{j_\ell(x)}{x} + 2j'_\ell(x)\right) . \quad \textbf{(5.4.40)}$$

Nous allons maintenant exhiber le lien entre les fonctions ${}_s j_\ell^{(\ell' m)}$, et les multipoles des fonctions de distribution $\widehat{\Theta}_\ell^{(m)}$, $\widehat{E}_\ell^{(m)}$ et $\widehat{B}_\ell^{(m)}$.

4.4 Systèmes différentiels associés

Les fonctions de Bessel sphériques obéissent à une hiérarchie d'équations simples,

$$j'_\ell = \frac{1}{2\ell+1}\left[\ell j_{\ell-1} - (\ell+1) j_{\ell+1}\right] . \tag{5.4.41}$$

De par leur définition, les fonctions $j_\ell^{(00)}$ obéissent à la même hiérarchie. Les fonctions $j_\ell^{(\ell' 0)}$ étant des combinaisons linéaires de dérivées de j_ℓ à coefficients constants (*i.e.* ne dépendant pas de ℓ), elles obéissent également à la même hiérarchie d'équations. On peut aussi trouver un système différentiel auquel satisfont les autres $j_\ell^{(\ell' m)}$. Après quelques manipulations, on trouve :

$$j_\ell^{(\ell' m)\prime} = \frac{1}{2\ell+1}\left[\ell\sqrt{1-\frac{m^2}{\ell^2}}\, j_{\ell-1}^{(\ell' m)} - (\ell+1)\sqrt{1-\frac{m^2}{(\ell+1)^2}}\, j_{\ell+1}^{(\ell' m)}\right] . \tag{5.4.42}$$

Comme pour le cas $m=0$, la forme du système d'équations (**5.4.42**) ne dépend pas de ℓ'. On a de plus la propriété suivante :

$$j_\ell^{(\ell' m)}(0) = \frac{1}{2\ell'+1}\delta_{\ell\ell'} , \tag{5.4.43}$$

qui sera utilisée lors du calcul des anisotropies du rayonnement fossile. Enfin, il est possible de trouver de la même façon un système différentiel dont ${}_s j_\ell^{(2m)}$ est solution. Pour $s=-2$, on trouve :

$$\begin{aligned}\left[\varepsilon_\ell^{(m)} + i\beta_\ell^{(m)}\right]' = \quad & \frac{1}{2\ell+1}\Bigg[\quad \ell\sqrt{1-\frac{m^2}{\ell^2}}\sqrt{1-\frac{s^2}{\ell^2}}\left[\varepsilon_{\ell-1}^{(m)} + i\beta_{\ell-1}^{(m)}\right] \\ & \qquad -(\ell+1)\sqrt{1-\frac{m^2}{(\ell+1)^2}}\sqrt{1-\frac{s^2}{(\ell+1)^2}}\left[\varepsilon_{\ell+1}^{(m)} + i\beta_{\ell+1}^{(m)}\right]\Bigg] \\ & + i\frac{2m}{\ell(\ell+1)}\left[\varepsilon_\ell^{(m)} + i\beta_\ell^{(m)}\right] .\end{aligned} \tag{5.4.44}$$

En résumé, l'ensemble des fonctions ${}_s j_\ell^{(\ell' m)}$ que nous avons introduites sont solutions de

$${}_s j_\ell^{(\ell' m)\prime} = \frac{1}{2\ell+1}\left[{}_s\kappa_\ell^m\, {}_s j_{\ell-1}^{(\ell' m)} - {}_s\kappa_{\ell+1}^m\, {}_s j_{\ell+1}^{(\ell' m)}\right] - i\frac{sm}{\ell(\ell+1)}\, {}_s j_{\ell+1}^{(\ell' m)} , \tag{5.4.45}$$

où on a posé

$${}_s\kappa_\ell^m \equiv \ell\sqrt{1-\frac{m^2}{\ell^2}}\sqrt{1-\frac{s^2}{\ell^2}} . \tag{5.4.46}$$

Ainsi, mis à part les termes de collision et d'interaction gravitationnelle, l'évolution des multipoles des fonctions de distributions (**5.4.11**, **5.4.18**, **5.4.19**) suit la même hiérarchie d'équations que (**5.4.45**). Cette propriété nous permettra de trouver la solution de l'équation de Boltzmann sous forme intégrale.

4.5 Autres systèmes différentiels

Le système d'équations que nous venons de trouver comporte un infinité d'équations couplées. Comme il s'agit des équations qu'il faut résoudre pour intégrer l'équation de Boltzmann, il convient d'en trouver une version tronquée comportant un nombre fini d'équations et soluble numériquement. Si l'on suppose que la solution de l'équation de Boltzmann est suffisamment proche des fonctions de Bessel sphériques, il est alors possible de remplacer la hiérarchie d'équations auxquelles elle obéit par un nombre fini d'équations dont les fonctions de Bessel sont aussi solutions. On est donc amené à interrompre la hiérarchie ci-dessus à un certain multipole $\ell_{\max}$. Pour cela, il suffit de remplacer l'équation de (**5.4.45**) donnant la dérivée de ${}_sj_{\ell_{\max}}^{(\ell' m)}$ en fonction de ${}_sj_{\ell_{\max}+1}^{(\ell' m)}$ et ${}_sj_{\ell_{\max}-1}^{(\ell' m)}$ par une équation ne faisant intervenir que ${}_sj_{\ell_{\max}}^{(\ell' m)}$ et ${}_sj_{\ell_{\max}-1}^{(\ell' m)}$. Une telle équation existe pour les fonctions de Bessel sphériques :

$$j_\ell'(x) = j_{\ell-1}(x) - \frac{\ell+1}{x} j_\ell(x) \; . \tag{5.4.47}$$

On peut alors la généraliser pour tous les $j_\ell^{(|m|m)}$ (*i.e.* $\ell' = \pm m$) :

$$j_\ell^{(|m|m)\prime}(x) = \sqrt{\frac{\ell+|m|}{\ell-|m|}}\, j_{\ell-1}^{(|m|m)}(x) - \frac{\ell+1+|m|}{x} j_\ell^{(|m|m)}(x) \; . \tag{5.4.48}$$

(*NB* : Il n'existe pas de formule analogue pour les autres $j_\ell^{((\ell' m))}$, mais nous verrons que cela est sans importance.)

On peut procéder de même pour les ${}_{\pm 2}j_\ell^{(2m)}$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}\left[\varepsilon_\ell^{(m)}(x) + i\beta_\ell^{(m)}(x)\right]' = \; & \sqrt{1-\frac{|m|^2}{\ell^2}}\sqrt{\frac{\ell+2}{\ell-2}}\left[\varepsilon_{\ell-1}^{(m)}(x) + i\beta_{\ell-1}^{(m)}(x)\right] \\ & - \frac{\ell+3}{x}\left[\varepsilon_\ell^{(m)}(x) + i\beta_\ell^{(m)}(x)\right] + i\frac{m}{\ell}\left[\varepsilon_\ell^{(m)}(x) + i\beta_\ell^{(m)}(x)\right] \; .\end{aligned} \tag{5.4.49}$$

4.6 Interprétation

L'équation (**5.4.45**) nous indique que quand les sections spatiales sont plates, les fonctions de Bessel sphériques sont solutions de l'équation de Boltzmann non collisionnelle sans termes de gravité (**5.4.11**). Nous allons ici essayer de donner une interprétation à ce résultat. Pour cela, nous allons nous intéresser uniquement aux composantes scalaires de chaque multipole, *i.e.* nous prendrons $m = 0$, les résultats se généralisant facilement pour les autres composantes, et nous allons considérer l'évolution des multipoles quand on prend comme conditions initiales une distribution spatialement inhomogène mais isotrope, c'est-à-dire que seul le monopole de la fonction de distribution est perturbé en chaque point :

$$\Theta_\ell^{(m)}(0, x^i) = f(x^i)\delta_{\ell,0}\delta_{m,0} \; . \tag{5.4.50}$$

D'après les équations (**5.4.43**) et (**5.4.45**), les solutions de l'équation d'évolution des multipoles de la distribution des photons (**5.4.11**) s'exprime dans l'espace de Fourier en terme de fonctions de Bessel :

$$\widehat{\Theta}_\ell^{(0)}(\eta, \boldsymbol{k}) = \widehat{f}(\boldsymbol{k}) j_\ell(k\eta) \; . \tag{5.4.51}$$

Comme tous les modes évoluent indépendamment les uns des autres, nous allons nous restreindre à un seul mode $\boldsymbol{k}$. Dans l'espace réel, cela correspond à un ensemble de fluctuations de température de taille $\sim \pi/k$ espacées les unes des autres d'environ $2\pi/k$.

À l'instant $\eta_1 \sim 1/k$, les photons situés dans les surdensités ont parcouru la distance $1/k$, c'est-à-dire une bonne fraction de la distance entre inhomogénéités. Cela signifie que les photons ont diffusé librement des zones les plus denses vers les zones les moins denses et que leur distribution est plus homogène qu'initialement. Cet instant correspond au moment où le monopole $\widehat{\Theta}^{(0)}_0(\eta, \boldsymbol{k})$ s'annule pour la première fois (c'est le premier zéro de la fonction de Bessel j_0).

Au même moment, les zones vers lesquelles les photons ont diffusé présentent un dipole orienté dans la direction opposée aux surdensités desquelles viennent les photons. Ainsi, les gradients de monopoles ont généré des dipoles. C'est le sens du terme

$$\dot{\widehat{\Theta}}^{(0)}_1 = \frac{k}{3}\widehat{\Theta}^{(0)}_0 + ... \qquad \textbf{(5.4.52)}$$

dans l'équation de Boltzmann (**5.4.11**). On s'attend donc à ce que le dipole de la fonction de distribution $\widehat{\Theta}^{(0)}_1(\eta, \boldsymbol{k})$ soit maximal à cet instant, ce qui est effectivement le cas (on est au premier maximum de la fonction de Bessel j_1). La distance entre ces dipoles est du même ordre que la distance initiale entre surdensités, à savoir $\sim 2\pi/k$.

Puisque les surdensités étaient initialement espacées de $\sim 2\pi/k$, les photons vont au temps $\eta \sim \pi/k$ retrouver une configuration "inverse" de leur configuration initiale : les surdensités sont devenues des sous-densités et inversement. Cet instant correspond au premier minimum de la fonction de Bessel j_0. Ici, ce sont les gradients de dipoles qui ont généré des monopoles. C'est le terme

$$\dot{\widehat{\Theta}}^{(0)}_0 = -k\widehat{\Theta}^{(0)}_1 + ... \qquad \textbf{(5.4.53)}$$

dans l'équation de Boltzmann, mais ce processus est moins efficace que le processus précédent en raison du terme de fuite

$$\dot{\widehat{\Theta}}^{(0)}_1 = -\frac{2}{3}k\widehat{\Theta}^{(0)}_2 + ... \qquad \textbf{(5.4.54)}$$

Ce premier minimum n'est (en valeur absolue) pas aussi grand que le premier maximum car en diffusant librement, les photons ont commencé à prendre une distribution plus homogène. On en déduit que le monopole $\widehat{\Theta}^{(0)}_0(\eta, \boldsymbol{k})$ va connaître une série d'oscillations amorties à la fréquence k. Il va en être de même pour le dipole, si ce n'est que le premier maximum du dipole apparaît vers $\eta_1 \sim 1/k$, et que les oscillations dans le dipole vont être déphasées de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à celles du monopole.

Quand deux dipoles de direction différente vont se rencontrer, on va avoir une distribution de photons localement anisotrope : le gradient de dipole a généré un quadrupole, de même que le gradient de monopole a généré des dipoles :

$$\dot{\widehat{\Theta}}^{(0)}_2 = \frac{2}{5}k\widehat{\Theta}^{(0)}_1 + ... \qquad \textbf{(5.4.55)}$$

De même que précédemment, cela va se produire aux alentours de $\eta_2 \sim \eta_1 + 1/k$, c'est-à-dire au premier maximum de la fonction j_2. Le quadrupole va ensuite lui aussi connaître des oscillations amorties.

Ainsi, il est clair que les multipoles successifs vont être générés pour la première fois aux alentours de $k\eta \sim \ell$, ce qui correspond effectivement au premier maximum de la fonction $j_\ell(k\eta)$.

À la suite du premier maximum de ce multipole les anisotropies vont être transférées aux deux multipoles voisins $\ell \pm 1$ aux alentours de $k\eta \sim \ell + 1$. La structure oscillante des solutions vient donc du fait qu'en alternance, les multipoles pairs transfèrent les anisotropies aux multipoles impairs et inversement, et que l'action d'un multipole ℓ sur le multipole d'ordre $\ell + 1$ est de signe opposé à celle qu'exerce en retour le multipole $\ell + 1$ sur le multipole ℓ. De plus, du fait que seul le monopole est initialement non nul, il va y avoir transfert des anisotropies vers des multipoles de plus en plus élevés et les oscillations vont être amorties au cours du temps.

Les anisotropies sont donc transférées à des multipoles de plus en plus élevés. Cela signifie qu'un point donné de l'espace reçoit au bout d'un certain temps des photons en provenance de toutes les directions, alors qu'au début, il en recevait essentiellement de seulement quelques directions privilégiées (celles des surdensités proches). C'est ce transfert à des échelles angulaires de plus en plus élevées qui explique l'homogénéisation et l'isotropisation progressive de la distribution de photons[17].

4.7 Quelques propriétés géométriques

4.7.1 Température

Considérons d'abord une onde de densité en $\exp(i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x})$, et un observateur mesurant la radiation émise depuis une sphère de rayon $R = \eta$. La température de la radiation reçue va être modulée par la présence de l'onde de densité : dans une direction $\hat{\boldsymbol{n}}$, la température mesurée est

$$\Theta(\hat{\boldsymbol{n}}) \propto \cos(k\eta\cos\theta) \ , \tag{5.4.56}$$

θ étant l'angle entre les vecteur $\boldsymbol{k}$ et $\hat{\boldsymbol{n}}$. Dans les directions perpendiculaires à l'onde, l'observateur va voir des fluctuations aux échelles angulaires

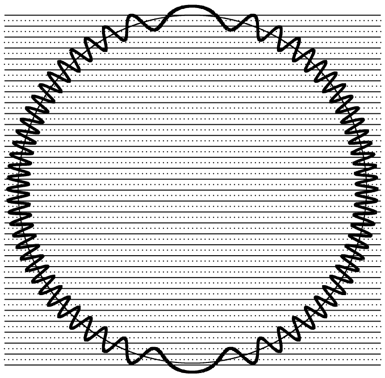
$$\theta \sim \frac{2\pi}{k\eta} \ , \tag{5.4.57}$$

c'est-à-dire que c'est principalement le multipole d'ordre $\ell \sim k\eta$ qui va être présent dans cette direction. Cela est dû au fait que $\cos\theta$ varie vite au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dans la direction de la propagation de l'onde plane, on va par contre avoir des modulations de température sur des échelles angulaires plus grandes (car $\cos\theta$ varie lentement au voisinage de $\theta = 0, \pi$). La contribution d'une onde plane aux anisotropies de température va donc croître depuis les grands multipoles jusqu'au multipole $\ell \sim k\eta$, et s'annuler ensuite. En décomposant l'exponentielle complexe en terme d'harmoniques sphériques, il est alors clair que la contribution de cette onde plane à chaque multipole va être de l'ordre de $j_\ell^{(00)}(k\eta)$ (voir figure 5.1).

Considérons maintenant une onde plane portant un dipole dans la distribution des photons, c'est-à-dire que l'intensité de ce dipole est modulée en $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$, et que ce dipole est aligné avec la direction de l'onde plane (il s'agit donc d'un dipole de type scalaire dans la décomposition SVT que nous avons faite). Les fluctuations de température vont cette fois être modulées non seulement par l'exponentielle complexe, mais aussi par l'orientation du dipole :

$$\Theta(\hat{\boldsymbol{n}}) \propto \cos(k\eta\cos\theta)\cos\theta \ , \tag{5.4.58}$$

[17] La distribution devient effectivement homogène car le monopole décroît au cours du temps. Par contre, il existe toujours des anisotropies non négligeables à des multipoles (de plus en plus) élevés. En pratique, quand on mesure les anisotropies, on le fait avec une résolution angulaire finie et si les anisotropies n'existent qu'à des multipoles plus grands que la limite de résolution, on détecte une radiation isotrope.



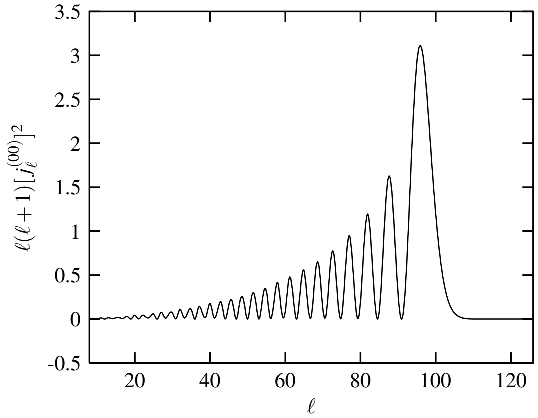


FIGURE 5.1 – Anisotropies générées par une onde plane. L'espace a des fluctuations de température en $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{k}$ étant orienté vers le haut sur la figure de gauche), dont les maxima et minima successifs sont représentés sur la figure de gauche en traits pleins et en pointillés. Un observateur recevant des photons émis depuis une sphère centrée sur lui va voir des anisotropies à grandes échelles angulaires dans la direction de $\boldsymbol{k}$, et à plus petites échelles dans le plan orthogonal à $\boldsymbol{k}$. Ces anisotropies sont représentées sur le cercle de la figure de gauche. À droite est représenté le spectre angulaire correspondant, proportionnel à $\ell(\ell+1)[j_\ell^{(00)}]^2$ (le facteur $\ell(\ell+1)$ sera justifié au chapitre suivant).

Étant donnée l'orientation de celui-ci, les fluctuations vont être "lentes" dans la direction du vecteur $\boldsymbol{k}$ (effet de projection de l'exponentielle sur la sphère, comme pour le cas précédent) et nulles dans les directions perpendiculaires (effet Doppler nul dans cette direction). Le maximum de cette contribution apparaîtra donc à des échelles plus grandes que $\ell \sim k\eta$. En décomposant cette onde en terme d'harmoniques sphériques (c'est en fait le résultat des équations **5.4.22–5.4.23**), il est clair que la contribution à chaque multipole va ici être de l'ordre de $j_\ell^{(10)}(k\eta)$.

On peut continuer de même avec une onde plane portant un dipole orienté dans une direction perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{k}$ (il s'agit donc d'un dipole de type vectoriel). Ce dipole va cette fois moduler les anisotropies dans la direction perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{k}$. Du fait de l'orientation différente du dipole, on a maintenant

$$\Theta(\hat{\boldsymbol{n}}) \propto \cos(k\eta\cos\theta)\sin\theta\ , \qquad \textbf{(5.4.59)}$$

D'après (**5.4.23**), la contribution de ces fluctuations à chaque multipole va être de l'ordre de $j_\ell^{(11)}(k\eta)$. D'une manière générale, plus la dépendance directionnelle de la quantité est orthogonale à la direction de propagation de l'onde, plus la contribution va être forte à l'échelle angulaire $\ell \sim k\eta$ par rapport aux échelles angulaires plus grandes. Ce résultat se généralise aisément à des ondes portant des multipoles plus élevés dans la fonction de distribution des photons. Les contributions respectives d'un dipole de type scalaire, d'un monopole et d'un dipole de type vectoriel sont représentées sur la figure 5.2.

Ainsi, les fonctions $j_\ell^{((\ell' m))}(k\eta)$ qui sont les plus piquées en $k\eta \sim \ell$ vont donner les quantités qui sont le plus fidèlement transmises du spectre tridimensionnel en $\boldsymbol{k}$ au spectre angulaire en ℓ. D'après ce que nous venons de dire, le spectre d'ondes gravitationnelles et l'effet Doppler vectoriels vont être plus fidèlement retranscrits en coordonnées angulaires que les modes scalaires, lui-même étant plus fidèlement retranscrit que l'effet Doppler scalaire.

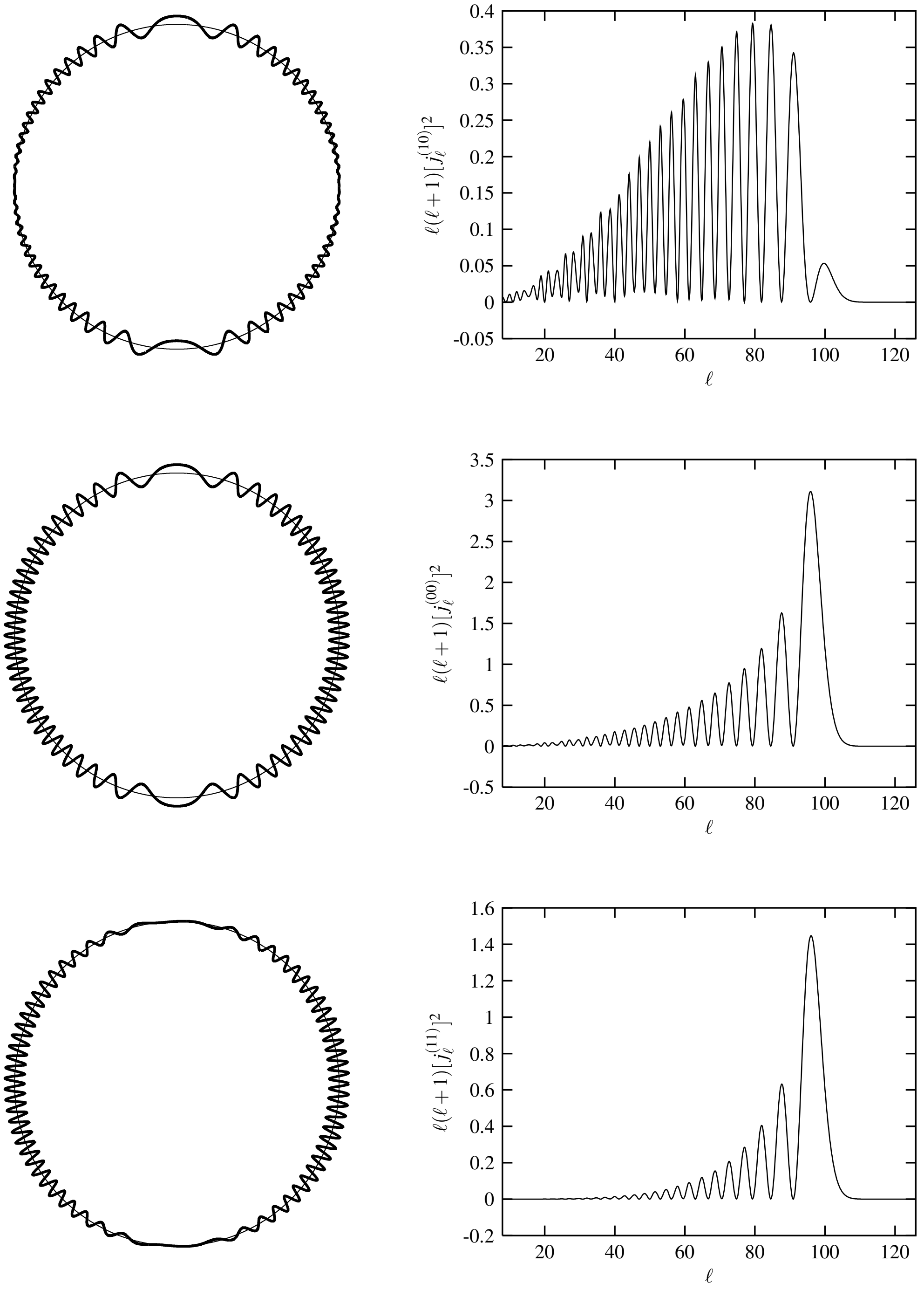


FIGURE 5.2 – Comparaison entre les anisotropies générées par des fluctuations de température de type monopole ou dipole. L'amplitude du monopole et du dipole est proportionnelle à $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$, et on a tracé à gauche les anisotropies produites par des photons émis depuis une sphère centrée sur un observateur. Le dipole de type scalaire ($\propto \boldsymbol{\nabla}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$) est orienté selon le vecteur $\boldsymbol{k}$, et supprime les anisotropies dans les directions perpendiculaires à $\boldsymbol{k}$ (en haut). Le dipole de type vectoriel ($\propto \boldsymbol{\nabla}\wedge\exp(i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x})$) est orienté perpendiculairement au vecteur $\boldsymbol{k}$, et supprime les anisotropies dans la direction de $\boldsymbol{k}$ (en bas). Un monopole ne présente pas d'atténuation de ce type (au milieu). Sur la droite sont tracés les spectres d'anisotropies correspondants, respectivement proportionnels à $\ell(\ell+1)[j_\ell^{(10)}]^2$, $\ell(\ell+1)[j_\ell^{(00)}]^2$ et $\ell(\ell+1)[j_\ell^{(11)}]^2$.

4.7.2 Polarisation

La décomposition des quantités $Q \pm iU$ en des partie scalaires, vectorielles et tensorielles se fait de la façon suivante : on suppose que le taux de polarisation est plus ou moins fort selon certaines directions, qui sont données par les maxima et minima des harmoniques sphériques spinorielles ${}_{\pm 2}Y_\ell^m(\theta, \varphi)$. Pour la partie scalaire, la polarisation est maximale dans les directions orthogonales à $\boldsymbol{k}$, alors qu'elle est maximale dans la direction parallèle à $\boldsymbol{k}$ pour la partie tensorielle. Ainsi, pour les modes scalaires, le plan de polarisation est préférentiellement aligné avec le vecteur $\boldsymbol{k}$ et devient plus orthogonal à ce dernier quand on s'intéresse aux parties vectorielles et tensorielles. La contribution de la polarisation est donc plus piquée vers $\ell \sim k\eta$ pour les modes scalaires (*cf* figure 5.3).

4.8 Généralisation à un espace ouvert ou fermé

Quand les sections spatiales ne sont pas plates, une exponentielle complexe n'est pas fonction propre du laplacien. La décomposition en terme des fonctions ${}_sG_\ell^m$ (équations **5.4.4**, **5.4.5**) n'est donc plus adéquate. En fait, les seules fonctions propres du laplacien que l'on connaisse et qui soient relativement simples sont les généralisations des fonctions de Bessel sphériques à des sections spatiales non plates. Les fonctions de Bessel sphériques $j_\ell(kr)$ sont en fait solutions de la partie radiale du laplacien quand les sections spatiales sont plates :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} j_\ell(kr) + 2\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} j_\ell(kr) + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) j_\ell(kr) = 0\,. \tag{5.4.60}$$

Quand les sections spatiales ne sont pas plates, on peut donc refaire le raisonnement précédent en effectuant la substitution dans l'équation (**5.4.20**) :

$$\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) = \sum_\ell (-i)^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\, j_\ell(kr) Y_\ell^0(\hat{\boldsymbol{n}}) \to$$
$$\exp(i\delta(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})) \equiv \sum_\ell (-i)^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\, \phi_\ell^k(\chi) Y_\ell^0(\hat{\boldsymbol{n}})\,, \tag{5.4.61}$$

où la fonction $\phi_\ell^k(\chi)$ est une fonction de la variable radiale χ, solution de la partie radiale du laplacien quand les sections spatiales ne sont pas plates (*cf* annexe A) :

$$\partial_\chi^2 \phi_\ell^k + \frac{2}{\frac{1}{k}\,\mathrm{t}_{\frac{K}{k^2}}(u)} \partial_\chi \phi_\ell^k + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{\frac{1}{k^2}\,\mathrm{s}^2_{\frac{K}{k^2}}(u)}\right) \phi_\ell^k = 0\,, \tag{5.4.62}$$

où on a posé $u \equiv k\chi$. Dans la limite $K \to 0$, cette équation a bien sûr pour solutions les fonctions de Bessel sphériques $j_\ell(kr)$. La différence fondamentale entre ces fonctions (dites "hypersphériques" dans les notations de [Zaldarriaga *et al.*, 1998] [Hu *et al.*, 1998]) est que leur forme fonctionnelle dépend explicitement de k, alors que dans le cas plat, k n'intervient que dans l'argument de la fonction $u = kr$.

Le fait que les fonctions propres sont différentes implique que les équations d'évolution des multipoles le sont aussi. La raison en est que l'équation de Boltzmann fait intervenir des dérivées covariantes (à la fois dans le terme de gradient et dans la décomposition SVT-STF, *cf* §3.3–3.4), qui ne commutent pas entre elles quand les sections spatiales ne sont pas plates (*cf* annexe A, §4). On pourra trouver dans [Hu *et al.*, 1998] les nouvelles équations d'évolution, qui ne sont cependant pas fondamentalement différentes de celles obtenues dans le cas plat.

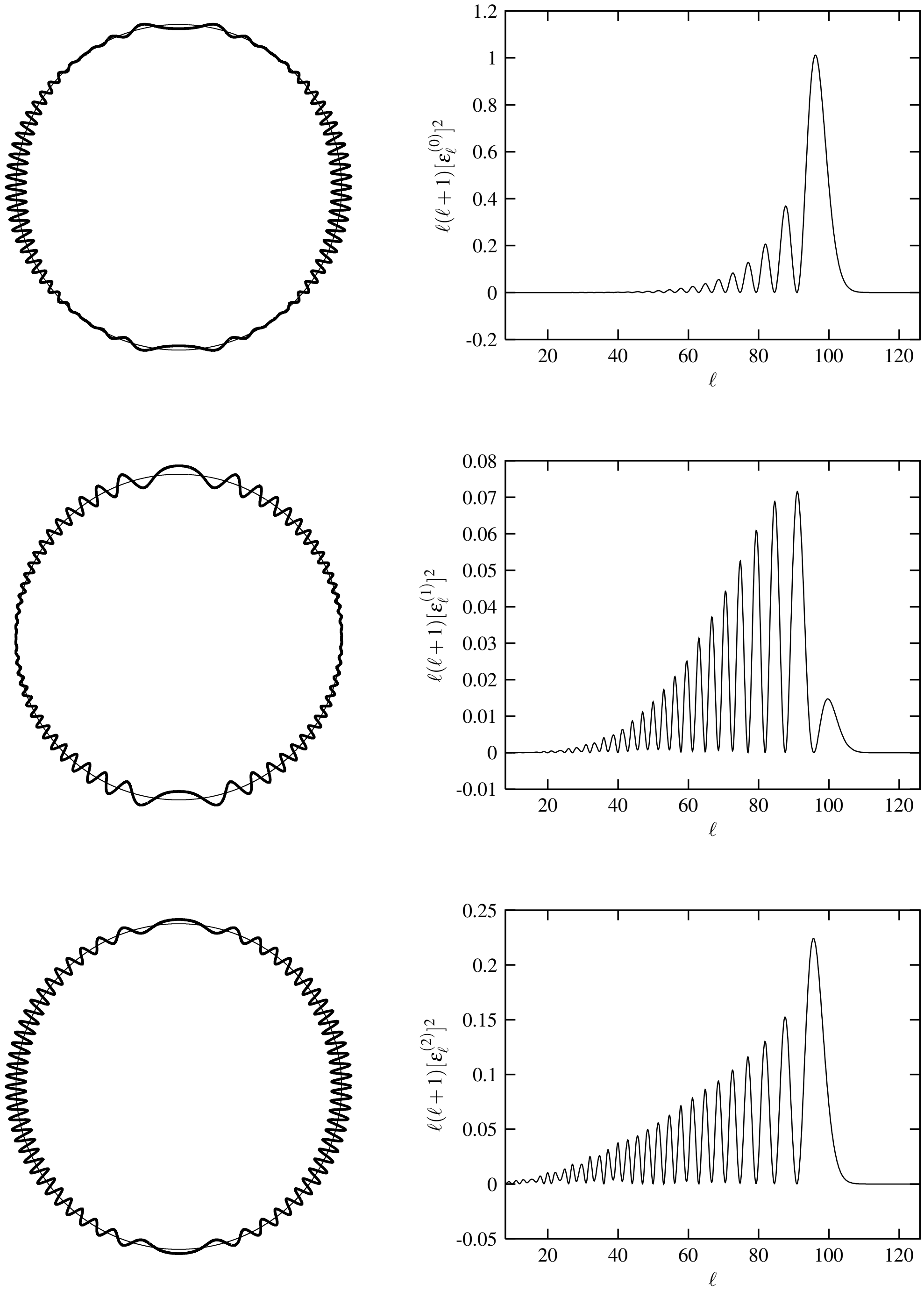


FIGURE 5.3 – Anisotropies générées par la partie électrique de la polarisation. De haut en bas sont représentées une contribution scalaire, une contribution vectorielle, et une contribution tensorielle (*NB* : la partie scalaire est à symétrie de révolution autour de l'axe vertical, alors que les parties vectorielle et tensorielle sont modulées respectivement par $\cos(\varphi)$ et $\cos(2\varphi)$). Sur la droite sont tracés les spectres d'anisotropies correspondants, proportionnels à $\ell(\ell+1)[\varepsilon_\ell^{(0)}]^2$, $\ell(\ell+1)[\varepsilon_\ell^{(1)}]^2$ et $\ell(\ell+1)[\varepsilon_\ell^{(2)}]^2$. Les contributions respectives des petites et des grandes échelles sont à la fois visibles sur les cartes d'anisotropies et sur les spectres associés. C'est la partie vectorielle qui présente le moins de puissance. La partie tensorielle présente en proportion moins de puissance à petite échelle que la partie scalaire car elle est moins amortie au voisinage des pôles, ce qui augmente la puissance à grande échelle.

5 Terme de collision

Le dernier problème à résoudre maintenant est celui de la forme du terme de collision $\widehat{C}[\Theta]^{(m)}_{\ell}$. Une distribution de particules s'isotropise quand les particules sont collisionnelles car les chocs ont tendance à redistribuer aléatoirement les directions et les impulsions des particules. Ainsi, plus la distribution est collisionnelle, plus elle va tendre au cours du temps vers une distribution isotrope. Les photons peuvent interagir avec les électrons par diffusion Thomson. Ceux-ci sont non relativistes depuis un redshift élevé ($z \sim 10^8$), et leurs interactions coulombiennes avec les noyaux sont importantes. Leur libre parcours moyen est donc faible, et leur distribution isotrope. Ainsi, la diffusion des photons sur les électrons va avoir tendance à isotropiser la distribution des photons dans le référentiel au repos des électrons. Cette isotropisation va être d'autant plus forte que la diffusion Thomson est efficace, c'est-à-dire quand la densité électronique est élevée, c'est-à-dire à des époques anciennes. À la recombinaison l'Univers devient transparent aux photons, et la diffusion Thomson cesse d'être efficace. Des anisotropies significatives peuvent donc être générées dans le fluide de photons.

La partie sortante du terme de collision sortant est simple à calculer : il s'agit de la fonction de distribution perturbée multipliée par la probabilité de diffusion, elle-même proportionnelle à la densité d'électrons libres :

$$C^{-}[f] = \dot{\tau}\delta f \, , \tag{5.5.1}$$

où on a défini l'*opacité différentielle* $\dot{\tau}$ en fonction de la section efficace de diffusion Thomson $\sigma_{\rm Th}$ et de la densité d'électrons libres $n_{\rm e}$:

$$\dot{\tau} \equiv a n_{\rm e} \sigma_{\rm Th} \, . \tag{5.5.2}$$

(*NB* : le facteur d'échelle a intervient parce qu'on raisonne en temps conforme. Il n'apparaît pas si on est en temps cosmique.) Le terme de collision entrant est un peu plus compliqué car la probabilité de diffusion dépend de l'angle de diffusion. Dans le référentiel au repos des centres diffuseurs (les électrons), elle est donc de la forme

$$C^{-}[f](\hat{\boldsymbol{n}}) = \dot{\tau}\frac{1}{4\pi}\int_{\hat{\boldsymbol{n}}'} \delta f(\hat{\boldsymbol{n}}')\omega(\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{n}}')\,{\rm d}\hat{\boldsymbol{n}}' \, . \tag{5.5.3}$$

La partie directionnelle de la section efficace s'écrit [Stebbins, 1997]

$$\omega(\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{n}}') = \frac{3}{4}\left[1 + (\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}')^2\right] = 1 + \frac{1}{4}\left[3(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}')^2 - 1\right] \, . \tag{5.5.4}$$

Le facteur $\frac{3}{4}$ assure que les termes entrant et sortant sont identiques quand la diffusion est isotrope[18]. Associons les bases orthonormées $(\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi)$ et $(\hat{\boldsymbol{e}}'_r, \hat{\boldsymbol{e}}'_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}'_\varphi)$ aux vecteurs unitaires $\hat{\boldsymbol{n}}$ et $\hat{\boldsymbol{n}}'$ (c'est-à-dire que $\hat{\boldsymbol{e}}_r = \hat{\boldsymbol{n}}$ et $\hat{\boldsymbol{e}}'_r = \hat{\boldsymbol{n}}'$). Pour passer d'une base orthonormée à une autre, on peut par exemple tourner le trièdre $(\hat{\boldsymbol{e}}'_r, \hat{\boldsymbol{e}}'_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}'_\varphi)$ d'un angle α autour de $\hat{\boldsymbol{e}}'_r$, puis d'un angle β autour du nouveau vecteur $\hat{\boldsymbol{e}}'_\varphi$, puis d'un angle γ autour du nouveau vecteur $\hat{\boldsymbol{e}}'_r$. L'angle β représente donc l'angle entre les deux vecteurs $\hat{\boldsymbol{n}}$ et $\hat{\boldsymbol{n}}'$. On a alors

$$\frac{1}{4\pi}\omega(\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{n}}') = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}Y_0^0(\beta,\alpha) + \frac{1}{10}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Y_2^0(\beta,\alpha) \, . \tag{5.5.5}$$

[18] Notons que ce terme de collision n'est valable qu'à basse énergie, quand la température des électrons est inférieure à leur énergie de masse. Dans le cas contraire, le terme de collision prend une forme plus compliquée [Itzykson & Zuber, 1980].

Ce terme peut alors être transformé en produit d'harmoniques sphériques d'arguments $\hat{\boldsymbol{n}}$ et $\hat{\boldsymbol{n}}'$ (*cf* annexe E), ce qui permet de trouver la décomposition multipolaire du terme de collision. On trouve finalement

$$\widehat{C}[\Theta]^{(0)}_{0} = 0 \,, \tag{5.5.6}$$

$$\widehat{C}[\Theta]^{(m)}_{1} = -\dot{\tau}(\widehat{\Theta}^{(m)}_{1} - \widehat{v}^{(m)}_{\mathrm{b}}) \,, \tag{5.5.7}$$

$$\widehat{C}[\Theta]^{(m)}_{2} = -\dot{\tau}\widehat{\Theta}^{(m)}_{2} + \frac{1}{10}\dot{\tau}\widehat{\Theta}^{(m)}_{2} \,, \tag{5.5.8}$$

$$\widehat{C}[\Theta]^{(m)}_{\ell} = -\dot{\tau}\widehat{\Theta}^{(m)}_{\ell} \,, \quad \ell > 2 \,. \tag{5.5.9}$$

Dans cette dernière formule, nous avons quitté le référentiel des électrons pour celui des observateurs comobiles, d'où les termes $\widehat{v}^{(m)}_{\mathrm{b}}$ pour $\ell = 1$ (qui correspondent à la décomposition selon la base (**5.3.47**) de la vitesse des électrons). L'interprétation du terme de collision est simple : les anisotropies ($\ell \geq 2$) dans la fonction de distribution ont tendance à disparaître du fait des diffusions sur les électrons (dont on suppose la distribution isotrope), et la distribution de photons a tendance à s'isotropiser dans le référentiel au repos des électrons. Le monopole de la fonction de distribution n'est par contre pas affecté. Cela vient du fait qu'il n'y a pas d'échange d'énergie entre photons et électrons, mais seulement échange d'impulsion macroscopique (**5.5.7**) et microscopique (**5.5.8–5.5.9**). Par conservation de la quantité de mouvement, les équations d'Euler des perturbations baryoniques sont modifiées en :

$$\dot{\widehat{v}}^{(m)}_{\mathrm{b}} = \ldots - \frac{4}{3}\frac{\rho_\gamma}{\rho_{\mathrm{b}}}\dot{\tau}(\widehat{v}^{(m)}_{\mathrm{b}} - \widehat{\Theta}^{(m)}_{1}) \,, \tag{5.5.10}$$

(*NB* : une différence de vitesse est invariante de jauge, *cf* équations **4.3.20**, **4.3.24**. Les expressions ci-dessus sont donc valables dans toute jauge.)

6 Polarisation

Une ultime complication vient du fait que pour dériver cette formule non avons supposé que la radiation était non polarisée. Cependant, la diffusion Thomson a tendance à polariser la radiation dans la direction perpendiculaire au plan de diffusion. Ainsi, si la radiation est anisotrope avant sa diffusion, elle peut être polarisée à l'issue. Il convient donc de refaire ces calculs en tenant compte de cet effet [Chandrasekhar, 1960]... On trouve finalement, pour $\ell \geq 2$,

$$\widehat{C}[\Theta]^{(m)}_{\ell} = -\dot{\tau}\widehat{\Theta}^{(m)}_{\ell} + \dot{\tau}\widehat{P}^{(m)}\delta_{\ell,2} \,, \tag{5.6.1}$$

$$\widehat{C}[E]^{(m)}_{\ell} = -\dot{\tau}\widehat{E}^{(m)}_{\ell} - \sqrt{6}\dot{\tau}\widehat{P}^{(m)}\delta_{\ell,2} \,, \tag{5.6.2}$$

$$\widehat{C}[B]^{(m)}_{\ell} = -\dot{\tau}\widehat{B}^{(m)}_{\ell}\delta_{\ell,2} \,, \tag{5.6.3}$$

$$\widehat{P}^{(m)} = \frac{1}{10}\left[\widehat{\Theta}^{(m)}_{2} - \sqrt{6}\widehat{E}^{(m)}_{2}\right] \,, \tag{5.6.4}$$

les termes de température pour $\ell = 0, 1$ restant inchangés. On retrouve bien sûr les résultats du cas non polarisé en posant $E = B = 0$.

7 Conclusion

Insistons sur le fait que la présence du terme de collision est importante. En présence de celui-ci, on s'attend à ce que la distribution de photons soit localement isotrope (à un dipole près), tout comme un fluide non relativiste ordinaire. Par conséquent, il *devrait* exister des solutions sous forme d'ondes planes à l'équation de Boltzmann. C'est effectivement ce qu'il se passe quand on enlève “à la main” tous les multipoles d'ordre $\ell > 2$ dans l'équation de Boltzmann (**5.4.11**), ou, de façon équivalente, quand on enlève la pression anisotrope des équations de conservation perturbées. En résumé, du fait de la présence de pression anisotrope, on “évacue” de l'énergie vers des multipoles de plus en plus élevés, et les solutions en ondes planes sont en fait amorties au cours du temps (*cf* §4.6).

L'évolution des multipoles en la présence de collision va donc être la suivante :

- Pour les modes plus grands que la longueur de diffusion $\dot{\tau}^{-1}$, la distribution va être isotrope du fait de la diffusion Thomson.
- Pour les modes plus petits que la longueur de diffusion, on a une “diffusion libre”[19] des photons, et on va retrouver les solutions amorties au cours du temps que nous venons de voir. C'est ce qui va se passer pour les neutrinos dont la longueur de diffusion est pratiquement infinie.
- Pour la cosmologie, tous les modes sont initialement plus grands que la longueur de diffusion (en effet, elle decroît plus vite d'un facteur a^{-2} que les distances vraies quand on augmente le redshift du fait de sa dépendance par rapport à la densité des centres diffuseurs), donc la distribution des espèces relativistes est initialement isotrope. Ceci est vrai à la fois pour les photons et les neutrinos qui sont initialement couplés aux photons et aux électrons.
- Pour les neutrinos, la longueur de diffusion devient immense dès qu'a lieu le découplage des neutrinos, c'est-à-dire assez tôt dans l'histoire de l'Univers (vers 0.2 MeV). Les neutrinos entrent alors dans le régime de diffusion libre, bien avant que les longueurs qui nous intéressent ne commencent à évoluer significativement (un mode d'une fraction de Mégaparsec ne commence à évoluer que depuis $z \sim 0.1 \frac{c}{H_0} [\mathrm{Mpc}] \sim 10^4$), c'est-à-dire que tout se passe comme si le terme de collision des neutrinos avait toujours été nul.
- Pour les photons, la longueur de diffusion ne devient grande qu'assez tard dans l'histoire de l'Univers (vers le découplage). On pourrait alors penser que jusque là, les fluctuations de densité sont peu amorties au cours du temps, mais ça n'est *pas* le cas. En effet, on évacue toujours de l'énergie depuis le monopole de la fonction de distribution vers le quadrupole (*cf* équation **4.4.17**), qui lui-même est immédiatement amorti par les collisions. Mais le fait que l'amortissement du quadrupole soit plus rapide signifie en fait qu'on peut transférer *plus vite* de l'énergie depuis le monopole vers le quadrupole. En d'autres termes, ce n'est pas l'amplitude du quadrupole qui est importante, mais son taux d'amortissement. Ainsi, on arrive au résultat paradoxal que les perturbations vont être plus amorties (en fait exponentiellement et non en loi de puissance, *cf* chapitre 6, §5.3) quand la pression anisotrope est faible que quand elle est forte : c'est le phénomène d'*amortissement collisionnel*. Un tel amortissement ne se produit pas pour de la matière non relativiste car le “couplage” entre densité et pression anisotrope est beaucoup plus faible pour de la matière non relativiste. En effet, on voit par l'équation d'Euler (**4.4.17**) qu'il est proportionnel au paramètre de l'équation d'état ω, qui est négligeable pour de la matière non relativiste.

[19] free streaming

Chapitre 6

Anisotropies du rayonnement fossile

Sommaire

Nous allons maintenant nous intéresser à la physique du rayonnement fossile. Ce problème a été abondamment étudié dans le cadre des perturbations inflationnaires [Hu, 1996] [Hu *et al.*, 1997b] [Bunn, 1997], et ce chapitre est partiellement inspiré de ces travaux. Quelques aspects plus numériques liés au calcul des anisotropies du rayonnement fossile seront donnés au chapitre suivant, ce qui nous permettra d'illustrer sur des exemples concrets l'impact des différents paramètres cosmologiques sur les spectres d'anisotropies.

1 Introduction

La physique du rayonnement fossile est relativement simple. Elle dépend essentiellement de l'évolution des perturbations de densité d'un fluide de photons et de baryons couplés par diffusion Thomson. Nous allons dans un premier temps nous intéresser à un problème simplifié, avant de le compliquer peu à peu.

En négligeant la pression anisotrope, l'équation d'évolution des perturbations de densité du fluide de photons s'écrit (*cf* équations **4.4.16**, **4.4.17** et **5.5.10**)

$$\dot{\delta}^\flat_\gamma = -\frac{4}{3}\Delta v^\flat_\gamma \,, \qquad \textbf{(6.1.1)}$$

$$\dot{v}^\flat_\gamma = -\Phi - \Psi - \frac{1}{4}\delta^\flat_\gamma - \dot{\tau}(v^\flat_\gamma - v^\flat_\mathrm{b}) \,. \qquad \textbf{(6.1.2)}$$

Les photons sont couplés aux baryons par diffusion Thomson. L'équation d'évolution de la vitesse des baryons est alors

$$\dot{v}^\flat_{\rm b} = -\mathcal{H}v^\flat_{\rm b} - \Psi - \frac{4}{3}\frac{\rho_\gamma}{\rho_{\rm b}}\dot{\tau}(v^\flat_{\rm b} - v^\flat_\gamma) \ . \qquad \textbf{(6.1.3)}$$

Tant que le taux de diffusion $\dot{\tau}$ est élevé, on peut considérer que les vitesses des deux fluides sont presque égales. On peut alors définir une vitesse d'ensemble $v^\flat$ par

$$v^\flat_{\rm b\gamma} \equiv \frac{Rv^\flat_{\rm b} + v^\flat_\gamma}{1+R} \ , \qquad \textbf{(6.1.4)}$$

où on a introduit le rapport R,

$$R \equiv \frac{3}{4}\frac{\rho_{\rm b}}{\rho_\gamma} \ . \qquad \textbf{(6.1.5)}$$

(Le facteur $\frac{3}{4}$ vient du fait que c'est le flux d'énergie $\rho(1+\omega)v$ qui intervient dans la diffusion Thomson.) Ce terme est faible dans l'ère de radiation et devient grand après la transition radiation-matière. À l'aide de ces deux variables, et en négligeant les termes en $\dot{\tau}^{-1}$, l'évolution du contraste de densité du fluide de photons se réécrit

$$\ddot{\delta}^\flat_\gamma = -\mathcal{H}\frac{R}{1+R}\dot{\delta}^\flat_\gamma + \frac{1}{3(1+R)}\Delta\delta^\flat_\gamma + \frac{4}{3}\Delta\left(\Psi + \frac{\Phi}{1+R}\right) \ . \qquad \textbf{(6.1.6)}$$

On reconnaît dans cette expression le terme d'amortissement dû à l'expansion de l'Univers, le terme de pression, et celui de gravité.

Remarquons dans un premier temps que dans l'ère de matière, les potentiels de Bardeen sont à peu près constants. En effet pour un jeu raisonnable de paramètres cosmologiques, ils sont essentiellement générés par la matière noire. D'après (**4.4.8**) et (**4.4.9**), on a, à l'intérieur du rayon de Hubble,

$$\Delta\Phi \simeq \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_{\rm c}\delta_{\rm c} \ , \qquad \textbf{(6.1.7)}$$

$$\Phi \simeq \Psi \ . \qquad \textbf{(6.1.8)}$$

Dans l'ère de matière, $\Omega_{\rm c}$ est constant, et le contraste de densité de la matière noire croît comme a, c'est-à-dire comme η^2, alors que le paramètre de Hubble en temps conforme $\mathcal{H}$ décroît comme η^{-1}. Les équations (**6.1.7**) et (**6.1.8**) nous assurent alors que les deux potentiels de Bardeen sont constants à l'intérieur du rayon de Hubble dans l'ère de matière [Bunn, 1997]. Il en est de même à l'extérieur du rayon de Hubble, car potentiels de Bardeen et contraste de densité (en jauge de feuilletage plat) sont gelés avant leur entrée dans le rayon de Hubble.

Revenons maintenant à l'équation (**6.1.6**). Nous allons dans un premier temps négliger l'expansion et les variations de R. Une fois ces hypothèses faites, l'équation (**6.1.6**) est simplement celle d'un oscillateur harmonique. Sa solution s'écrit alors

$$\widehat{\Theta}_{\rm eff} = (\widehat{\Theta}^{\rm in}_{\rm eff} + R\widehat{\Psi})\cos(ku_{\rm s}\eta) + \frac{\dot{\widehat{\Theta}}^{\rm in}_{\rm eff}}{ku_{\rm s}}\sin(ku_{\rm s}\eta) - R\widehat{\Psi} \ , \qquad \textbf{(6.1.9)}$$

où nous avons posé

$$\Theta_{\rm eff} = \left.\frac{\delta T}{T}\right|_{\rm eff} \equiv \frac{1}{4}\delta^\flat_\gamma + \Phi + \Psi \ , \qquad \textbf{(6.1.10)}$$

$$u_{\rm s} \equiv \frac{1}{\sqrt{3(1+R)}} \ . \qquad \textbf{(6.1.11)}$$

Le choix de la variable Θ_{eff} vient, comme nous le verrons plus loin, du fait que c'est cette grandeur qui est observée. Il s'agit d'un contraste de "température effective", égal au contraste de "température vraie" $\delta T/T$, affecté du redshift gravitationnel Φ et des effets de dilatation du temps Ψ (*cf* équation **4.2.41**). La température effective subit donc des oscillations au cours du temps, qui s'interprètent comme étant des ondes de densité (c'est-à-dire des ondes sonores) se propageant dans le plasma de photons et de baryons à la vitesse du son u_{s}. Un point important est que le "point zéro" des oscillations est décalé par la présence du terme de gravité $R\Psi$ dû aux baryons.

Il reste à connaître les valeurs des conditions initiales $\Theta_{\text{eff}}^{\text{in}}$ et $\dot{\Theta}_{\text{eff}}^{0}$. Ces conditions initiales sont données par les détails du modèle d'inflation. Pour une inflation à un seul champ scalaire, tous les contrastes de densité de toutes les espèces sont initialement égaux, et on peut montrer (voir par exemple chapitre 13) que cela implique que

$$\Phi_{\text{in}} = \Psi_{\text{in}} \,, \tag{6.1.12}$$

$$\delta_{\text{in}}^{\flat} = -\frac{1}{6}\Phi_{\text{in}} \,. \tag{6.1.13}$$

Cependant, lors de la transition radiation-matière, les potentiels de Bardeen varient d'un facteur $\frac{9}{10}$, ce qui donne, dans l'ère de matière[1]

$$\Theta_{\text{eff}} = \frac{1}{3}\Phi \,. \tag{6.1.14}$$

Le signe de cette dernière expression nous indique que pour la température effective, les zones les plus denses sont aussi les plus "froides" : dans les zones de haute densité, l'excès de photons est compensé par les effets de ralentissement de leur flux et de redshift gravitationnel qu'ils subissent pour sortir des puits de potentiel. De plus, les modèles d'inflation à un champ scalaire prédisent que $\dot{\Theta}_{\text{eff}}^{0} = 0$ (l'inflation crée des perturbations de densité, mais pas de dipoles dans la distribution de matière). On obtient alors

$$\Theta_{\text{eff}} = \widehat{\Phi}\left[\left(\frac{1}{3} + R\right)\cos(ku_{\text{s}}\eta) - R\right] \,. \tag{6.1.15}$$

La température effective oscille donc à la fréquence $\omega \equiv ku_{\text{s}}$ entre $\frac{1}{3}\widehat{\Phi}$ et $-(\frac{1}{3} + 2R)\widehat{\Phi}$. Supposons pour simplifier $\widehat{\Phi} < 0$, ce qui signifie qu'initialement on a contraste de densité de photons positif et une température effective inférieure à la moyenne. Les pics "pairs" $[\eta = 2\pi n\omega^{-1}]$ des oscillations correspondent aux phases de compression du plasma, et les pics "impairs" $[\eta = 2\pi(n + \frac{1}{2})\omega^{-1}]$ aux phases de raréfaction. (Ces termes sont dérivés par rapport à la densité des photons et non à leur température effective. Notons que la dénomination devrait changer si initialement $\widehat{\Phi} > 0$, mais nous continuerons dans tous les cas à employer celle que nous venons de définir.) Les pics de raréfaction sont donc plus profonds d'un facteur $1 + 6R$ que les pics de compression. Pour des valeurs raisonnables des paramètres cosmologiques, R est de l'ordre de 0.5 à la recombinaison, ce qui fait que le rapport entre les maxima et les minima des oscillations est légèrement supérieur à 4. Un autre type de conditions initiales populaire sont les conditions initiales dites "isocourbures CDM", pour lesquelles les perturbations de densité des photons sont nulles initialement. On a alors

$$\Phi^{\text{in}} = 0 \,, \quad \Theta_{\text{eff}}^{\text{in}} = 0 \,, \quad \dot{\Theta}_{\text{eff}}^{\text{in}} \neq 0 \,. \tag{6.1.16}$$

[1] La recombinaison se produit peu de temps après la transition radiation-matière. Pour l'évolution des perturbations, on a pris ici supposé la valeur de Φ dans l'ère de matière. En fait, les expressions (**6.1.12** et **6.1.13**) sont un peu plus compliquées quand on tient compte de la pression anisotrope, *cf* chapitre 13. Nous avons fait ici l'hypothèse que les fluides de radiation n'avaient pas de pression anisotrope. Ce résultat n'est pas vérifié en général, mais l'expression (**6.1.14**), calculée dans l'ère de matière, reste par contre toujours valable.

soit une série de pics déphasés par rapport au modèle adiabatique, et sans différence d'amplitude entre les pics de compression et les pics de raréfaction.

On voit donc sur ces exemples simples que l'étude de l'évolution des perturbations permet en principe d'extraire de l'information à la fois sur les paramètres inflationnaires ($\Theta_{\rm in}$, $\dot{\Theta}_{\rm in}^{\rm eff}$...), et sur les paramètres cosmologiques (R, η...). Avant de continuer cette étude de la physique du rayonnement fossile, nous allons d'abord détailler la notion de perturbation cosmologique d'un point de vue statistique.

2 Perturbations cosmologiques et variables aléatoires

L'inflation a amplifié des perturbations d'origine quantique qui, une fois sorties du rayon de Hubble, subissent ce qu'on appelle une *transition quantique-classique* (voir partie III), ce qui signifie qu'elles peuvent alors être considérées comme des variables stochastiques classiques. De même, une transition de phase génère des défauts topologiques dont la formation résulte également d'un processus aléatoire classique. Ainsi, les perturbations de l'Univers que nous observons aujourd'hui peuvent être vues comme une "réalisation" d'un certain processus aléatoire.

L'inflation ou la transition de phase ne peuvent déterminer la carte du contraste de densité de l'Univers actuel, mais peuvent en principe prédire la statistique que sont supposées suivre les perturbations qu'elles produisent, et les équations d'évolution que nous avons écrites aux chapitres 4 et 5 décrivent en fait l'évolution de variables aléatoires.

Raisonnons d'abord dans l'espace réel. La statistique décrivant les perturbations est donnée par l'ensemble de toutes les fonctions de corrélations à n points. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la fonction de corrélation à 2 points, (qui donne toute l'information statistique sur les perturbations si celles-ci sont gaussiennes). Pour le contraste de densité δ, elle s'écrit

$$C_{\delta\delta}(\boldsymbol{r}) = \left\langle \check{\delta}(\boldsymbol{x})\check{\delta}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \right\rangle . \qquad \textbf{(6.2.1)}$$

Ici, la moyenne $\langle\rangle$ est une moyenne statistique, c'est-à-dire une moyenne sur l'ensemble de toutes les réalisations possibles de la variable aléatoire décrivant le contraste de densité, que nous noterons $\check{\delta}$. Le résultat final ne dépend pas de $\boldsymbol{x}$ en raison de l'hypothèse d'homogénéité du principe cosmologique. De même, l'hypothèse d'isotropie assure que la fonction de corrélation ne dépend pas de la direction de $\boldsymbol{r}$, mais seulement de son module. Dans ces conditions, la moyenne statistique peut alors être remplacée par une moyenne spatiale si l'on suppose que l'Univers est "suffisamment grand" pour qu'une seule réalisation de celui-ci contienne quand même toute l'information statistique du processus aléatoire : c'est l'*hypothèse ergodique*. Dans ces conditions, on peut réexprimer la fonction de corrélation à deux points en

$$C_{\delta\delta}(r) = \frac{1}{2\pi^2}\int \frac{\sin(kr)}{kr} P_{\delta\delta}(k)\,\mathrm{d}k , \qquad \textbf{(6.2.2)}$$

où $P_{\delta\delta}(k)$ représente la variance de la transformée de Fourier de la variable aléatoire $\check{\delta}$, que nous noterons $\tilde{\delta}$:

$$\tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) \equiv \int e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\check{\delta}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} , \qquad \textbf{(6.2.3)}$$

$$\left\langle \tilde{\delta}(\boldsymbol{k})\tilde{\delta}^*(\boldsymbol{k}') \right\rangle = P_{\delta\delta}(k)\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') . \qquad \textbf{(6.2.4)}$$

L'avantage de cette formulation est bien sûr que contrairement à l'espace réel, les modes dans l'espace de Fourier évoluent indépendamment les uns des autres tant qu'on se restreint à l'ordre linéaire des perturbations (*i.e.* on a dans tous les cas des équations d'évolution linéaires, mais on a des équations différentielles ordinaires dans l'espace de Fourier à la place d'équations aux dérivées partielles dans l'espace réel).

Ainsi, les équations portant sur les variables $\widehat{\delta^\flat}$, $\widehat{\Phi}$, *etc*, doivent maintenant être réécrites en changeant les quantités $\widehat{X}$ initialement définies dans l'espace de Fourier, en des variables aléatoires que nous noterons $\tilde{X}$. Dans le modèle classique d'inflation à un champ scalaire, chaque perturbation scalaire de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ est décrite par *une seule* variable aléatoire. Une variable aléatoire $\tilde{X}$ peut donc être toujours être décomposée en le produit d'une variable aléatoire $\tilde{e}_X(\boldsymbol{k})$ que nous prendrons normalisée, et d'une quantité que nous noterons $\widehat{X}$, dépendant du temps, qui donne l'évolution de la variable aléatoire. De plus, les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité impliquent que deux variables aléatoires $\tilde{X}(\eta,\boldsymbol{k})$ et $\tilde{X}(\eta,\boldsymbol{k}')$ suivent la même loi d'évolution quand $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{k}'$ ont même module, c'est-à-dire que la quantité $\widehat{X}$ ne dépend que du module de $\boldsymbol{k}$. Enfin, la variable aléatoire $\tilde{e}_X(\boldsymbol{k})$ est la même pour toutes les quantités scalaires. En résumé, on a :

$$\tilde{X} = \widehat{X}(\eta,k)\tilde{e}(\boldsymbol{k}) \,, \tag{6.2.5}$$

$$\left\langle \tilde{e}(\boldsymbol{k})\tilde{e}^*(\boldsymbol{k}')\right\rangle = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \,, \tag{6.2.6}$$

$$P_{XX}(\eta,k) \equiv |\widehat{X}(\eta,k)|^2 \,, \tag{6.2.7}$$

Les équations d'évolution que nous avons écrites aux chapitres précédents s'appliquent donc sans modifications aux quantités $\widehat{X}$ dont le carré donne la variance de la variable aléatoire associée.

Notons qu'il est parfaitement possible que la statistique des perturbations soit plus compliquée. C'est par exemple ce qu'il se passe pour des défauts topologiques, ou quand l'évolution des perturbations devient non linéaire. Dans ces cas-là, chaque perturbation est décrite par une somme de variables aléatoires, éventuellement corrélées entre elles.

3 Anisotropies primaires du rayonnement fossile

Revenons maintenant au problème de l'observation des anisotropies du rayonnement fossile. Nous observons les perturbations de température dans le rayonnement fossile telles qu'elles étaient à l'époque de la recombinaison, c'est-à-dire que nous observons une sphère centrée sur nous. Ici encore, aucune théorie ne peut prédire la forme exacte de la carte observée, mais seulement la statistique à laquelle elle obéit. Nous allons donc nous intéresser à la fonction de corrélation à deux points, que nous décomposerons en terme des polynômes de Legendre P_ℓ :

$$\left\langle \Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}})\Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}}')\right\rangle_{\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}'=\cos\theta} \equiv \sum_\ell \frac{1}{4\pi} C_\ell P_\ell(\cos\theta) \,. \tag{6.3.1}$$

À une échelle angulaire θ correspond une longueur caractéristique $L \sim 2\pi/k \sim R\theta$, où R est le rayon de la sphère. Ainsi, nous pouvons grossièrement identifier l'échelle angulaire θ au mode

$$k \sim \frac{2\pi}{R\theta} \,, \tag{6.3.2}$$

et nous continuerons à utiliser la variable k au lieu de la variable θ. Le multipole correspondant est lié à l'angle par la relation (pour $\ell \neq 0$)

$$\ell \sim \frac{2\pi}{\theta} \sim kR \,. \tag{6.3.3}$$

Rappelons que la correspondance entre un mode k et un multipole ℓ n'est pas parfaite, comme nous l'avons illustré sur les figures 5.1 à 5.3.

3.1 Terme Sachs-Wolfe

En général, on choisit de s'intéresser à des quantités telles qu'un spectre initial en k invariant d'échelle soit plat une fois traduit en terme de multipoles. Un spectre invariant d'échelle est par définition de la forme

$$P_{XX}(k) \propto k^{-3} . \qquad \textbf{(6.3.4)}$$

Nous verrons que cela revient à étudier la quantité $\ell(\ell+1)C_\ell$ (*cf* §4 du chapitre suivant)[2]. D'après les équations (**6.1.9**, **6.1.15**), la fonction de corrélation à deux points de la température effective s'écrit :

$$\left\langle \Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}})\Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}}')\right\rangle \propto \left\langle k^3|\widehat{\Phi}(k)|^2\right\rangle \left[\left(\frac{1}{3}+R\right)\cos(ku_{\rm s}\eta_{\rm LSS})-R\right]^2 . \qquad \textbf{(6.3.6)}$$

(*NB* : l'équation (**6.1.9**) donnait l'évolution de la température effective à au cours du temps à k fixé. Ici, on a fixé le temps et examiné la dépendance en k.) On trouve ainsi un "plateau" (proportionnel à $\frac{1}{9}\left\langle k^3|\widehat{\Phi}(k)|^2\right\rangle$) pour les petites valeurs de k, correspondant aux modes qui n'ont pas encore évolué[3], suivi d'un premier creux ($k=\frac{\pi}{2}\frac{1}{u_{\rm s}\eta_{\rm LSS}}$), qui précède un premier pic ($k=\pi\frac{1}{u_{\rm s}\eta_{\rm LSS}}$), correspondant au premier pic de raréfaction. Suit ensuite un second creux ($k=\frac{3\pi}{2}\frac{1}{u_{\rm s}\eta_{\rm LSS}}$), puis un second pic ($k=2\pi\frac{1}{u_{\rm s}\eta_{\rm LSS}}$), correspondant au premier pic de compression, et ainsi de suite. D'après ce que nous avons dit, la hauteur des pics pairs et impairs n'est pas la même. Le terme que nous venons d'écrire porte le nom de *terme Sachs-Wolfe* [Sachs & Wolfe, 1967]. C'est en général le terme dominant à grande échelle, qui permet d'extraire la valeur du potentiel gravitationnel à la fin de l'inflation. Le "plateau" à grande échelle (en fait le spectre a seulement une tangente horizontale) porte le nom de *plateau Sachs-Wolfe*.

3.2 Terme Doppler

L'équation (**6.1.15**) nous permet de trouver l'amplitude du dipole dans la distribution des photons, qui s'identifie à la vitesse des baryons :

$$ik\widehat{v}_{\rm b} = \frac{3i}{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\Theta_{\rm eff} = 3iu_{\rm s}\Phi\left[\left(\frac{1}{3}+R\right)\sin(ku_{\rm s}\eta)\right] . \qquad \textbf{(6.3.8)}$$

Cette vitesse des baryons de la région émettrice est à l'origine d'un effet Doppler qui modifie la température effective. Effet Doppler et température effective s'ajoutent quadratiquement à la

[2] On définit parfois les quantités Θ_ℓ (appelées *band power* dans la littérature anglo-saxonne) par

$$\Theta_\ell \equiv \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)C_\ell}{2\pi}} . \qquad \textbf{(6.3.5)}$$

[3] En fait, il n'y a pas de "plateau" à proprement parler. Le "plateau" est même deux fois moins large que le sommet de chaque pic. Cependant, l'usage veut que l'on représente le spectre en unités logarithmiques, donnant ainsi plus de "poids" au comportement à grande échelle, où un semblant de plateau apparaît alors. Cette terminologie est en réalité due au fait que le seul cas où l'on peut calculer (presque) exactement des choses analytiquement est la limite des grandes longueurs d'onde correspondant aux modes qui n'ont pas évolué. Cela revient formellement à prendre la limite $u_{\rm s}\to 0$, auquel cas on obtient

$$\left\langle \Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}})\Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}}')\right\rangle \propto \left\langle \frac{1}{9}k^3|\Phi(k)|^2\right\rangle , \qquad \textbf{(6.3.7)}$$

qui cette fois correspond bien à un plateau.

fonction de corrélation de température car la direction de la vitesse des baryons est aléatoire. Pour la même raison, le terme Doppler est également diminué d'un facteur $\frac{1}{3}$ (c'est la moyenne de $\cos^2\theta$ sur une sphère). Ainsi, la fonction de corrélation devient

$$\left\langle \Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}})\Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}}')\right\rangle \propto \left\langle |\Phi(k)|^2\right\rangle \left(\left[\left(\frac{1}{3}+R\right)\cos(ku_{\rm s}\eta_{\rm LSS})-R\right]^2 \right.$$
$$\left. +3u_{\rm s}^2\left\langle |\Phi(k)|^2\right\rangle \left[\left(\frac{1}{3}+R\right)\sin(ku_{\rm s}\eta_{\rm LSS})\right]^2 \right) . \quad \textbf{(6.3.9)}$$

En l'absence de baryons, on a $u_{\rm s}^2 \to \frac{1}{3}$, $R \to 0$, et le terme Doppler est de même amplitude que le terme Sachs-Wolfe. Le spectre résultant ne présente alors plus d'oscillations. En présence de baryons, le terme Doppler est diminué, et la fonction de corrélation présente encore une série de pics, dont le contraste est cependant moins marqué qu'en l'absence d'effet Doppler. Il n'en demeure pas moins que l'usage veut que l'on donne le nom de *pics Doppler* à cette série d'oscillations (on trouve également dans la littérature mention de *pics acoustiques* ou *oscillations Sakharov*)...

3.3 Effet Sachs-Wolfe intégré

Nous avons pour l'instant négligé les éventuelles variations des potentiels de Bardeen. Comme nous l'avons dit, il s'agit d'une bonne approximation dans l'ère de matière, et comme la recombinaison a lieu dans l'ère de matière, cette approximation est justifiée.

Il est cependant possible que nous ne soyons plus dans l'ère de matière, mais dans une ère dominée par la courbure ou la constante cosmologique. Dans ce cas, l'équation de Poisson (**4.4.8**) nous assure que les potentiels de Bardeen vont tendre vers 0. Un photon traversant un puits de potentiel variable va voir son énergie modifiée : il va perdre de l'énergie si le puits de potentiel se creuse, et en gagner s'il se comble. On parle alors, par analogie avec l'effet Sachs-Wolfe, d'*effet Sachs-Wolfe intégré*[4]. Si les fluctuations sont gaussiennes, il y a en principe autant de "puits" de potentiel (*i.e.* de surdensités) que de "bosses" de potentiel (*i.e.* de sous-densités). Ainsi, un photon va en moyenne subir une faible variation d'énergie. Cependant, un photon ne va en moyenne traverser qu'un seul puits de potentiel de la taille de la surface de dernière diffusion. Dans ce cas-là, son énergie ne va varier qu'une fois, et cette variation peut être importante. On s'attend donc à ce que cet *effet ISW tardif* n'affecte que les grandes longueurs d'ondes. En fait, tout un intervalle de longueurs d'onde vont être affectées par l'effet ISW tardif : les modes à qui il reste une distance r à parcourir au moment où cesse l'ère de domination de la matière ne vont en moyenne traverser qu'un seul puits de potentiel de taille r, qui sera alors variable, avant d'arriver à l'observateur. Cependant, la variation d'amplitude du puits de potentiel sera d'autant plus grande que le photon aura mis du temps à le traverser, aussi l'effet ISW est-il présent à toute les échelles, bien que dominant à grande échelle. Cet effet provoque une variation de température à la fois par l'influence du potentiel gravitationnel et par les effets de dilatation du temps

$$\left.\frac{\delta T}{T}\right|_{\rm ISW} \propto \dot{\Phi}+\dot{\Psi} . \quad \textbf{(6.3.10)}$$

Il existe aussi un *effet ISW précoce*. Cette fois, il est dû aux variations des potentiels de Bardeen au moment de l'émission des photons à la surface de dernière diffusion. L'idée est la suivante : quand le potentiel gravitationnel ne varie pas, une perturbation part de la valeur $\frac{1}{3}\Phi$, pour

[4] Integrated Sachs-Wolfe, ou ISW.

ensuite changer de signe et atteindre la valeur $-(\frac{1}{3}+2R)\Phi$, mais si au moment où elle atteint la valeur $-(\frac{1}{3}+2R)\Phi$, le potentiel gravitationnel diminue (en valeur absolue, *i.e.* $\dot{\Phi}$ et $-\Phi$ sont de même signe), alors la fluctuation de température va être amplifiée proportionnellement à $\dot{\Phi}$, pour atteindre une valeur supérieure (en valeur absolue) à $(\frac{1}{3}+2R)|\Phi|$. Il va donc y avoir résonance pour les modes dont le potentiel gravitationnel diminue au moment où ceux-ci atteignent ce que nous avons appelé un pic de raréfaction. Cette résonance va avoir pour effet d'amplifier la hauteur de ce pic. Une telle augmentation du potentiel gravitationnel se produit pour les grandes longueurs d'onde, au moment où celles-ci n'ont pas encore pénétré dans le rayon de Hubble. Ainsi, les modes qui entrent dans le rayon de Hubble (c'est-à-dire qui sont à leur *premier* pic de raréfaction) *au moment* de la transition radiation-matière vont être amplifiés à ce moment-là[5].

4 Quantités observables

Nous allons d'abord faire le lien entre quantités observables et les quantités "théoriques" C_ℓ. On peut observer une carte des anisotropies de température $\Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}})$. Cette carte peut être décomposée en harmoniques sphériques Y_ℓ^m :

$$\Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}}) = \sum_\ell \sum_{|m|\leq\ell} a_{\ell m}^{\Theta} Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}}) \ . \tag{6.4.1}$$

On peut déduire de la carte la fonction de corrélation à deux points observationnelle $C_\ell^{\rm obs}$ par

$$\langle \Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}}_1)\Theta_{\rm eff}(\hat{\boldsymbol{n}}_2)\rangle_{\hat{\boldsymbol{n}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2=\cos\theta} = \frac{1}{4\pi}\sum_\ell C_\ell^{\rm obs} P_\ell(\cos\theta) \ . \tag{6.4.2}$$

Les $C_\ell^{\rm obs}$ sont reliés aux $a_{\ell m}^{\Theta}$ par la relation

$$C_\ell^{\rm obs} = \frac{1}{2\ell+1}\sum_m \left|a_{\ell m}^{\Theta}\right|^2 \ . \tag{6.4.3}$$

Il nous reste à comparer les $C_\ell^{\rm obs}$ aux C_ℓ théoriques dont nous allons bientôt détailler le calcul. Si les fluctuations initiales sont gaussiennes, alors les $a_{\ell m}$ le sont aussi, et les $C_\ell^{\rm obs}$ suivent une distribution de χ^2 avec $2\ell+1$ degrés de liberté. Les $C_\ell^{\rm obs}$ permettent donc d'*estimer* les C_ℓ théoriques. Notons tout de suite qu'on ne peut pas parfaitement estimer les C_ℓ à partir des $a_{\ell m}$. Intuitivement, la raison est simple : on essaie d'évaluer une moyenne d'ensemble (*i.e.* une moyenne sur toutes les réalisations possibles des $a_{\ell m}$) à l'aide d'un nombre fini de $a_{\ell m}$. En statistique, on dirait que des quantités qui vivent sur une sphère ne sont pas ergodiques, ce qui est lié au fait qu'une sphère est compacte[6]. Ici, la variance des $C_\ell^{\rm obs}$ s'écrit

$$\frac{\left[\mathrm{Var}(C_\ell^{\rm obs})\right]^{\frac{1}{2}}}{C_\ell} = \sqrt{\frac{2}{2\ell+1}} \ . \tag{6.4.4}$$

Ce résultat n'est pas surprenant en soi : l'erreur qu'on fait en estimant C_ℓ est d'autant plus faible qu'on a beaucoup de $a_{\ell m}$. Reste à savoir s'il les $C_\ell^{\rm obs}$ forment le meilleur estimateur des C_ℓ. On peut

[5] Wayne Hu a une interprétation légèrement différente de l'effet Sachs-Wolfe intégré [Hu, 1996], néanmoins le résultat final qu'il obtient est identique à l'interprétation donnée ci-dessus...

[6] Alors qu'à l'inverse l'espace tridimensionnel n'est pas compact (du moins quand la courbure est nulle). C'est en fait cette propriété qui nous a donné le droit d'utiliser l'équation **6.2.2**.

montrer que c'est en fait le cas[7], et la variance (**6.4.4**) porte alors le nom de *variance cosmique*, c'est-à-dire que c'est la plus petite variance qu'on puisse espérer obtenir[8] en estimant les C_ℓ.

Nous n'avons pour l'instant étudié que les anisotropies générées par les ondes de densité *i.e.* les modes scalaires. Il existe une autre contribution aux anisotropies de température, produite par les modes tensoriels. Dans certains cas, les modes vectoriels peuvent également apporter une contribution (il faut pour cela qu'on soit dans un scénario de sources actives, *cf* partie II). En plus des anisotropies de température, il est possible d'étudier la polarisation du rayonnement fossile. Il existe deux paramètres pour la polarisation linéaire, que nous avons décomposés au chapitre précédent en une partie "électrique" et une partie "magnétique". Un seul type de polarisation (le type électrique) est généré par les modes scalaires, les deux étant générés par les modes tensoriels. Comme les contributions scalaires et tensorielles s'additionnent pour un spectre donné, la polarisation de type magnétique permet *en principe* d'extraire simplement l'information sur les modes tensoriels. En pratique, il faut être certain d'avoir correctement modélisé la polarisation générée par les avant-plans, ce qui est loin d'être une tâche facile [Bouchet & Gispert, 1999] [Tegmark *et al.*, 2000] (*cf* figure 6.1). Enfin, la corrélation croisée entre température et polarisation est en principe mesurable. Du fait des propriétés par parité des deux types de polarisation, seule la corrélation croisée entre polarisation température et polarisation électrique est non nulle. Il existe donc trois spectres qui ont à la fois une contribution des modes scalaires et des modes tensoriels, et un spectre qui n'a qu'une contribution de la part de modes tensoriels[9]. Les différents spectres des modes scalaires sont représentés sur la figure 6.2, ceux des modes tensoriels sur la figure 6.3, et la décomposition des anisotropies de température en ses parties Sachs-Wolfe, Doppler et Sachs-Wolfe intégré est représenté sur la figure 6.4.

En dehors du rayonnement fossile, on peut observer la répartition des galaxies dans le ciel, qui, dans l'hypothèse où elle suit fidèlement celle de la matière noire, permet de dresser une carte du potentiel gravitationnel dans l'Univers. L'observation des redshifts permet en principe de reconstruire une carte tridimensionnelle de la répartition de matière (même si en pratique ça n'est pas facile), ce qui permet de mesurer la quantité $P_{\delta\delta}(k)$ (*cf* équation **6.2.7**, en général on la note simplement $P(k)$), appelée *spectre de puissance de la matière* :

$$P(k) \equiv \left| \widehat{\delta}^2_{\rm mat}(\eta_0, k) \right| . \qquad \textbf{(6.4.5)}$$

Cette expression n'est pas invariante de jauge. Il est préférable de la remplacer par une expression faisant intervenir les potentiels de Bardeen. D'après l'équation (**4.4.11**),

$$P(k) \equiv \frac{4}{9} \frac{1}{\Omega^2_{\rm mat}} \frac{k^4_{\rm phys}}{H_0^4} \left| \widehat{\Phi}^2(\eta_0, k) \right| . \qquad \textbf{(6.4.6)}$$

Un exemple de spectre de puissance de la matière est représenté sur la figure 6.5.

[7] D'une manière générale, la recherche du meilleur estimateur est un problème tr'es complexe. À l'heure actuelle, il n'a été correctement traîté que pour les fonctions de corrélation à deux points, [Martin & Grishchuk, 1997] et à trois points [Gangui & Martin, 2000].

[8] Ça n'est en fait pas tout à fait vrai. On peut diminuer la variance cosmique (du moins en principe) en observant les cartes d'anisotropies depuis plusieurs endroits éloignés de l'Univers, *i.e.* en faisant une moyenne sur plusieurs cartes d'anisotropies. En pratique, c'est évidemment irréalisable, sauf peut-être pour le quadrupole [Kamionkowski & Loeb, 1997].

[9] Notons que ceci n'est vrai qu'à l'ordre linéaire des perturbations. Quand on rajoute des effets d'ordre plus élevé, comme par exemple le weak lensing, le potentiel gravitationnel "déforme" la carte de polarisation et génère une partie magnétique [Zaldarriaga & Seljak, 1998].

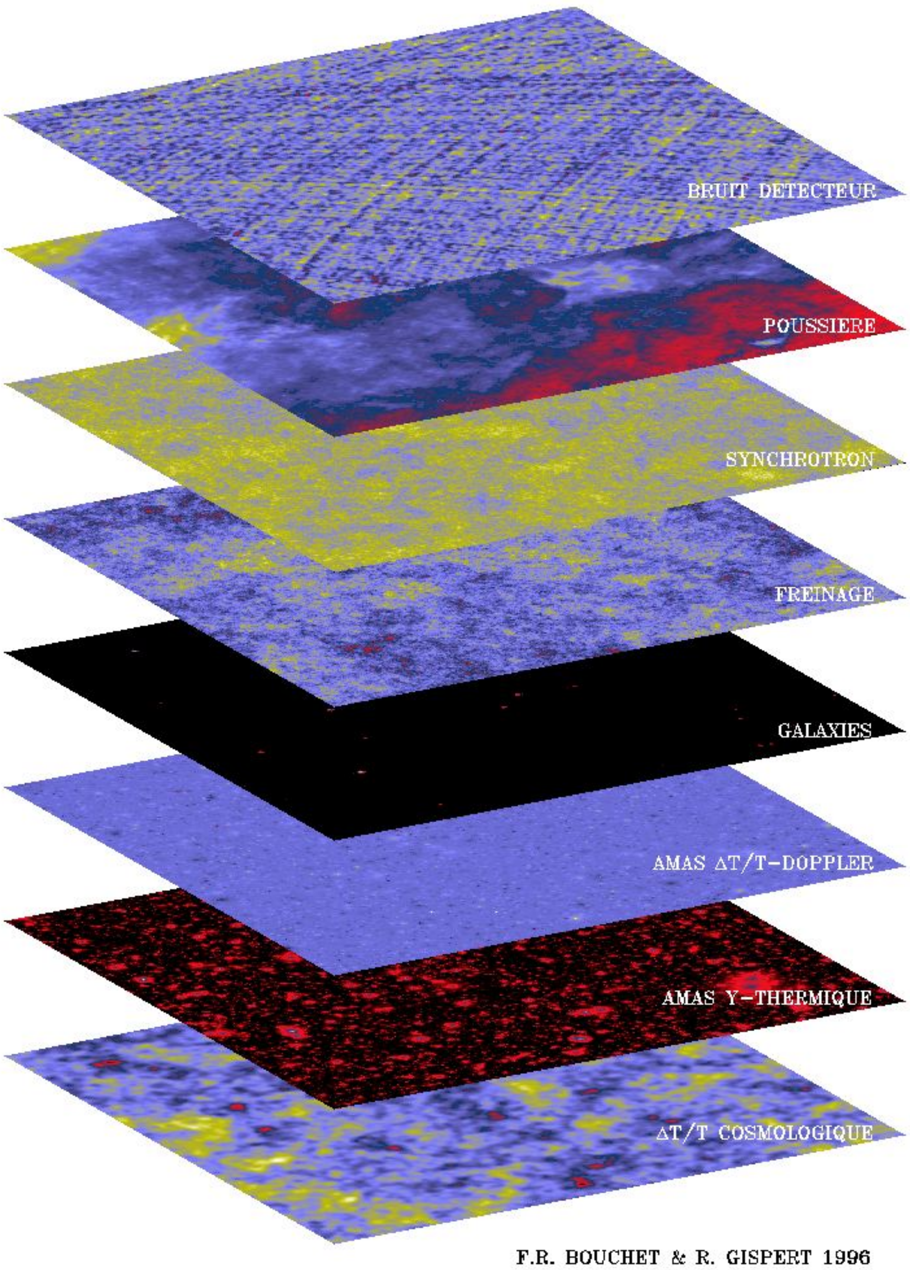


FIGURE 6.1 – Contribution des différents avant-plans aux anisotropies dans le domaine micro-onde. La modélisation correcte de tous ces avant-plans est indispensable pour extraire le signal cosmologique des anisotropies du rayonnement fossile. Tiré de [IAP, `http`].

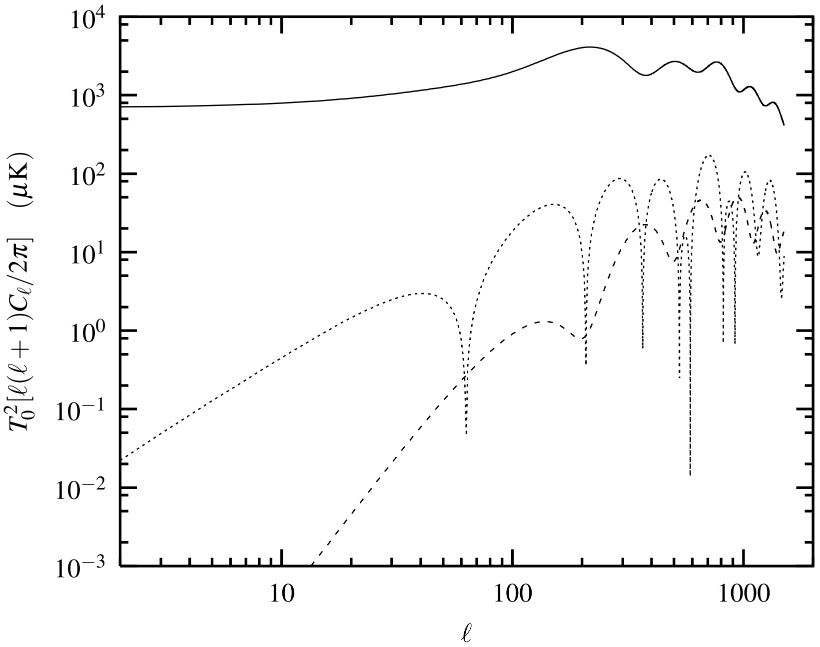


FIGURE 6.2 – Anisotropies du rayonnement fossile générées par les modes scalaires. Les anisotropies de température sont représentées en traits pleins, celle de la polarisation (électrique) en tirets, et la polarisation croisée en pointillés. Dans ce modèle, comme tous les autres de ce chapitre, les paramètres cosmologiques sont, sauf mention contraire les suivants : $h = 0.5$, $\Omega_b h^2 = 0.0125$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $K = 0$, $\Omega_{tot} = 1$, $T_0 = 2.726$ K, et nous avons considéré qu'il y avait trois espèces de neutrinos relativistes non dégénérés. Les spectres initiaux des modes scalaires et tensoriels sont pris invariants d'échelle (*i.e.* $n_S = 1$, $n_T = 0$).

5 Physique du rayonnement fossile

Nous allons maintenant tenir compte de plusieurs effets physiques que nous avons négligés : influence des variations de R (§5.1), de l'expansion de l'Univers (§5.2), de la présence de pression anisotrope (§5.3), des variations des potentiels de Bardeen dans l'ère de radiation (§5.4) de l'inertie des baryons (§5.5) du type de conditions initiales (§5.6), et de la durée de la recombinaison (§5.7).

5.1 Évolution de la vitesse du son

Nous allons d'abord tenir compte du fait que le rapport R n'est pas constant au cours du temps, mais croît comme le facteur d'échelle. Dans la limite des petites longueurs d'ondes, on peut faire une approximation WKB, ce qui revient à remplacer le terme $ku_s\eta \equiv \omega\eta$ de la phase de l'onde par $\omega(\eta)\eta$, avec

$$\omega(\eta) = k\frac{1}{\eta}\int^{\eta} u_s(\eta')\,\mathrm{d}\eta' \equiv k\overline{u_s}(\eta)\,, \qquad \textbf{(6.5.1)}$$

c'est-à-dire en fait la "valeur moyenne" de ku_s au cours du temps [Hu & Sugiyama, 1995a]. Comme $\overline{u_s}(\eta)$ est le même pour tous les modes, cela ne se traduit pas par un changement de position relative entre les pics. Pour des conditions initiales adiabatiques, on doit donc garder le même rapport dans les positions successives des pics, soit 1 : 2 : 3 : ... pour l'ensemble des pics.

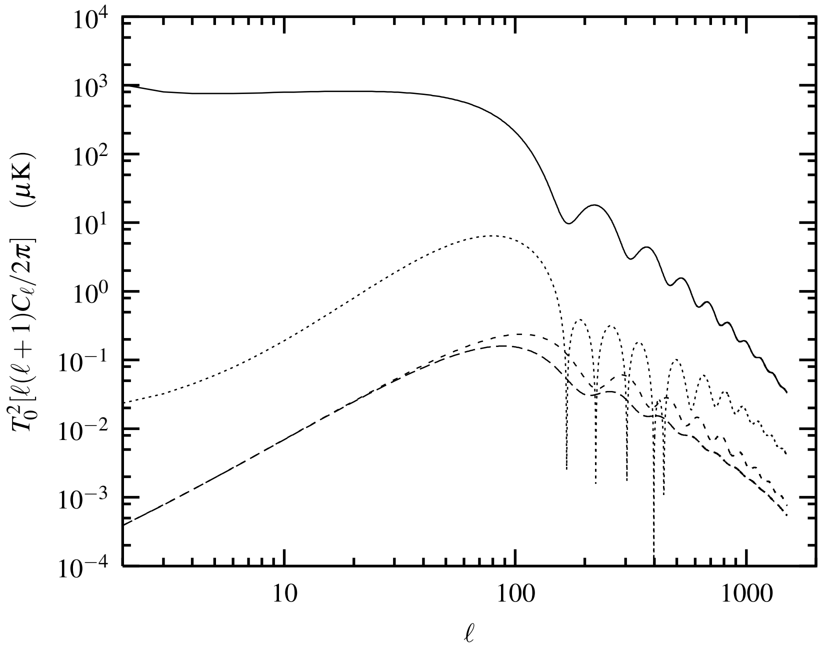


FIGURE 6.3 – Anisotropies du rayonnement fossile générées par les modes tensoriels. Les anisotropies de température sont représentées en traits plein, celles de polarisation en tirets courts (partie électrique) et longs (partie magnétique), et la corrélation croisée entre température et polarisation est représentée en pointillés. On remarquera les différences entre les deux spectres de la polarisation, qui sont uniquement dues à des propriétés de projection, comme illustré (avec d'autres grandeurs) sur les figures 5.2 et 5.3 du chapitre précédent. De même, la différence d'amplitude au maximum des deux spectres est due à des effets de projection. On note à l'inverse que les anisotropies de température sont beaucoup plus contrastées, ce qui s'explique par la nature transverse des ondes gravitationnelles (*cf* encore chapitre 5).

5.2 Amortissement dû à l'expansion

Le terme $-\mathcal{H}\frac{R}{1+R}\dot{\delta}^\flat_\gamma$ de l'équation (**6.1.6**) nous indique que les perturbations sont lentement amorties par l'expansion de l'Univers. On peut incorporer l'effet de ce terme dans la limite à petite longueurs d'onde, en remarquant que pour un objet de masse m, oscillant à la fréquence ω avec l'amplitude A, la quantité E/ω (*i.e.* le rapport de l'énergie sur la fréquence, où $E \equiv \frac{1}{2}mA^2\omega^2$) est un invariant adiabatique et peut donc être considérée constante [Landau & Lifchitz, 1982]. Ici, cela implique que

$$A \propto (1+R)^{-\frac{1}{4}} . \qquad (\mathbf{6.5.2})$$

Comme cet amortissement n'a lieu qu'à petites longueurs d'ondes, les modes qui sont entrés depuis longtemps dans le rayon de Hubble sont plus amortis que les autres. Cet effet est cependant assez faible car le facteur R est le plus souvent inférieur à 1 avant la recombinaison.

5.3 Amortissement Silk

Nous avons pour l'instant négligé la pression anisotrope du fluide de photons, c'est-à-dire (*cf* chapitre 4, §5) que nous avons utilisé une approche fluide dans notre traitement des perturbations. Essayons de comprendre l'influence de la pression anisotrope.

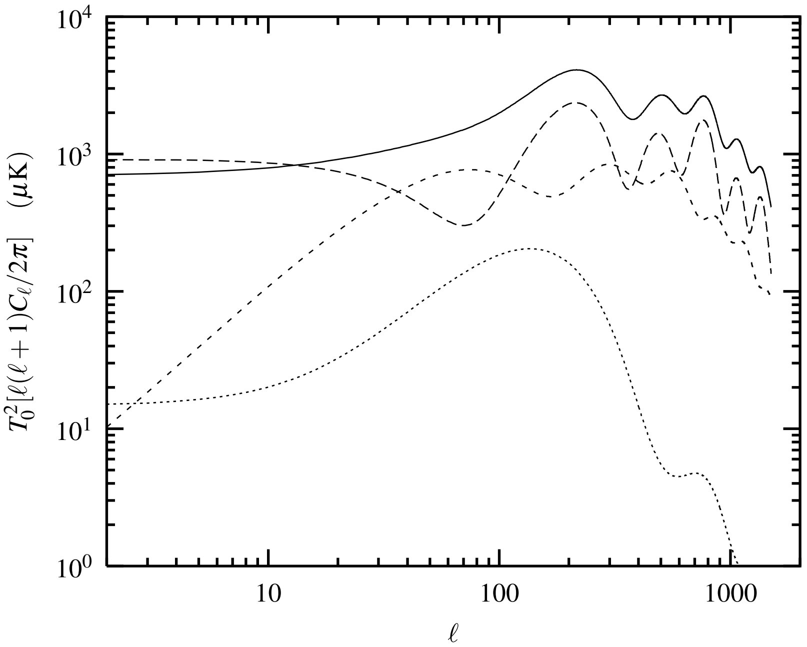


FIGURE 6.4 – Décomposition des anisotropies de température générées par les modes scalaires. La contribution Sachs-Wolfe est représentée tirets longs. Elle domine presque tout le temps les autres contributions. La contribution Doppler, uniquement dominante dans les creux séparant les pics Doppler (et encore, uniquement ceux qui sont générés dans l'ère de matière, *i.e.* les trois premiers pics) est représentée en tirets courts. On notera au passage que le spectre de la contribution Doppler est plus lisse que celui de la contribution Sachs-Wolfe en raison d'effets de projections (*cf* figure 5.2). Enfin les traits pointillés montrent la contribution Sachs-Wolfe intégré, essentiellement présente au niveau des pics de raréfaction comme expliqué dans le texte. Le spectre complet est tracé en trait pleins. Il n'est pas égal à la somme des trois termes précités car ceux-ci sont partiellement corrélés entre eux. Par exemple, l'effet Sachs-Wolfe intégré à grande échelle est de signe opposé à l'effet Sachs-Wolfe, ce qui fait que le spectre total présente à grande échelle moins de puissance que la seule contribution Sachs-Wolfe.

Supposons que nous ayons un milieu homogène perturbé. Si une perturbation de densité est plus grande que le libre parcours moyen des photons, cela signifie qu'un photon subira plusieurs collisions pour traverser cette perturbation. Si à l'inverse le libre parcours moyen des photons est plus élevé, il traversera la perturbation "sans la voir". De même, tous les photons situés dans la perturbation vont sous l'effet de leur vitesse individuelle s'en échapper, sans même diffuser à proprement parler vers l'extérieur (free streaming). Cela nous indique que les structures de taille inférieure au libre parcours moyen des photons vont disparaître rapidement (*i.e.* en quelques libres parcours moyen).

Reprenons l'équation d'évolution du second moment de la fonction de distribution des pho-

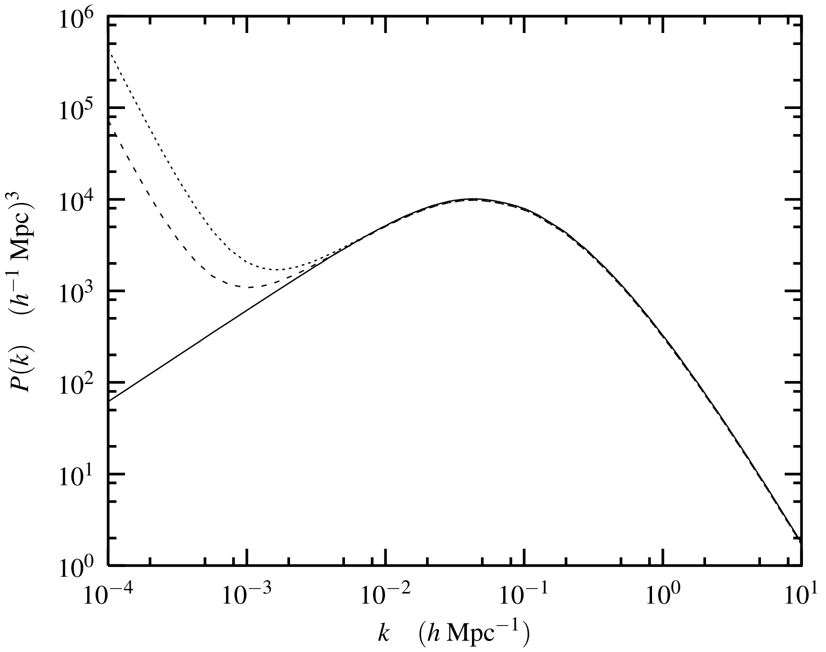


FIGURE 6.5 – Spectre de puissance de la matière. Le spectre est représenté en jauge de feuilletage plat (pointillés), en jauge newtonienne (tirets) et en jauge comobile (trait pleins). Comme prévu, les différences entre les jauges n'apparaissent que pour des modes de taille supérieure au rayon de Hubble, et sont donc probablement inobservables. Les spectres en jauge newtonienne et de feuilletage plat sont en k^{n_S-4} aux grandes échelles, et celui en jauge comobile est en k^{n_S} aux mêmes échelles. Le maximum du spectre correspond au mode qui est entré dans le rayon de Hubble au moment de l'équivalence radiation-matière. Aux plus petites échelles, le spectre serait aussi en k^{n_S-4} si tous ces modes avaient commencé à croître en même temps. Ça n'est cependant pas le cas car ils ont crû comme $\log(a)$ entre leur entrée dans le rayon de Hubble et la fin de l'ère de radiation (*cf* équation **2.4.13**). Le spectre est donc légèrement moins pentu (les petites échelles ont crû en peu plus que les grandes).

tons :

$$\dot{\widehat{\Theta}}{}_2^{(0)} = \frac{k}{5}\left(2\widehat{\Theta}_1^{(0)} - 3\widehat{\Theta}_3^{(0)}\right) - \dot{\tau}\widehat{\Theta}_2^{(0)} + \dot{\tau}\widehat{P}^{(0)} \,, \tag{6.5.3}$$

$$\dot{\widehat{E}}{}_2^{(0)} = \frac{k}{5}\left(-\sqrt{5}\widehat{E}_3^{(0)}\right) - \dot{\tau}\widehat{E}_2^{(0)} - \sqrt{6}\dot{\tau}\widehat{P}^{(0)} \,, \tag{6.5.4}$$

$$\widehat{P}^{(0)} = \frac{1}{10}\left(\widehat{\Theta}_2^{(0)} - \sqrt{6}\widehat{E}_2^{(0)}\right) \,. \tag{6.5.5}$$

Le libre parcours moyen des photons est $l \sim \dot{\tau}^{-1}$. Dans la limite des longueurs d'onde petites devant le libre parcours moyen ($k \gg \dot{\tau}$), on obtient alors

$$\widehat{E}_2^{(0)} = -\sqrt{6}\widehat{P}^{(0)} \,, \tag{6.5.6}$$

$$\widehat{P}^{(0)} = \frac{1}{4}\widehat{\Theta}_2^{(0)} \,, \tag{6.5.7}$$

$$\sqrt{6}\widehat{\Theta}_2^{(0)} = -4\widehat{E}_2^{(0)} \,, \tag{6.5.8}$$

$$\widehat{\Theta}_2^{(0)} = \frac{8}{15}\frac{k}{\dot{\tau}}\widehat{\Theta}_1^{(0)} \,. \tag{6.5.9}$$

(Remarquer que le fait que la diffusion Thomson génère de la polarisation augmente d'un facteur $\frac{4}{3}$ la pression anisotrope [Kaiser, 1983].) On peut alors remplacer la pression anisotrope dans l'équation d'Euler. Après quelques manipulations, l'équation (**6.1.6**) se réécrit :

$$\ddot{\widehat{\Theta}}_{\rm eff} = -\mathcal{H}\frac{R}{1+R}\dot{\widehat{\Theta}}_{\rm eff} - \frac{k^2}{3(1+R)}(\widehat{\Theta}_{\rm eff} + \widehat{\Phi}) - \frac{1}{3}\frac{k^2}{\dot{\tau}}\left[\frac{16}{15}\frac{1}{1+R} + \frac{R^2}{(1+R)^2}\right]\dot{\widehat{\Theta}}_{\rm eff} . \qquad (\mathbf{6.5.10})$$

Il apparaît donc un terme d'amortissement supplémentaire comme attendu. Cet amortissement est plus important que celui dû à l'expansion pour les modes plus petits que le rayon de Hubble et le libre parcours moyen des photons. Dans cette limite, le terme d'amortissement est grand mais varie lentement au cours du temps. Une approximation WKB permet alors de voir que les fluctuations sont amorties au cours du temps proportionnellement à $\exp[-(k/k_{\rm D})^2]$, avec

$$\frac{1}{k_{\rm D}^2(\eta)} \equiv \frac{1}{6}\int^{\eta}\frac{1}{\dot{\tau}}\left[\frac{16}{15}\frac{1}{1+R} + \frac{R^2}{(1+R)^2}\right]\,{\rm d}\eta' . \qquad (\mathbf{6.5.11})$$

Ceci nous indique comme attendu qu'un photon s'éloigne au cours du temps d'une position donnée comme

$$l_{\rm D} \sim k_{\rm D}^{-1} \propto \left(\bar{\dot{\tau}}^{-1}\eta_{\rm LSS}\right)^{\frac{1}{2}} , \qquad (\mathbf{6.5.12})$$

résultat conforme à celui d'une équation de diffusion. Supposons que nous soyons dans un Univers plat sans constante cosmologique et que la domination de la matière se produise au moment de la dernière diffusion. On a alors

$$k_{\rm D}\eta_{\rm LSS} \sim (1+z_{\rm LSS})\sqrt{6\frac{c}{H_{100}}\frac{\sigma_{\rm Th}}{m_{\rm p}c^2}\frac{3c^2H_{100}^2}{8\pi\mathcal{G}}\Omega_{\rm b}h} . \qquad (\mathbf{6.5.13})$$

(*NB* : On a posé ici $H_{100} \equiv 100\,{\rm km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.) Ceci nous indique que cet *amortissement Silk*[10] [Silk, 1968] commence à apparaître vers $\ell \sim 140\sqrt{\Omega_{\rm b}h^2/0.019h}$, c'est-à-dire *avant* le premier pic Doppler. Comme l'effet est exponentiel, les multipoles au-delà de $\ell \sim 2000$ sont presque totalement amortis. Cela fixe la limite utile de résolution des expériences en cours ou en projet.

5.4 Évolution dans l'ère de radiation

Dans l'ère de radiation, l'évolution des modes est assez différente car les potentiels de Bardeen ne sont plus constants au cours du temps. Ils dépendent uniquement des composantes de radiation, dont les contrastes de densité oscillent au cours du temps, et sont donc amortis dès leur entrée dans le rayon de Hubble. Les fluctuations de température situées à l'intérieur du rayon de Hubble suivent alors l'équation

$$\widehat{\Theta}_{\rm eff} = \widehat{\Theta}_{\rm eff}^{\rm in}\cos(ku_{\rm s}\eta) + \frac{\dot{\widehat{\Theta}}_{\rm eff}^{\rm in}}{ku_{\rm s}}\sin(ku_{\rm s}\eta) . \qquad (\mathbf{6.5.14})$$

Il n'y a alors plus de différence entre pics de compression et pics de raréfaction. Cependant, il se produit un effet supplémentaire lors de l'entrée du mode dans le rayon de Hubble, c'est-à-dire au moment du premier pic de raréfaction. En effet, à ce moment-là, le potentiel de Bardeen décroît sur un temps caractéristique de l'ordre du temps de Hubble, par conséquent pas très éloigné de la période de l'onde à ce moment-là. Il apparaît donc un comportement résonnant, qui a pour effet d'amplifier l'ensemble des oscillations qui sont entrées dans le rayon de Hubble avant la transition radiation-matière.

[10] Silk damping

5.5 Couplage photons-baryons

Nous avons considéré que le terme Doppler était proportionnel à $v_{b\gamma}$, la vitesse "moyenne" du fluide de photons-baryons. Ça n'est en fait pas tout à fait vrai, car le terme Doppler est dû à un déplacement de la source émettrice du rayonnement. Or cette source est simplement composée des électrons sur lesquels les photons diffusent. C'est donc la vitesse des baryons et non la vitesse moyenne qui doit intervenir dans le terme Doppler. Les électrons étant (à cette température-là) non relativistes, ils sont plus sensibles à l'amortissement dû à l'expansion, et leur vitesse est (en valeur absolue) plus petite que la vitesse moyenne $v_{b\gamma}$. Dans l'ère de radiation, c'est suffisant pour que le terme Doppler soit sous dominant par rapport au terme Sachs-Wolfe, ce qui assure la présence de la série de pics Doppler.

5.6 Conditions initiales adiabatiques et isocourbures

Nous avons pour l'instant considéré essentiellement des conditions initiales adiabatiques. Les cas des conditions initiales isocourbures est assez différent. Dans ces modèles, seules les perturbations de matière noire sont initialement non nulles. Ainsi le spectre d'anisotropies a une forme de sinus et non de cosinus comme dans le cas adiabatique. On pourrait penser que cela mène à une série de pics dont les positions sont dans le rapport 1 : 3 : 5..., cependant ça n'est pas tout à fait exact. En effet, dans ces modèles, les potentiels de Bardeen restent nuls tant qu'on est dans l'ère de radiation, mais prennent des valeurs constantes non nulles dès qu'on entre dans l'ère de matière. Ces valeurs sont élevées pour les modes hors du rayon de Hubble, mais plus faibles pour les modes qui y sont déjà entrés (à cause du facteur k^2 dans l'équation de Poisson, *cf* équation **4.4.8**). Comme la recombinaison a lieu dans l'ère de matière, il faut tenir compte de la contribution de ces potentiels uniquement à grande longueur d'onde, qui se traduit par l'ajout d'un plateau supplémentaire à petit multipole. Ce plateau agit essentiellement pour les modes qui sont encore hors du rayon de Hubble à la recombinaison, *i.e.* entre $\ell = 2$ et $\ell \sim 200$, c'est-à-dire au niveau du premier pic (qui dans ces modèles est aux alentours de $\ell \sim 100$, soit à une échelle deux fois plus grande que dans le cas adiabatique). Ce plateau est d'amplitude plus grande que le premier pic, ce qui a pour effet de faire disparaître ce dernier. La série de pics restante a des positions dans le rapport 3 : 5 : 7... et est située en dessous du plateau Sachs-Wolfe. Il s'agit donc là d'un modèle aux prédictions très différentes de celles du cas adiabatique, qui n'est cependant plus favorisé par les observations.

5.7 Épaisseur finie de la surface de dernière diffusion

Nous avons pour l'instant supposé que les photons étaient tous émis en même temps, aux alentours de $z \sim 1100$. En pratique, ça n'est pas tout à fait vrai : l'Univers ne passe pas instantanément de l'état parfaitement opaque à l'état parfaitement transparent aux photons. Il nous faut donc calculer la probabilité qu'un photon ait subi sa dernière diffusion à un redshift (ou de manière équivalente à un temps conforme) donné. Nous appellerons cette probabilité *fonction de visibilité*, et nous la noterons $g(\eta)$. On la calcule à partir de l'opacité différentielle $\dot{\tau}$ de la façon suivante : d'abord on calcule la profondeur optique τ d'un objet qui a émis sa lumière au temps conforme η :

$$\tau(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} \dot{\tau}(\eta')\,\mathrm{d}\eta' \qquad \textbf{(6.5.15)}$$

(noter le signe de cette expression, qui fait que $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\eta} = -\dot{\tau}$!), puis on obtient la fonction de visibilité par

$$g(\eta) \equiv e^{-\tau}\dot{\tau} . \qquad \textbf{(6.5.16)}$$

Il est clair que cette fonction est d'intégrale 1. La température dans une direction du ciel $\hat{\boldsymbol{n}}$ est alors donné par

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{n}}) = \int g(\eta) \sum_i \frac{\delta T_i}{T}(\eta, (\eta_0 - \eta)\hat{\boldsymbol{n}})\, \mathrm{d}\eta . \qquad \textbf{(6.5.17)}$$

où les $\delta T_i/T$ représentent les différentes contributions (température vraie, potentiels de Bardeen, terme Doppler, *etc*) à la température effective mesurée. De même, les interactions purement gravitationnelles que subissent à un redshift donné les photons après la surface de dernière diffusion ne concernent que la fraction des photons qui ont déjà connu leur dernière diffusion. Cette fraction, que nous noterons $e(\eta)$, se calcule à partir de la fonction de visibilité par

$$e(\eta) \equiv \int_{\eta_{\mathrm{in}}}^{\eta} g(\eta')\, \mathrm{d}\eta' . \qquad \textbf{(6.5.18)}$$

Cette fonction varie bien sûr de 0 à 1 entre η_{in} et η_0. Ainsi, l'effet Sachs-Wolfe intégré va-t-il être de la forme

$$\left.\frac{\delta T}{T}\right|_{\mathrm{ISW}}(\hat{\boldsymbol{n}}) = \int e(\eta)[\dot{\Phi} + \dot{\Psi}](\eta, (\eta_0 - \eta)\hat{\boldsymbol{n}})\, \mathrm{d}\eta . \qquad \textbf{(6.5.19)}$$

Regardons maintenant l'effet de cette fonction de visibilité. Nous allons pour simplifier supposer que les fluctuations de température sont indépendantes du temps. On a alors

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{n}}) \simeq \int g(r) \sum_i \frac{\delta T_i}{T}(\eta_{\mathrm{LSS}}, \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r})\, \mathrm{d}r , \qquad \textbf{(6.5.20)}$$

avec les notations $\boldsymbol{r} \equiv \eta\hat{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{r}_0 \equiv \eta_0\hat{\boldsymbol{n}}$. On reconnaît là un produit de convolution, qu'on peut transformer en passant dans l'espace de Fourier :

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{n}}) \sim \int \widehat{g}(k) \sum_i \frac{\widehat{\delta T}_i}{T}(\eta_{\mathrm{LSS}}, k) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0}\, \mathrm{d}k . \qquad \textbf{(6.5.21)}$$

La fonction de visibilité peut en gros être assimilée à une gaussienne de largeur égale à la surface de dernière diffusion σ_{LSS}. Cette largeur est du même ordre que le libre parcours moyen des photons juste avant la recombinaison. Ainsi,

$$g(\eta) \sim \frac{1}{\sigma_{\mathrm{LSS}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{(\eta - \eta_{\mathrm{LSS}})^2}{\sigma_{\mathrm{LSS}}^2}\right) , \qquad \textbf{(6.5.22)}$$

dont on déduit

$$\widehat{g}(k) \propto \exp\left(\frac{1}{2}k^2\sigma_{\mathrm{LSS}}^2\right) . \qquad \textbf{(6.5.23)}$$

Cette fonction de visibilité a donc pour effet d'effacer exponentiellement les anisotropies de température sur des échelles inférieures à l'épaisseur de la surface de dernière diffusion[11]. Cet effet va

[11]C'est la même chose qui se produit quand on regarde à travers un verre opaque : l'image est d'autant plus floue que le verre est épais.

donc affecter les échelles plus petites au libre parcours moyen des photons à la surface de dernière diffusion l_{LSS} :

$$l_{\mathrm{LSS}} \sim \dot{\tau}^{-1} < l_{\mathrm{D}} . \qquad \textbf{(6.5.24)}$$

Comme le libre parcours moyen croît au cours du temps, on a :

$$\overline{\tau}^{-1} < \dot{\tau}_{\mathrm{LSS}}^{-1} < \eta_{\mathrm{LSS}} . \qquad \textbf{(6.5.25)}$$

Ainsi, d'après (**6.5.12**), cet effet ne va pas être nécessairement négligeable devant l'amortissement Silk. En pratique, ils sont du même ordre (*cf* figure 7.9).

Chapitre 7

Calcul numérique

Sommaire

Nous touchons maintenant au but que nous nous étions assigné au début de ce mémoire, à savoir être en mesure de comprendre et de calculer les spectres d'anisotropies du rayonnement fossile. Nous nous intéresserons ici uniquement aux perturbations produites dans le cadre des scénarios inflationnaires, le cas des défauts topologiques étant abordé dans la partie II. Nous allons commencer par la partie numérique du calcul des anisotropies (§1), que nous illustrerons ensuite sur divers exemples où nous tâcherons de comprendre l'impact des paramètres cosmologiques (§2) et inflationnaires (§3). Nous comparerons ensuite certains de ces résultats à quelques estimations analytiques (§4).

1 Calcul numérique des anisotropies du rayonnement fossile

Nous allons maintenant donner les étapes principales du calcul numérique des anisotropies du rayonnement fossile. Quelques détails techniques peuvent être trouvés dans [Seljak & Zaldarriaga, 1996] [Lewis *et al.*, 2000], dont le code utilisé ici est inspiré. En pratique, la méthode résolution est la suivante :

Quantités non perturbées

On commence par calculer les quantités non perturbées. Les équations à résoudre comprennent les densités des différentes espèces (**1.3.17**), le paramètre de Hubble (**1.3.29**), la densité critique (**1.3.32**), les paramètres de densité (**1.3.33**), le temps cosmique (l'âge de l'Univers) et le temps conforme (l'horizon comobile). Comme notre but est d'étudier l'évolution des perturbations cosmologiques, l'intégration se fait entre un redshift suffisamment élevé pour que les perturbations considérées n'aient pas encore évolué et maintenant. Étant donné qu'on s'intéresse à des multipoles allant jusqu'à $\ell \lesssim 10^4$, un redshift de départ suffisant[1] est $z \sim 10^9$. On prend comme variable d'intégration le logarithme du temps conforme (ce qui est naturel, les autres variables évoluant en loi de puissance ; en pratiqe il suffit de multiplier par $\mathcal{H}^{-1}$ pour passer de la dérivation par rapport à η à la dérivation par rapport à $\ln a$). Les valeurs ainsi trouvées sont échantillonnées sur quelques centaines à quelques milliers de valeurs de la variable d'intégration. Une procédure d'intégration efficace en FORTRAN est la procédure `dverk`. Celle qui a été utilisée ici est la procédure `RKQS` des "Numerical Recipes" [Press *et al.*, 1992].

Quantités thermodynamiques

Une fois connues les variables dynamiques, on calcule les quantités thermodynamiques, le but étant de connaître l'opacité différentielle $\dot{\tau}$ (**5.5.2**) et la fonction de visibilité g (**6.5.16**). Il s'agit là d'un calcul un plus difficile que le précédent car on a affaire à un système *stiff*. Pour calculer la densité d'électrons libre, il faut calculer le taux de recombinaison de l'hydrogène et de l'hélium. Comme souvent en cosmologie, la recombinaison n'est pas thermodynamiquement contrôlée, mais cinétiquement contrôlée, c'est-à-dire que la densité de matière, finalement assez faible à la recombinaison, ralentit la recombinaison (la probabilité de rencontre entre un électron libre et un ion étant trop faible). Une des conséquences de ceci est de rallonger la durée de la recombinaison et d'élargir la fonction de visibilité. Cela se traduit par un amortissement supplémentaire des anisotropies à petite échelle (*cf* chapitre 6, §5.7). Une autre conséquence est que la recombinaison n'est pas complète : il reste une petite fraction ($\sim 10^{-4}$) d'électrons libres à l'issue de la recombinaison. Cette fraction est cependant suffisamment faible pour l'Univers puisse être considéré comme transparent. On sait cependant que les spectres d'absorption des quasars (*cf* chapitre 1, §4) indiquent que l'Univers est à l'heure actuelle bien plus ionisé que cela. Il faut donc faire appel à une réionisation entre la recombinaison et maintenant, mais à moins que cette réionisation ne se soit produite très tôt ($z \gtrsim 60$), l'Univers peut toujours être considéré comme transparent. Les équations de recombinaison de l'hydrogène ont été écrite il y a une trentaine d'années par Peebles et Zel'dovich [Peebles, 1968] [Zel'dovich *et al.*, 1969]. L'importance de la recombinaison de l'hélium a été comprise assez tardivement (*cf* par exemple [Hu *et al.*, 1995b]), et n'a été correctement prise en compte que récemment [Seager *et al.*, 1999].

Équations des perturbations

Une fois résolues les équations non perturbées, on passe à la résolution des équations perturbées, qui comprennent pour les quatre espèces présentes (ou cinq en comptant la quintessence), les équations de conservation scalaires (**4.4.16**, **4.4.17**) et les deux équations de Poisson (**4.4.8**, **4.4.9**), et l'équation de ondes gravitationnelles (**4.4.7**). Pour les photons et les baryons, il faut tenir compte du couplage par diffusion Thomson (**5.5.10**). Pour les espèces relativistes, il faut rajouter la hiérarchie donnée par l'équation de Boltzmann (**5.4.11**), auquel se rajoute pour les photons la polarisation (**5.4.18**, **5.4.19**) et les termes de couplage (**5.6.1**–**5.6.4**).

[1] Dans les scénarios de quintessence, il faut commencer l'intégration dès la fin de l'inflation pour être sûr que le champ rejoigne l'attracteur. Dans ce cas on commence plutôt vers $z \sim 10^{28}$, ce qui en pratique ne pose aucun problème technique.

Choix des conditions initiales

Une partie des conditions initiales peut être fixée *a posteriori*. C'est le cas de l'indice spectral des perturbations ou du rapport d'amplitude entre modes scalaires et modes tensoriels. Par contre, le type de conditions initiales (adiabatique, isocourbures, *etc*) doit être fixé avant de commencer l'intégration puisque la dynamique des perturbations en dépend explicitement.

Spectre d'anisotropies, première méthode

La hiérarchie de l'équation de Boltzmann permet de trouver les anisotropies du rayonnement fossile. D'après (**5.4.6**, **5.4.7**) et (**6.3.1**), la décomposition en terme de multipoles de la fonction de corrélation à deux points est donnée par la formule très simple

$$C_\ell^{MN} = \frac{2}{\pi} \sum_m \int k^3 M_\ell^{(m)}(\eta_0, k) N_\ell^{(m)*}(\eta_0, k) \, \frac{\mathrm{d}k}{k} \, . \qquad \textbf{(7.1.1)}$$

[*NB* : La formule donnée ici est différente de celles qu'on peut trouver ailleurs, par exemple (**12.3.1**), selon les conventions en vigueur pour les transformées de Fourier (**5.4.6**) et le spectre de puissance (**6.2.2**). Cela provoque des différences de $(2\pi)^3$ et/ou $2\pi^2$ entre les mêmes quantités selon les auteurs.] La somme sur m indique que les contributions scalaires, vectorielles et tensorielles s'ajoutent quadratiquement au spectre final. Historiquement, il s'agit de la première méthode utilisée pour ce problème, qui correspond à faire évoluer la fonction de distribution en un point donné tout au long de l'histoire de l'Univers (*cf* par exemple [Ma & Bertschinger, 1995]). Techniquement, il s'agit d'une méthode extrêmement mauvaise, car on est amené à résoudre un très grand nombre d'équations couplées ($\sim 5 \times \ell_{\rm max}$ quand on calcule les contributions des modes scalaires et tensoriels des anisotropies de température et de polarisation jusqu'au multipole $\ell_{\rm max}$), et ce, pour un grand nombre de valeurs de k (en pratique plusieurs milliers sur un intervalle allant de $\sim 0.1 \ell_{\rm min}/\eta_0$ à $\sim 2\ell_{\rm max}/\eta_0$).

Spectre d'anisotropies, seconde méthode

Une bien meilleure méthode de calcul consiste à obtenir les anisotropies en prenant directement la solution intégrale de l'équation de Boltzmann. On a en effet, d'après (**5.4.11**) et (**5.5.6–5.5.9**),

$$\dot{\widehat{\Theta}}{}_\ell^{(m)} = \frac{k}{2\ell + 1} \left[{}_0\kappa_\ell^m \widehat{\Theta}_{\ell-1}^{(m)} - {}_0\kappa_{\ell+1}^m \widehat{\Theta}_{\ell+1}^{(m)} \right] - \dot{\tau} \widehat{\Theta}_\ell^{(m)} + \widehat{\mathcal{S}}_\ell^{(m)} \, , \qquad \textbf{(7.1.2)}$$

avec, d'après (**5.4.12–5.4.14**) et (**5.5.6–5.5.9**),

$$\widehat{\mathcal{S}}_0^{(0)} = \dot{\tau} \widehat{\Theta}_0^{(0)} \, , \qquad \textbf{(7.1.3)}$$

$$\widehat{\mathcal{S}}_1^{(0)} = \dot{\tau} \widehat{v}_{\rm b}^{(0)} + k(\widehat{\Phi} + \widehat{\Psi}) \, , \qquad \textbf{(7.1.4)}$$

$$\widehat{\mathcal{S}}_2^{(0)} = \dot{\tau} \widehat{P}^{(0)} \, , \qquad \textbf{(7.1.5)}$$

$$\widehat{\mathcal{S}}_1^{(\pm 1)} = \dot{\tau} \widehat{v}_{\rm b}^{(\pm 1)} + k \left(\widehat{\Phi}^{(\pm 1)} + \widehat{\Psi}^{(\pm 1)} \right) \, , \qquad \textbf{(7.1.6)}$$

$$\widehat{\mathcal{S}}_2^{(\pm 1)} = \dot{\tau} \widehat{P}^{(1)} \, , \qquad \textbf{(7.1.7)}$$

$$\widehat{\mathcal{S}}_2^{(\pm 2)} = \dot{\tau} \widehat{P}^{(2)} - \dot{\widehat{E}}{}^{(\pm 2)} \, . \qquad \textbf{(7.1.8)}$$

On peut alors trouver la solution intégrale de cette équation sous la forme

$$\widehat{\Theta}^{(m)}_\ell(\eta_0,k) = \sum_{\ell'}(2\ell'+1)\int_0^{\eta_0} e^{-\tau}\widehat{\mathcal{S}}^{(m)}_\ell(\eta,k)\, j_\ell^{(\ell' m)}(k(\eta_0-\eta))\, \mathrm{d}\eta\ . \qquad \textbf{(7.1.9)}$$

(*NB* : le facteur $(2\ell'+1)$ vient de l'équation **5.4.43**.) De même, pour la polarisation, on trouve :

$$\widehat{E}^{(m)}_\ell(\eta_0,k) = -5\sqrt{6}\int_0^{\eta_0} \dot{\tau} e^{-\tau}\widehat{P}^{(m)}(\eta,k)\,\varepsilon_\ell^{(m)}(k(\eta_0-\eta))\, \mathrm{d}\eta\ , \qquad \textbf{(7.1.10)}$$

$$\widehat{B}^{(m)}_\ell(\eta_0,k) = -5\sqrt{6}\int_0^{\eta_0} \dot{\tau} e^{-\tau}\widehat{P}^{(m)}(\eta,k)\,\beta_\ell^{(m)}(k(\eta_0-\eta))\, \mathrm{d}\eta\ , \qquad \textbf{(7.1.11)}$$

C'est la méthode astucieuse trouvée par Seljak [Seljak, 1994] et qui est à la base du code CMBFAST [Seljak & Zaldarriaga, 1996] [CMBFAST, http]. L'idée sous-jacente n'est pas de regarder l'évolution de la fonction de distribution en un point, mais de regarder la température des zones émettrices. C'est donc la traduction mathématique de la contribution des termes présentés chapitre 6, §3 (*cf* chapitre 8 pour les détails de la dérivation). Il est d'ailleurs assez curieux que cette méthode, finalement beaucoup naturelle, n'ait été trouvée que tardivement. Pour les modes scalaires, on reconnaît dans (**7.1.9**) les termes Sachs-Wolfe, Doppler et Sachs-Wolfe intégré[2]. Pour les modes vectoriels, il existe la même décomposition, si ce n'est que la partie de "température vraie" du terme Sachs-Wolfe n'existe pas pour les modes vectoriels, ce qui est normal puisque c'est une quantité scalaire. Enfin, pour les modes tensoriels, il n'y a qu'un effet Sachs-Wolfe intégré. On notera aussi qu'il y a une petite modification due au couplage avec la polarisation (termes en $\widehat{P}^m$). L'énorme avantage de cette méthode[3] est que ce ne sont que les moments d'ordre 2 de la fonction de distribution perturbée qu'il suffit de calculer avec précision à l'aide de l'équation de Boltzmann. Ceci vient du fait que les moments d'ordre supérieur n'interviennent pas explicitement dans les termes source $\widehat{\mathcal{S}}^{(m)}_\ell$. En pratique, on peut quasiment la tronquer au moment d'ordre 2, même s'il est préférable d'aller jusqu'à des valeurs de l'ordre de $\ell \simeq 10$. Une fois ceci fait, on calcule les autres multipoles par (**7.1.9–7.1.11**), ce qui est assez rapide puisqu'il est possible de précalculer à l'avance les fonctions de Bessel[4]. Une autre optimisation peut être faite en remarquant que le spectre d'anisotropies est une fonction lentement variable en ℓ (et il en est toujours ainsi en vertu du "lissage" effectué par les fonctions de Bessel quand on passe de l'espace de $\boldsymbol{k}$ à celui des ℓ, *cf* les figures du chapitre 5). Il suffit donc de calculer quelques dizaines de multipoles entre $\ell = 2$ et $\ell = \ell_{\max}$ (en pratique, une cinquantaine pour $\ell_{\max} = 1500$), et d'interpoler le spectre obtenu. Une autre optimisation du même type peut également se faire au niveau des multipoles $\widehat{\Theta}^{(m)}_\ell(\eta_0,k)$ calculés à l'aide de l'équation de Boltzmann : dans les intégrales (**7.1.9–7.1.11**), les fonctions de Bessel varient en général (pour les grandes valeurs de k) beaucoup plus vite que les termes sources $\widehat{\mathcal{S}}^{(m)}_\ell(\eta,k)$. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir un échantillonage élevé de ces derniers, quitte à les interpoler lors des opérations de convolution (**7.1.9–7.1.11**). En pratique, il suffit de calculer ces termes sources pour quelques

[2]Le terme $e^{-\tau}k(\widehat{\Phi}+\widehat{\Psi})$ contribue à la fois au terme Sachs-Wolfe et au terme Sachs-Wolfe intégré. On peut séparer ces deux contributions en remarquant que ce terme apparaît dans l'intégrale en facteur de j'_ℓ, ce qui permet d'intégrer par parties. On obtient alors un terme en $g(\eta)(\widehat{\Phi}+\widehat{\Psi})j_\ell$ (contribution au terme Sachs-Wolfe), et un autre en $e^{-\tau}(\dot{\widehat{\Phi}}+\dot{\widehat{\Psi}})j_\ell$ (terme Sachs-Wolfe intégré). Dans une autre jauge, il en irait différemment, mais le résultat final serait bien évidemment inchangé.

[3]appelée pour des raisons évidentes *line-of-sight integration method*

[4]Dans un espace non plat, il y a une fonction propre pour chaque couple (k,ℓ). Cela empêche (pour des raisons d'espace disque) de précalculer à l'avance toutes les fonctions $\phi^k_\ell(\chi)$. On les calcule donc à chaque fois en résolvant l'équation différentielle dont elles sont solutions (*cf* équation **5.4.62**), ce qui ne représente en fait pas une trop grosse perte de temps par rapport au cas plat. La difficulté de cette méthode réside alors dans la séparation entre la solution régulière et la solution divergente en 0 de l'équation différentielle (*cf* [Zaldarriaga *et al.*, 1998]).

centaines de valeurs de k et sur quelques dizaines de valeurs de η, le tout étant ensuite interpolé pour des valeurs intermédiaires quand nécessaire.

Comparatif entre les deux méthodes

Le gain en temps de cette dernière méthode est énorme, de l'ordre d'un facteur 100. Il s'agit là d'une avancée majeure, car le calcul des anisotropies peut se faire à moindre frais dans le cadre d'un nombre très important de modèles (plusieurs dizaines de millions pour [Tegmark & Zaldarriaga, 2000a] et [Le Dour *et al.*, 2001]). À titre d'exemple, le calcul dans les modèles les plus simples (*i.e.* plat, sans constante cosmologique) prend environ une minute sur une machine avec un processeur à 233 MHz (à comparer au matériel employé dans [Ma & Bertschinger, 1995]).

Nous allons maintenant dans les paragraphes qui suivent illustrer sur quelques exemples numériques l'impact des différents paramètres cosmologiques sur le spectre d'anisotropies du rayonnement fossile et le spectre de puissance de la matière. Nous allons séparer la partie "cosmologique" (§2), c'est-à-dire liée au contenu matériel de l'Univers, de la partie "inflationnaire" (§3), c'est-à-dire déterminée par le modèle inflationnaire sous-jacent.

2 Dépendance vis-à-vis des paramètres cosmologiques

2.1 Influence de la densité baryonique

Le paramètre principal qui intervient dans nos équations est $R \propto \rho_{\rm b}/\rho_\gamma$. La densité de photons étant connue ($\rho_\gamma = 4.18 \times 10^{-14}$ J m^{-3} aujourd'hui pour $T_\gamma \simeq 2.728$ K, soit $\Omega_\gamma^0 h^2 = 2.48 \times 10^{-5}$), c'est donc le paramètre $\Omega_{\rm b}^0 h^2$ qui intervient, et on a

$$R_{\rm LSS} \simeq 0.52 \frac{\Omega_{\rm b}^0 h^2}{0.019} \, . \qquad \textbf{(7.2.1)}$$

La densité baryonique a une quadruple influence sur le spectre d'anisotropies.

- **Elle fixe la fréquence des oscillations dans le plasma de photons-baryons** par l'intermédiaire de la vitesse du son $u_{\rm s}$ (*cf* équations **6.1.11**, **6.5.1**). Une haute densité baryonique donne une vitesse du son faible et une basse fréquence, c'est-à-dire des pics Doppler décalés "vers la droite" (*i.e.* à plus petite échelle angulaire). À titre d'exemple, un modèle purement baryonique ($\Omega_{\rm b} = 1$) est complètement exclus par les données. Notons d'ailleurs que c'est à la densité baryonique que la position du premier pic est le plus sensible, et que la position de ce premier pic *teste avant tout les prédictions de la nucléosynthèse*, avant d'aider à déterminer les autres paramètres cosmologiques. Dans un Univers dominé par la matière, on trouve (*cf* équation **6.3.3**)

$$\ell \simeq \pi \frac{\eta_0}{\eta_{\rm LSS}} \frac{1}{u_{\rm s}} \sim 200 \, . \qquad \textbf{(7.2.2)}$$

  Le bon accord entre la position du pic et la prédiction de la nucléosynthèse des éléments légers est à ce titre remarquable[5].
- **Elle fixe l'amplitude relative des pics impairs par rapport aux pics pairs**. Comme nous l'avons vu, cette amplitude est de $1+6R$ dans le cas adiabatique. Le deuxième pic va être d'autant plus bas que la densité baryonique est élevée. En pratique ce facteur $1+6R$ n'est

[5] Le désaccord à environ 2σ entre les résultats de BOOMERanG et les mesures de l'abondance des éléments légers n'en a pas moins fait couler beaucoup d'encre !

pas observable en raison de l'amortissement Silk qui affecte déjà la hauteur du premier pic (*cf* §5.3).
- **Elle fixe le contraste entre les pics** en influant sur l'amplitude du terme Doppler (**6.3.8**). Comme nous l'avons dit, les oscillations acoustiques sont effacées dans la limite d'une densité baryonique nulle (*cf* équation **6.3.9**). À l'inverse, le contraste entre les pics est plus fort quand la densité baryonique est grande. Notons que ce contraste est adouci par des effets de projection : un mode $\boldsymbol{k}$ ne contribue pas exclusivement à l'échelle angulaire $\ell \sim k(\eta_0 - \eta_{\mathrm{LSS}})$ (*cf* équation **6.3.3**), mais à tout un ensemble d'échelles. La hauteur des pics de raréfaction, de compression et des pics dus au terme Doppler sont dans les rapports $(1+6R)^2 : 1 : (1+3R)^2/(1+R)$. Les pics dus au terme Doppler sont donc plus hauts que les pics de compression. Cela pourrait avoir pour conséquence de combler les creux séparant les pics de compression et les pics de raréfaction, au point que ce sont les pics de compression qui représentent alors les minima du spectre. C'est en effet ce qui se passe entre le plateau Sachs-Wolfe (qui est un pic de compression) et le premier pic Doppler. Le spectre produit reste monotone croissant dans cette zone. Cependant, ça n'est plus le cas à plus petite échelle, car les pics secondaires commencent leur évolution dans l'ère de radiation, ce qui diminue la contribution relative du terme Doppler (*cf* §5.4 du chapitre précédent et figure 6.4).
- **Elle influe sur l'amortissement Silk à petite échelle** de par son influence sur le libre parcours moyen des photons, qui est inversement proportionnel à la densité baryonique. Plus la densité baryonique est élevée, plus le libre parcours moyen des photons est faible (terme en $\dot{\tau}^{-1}$ dans l'équation **6.5.11**), et plus l'amortissement collisionnel est important (*cf* chapitre 5).

Ces différents effets sont illustrés sur la figure 7.1.

2.2 Influence de la densité de matière totale

Ici, c'est le paramètre $\Omega_{\mathrm{mat}}h^2$ qui va intervenir. Dans les modèles cosmologiques standards, la densité de matière noire est nettement supérieure à la densité de matière baryonique, et densité de matière noire et densité de matière totale peuvent par conséquent être assimilées. Contrairement à la matière baryonique, la matière noire n'est couplée que gravitationnellement aux photons, aussi son influence est-elle moins directe. Elle se fait sentir uniquement par l'intermédiaire de la dynamique de l'expansion et des potentiels de Bardeen. Augmenter la densité de matière totale revient à reculer l'époque de l'équivalence radiation-matière. La recombinaison se trouve alors d'autant plus dans l'ère de matière, et la structure des pics est celle attendue dans l'ère de matière, avec une différence marquée entre pics de raréfaction et pics de compression. À l'inverse, une faible densité de matière rapproche la recombinaison de la transition radiation-matière, et les pics de compression et de raréfaction jouent des rôles semblables. De plus, dans ce cas, la majorité des pics ont subi la résonance due à la décroissance des potentiels de Bardeen lors de leur entrée dans le rayon de Hubble, ce qui augmente l'amplitude de l'ensemble des pics.

Un autre effet important apparaît dans la position des pics. En effet, le temps conforme écoulé depuis la phase inflationnaire dépend de la dynamique de l'expansion. Du fait des équations de Friedmann (*cf* annexe B), le temps conforme de la dernière diffusion (de même que l'âge de l'Univers) est d'autant plus faible que la densité de matière non relativiste est élevée. Ainsi, la structure des pics Doppler va-t-elle être décalée vers les petites échelles dans les modèles à faible densité de matière non relativiste[6]. Le tout est résumé sur la figure 7.2.

[6]Il y a également une légère modification de la relation distance angulaire-redshift, mais ça n'est pas l'effet prépon-

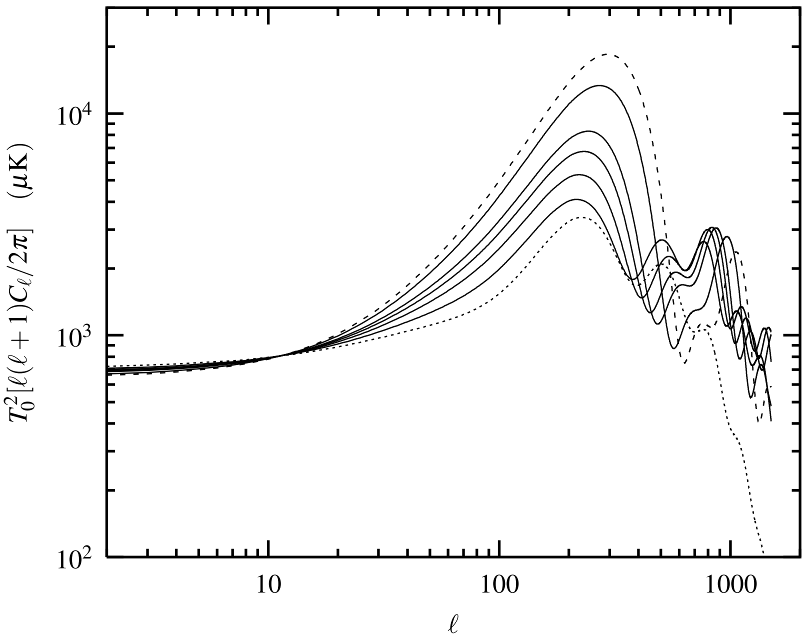


FIGURE 7.1 – Influence de la densité baryonique sur le spectre d'anisotropies. Pour les spectres en traits pleins, les valeurs de $\Omega_\mathrm{b}h^2$ sont, de bas en haut au niveau du premier pic : 0.0125, 0.0250, 0.0375, 0.0500, et 0.0875. Les deux valeurs extrêmes sont 0.0025 (pointillés) et 0.1250 (tirets). L'influence de la densité baryonique sur la hauteur du premier pic et sur la hauteur relative entre pics pairs et impairs est manifeste. L'amortissement Silk et le contraste entre les pics n'augmentent significativement que pour $\Omega_\mathrm{b}h^2 \gtrsim 0.0500$. Noter que pour de très basses valeurs de la densité baryonique (ici, $\Omega_\mathrm{b}h^2 = 0.0025$), il apparaît à nouveau un amortissement important à petite échelle. Cela est dû au fait que le découplage commence plus tôt quand il y a peu de baryons et que l'épaisseur de la surface de dernière diffusion est plus large (le libre parcours moyen des photons augmente). Cela se traduit par un léger décalage des pics vers la droite et un amortissement à petite échelle beaucoup plus important.

2.3 Influence du rapport matière noire - matière baryonique

Le rapport de la densité de matière noire à la densité de matière baryonique va influer sur leurs contributions respectives aux potentiels de Bardeen. Comme les perturbations de matière baryonique ne croissent qu'après le découplage, on s'attend à ce que le spectre de puissance de la matière ait moins d'amplitude quand la densité de matière noire est plus faible. De plus, les perturbations de matière oscillent quand elles sont couplées aux photons, et les perturbations gardent en principe trace de ces oscillations après le découplage (*cf* équation **2.5.7**). Ces résultats sont illustrés dans la figure 7.3.

2.4 Influence de la constante de Hubble

La constante de Hubble n'est pas un paramètre libre à proprement parler. D'après les équations de Friedmann, elle résulte d'une certaine combinaison des densités de toutes les formes de matières qui participent à l'expansion. En d'autres termes, on ne peut varier le paramètre de Hubble indépendamment de tout le contenu matériel de l'Univers. Par exemple, au paragraphe 2.2, nous avons

dérant.

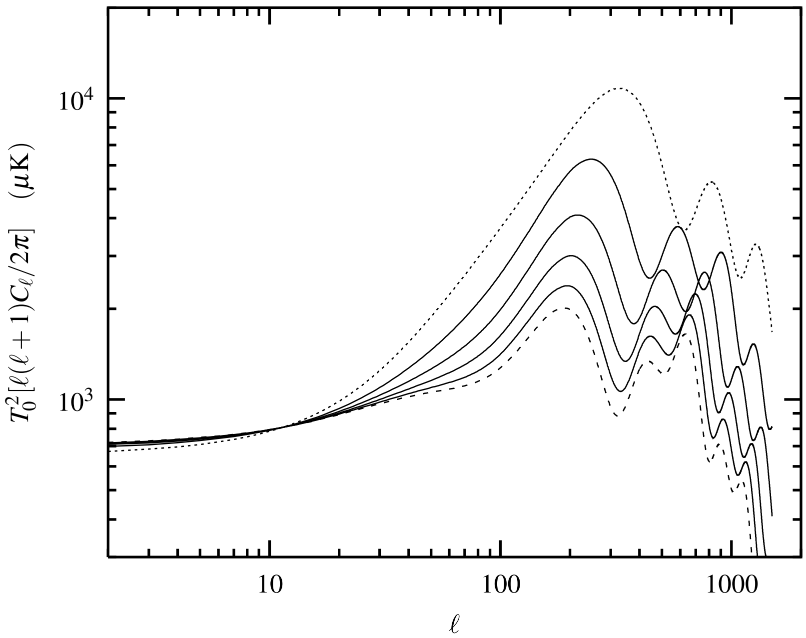


FIGURE 7.2 – Influence du paramètre de Hubble h sur le spectre d'anisotropies du rayonnement fossile. La densité de matière baryonique est fixée à $\Omega_b h^2 = 0.0125$, et celle de matière noire varie avec h. Sont représentés les spectres avec des valeurs de h de 0.20 (pointillés), 0.35, 0.50, 0.65, 0.80 (traits pleins) et 0.95 (tirets). Comme expliqué dans le texte, le spectre présente d'autant plus d'amplitude que la transition radiation-matière a lieu tardivement, c'est-à-dire pour les faibles valeurs de h. Le spectres obtenus en diminuant h sont assez semblables à ceux obtenus en augmentant $\Omega_\nu h^2$ (*cf* figure 7.8) car dans les deux cas on modifie l'époque de l'équivalence radiation-matière $z_{\rm eq}$ de la même façon. Noter également l'apparition d'un léger creux entre le plateau Sachs-Wolfe et le premier pic Doppler pour les valeurs élevées de h.

varié h en même temps que ρ_c^0, les densités des autres espèces étant fixées.

2.5 Influence de la constante cosmologique

Nous allons maintenant étudier l'influence de la constante cosmologique sur l'évolution des perturbations. Pour cela, nous allons soit varier le paramètre $\Omega_\Lambda h^2$, à $\Omega^0_{\rm mat} h^2$ constant (ce qui va également faire varier le paramètre de Hubble h, *cf* paragraphe précédent), soit varier le paramètre $\Omega_\Lambda h^2$, à h constant. Dans le premier cas, le rapport $\rho_\Lambda/\rho_{\rm mat}$ varie, alors qu'il est constant dans le second cas.

L'équation (**6.3.2**) nous donne la relation entre le mode k et l'échelle angulaire θ à laquelle il contribue majoritairement. Dans un Univers en expansion, il faut remplacer cette relation par la relation distance angulaire-redshift. Or la distance angulaire d'un objet ayant émis des photons au temps conforme $\eta_{\rm em}$ est simplement

$$d_A^{\rm phys} = \frac{a_{\rm obs}}{1+z_{\rm em}}(\eta_{\rm obs} - \eta_{\rm em}) \,. \qquad \textbf{(7.2.3)}$$

Comme la recombinaison se produit toujours au même redshift (nous supposerons la densité baryonique $\Omega_b^0 h^2$ constante), ce sont ici les variations de $a_{\rm obs}(\eta_{\rm obs} - \eta_{\rm em})$ qui vont affecter la position

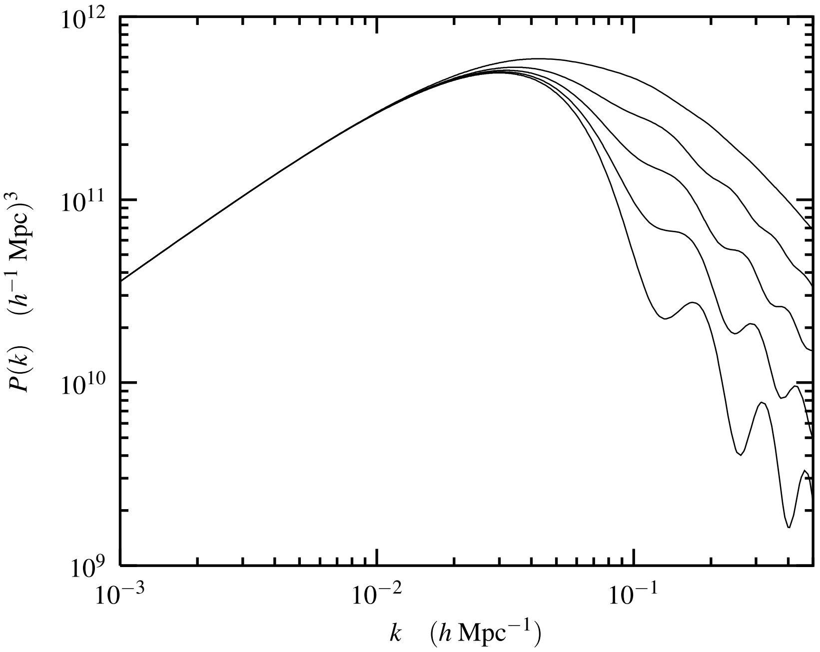


FIGURE 7.3 – Influence du rapport $\Omega_{\mathrm{b}}^0/\Omega_{\mathrm{c}}^0$ à h fixé sur le spectre de la matière. Les valeurs de Ω_{b}^0 et Ω_{c}^0 sont respectivement $(0.05, 0.95)$, $(0.20, 0.80)$, $(0.35, 0.65)$, $(0.50, 0.50)$ et $(0.65, 0.35)$ (de haut en bas). Les oscillations sont réminiscentes du comportement oscillatoire des perturbations de matière baryonique avant le découplage et sont donc d'autant plus marquées que le rapport $\Omega_{\mathrm{b}}^0/\Omega_{\mathrm{c}}^0$ est élevé. D'autre part, le spectre possède moins de puissance quand la densité de matière noire est faible car l'instabilité de Jeans commence plus tard et l'amortissement Silk est plus important. Noter aussi la fréquence des oscillations, de plus en plus faible à mesure qu'on augmente la densité baryonique.

des pics. Dans un Univers plat avec constante cosmologique, on a (*cf* annexe B)

$$a_{\mathrm{obs}}\Delta\eta \sim \frac{c}{H_{100}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{h^2\Omega_{\mathrm{rad}}^0 + h^2\Omega_{\mathrm{mat}}^0 x + h^2\Omega_{\Lambda}^0 x^4}} \,. \qquad \mathbf{(7.2.4)}$$

Dans tous les cas, la quantité $h^2\Omega_{\mathrm{rad}}^0$ est constante (et relativement négligeable de toute façon). Dans le cas où $\Omega_{\mathrm{mat}}^0 h^2$ est constant, une augmentation de $h^2\Omega_{\Lambda}^0$ va diminuer d_A^{phys} et la taille angulaire des pics va augmenter (*cf* figure 7.4). Dans le cas où c'est h qui est constant, un échange entre Ω_{mat}^0 et Ω_{Λ}^0 va diminuer la taille angulaire des pics (*cf* figure 7.5 ; l'effet dominant est en fait dû à la variation de η_{LSS}). De plus, quand la constante cosmologique domine aujourd'hui, les potentiels de Bardeen décroissent au cours du temps, ce qui produit un effet Sachs-Wolfe intégré tardif et augmente la puissance aux grandes échelles, comme on peut le voir sur les deux figures.

2.6 Influence de la courbure

L'effet de la courbure est relativement semblable à celui de la constante cosmologique. Quand on a un Univers ouvert, la relation distance angulaire-redshift est modifiée, et les potentiels de Bardeen décroissent après "l'équivalence matière-courbure". Cependant, à ces effets s'ajoute celui de déviation géodésique, qui fait que deux photons s'éloignent "plus vite" l'un de l'autre dans un Univers ouvert que dans un Univers plat. On s'attend donc que les pics Doppler soient d'autant

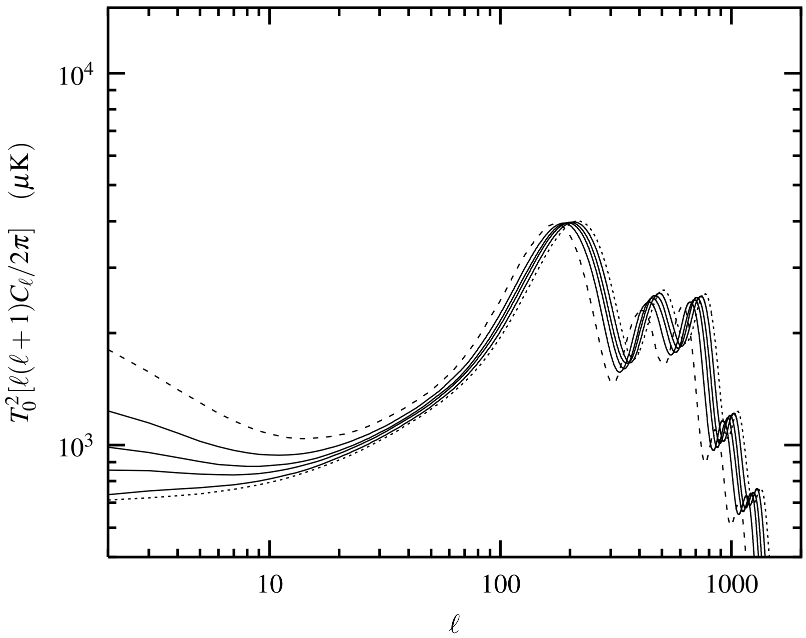


FIGURE 7.4 – Influence de la constante cosmologique sur le spectre d'anisotropies. Les valeurs de ρ_c^0 et ρ_b^0 sont les mêmes pour tous les spectres représentés, par contre Ω_Λ et donc h varient. Les valeurs de Ω_Λ sont, de bas en haut pour le plateau Sachs-Wolfe, $\Omega_\Lambda = 0$ (pointillés), $\Omega_\Lambda = 0.4$, $\Omega_\Lambda = 0.6$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_\Lambda = 0.8$ (traits pleins) et $\Omega_\Lambda = 0.9$ (tirets). Du fait que h augmente avec Ω_Λ (on a $h^2 \propto (1-\Omega_\Lambda)^{-1}$), les pics sont décalés vers les petites échelles. Seul le spectre pour $\Omega_\Lambda = 0$ a été normalisé à COBE aux grandes échelles. Pour les autres, on a gardé la même valeur de l'amplitude du spectre initial de façon à mieux visualiser l'effet croissant du terme Sachs-Wolfe intégré avec Ω_Λ^0.

plus décalés vers les petites échelles. Cela vient du fait que la déviation géodésique est plus forte dans un espace ouvert que dans un espace plat. Quelques exemples sont montrés sur la figure 7.6. Notons qu'il est parfaitement possible de jouer sur la courbure et la constante cosmologique de façon à produire un spectre dont la structure des pics Doppler est exactement identique à celle d'un modèle plat sans constante cosmologique. Cette "dégénérescence géométrique" est cependant levée (du moins en principe) par l'effet Sachs-Wolfe intégré à grande échelle qui va affecter la hauteur du premier pic par rapport au plateau Sachs-Wolfe.

Un espace fermé a l'effet inverse sur la position des pics. La déviation géodésique est cette fois moins forte que dans un espace plat, et les pics sont alors décalés vers les plus grandes échelles (*cf* figure 7.7). Un cas extrême est produit quand la "surface" de dernière diffusion se trouve exactement aux antipodes de l'observateur. Dans ce cas-là, toute la région émettrice est concentrée en un point, et les contributions Sachs-Wolfe sont les mêmes dans toutes les directions. Le terme Doppler est réduit à simplement un dipole (donné par la vitesse de la région émettrice par rapport à l'observateur). La seule contribution notable reste celle de l'effet Sachs-Wolfe intégré car si les photons ont tous été émis du même endroit, il n'ont pas interagi avec les mêmes puits de potentiel, puisqu'ils ne se sont pas propagés dans la même direction avant d'arriver à l'observateur. Pour des rayons de courbure encore plus petits, les photons font plus d'un demi-tour de l'Univers avant d'arriver à l'observateur.

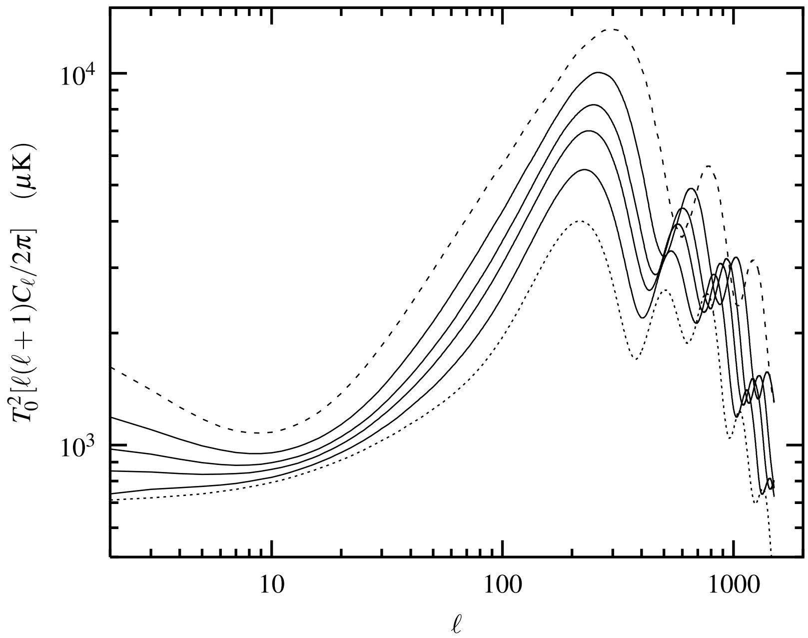


FIGURE 7.5 – Influence de la constante cosmologique sur le spectre d'anisotropies. Les valeurs de ρ_b^0 et h sont les mêmes pour tous les spectres représentés, par contre Ω_Λ^0 et donc $\Omega_{\rm mat}^0$ varient ($\Omega_\Lambda^0 + \Omega_{\rm mat}^0 \sim 1$). Les valeurs de Ω_Λ^0 sont, de bas en haut au niveau du plateau Sachs-Wolfe, $\Omega_\Lambda^0 = 0$ (pointillés), $\Omega_\Lambda^0 = 0.4$, $\Omega_\Lambda^0 = 0.6$, $\Omega_\Lambda^0 = 0.7$, $\Omega_\Lambda^0 = 0.8$ (traits pleins) et $\Omega_\Lambda^0 = 0.9$ (tirets). Du fait que h est constant, les pics sont cette fois décalés vers les petites échelles. Seul le spectre pour $\Omega_\Lambda^0 = 0$ a été normalisé à COBE aux grande échelles. Pour les autres, on a gardé la même valeur de l'amplitude du spectre initial de façon à mieux visualiser l'effet croissant du terme Sachs-Wolfe intégré avec Ω_Λ^0.

2.7 Influence de la densité de neutrinos

La densité de neutrinos joue un rôle semblable mais opposé à la densité de matière. En jouant sur la densité de neutrinos, on modifie la densité totale de radiation et on affecte l'époque d'équivalence radiation-matière. La position des pics Doppler ainsi que la différence entre les pics de compression et les pics de raréfaction (*cf* §2.2 et chapitre 6, §5.4) va être affectée de même (voir figure 7.8). Notons cependant que contrairement à ce qu'il se passe quand on modifie la densité de matière, modifier la densité sous forme de radiation ne modifie pas significativement la valeur du paramètre de Hubble aujourd'hui.

2.8 Influence de la microphysique

Les effets de l'amortissement Silk et de l'épaisseur finie de la surface de dernière diffusion sont représentés sur la figure 7.9. Pour des valeurs typiques des paramètres cosmologiques, ces deux effets sont d'amplitude relativement voisines mais c'est l'amortissement Silk qui est plus important.

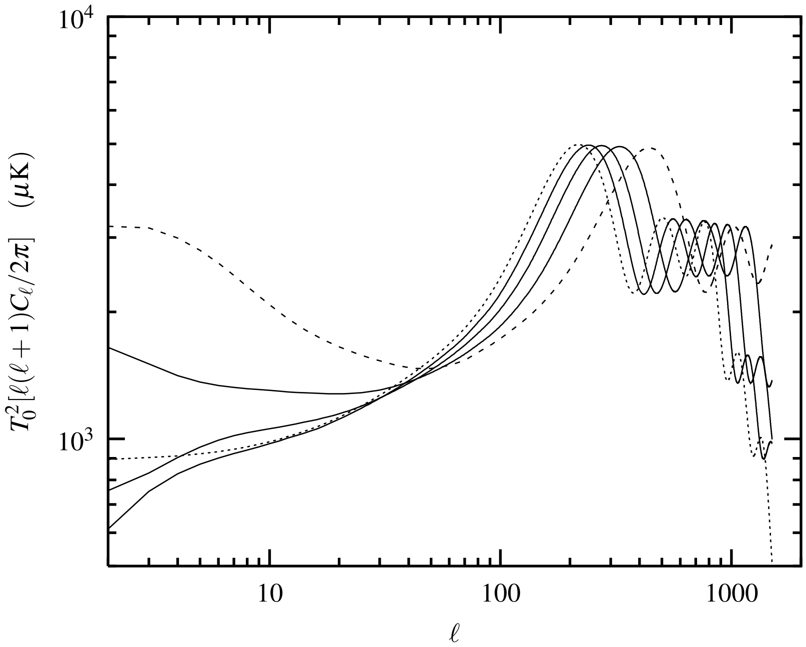


FIGURE 7.6 – Influence du rayon de courbure des sections spatiales ouvertes sur les anisotropies du rayonnement fossile. La densité de matière est constante, et le paramètre de densité total $\Omega^0_{\rm tot}$ vaut successivement 1.0 (pointillés), 0.8, 0.6, 0.4 (traits pleins) et 0.2 (tirets). Contrairement à ce qui se passe pour les modèles à constante cosmologique (*cf* figure 7.4), les pics sont toujours décalés vers les petites échelles. Cela est dû à l'effet de déviation géodésique mentionné dans le texte. Comme pour les modèles à constante cosmologique, les potentiels de Bardeen décroissent au cours du temps. Les termes Sachs-Wolfe et Sachs-Wolfe intégré sont donc de signe opposé et peuvent donc partiellement se compenser, comme c'est le cas pour $\Omega^0_{\rm tot} \geq 0.6$. Pour des valeurs plus faibles de $\Omega^0_{\rm tot}$, c'est le terme Sachs-Wolfe intégré qui domine à grande échelle.

3 Dépendance vis-à-vis des paramètres inflationnaires

Les paramètres inflationnaires sont généralement regroupés avec les paramètres décrivant le contenu matériel de l'Univers sous le nom générique de "paramètres cosmologiques". Cette appellation est non seulement très réductrice mais aussi dangereuse. En effet, il est généralement plus ou moins implicitement admis que la partie "intéressante" des paramètres cosmologiques est donnée par le contenu matériel de l'Univers. Les paramètres inflationnaires sont donc souvent pris comme résultat du modèle inflationnaire le plus simple et réduits au plus petit nombre. Or il s'agit là d'un choix très arbitraire qui n'a aucune justification physique : quand bien même tous les modèles inflationnaires ont des conséquences cosmologiques "génériques" (Univers plat, homogène et isotrope), la physique des perturbations inflationnaire peut beaucoup varier d'un modèle à l'autre. Une des raisons à cela est que les perturbations que l'on observe sont parmi celles qui ont été les dernières à quitter le rayon de Hubble. elles nous montrent donc *la fin de la phase inflationnaire*, dont la dynamique dépend explicitement du modèle considéré. Bien évidemment, il y a une raison technique à ce choix arbitraire : pour arriver à extraire les paramètres cosmologiques et inflationnaires des observations, on n'a pas envie que l'espace des paramètres soit trop grand. D'abord parce qu'il devient difficile d'explorer tout l'espace des paramètres, et ensuite parce que trop de paramètres mène inévitablement à une dégénérescence entre eux, limitant ainsi l'impact des résul-

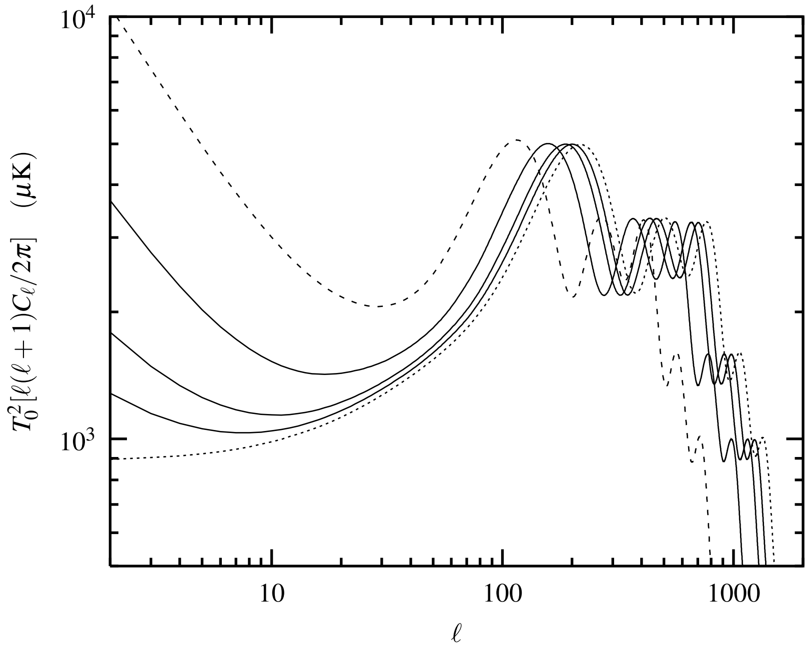


FIGURE 7.7 – Influence du rayon de courbure des sections spatiales fermées sur les anisotropies du rayonnement fossile. La densité de matière est constante, et le paramètre de densité total $\Omega^0_{\rm tot}$ vaut successivement 1.0 (pointillés), 1.2, 1.4, 2.0 (traits pleins) et 4.0 (tirets). Contrairement au cas ouvert, les potentiels de Bardeen croissent au cours du temps (car $\Omega_{\rm mat}$ est croissant avant que l'expansion ne s'arrête). Les termes Sachs-Wolfe et Sachs-Wolfe intégré sont toujours de même signe, ce qui se traduit par une augmentation de la puissance à grande échelle angulaire plus rapide que dans le cas ouvert (*NB* : comme dans les figures 7.4 et 7.5 nous avons pris ici la même amplitude du spectre initial que sur la figure précédente).

tats des mesures. Il existe peut-être une autre raison à ce choix : on "connaît" (ou on espère déjà connaître...) quels sont les paramètres "cosmologiques" : densité baryonique, de matière noire, constante cosmologique, courbure, *etc*, et ce sont donc ces paramètres que l'on aimerait mesurer *en priorité*. Malheureusement, il se trouve que le mécanisme dans l'Univers primordial qui génère les fluctuations a une influence *plus grande* sur le spectre final que les paramètres cosmologiques. Ceci n'a strictement rien de surprenant puisqu'on a déjà des limites sur ces derniers, et que luer influence sur la dynamique des perturbations reste relativement limitée. À l'inverse, les conditions initiales des perturbations peuvent changer du tout au tout avec le mécanisme de génération des fluctuations primordiales, sans compter que la dynamique et la statistique des perturbations dépendent explicitement du mécanisme qui les a générées (c'est le cas dans les scénarios de défauts topologiques). Pour pouvoir espérer extraire des paramètres cosmologiques, il faut donc presque obligatoirement faire des hypothèses sur le mécanisme initial de génération des fluctuations. Nous avons par exemple jusqu'ici supposé qu'il s'agissait d'un mécanisme d'inflation à un seul champ scalaire. Nous allons maintenant étudier l'influence de certains paramètres inflationnaires dans ce cas-là, avant de regarder les conséquences de modèles plus complexes dans les deux parties suivantes.

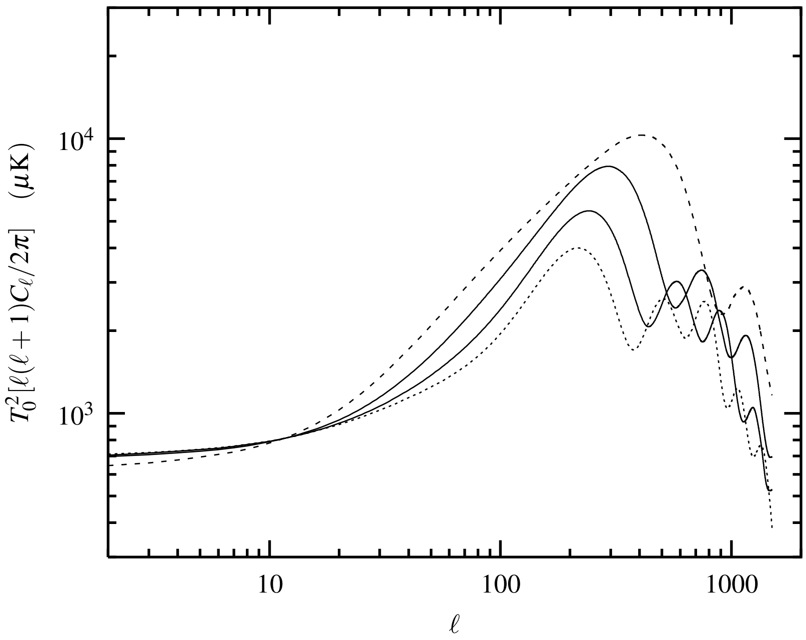


FIGURE 7.8 – Influence de la densité de neutrinos relativistes sur le spectre d'anisotropies. Sont représentés des modèles avec respectivement 3 (pointillés), 10, 30 (traits pleins) et 100 (tirets) espèces de neutrinos relativistes non dégénérés (de bas en haut). Augmenter la densité de neutrinos revient à rapprocher l'équivalence radiation-matière de maintenant, ce qui décale les pics vers la droite et modifie l'effet ISW précoce, notamment au niveau du premier pic. La structure des pics est également affectée quand l'ère de radiation dure plus longtemps. Mis à part l'effet ISW tardif à grande échelle, qui ici est absent, on obtient des spectres du même type que ceux de la figure 7.5.

3.1 Influence de l'indice spectral scalaire

Pour certains modèles inflationnaires, les spectres initiaux des modes scalaires et tensoriels peuvent être approximés par une loi de puissance. On définit en général l'*indice spectral* des modes scalaires et tensoriels par

$$\left\langle k^3 |\Phi(k)|^2 \right\rangle \propto k^{n_S - 1} , \qquad \textbf{(7.3.1)}$$

$$\left\langle k^3 \hat{\bar{\bar{E}}}_{uv} \hat{\bar{\bar{E}}}^{uv} \right\rangle \propto k^{n_T} . \qquad \textbf{(7.3.2)}$$

(La définition de l'indice spectral des modes scalaires vient du fait qu'on s'intéressait initialement à la fonction de corrélation des perturbations de matière dont la transformée de Fourier s'écrit $\left\langle |\delta_{\rm mat}(k)|^2 \right\rangle$, et qui en jauge comobile est en k^{n_S} quand le potentiel de Bardeen est invariant d'échelle, *cf* équation **6.4.6**.) Comme tous les modes évoluent indépendamment les uns des autres, le spectre final va toujours être proportionnel au spectre initial. On définit ainsi la notion de *fonction de transfert* T_A d'une quantité A par l'équation

$$\left\langle |A(\eta_0,k)|^2 \right\rangle = \left\langle |A(\eta_{\rm in},k)|^2 \right\rangle T_A(\eta_0,k) . \qquad \textbf{(7.3.3)}$$

La fonction de transfert ne dépend que de l'évolution des modes, donc de ce que nous avons appelé les paramètres cosmologiques, alors que le spectre initial ne dépend que des conditions

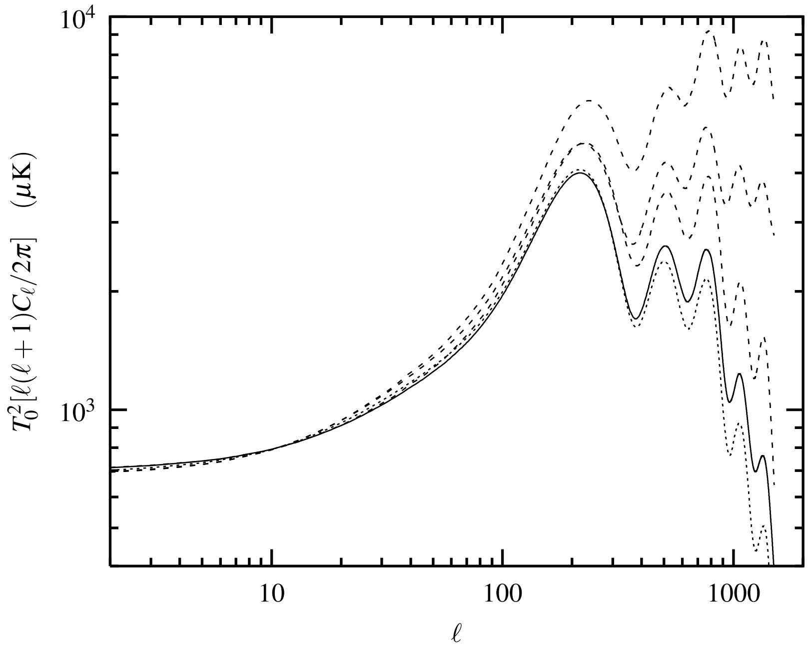


FIGURE 7.9 – Influence de la microphysique sur le spectre d'anisotropies. Les tirets représentent les anisotropies calculées dans le modèle SCDM sans tenir compte de l'amortissement Silk ni de l'épaisseur de la surface de dernière diffusion (en haut), sans tenir compte de l'amortissement Silk mais en tenant compte de l'épaisseur finie de la surface de dernière diffusion (au milieu), et en tenant compte de l'amortissement Silk mais pas de l'épaisseur finie de la surface de dernière diffusion (en bas). En traits pleins est représenté le calcul exact. En pointillés est représenté le cas où on n'a pas tenu compte de l'amortissement Silk ni de la surface de dernière diffusion, mais qu'on a corrigé le spectre obtenu à l'aide des estimations analytiques de ces deux effets données par les équations (**6.5.11**) et (**6.5.23**). Noter que dans le cas du spectre non amorti, on retrouve à peu près le rapport $(1+6R)^2$ entre le premier pic et le plateau Sachs-Wolfe (*cf* §2.1).

initiales, c'est-à-dire des paramètres inflationnaires. Comme on s'intéresse en général à la quantité $\ell(\ell+1)C_\ell$, invariante d'échelle quand le spectre initial est invariant d'échelle (*cf* §4.1), il est clair que le spectre final va être à peu près proportionnel à ℓ^{n_S-1} pour les modes scalaires et à ℓ^{n_T} pour les modes tensoriels[7]. Un excès de puissance à grande échelle indique donc un spectre "rouge" ($n_S<1$, $n_T<0$), et un excès de puissance à petite échelle indique un spectre initial "bleu" ($n_S>1$, $n_T>0$). Notons que l'indice spectral influe en loi de puissance sur l'amplitude des perturbations, alors que celles-ci sont amorties exponentiellement à petite échelle (*cf* chapitre 6, §5.3 et 5.7). On s'attend donc dans tous les cas à ce que les plus petites échelles ne présentent plus d'anisotropies significatives. Quelques exemples sont tracés sur la figure 7.10.

3.2 Influence du rapport modes scalaires - modes tensoriels

Nous n'avons pas encore considéré les modes tensoriels. Ces modes suivent une équation d'évolution qui correspond à un oscillateur amorti. On s'attend donc à ce que leur spectre pré-

[7]En pratique, c'est surtout à grande échelle qu'apparaissent les écarts à ces lois du fait que les fonctions de Bessel sont proportionnellement plus "larges" pour ℓ petit.

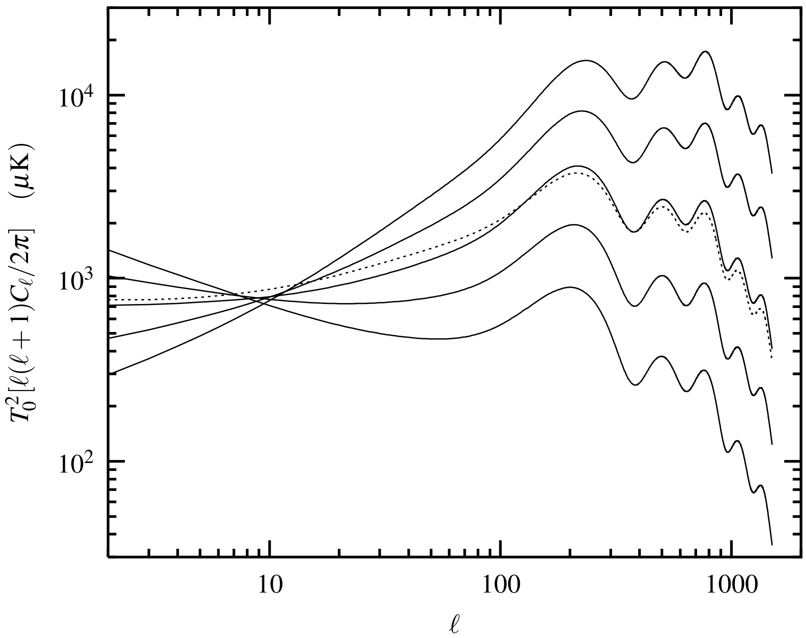


FIGURE 7.10 – Influence de l'indice spectral scalaire sur le spectre d'anisotropies. Spectre d'anisotropies dont le spectre de puissance initial est en $A_S k^{n_S - 1}$, avec $n_S = 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5$ (en traits pleins, de bas en haut dans la région des pics Doppler). En pointillés est représenté le spectre pour lequel $n_S = 1.5$, multiplié par $\ell^{-0.5}$. L'accord entre ce spectre et celui correspondant à $n_S = 1$ est excellent à petite échelle. Noter que l'amortissement Silk se produit dans tous les cas.

sente un plateau à grande échelle, suivi d'une série de pics de plus en plus amortis[8]. Contrairement aux modes de densité, les modes tensoriels se propagent sans beaucoup interagir avec le milieu extérieur (*cf* équation **4.4.7**, en se souvenant que la pression anisotrope est souvent négligeable), et à la vitesse de la lumière. La dépendance de leur évolution vis-à-vis des paramètres cosmologiques est donc réduite. C'est essentiellement l'amortissement dû à l'expansion qui entre en ligne de compte.

Ce spectre est décorrélé de celui des modes scalaires, aussi les contributions des modes scalaires et tensorielles s'ajoutent-elles quadratiquement. L'ajout de modes tensoriels augmente donc l'amplitude du spectre d'anisotropies dans la zone où les modes tensoriels ne sont pas encore négligeables, c'est-à-dire pour les échelles supérieures au rayon de Hubble au moment de la recombinaison, échelles auxquelles les modes scalaires n'ont pas encore commencé à osciller. On s'attend donc à ce que les modes tensoriels remontent le plateau Sachs-Wolfe par rapport aux pics Doppler (*cf* figure 7.11). Notons bien sûr que le rapport des modes scalaires aux modes tensoriels ainsi que les indices spectraux dépendent du modèle inflationnaire considéré, et que tous les jeux de paramètres possibles ne sont pas prédits par des modèles réalistes.

3.3 Influence du type de conditions initiales

Le choix des conditions initiales (adiabatiques, isocourbures, *etc*) influe essentiellement sur le rapport des amplitudes entre pics pairs et pics impairs, et par voie de conséquence sur la hauteur

[8]Ceci n'est cependant pas tout à fait élémentaire à démontrer, *cf* §4.2

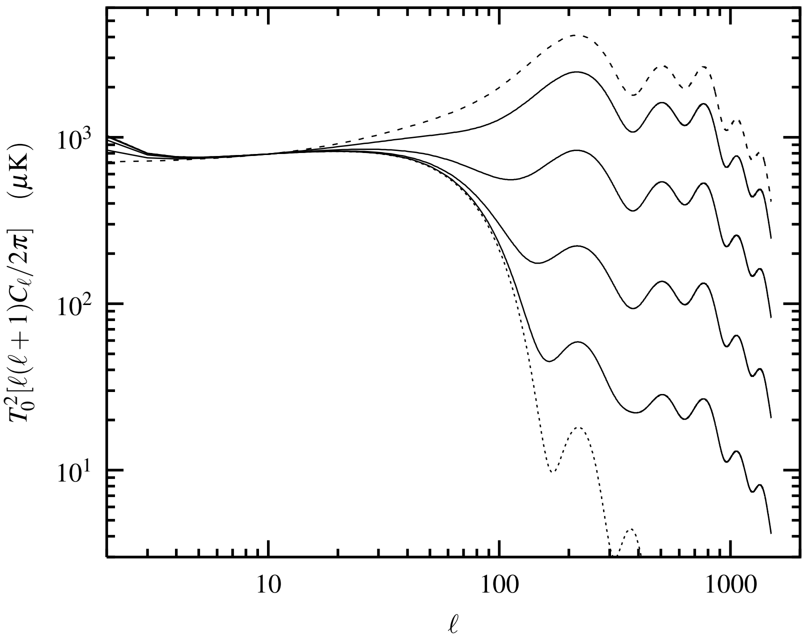


FIGURE 7.11 – Influence du rapport A_T/A_S sur le spectre d'anisotropies. Les contributions individuelles des modes scalaires (tirets) et tensoriels (pointillés) sont représentées (ici normalisées à COBE), ainsi que diverses combinaisons de ces deux spectres. Les modes tensoriels étant négligeables au-delà de $\ell \sim 150$, la structure des pics Doppler à grand ℓ est toujours celle des modes scalaires. La normalisation du spectre de matière est d'autant plus basse que ce sont les ondes gravitationnelles qui contribuent aux grandes échelles angulaires des anisotropies (voir aussi figures 7.12 et 7.12).

relative du premier pic Doppler par rapport au plateau Sachs-Wolfe. D'un point de vue observationnel, cela permet de mettre des contraintes très fortes sur nombre de ces modèles. Il s'agit donc d'un exemple manifeste où les prédictions pour un même jeu de "paramètres cosmologiques" changent complètement selon le type de conditions initiales. Une autre différence intervient dans la normalisation entre anisotropies du rayonnement fossile et spectre de puissance de la matière : dans le modèle adiabatique, on a $\widehat{\Theta}_{\rm eff}^{\rm LSS} = \frac{1}{3}\Phi$ à grande échelle, alors que pour des conditions initiales isocourbures CDM, $\widehat{\Theta}_{\rm eff}^{\rm LSS} = 2\Phi$. D'autres choix de conditions initiales mènent à d'autres rapports entre ces quantités, ce que nous détaillerons au chapitre 13. Ces résultats sont illustrés sur les figures 7.12 et 7.13.

4 Quelques estimations analytiques

Pour terminer ce chapitre, nous allons dériver quelques résultats analytiques concernant les grandes échelles des spectres d'anisotropies. Nous regarderons les contributions scalaires (§4.1) et tensorielles (§4.2) des anisotropies de température, ainsi que la partie scalaire des anisotropies de polarisation (§4.3).

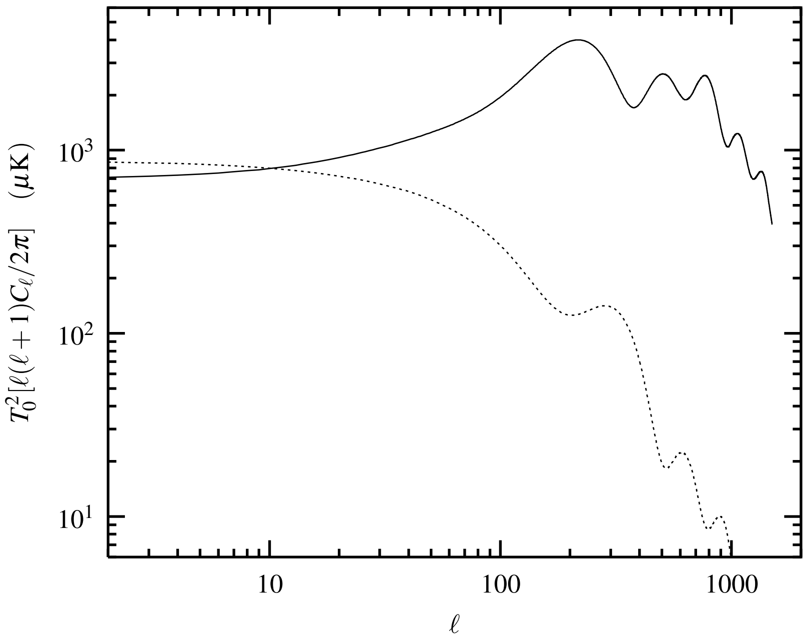


FIGURE 7.12 – Comparaison des spectres d'anisotropies entre conditions initiales adiabatiques (trait plein) et isocourbures CDM (pointillés). Les deux spectres sont normalisés à COBE aux grandes échelles. Le modèle isocourbure prédit un premier pic beaucoup plus bas et déphasé d'un facteur ~ 1.5 par rapport au cas adiabatique. Il n'est cependant pas possible de vérifier les estimations analytiques du rapport entre amplitude du premier pic et plateau Sachs-Wolfe du fait de l'amortissement Silk qui affecte de plusieurs dizaines de pour cents la hauteur du premier pic Doppler.

4.1 Modes scalaires

Il existe au moins un cas où l'on peut calculer analytiquement les anisotropies du rayonnement fossile : c'est celui de la limite aux grandes longueurs d'onde pour les modes scalaires. Cette limite correspond aux modes qui n'ont pas encore évolué, et dont par conséquent le spectre reflète fidèlement le spectre initial. Nous avons déjà dit (*cf* équation **6.1.14**) que dans le cas où l'on prenait des conditions initiales adiabatiques, la température effective était $\Theta_{\rm eff} = \frac{1}{3}\Phi$. D'autre part, à ces échelles-là, le terme Doppler est négligeable (*cf* figure 6.4), et si on suppose qu'on est depuis la recombinaison dans une ère dominée par la matière, on peut négliger le terme Sachs-Wolfe intégré. Dans ces conditions, si on suppose le spectre initial en loi de puissance, l'expression des C_ℓ s'écrit simplement

$$C_\ell = \frac{2}{\pi}\frac{1}{9}\int_0^\infty \frac{{\rm d}k}{k} A_{\rm S} k^{n_{\rm S}-1}\left[j_\ell\left(k(\eta_0 - \eta_{\rm LSS})\right)\right]^2 , \qquad \textbf{(7.4.1)}$$

le spectre du potentiel de Bardeen étant, à la surface de dernière diffusion (*i.e.* dans l'ère de matière), $P_\Phi = A_{\rm S} k^{n_{\rm S}-1}$. Après quelques manipulations, on trouve alors [Gradshteyn & Ryzhik, 1980]

$$C_\ell = \frac{2}{\pi}\frac{1}{9} A_{\rm S}(\eta_0 - \eta_{\rm LSS})^{1-n_{\rm S}} \frac{\pi}{2^{4-n_{\rm S}}} \frac{\Gamma(3-n_{\rm S})}{\Gamma^2(2-\frac{1}{2}n_{\rm S})} \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2}(n_{\rm S}-1))}{\Gamma(\ell+\frac{1}{2}(5-n_{\rm S}))} . \qquad \textbf{(7.4.2)}$$

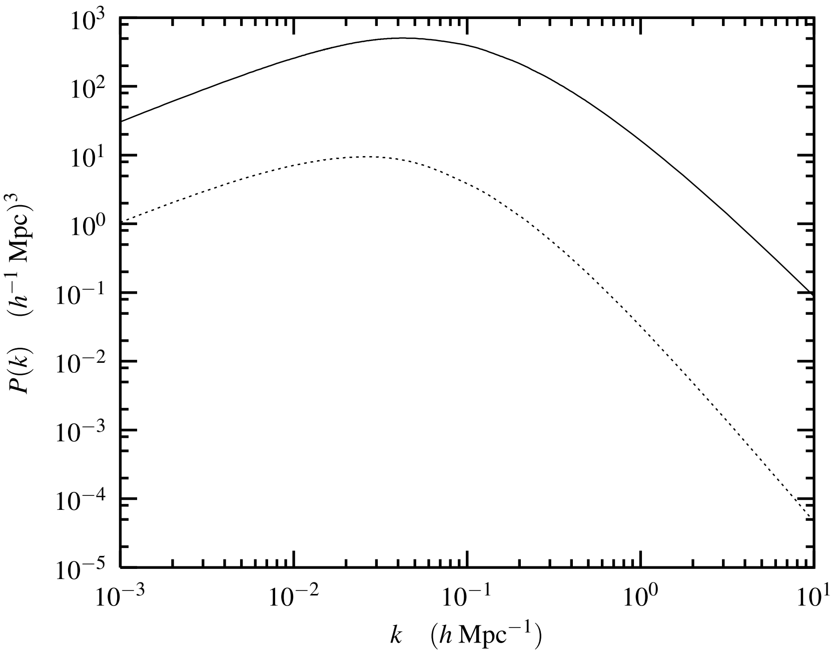


FIGURE 7.13 – Comparaison entre conditions initiales adiabatiques (trait plein) et isocourbures CDM (pointillés). Les spectres ont été normalisés à COBE (*cf* figure 7.12). Il y a un rapport ~ 36 entre les amplitudes de ces deux spectres à grande échelle en raison de la dépendance en Φ de la température effective aux grandes échelles.

Quand $n_{\mathrm{S}} = 1$, cette expression se simplifie en

$$C_\ell = \frac{A_{\mathrm{S}}}{9\pi\ell(\ell+1)} \,. \qquad (\mathbf{7.4.3})$$

De même, pour des conditions initiales isocourbures, on aurait trouvé

$$C_\ell = \frac{4A_{\mathrm{S}}}{\pi\ell(\ell+1)} \,. \qquad (\mathbf{7.4.4})$$

Ce sont ces deux expressions qui justifient le choix d'étudier la quantité $\ell(\ell+1)C_\ell$ plutôt que C_ℓ. En pratique, pour des conditions initiales adiabatiques, le spectre croît plus vite que (**7.4.3**) car le premier pic Doppler est situé au-dessus du plateau Sachs-Wolfe. Pour des conditions initiales isocourbures, c'est le contraire en raison de l'amortissement Silk et de l'épaisseur finie de la surface de dernière diffusion (*cf* figure 7.13). Remarquons enfin que pour des grandes valeurs de ℓ, le dernier rapport de fonctions Γ dans (**7.4.2**) est proportionnel à $\ell^{\frac{1}{2}(n_{\mathrm{S}}-1)-\frac{1}{2}(5-n_{\mathrm{S}})}$, soit $\ell^{n_{\mathrm{S}}-3}$. Ainsi, on retrouve comme annoncé au §3.1,

$$\ell(\ell+1)C_\ell \propto \ell^{n_{\mathrm{S}}-1} \,. \qquad (\mathbf{7.4.5})$$

4.2 Modes tensoriels

Il est difficile de trouver une formule analogue à (**7.4.3**) pour les modes tensoriels. La raison en est que c'est la dérivée temporelle des perturbations tensorielle de la métrique qui intervient dans

(**7.1.8**). En fait, d'après (**4.4.7**), la solution pour $\dot{\bar{\bar{E}}}_{ij}$ s'écrit, dans l'ère de matière,

$$\dot{\bar{\bar{E}}}_{ij} \propto \frac{j_2(k\eta)}{k\eta} \,. \tag{7.4.6}$$

La contribution des modes tensoriels aux anisotropies est donc[9]

$$C_\ell^{\mathrm{T}} = \frac{9}{8\pi} A_{\mathrm{T}} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \int_k \frac{\mathrm{d}k}{k} k^{n_{\mathrm{T}}} \left[\int_{\eta=\eta_{\mathrm{LSS}}}^{\eta_0} \frac{j_\ell(k(\eta_0-\eta))}{(k(\eta_0-\eta))^2} \frac{j_2(k\eta)}{k\eta} \,\mathrm{d}\eta \right]^2 . \tag{7.4.7}$$

Les modes tensoriels ont donc une contribution du type

$$C_\ell^{\mathrm{T}} \propto \ell^4 \int \frac{\mathrm{d}y}{y^{1-n_{\mathrm{T}}}} \left[\int_{y\frac{\eta_{\mathrm{LSS}}}{\eta_0}}^{y} \frac{j_\ell(y-x)}{(y-x)^2} \frac{j_2(x)}{x} \,\mathrm{d}x \right]^2 . \tag{7.4.8}$$

Remarquons que cette intégrale ne peut prendre des valeurs non négligeables que si on a simultanément

$$x \simeq 2 \,, \tag{7.4.9}$$

$$y - x \simeq \ell \,. \tag{7.4.10}$$

Étant données les bornes d'intégrations, ça n'est possible que pour

$$\ell \lesssim 2 \frac{\eta_0}{\eta_{\mathrm{LSS}}} \sim 2\sqrt{z_{\mathrm{LSS}}+1} \sim 60 \,. \tag{7.4.11}$$

C'est grossièrement ce qu'on observe sur la figure 6.3. Quand cette condition est satisfaite, on peut ensuite avoir une idée du résultat de l'intégrale double (**7.4.8**) en remarquant que le premier maximum d'une fonction de Bessel sphérique a un maximum d'amplitude $\propto \ell^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$ et de largeur $\Delta\ell \propto \ell^{\frac{1}{3}}$ (*cf* annexe D). Ainsi, on peut (très grossièrement) approximer la fonction de Bessel j_ℓ par une fonction de Dirac :

$$j_\ell(x) \sim \ell^{-\frac{1}{2}} \delta(x-\ell) \,. \tag{7.4.12}$$

L'expression (**7.4.8**) devient alors

$$C_\ell^{\mathrm{T}} \propto \ell^{-1} \int_0^\ell \frac{\mathrm{d}y}{y^{1-n_{\mathrm{T}}}} \left[\frac{j_2(\ell-y)}{\ell-y} \right]^2 . \tag{7.4.13}$$

En remarquant cette fois le carré de la fonction de Bessel est piqué en $\ell - y \sim 2$, on peut le remplacer par une fonction de Dirac, et on obtient finalement

$$\ell(\ell+1) C_\ell^{\mathrm{T}} \propto \ell^{n_{\mathrm{T}}} \,. \tag{7.4.14}$$

On trouve donc un spectre en $\ell^{n_{\mathrm{T}}}$, en accord avec la figure 6.3. Contrairement au cas scalaire, il est malheureusement impossible de trouver une estimation analytique plus précise du spectre, même dans la limite des grandes longueurs d'onde.

[9] Le facteur $\frac{9}{8}$ vient du fait que pour passer de la normalisation des $\Theta_\ell^{(\pm 2)}$ à celle des $\dot{\bar{\bar{E}}}_{ij}$, il faut multiplier par un facteur $\frac{3}{2}$ (*cf* chapitre 16, équation **16.3.18**). Les autres facteurs viennent de la définition de $j_\ell^{(22)}$ (**5.4.29**) et du fait qu'il y a deux degré de liberté pour les modes tensoriels (noté ± 2, ce sont en fait une combinaison des modes "$+$" et "$\times$", couramment utilisés dans l'étude des ondes gravitationnelles).

4.3 Polarisation

Essayons maintenant d'estimer le rapport des spectre d'anisotropies de température et de polarisation. D'après (**6.5.9**) et (**6.5.10**), la polarisation scalaire à grande échelle est de la forme

$$\widehat{P}^{(0)} \sim \frac{k^2\eta}{\dot{\tau}}\widehat{\Theta}_0^{(0)} . \tag{7.4.15}$$

La dépendance en k^2 de la polarisation par rapport au monopole de la température nous assure que le spectre de polarisation est proportionnel à ℓ^4 fois le spectre d'anisotropies de température :

$$\ell(\ell+1)C_\ell^{EE} \propto \ell^{4+n_\mathrm{S}-1} , \tag{7.4.16}$$

et que la corrélation croisée entre température et polarisation est en

$$\ell(\ell+1)C_\ell^{E\Theta} \propto \ell^{2+n_\mathrm{S}-1} , \tag{7.4.17}$$

conformément à la figure 6.2. Plus précisément, après quelques manipulations, on obtient

$$\widehat{P}^0(\eta_\mathrm{LSS}) \sim \frac{\widehat{\Phi}}{3}(k\eta_0)^2 \left(\frac{a_\mathrm{LSS}}{a_0}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{m_\mathrm{p}c^2(1-\frac{1}{2}Y_\mathrm{He})}{a_0\eta_0\sigma_\mathrm{Th}\rho_\mathrm{b}^0} , \tag{7.4.18}$$

soit

$$\frac{C_\ell^{EE}}{C_\ell^{\Theta\Theta}} \sim \ell^4 \frac{1}{(1+z_\mathrm{LSS})^5} \left(\frac{m_\mathrm{p}c^2(1-\frac{1}{2}Y_\mathrm{He})}{a_0\eta_0\sigma_\mathrm{Th}\rho_\mathrm{b}^0}\right)^2 . \tag{7.4.19}$$

Le dernier terme étant de l'ordre de 10^5, on en déduit

$$\frac{C_\ell^{EE}}{C_\ell^{\Theta\Theta}} \sim 10^{-10}\ell^4 . \tag{7.4.20}$$

Cette estimation n'est valable que pour les modes qui n'ont pas encore oscillé, c'est-à-dire pour $\ell \lesssim 200$. Au delà, température et polarisation ont des oscillations également amorties, et le rapport des spectres est de l'ordre

$$\frac{C_\ell^{EE}}{C_\ell^{\Theta\Theta}} \sim 10^{-2} . \tag{7.4.21}$$

Ceci nous donne le taux de polarisation du rayonnement fossile, de l'ordre de quelques pour cents seulement. Il est assez faible, ce qui rend sa détection difficile. Cependant, comme on le voit sur cette estimation assez rudimentaire, l'amplitude relative entre ce spectre et celui de la température nous donne des informations précieuses sur les paramètres cosmologiques. De plus, il n'existe pas l'équivalent du terme Sachs-Wolfe intégré pour la polarisation. Cela fait que le spectre observé représente fidèlement la polarisation sur la surface de dernière diffusion, et le spectre angulaire en ℓ est d'autant plus proche du spectre tridimensionnel en k du fait qu'on utilise la fonction $\varepsilon_\ell^{(0)}(x) = j_\ell^{(22)}(x)$ (*cf* équations **5.4.29**, **5.4.35**) pour passer de l'un à l'autre et que cette fonction est relativement bien piquée en $x = \ell$ (*cf* figure 5.3). D'autre part, la polarisation est d'une manière générale proportionnelle au monopole de température et non à la température effective, qui fait intervenir les potentiels de Bardeen et par conséquent les fluctuations de matière noire. L'amplitude relative entre les spectres de température et de polarisation permet dont un test explicite des conditions initiales adiabatiques. Il s'agit donc d'une quantité qui, bien que difficile à mesurer permet des tests puissants du modèle inflationnaire standard (*cf* aussi chapitre 13).

5 Comparaison aux observations

Les premières mesures des anisotropies du rayonnement fossile ont été réalisées au début des années 90 par le satellite COBE (COsmic Background Explorer). La résolution angulaire de l'expérience était assez faible (7°), mais la couverture du ciel était totale, bien qu'une partie des données n'ait pu être exploitée du fait de la contamination due à notre propre galaxie. Cependant, l'expérience a montré que les anisotropies observées aux grandes échelles étaient compatibles avec un spectre invariant d'échelle, comme le prédisait l'inflation[10].

Ces mesures ont ensuite été confirmées au sol par l'expérience Tenerife (réalisée au Pic de Teide, aux Canaries). Ont suivi ensuite plusieurs autres mesures au sol, dont la plus importante a été Saskatoon (effectuée dans l'état canadien du Saskatchewan), qui pour la première fois a indiqué la présence d'un excès de puissance à l'échelle du degré, à peu près compatible avec la présence du premier pic Doppler. La position du pic est cependant apparue à des échelles angulaires légèrement trop faibles, et son amplitude était plus grande que prévu. Une explication naturelle à cela était la présence d'une constante cosmologique (*cf* figure 7.5), qui venait d'être remise au goût du jour par les expérience de mesure de luminosité de supernovae. Peu après, l'expérience CAT (Cambridge Anisotropy Telescope) a détecté des anisotropies aux échelles correspondant aux deuxième et troisième pics Doppler, mais la résolution de l'expérience n'a pas permis de voir explicitement la présence d'oscillations dans le spectre. À plus petite échelle, plusieurs expériences, notamment ATCA (Australia Telescope Compact Array), VLA (Very Large Array), SuZIE (Sunyaev-Zel'dovich Infrared Experiment) et WD (White Dish) n'ont pas mesuré de signal dans la limite de sensibilité des instruments de mesure, confirmant ainsi l'amortissement attendu du spectre à petite échelle.

De nombreuses autre mesures ont depuis confirmé ces résultats. Le premier pic a été détecté à nouveau par les expériences TOCO (nom du pic de la Cordillère des Andes qui dominait le site d'observation ; le nom initial de l'expérience était Mobile Anisotropy Telescope), Python et Viper. Des mesures aux échelles angulaires intermédiaires ont permis d'explorer l'ensemble du spectre situé entre les plus grandes échelles et le premier pic [expériences IAB (Italian Antarctic Base), IAC (Institut d'Astrophysique des Canaries), SP (South Pole), BAM (Balloon Anisotropy Measurement), QMAP, MAX et MSAM]. Enfin, les mesures de CAT ont été confirmées par l'expérience OVRO (Owen's Valley Radio Observatory ; aussi appelée RING5M).

Plus récemment, les expériences BOOMERanG et MAXIMA ont grandement clarifié la situation. Les résultats de ces deux expériences sont en gros de meilleure qualité que l'ensemble de toutes les autres expériences réunies (COBE mis à part), et ont notamment pour la première fois permis de voir les deux premiers pics Doppler, confirmant ainsi définitivement que les anisotropies observées n'étaient pas uniquement produites par des défauts topologiques (*cf* partie II). Cependant les résultats ne sont pas exactement identiques à ceux des expériences précédentes. Le premier pic mesuré est situé à plus grande échelle angulaire que Saskatoon, indiquant une constante cosmologique plus faible, et favorisant les scénarios de quintessence (*cf* partie IV) ou même un Univers fermé. Plus inattendu encore, la hauteur du deuxième pic est plus basse que ce qui était prévu. Une explication possible à ce résultat serait de remonter le plateau Sachs-Wolfe par rapport au second pic, par exemple à l'aide d'un indice spectral faible (*cf* figure 7.10), de modes tensoriels (*cf* figure 7.11), ou de défauts topologiques (*cf* chapitre 11). Cependant, ces possibilités sont assez contraintes en raison de l'amplitude assez élevée du premier pic[11]. L'interprétation actuelle de ce résultat est donc plutôt d'envisager un Univers à forte densité baryonique (*cf* figure 7.1), ce qui

[10] Seul le quadrupole n'est pas tout à fait à la valeur attendue, mais cela peut très bien venir de la variance cosmique.

[11] Il reste une incertitude due à la calibration de ces deux expériences. Il semble néanmoins que le pic soit assez élevé, comme l'avaient mesuré Saskatoon et TOCO.

malheureusement n'est pas tout à fait en accord avec les mesures des abondances des éléments légers [White *et al.*, 2000] [Tegmark & Zaldarriaga, 2000b]. Une confirmation ou une infirmation de ces différentes hypothèses devraient être donnée par la mesure du troisième pic : un troisième pic élevé sera en accord avec l'hypothèse de haute densité baryonique, alors qu'un troisième pic faible favorisera une autre explication. À l'heure actuelle, l'expérience CBI (Cosmic Background Imager) semble favoriser une calibration trop basse des expériences BOOMERanG et MAXIMA et une densité baryonique plus raisonnable.

L'ensemble des résultats de ces expériences est résumé dans le tableau 7.1. Une présentation succincte des expériences passées, en cours et en projet, ainsi qu'une bibliographie détaillée peuvent être trouvées dans [Smoot, 1997b].

TABLEAU 7.1 – Résumé des mesures d'anisotropies du rayonnement fossile. Une compilation de ces données peut être trouvée sur [Gawiser, `http`].

Expérience	δT_ℓ	$+1\sigma$	-1σ	ℓ_{eff}	ℓ_{min}	ℓ_{max}	Référence
COBE	8.5	16.0	8.5	2.1	2	2.5	[Tegmark & Hamilton, 1997]
COBE	28.0	7.5	10.3	3.1	2.5	3.7	[Tegmark & Hamilton, 1997]
COBE	34.0	6.0	7.2	4.1	3.4	4.8	[Tegmark & Hamilton, 1997]
COBE	25.1	5.3	6.6	5.6	4.7	6.6	[Tegmark & Hamilton, 1997]
COBE	29.4	3.6	4.1	8.0	6.8	9.3	[Tegmark & Hamilton, 1997]
COBE	27.7	3.9	4.5	10.9	9.7	12.2	[Tegmark & Hamilton, 1997]
COBE	26.1	4.4	5.2	14.4	12.8	15.7	[Tegmark & Hamilton, 1997]
COBE	33.0	4.6	5.4	19.4	16.6	22.1	[Tegmark & Hamilton, 1997]
FIRS	29.4	7.8	7.7	10	3	30	[Ganga *et al.*, 1994]
Tenerife	30	15	11	20	13	31	[Gutiérrez *et al.*, 2000]
IAB	111.9	49.1	43.7	33	20	57	[Femenia *et al.*, 1998]
IAB	57.3	16.4	16.4	53	38	75	[Femenia *et al.*, 1998]
SP	30.2	8.9	5.5	57	31	106	[Ganga *et al.*, 1997b]
SP	36.3	13.6	6.1	57	31	106	[Ganga *et al.*, 1997b]
BAM	55.6	27.4	9.8	74	28	97	[Tucker *et al.*, 1997]
ARGO	33	5	5	98	60	168	[Ratra *et al.*, 1999]
ARGO	48	7	6	109	53	179	[Masi *et al.*, 1996]
IAC	43	13	12	109	90	128	[Dicker *et al.*, 1999]
QMAP	47	6	7	80	60	101	[de Oliveira-Costa *et al.*, 1998]
QMAP	59	6	7	126	99	153	[de Oliveira-Costa *et al.*, 1998]
QMAP	52	5	5	111	79	143	[de Oliveira-Costa *et al.*, 1998]
MAX	46	7	7	120	73	205	[Clapp *et al.*, 1994]
MAX	43	8	4	135	81	227	[Tanaka *et al.*, 1996]
MSAM	34.8	15	11	84	39	130	[Wilson *et al.*, 2000]
MSAM	49.3	10	8	201	131	283	[Wilson *et al.*, 2000]
MSAM	47.0	7	6	407	284	453	[Wilson *et al.*, 2000]
Python	60	9	5	87	49	105	[Platt *et al.*, 1997]
Python	66	11	9	170	120	239	[Platt *et al.*, 1997]
PythonV	23	3	3	50	21	94	[Coble *et al.*, 1999]
PythonV	26	4	4	74	35	130	[Coble *et al.*, 1999]
PythonV	31	5	4	108	67	157	[Coble *et al.*, 1999]
PythonV	28	8	9	140	99	185	[Coble *et al.*, 1999]

Suite page suivante

TABLEAU 7.1 – (Suite)

Expérience	δT_ℓ	$+1\sigma$	-1σ	$\ell_{\rm eff}$	$\ell_{\rm min}$	$\ell_{\rm max}$	Référence
PythonV	54	10	11	172	132	215	[Coble *et al.*, 1999]
PythonV	96	15	15	203	164	244	[Coble *et al.*, 1999]
PythonV	91	32	38	233	195	273	[Coble *et al.*, 1999]
PythonV	0	91	0	264	227	303	[Coble *et al.*, 1999]
Saskatoon	50.5	8.4	5.3	87	58	126	[Netterfield *et al.*, 1997]
Saskatoon	71.1	7.4	6.3	166	123	196	[Netterfield *et al.*, 1997]
Saskatoon	87.6	10.5	8.4	237	196	266	[Netterfield *et al.*, 1997]
Saskatoon	88.6	12.6	10.5	286	248	310	[Netterfield *et al.*, 1997]
Saskatoon	71.1	20.0	29.4	349	308	393	[Netterfield *et al.*, 1997]
TOCO97	40	10	9	63	45	81	[Torbet *et al.*, 1999]
TOCO97	45	7	6	86	64	102	[Torbet *et al.*, 1999]
TOCO97	70	6	6	114	90	134	[Torbet *et al.*, 1999]
TOCO97	89	7	7	158	135	180	[Torbet *et al.*, 1999]
TOCO97	85	8	8	199	170	237	[Torbet *et al.*, 1999]
TOCO98	55	18	17	128	102	161	[Miller *et al.*, 1999]
TOCO98	82	11	11	152	126	190	[Miller *et al.*, 1999]
TOCO98	83	7	8	226	189	282	[Miller *et al.*, 1999]
TOCO98	70	10	11	306	262	365	[Miller *et al.*, 1999]
TOCO98	24.5	26.5	24.5	409	367	474	[Miller *et al.*, 1999]
Viper	61.6	31.1	21.3	108	30	229	[Peterson *et al.*, 2000]
Viper	77.6	26.8	19.1	173	72	287	[Peterson *et al.*, 2000]
Viper	66.0	24.4	17.2	237	126	336	[Peterson *et al.*, 2000]
Viper	80.4	18.0	14.2	263	150	448	[Peterson *et al.*, 2000]
Viper	30.6	13.6	13.2	422	291	604	[Peterson *et al.*, 2000]
Viper	65.8	25.7	24.9	589	448	796	[Peterson *et al.*, 2000]
BOOMERanG97	29	13	11	58	25	75	[Mauskopf *et al.*, 2000]
BOOMERanG97	49	9	9	102	76	125	[Mauskopf *et al.*, 2000]
BOOMERanG97	67	10	9	153	126	175	[Mauskopf *et al.*, 2000]
BOOMERanG97	72	10	10	204	176	225	[Mauskopf *et al.*, 2000]
BOOMERanG97	61	11	12	255	226	275	[Mauskopf *et al.*, 2000]
BOOMERanG97	55	14	15	305	276	325	[Mauskopf *et al.*, 2000]
BOOMERanG97	32	13	22	403	326	475	[Mauskopf *et al.*, 2000]
BOOMERanG97	0	130	0	729	476	1125	[Mauskopf *et al.*, 2000]
CAT	51.9	13.7	13.7	410	330	500	[Scott *et al.*, 1996]
CAT	49.1	19.1	13.7	590	500	680	[Scott *et al.*, 1996]
CAT	57.3	10.9	13.7	422	330	500	[Baker *et al.*, 1999]
CAT	0	54.6	0	615	500	680	[Baker *et al.*, 1999]
OVRO	56.0	7.7	6.5	589	361	756	[Leitch *et al.*, 2000]
HACME	0	38.5	0	38	18	63	[Staren *et al.*, 2000]
WD	0	75	0	477	297	825	[Ratra *et al.*, 1998]
SuZIE	16	12	16	2340	1330	3070	[Ganga *et al.*, 1997a]
VLA	0	27.3	0	3677	2090	5761	[Partridge *et al.*, 1997]
ATCA	0	37.2	0	4520	3500	5780	[Subramanyan *et al.*, 1993]

Suite page suivante

TABLEAU 7.1 – (Suite)

Expérience	δT_ℓ	$+1\sigma$	-1σ	$\ell_{\rm eff}$	$\ell_{\rm min}$	$\ell_{\rm max}$	Référence
BIMA	8.7	4.6	8.7	5470	3900	7900	[Holzapfel *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	33.8	3.9	4.5	50	26	75	[de Bernardis *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	55.8	4.2	4.6	100	176	225	[de Bernardis *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	64.5	4.1	4.3	150	126	175	[de Bernardis *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	68.6	3.8	4.1	200	276	325	[de Bernardis *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	65.6	3.4	3.6	250	226	275	[de Bernardis *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	51.4	2.9	3.1	300	376	425	[de Bernardis *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	39.4	2.7	2.9	350	326	375	[de Bernardis *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	36.2	2.9	3.2	400	476	525	[de Bernardis *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	36.8	3.3	3.5	450	426	475	[de Bernardis *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	37.9	3.7	4.0	500	576	625	[de Bernardis *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	41.8	4.2	4.7	550	526	575	[de Bernardis *et al.*, 2000]
BOOMERanG98	39.2	5.2	5.9	600	676	725	[de Bernardis *et al.*, 2000]
MAXIMA-1	45	7	6	77	36	110	[Hanany *et al.*, 2000]
MAXIMA-1	54	6	5	147	111	185	[Hanany *et al.*, 2000]
MAXIMA-1	78	6	6	223	186	260	[Hanany *et al.*, 2000]
MAXIMA-1	61	5	5	300	261	335	[Hanany *et al.*, 2000]
MAXIMA-1	48	4	4	374	336	410	[Hanany *et al.*, 2000]
MAXIMA-1	39	4	4	447	411	485	[Hanany *et al.*, 2000]
MAXIMA-1	48	4	4	522	486	560	[Hanany *et al.*, 2000]
MAXIMA-1	39	5	5	597	561	635	[Hanany *et al.*, 2000]
MAXIMA-1	43	5	5	671	636	710	[Hanany *et al.*, 2000]
MAXIMA-1	47	7	7	742	711	785	[Hanany *et al.*, 2000]
CBI	59.0	7.7	6.3	603	783	437	[Padin *et al.*, 2001]
CBI	29.7	4.8	4.2	1190	1451	986	[Padin *et al.*, 2001]

6 Conclusion

Nous avons présenté les équations d'évolution des perturbations cosmologiques, expliqué la physique des anisotropies du rayonnement fossile, et esquissé les principales étapes d'une méthode rapide pour les calculer numériquement dans le cadre des modèles inflationnaires. Munis des outils, plusieurs pistes de recherche sont envisageables. La plus naturelle est d'essayer de déduire des contraintes sur les valeurs des paramètres cosmologiques à partir des observations. Il s'agit d'un exercice qui a été fait par de nombreux autres groupes [Tegmark & Zaldarriaga, 2000a] [Le Dour *et al.*, 2001] [de Bernardis *et al.*, 2000] [Balbi *et al.*, 2000] [Jaffe *et al.*, 2001]. On peut également (et c'est ce que nous allons faire) étudier quelques modèles "non standard"[12], en s'intéressant principalement à la partie "primordiale" des paramètres cosmologiques, c'est-à-dire ceux dépendant des détails de modèle qui a

[12]La notion de "standard" est une notion assez "culturelle", au mauvais sens du terme, et il convient de s'en méfier. Le standard du moment varie avec les effets de mode et l'arrivée d'observations nouvelles, qui se succèdent à un rythme assez soutenu en cosmologie. Par exemple, les modèles avec constante cosmologique n'étaient pas populaires il y a cinq ans et le sont devenus depuis les résultats de mesures de luminosité des supernovae. Il est tout à fait possible qu'ils retombent dans l'oubli à la suite de nouvelles observations.

généré les fluctuations initiales.

C'est ainsi que dans la prochaine partie, nous allons étudier les scénarios de sources actives, parmi lesquelles figurent les défauts topologiques. Ces scénarios présentent beaucoup de différences avec les modèles inflationnaires, et sont globalement plus complexes. En anticipant sur les conclusions de cette partie, disons qu'il est probable qu'on ne sache pas encore bien calculer les conséquences de tous les scénarios de défauts topologiques (notamment ceux basés sur des cordes cosmiques locales), mais qu'ils font des prédictions vraisemblablement moins en accord avec les observations. Une petite contribution de ces objets aux anisotropies du rayonnement fossile n'est cependant pas à exclure (*cf* chapitre 11). Dans la partie III, nous reviendrons aux scénarios inflationnaires, et nous réfléchirons aux conséquences observationnelles de divers modèles plus complexes que le modèle "standard" d'inflation en loi de puissance à un seul champ scalaire[13]. Enfin, dans la partie IV, nous reviendrons à l'étude de la dépendance des anisotropies vis-à-vis du contenu matériel de l'Univers, en nous intéressant à une alternative aux modèles avec constante cosmologique, où l'on remplacera la constante cosmologique par un champ scalaire appelé quintessence.

[13] À l'issue de quoi, le lecteur orthodoxe sera sûrement rassuré de voir que le scénario "standard" marche finalement assez bien !

Deuxième partie

Quelques aspects des scénarios de sources actives

Introduction

Dans la partie I, nous avons écrit les équations d'évolution des perturbations des quatre fluides présents dans l'Univers : matière noire, matière baryonique, photons et neutrinos. La majeure partie de l'énergie de ces fluides est répartie de façon parfaitement homogène, et seule une infime partie (environ 10^{-5}) est présente sous la forme d'inhomogénéités. Il est cependant possible que d'autres fluides soient présents dans l'Univers uniquement sous la forme d'inhomogénéités. La densité d'énergie de ces fluides est localement du même ordre que les surdensités des autres fluides cosmologiques. Des tels fluides sont recensés sous l'appellation générique de "sources actives".

Motivation

Ces fluides ont par définition une contribution très faible à la densité d'énergie totale de l'Univers, ce qui rend leur détection directe *a priori* assez difficile. Cependant, ils peuvent jouer un rôle important dans la formation des structures, et plusieurs scénarios réalistes prédisent leur existence, aussi convient-il d'étudier en détail leur évolution.

L'exemple le plus simple de source active est sans doute donné par les ondes gravitationnelles, qui peuvent être considérées comme un fluide de gravitons. Un des buts des expériences de détection d'ondes gravitationnelles (VIRGO, LIGO, LISA) est d'ailleurs de mesurer le spectre de ce fond cosmologique d'ondes gravitationnelles, qu'on peut prédire dans les théories d'inflation. L'approche qui va être détaillée dans cette partie pourrait très bien s'appliquer à ce fluide, mais ne serait pas très intéressante, car on peut modéliser beaucoup plus simplement ce fluide par l'intermédiaire des perturbations tensorielles de la métrique, comme nous l'avons déjà fait dans la partie qui précède (*cf* aussi chapitre 16).

Un autre candidat possible de source active est un champ magnétique primordial, produit par un phénomène de physique des hautes énergies (*cf* par exemple [Turner & Widrow, 1988] [Quashnock *et al.*, 1989] [Vachaspati, 1991] [Ratra, 1992]).

Enfin, le candidat le plus intéressant est certainement celui d'un réseau de défauts topologiques. Comme nous l'avons déjà vu au chapitre 3, il est naturel d'imaginer la formation de défauts topologiques lors d'une transition de phase à l'énergie de grande unification. Dans ce cas, il se pourrait bien que ces défauts soient à l'origine des grandes structures observées aujourd'hui dans l'Univers. L'évolution d'un réseau de défauts topologiques jouerait alors un rôle absolument crucial. Malheureusement, la dynamique d'un tel réseau est extrêmement complexe, et nécessite l'utilisation de moyens numériques assez lourds pour suivre son évolution sur des durées suffisamment longues. Il est cependant tout à fait possible de déduire certains aspects liés à ces scénarios à l'aide de considérations relativement simples. Les quatre chapitres de cette partie portent sur quelques considérations génériques à ces modèles, que nous allons maintenant brièvement présenter.

Approche générale

La façon de modéliser une source active est relativement simple. On suppose que celle-ci est décrite par un tenseur énergie-impulsion noté $\Theta^{\rm s}_{\mu\nu}$, de la forme :

$$\begin{aligned}
\Theta^{\rm s}_{00} &= a^2 \mathcal{R}^{\rm s} , \\
\Theta^{\rm s}_{0i} &= -a^2 \mathcal{U}^{\rm s}_i , \\
\Theta^{\rm s}_{ij} &= a^2 (\mathcal{P}^{\rm s} \gamma_{ij} + \mathcal{Q}^{\rm s}_{ij}) .
\end{aligned}$$

La quantité $\mathcal{R}^{\rm s}$ va jouer le rôle d'une perturbation de densité d'énergie, $\mathcal{P}^{\rm s}$ d'une perturbation de pression, $\mathcal{U}^{\rm s}$ d'un flux d'énergie et $\mathcal{Q}^{\rm s}_{ij}$ (qu'on impose sans trace) d'une pression anisotrope. On peut décomposer $\mathcal{U}^{\rm s}_i$ en une partie scalaire et une partie vectorielle,

$$\mathcal{U}^{\rm s}_i = \nabla_i \mathcal{U}^{\rm s} + \bar{\mathcal{U}}^{\rm s}_i\,,$$

et décomposer $\mathcal{Q}^{\rm s}_{ij}$ en ses trois parties scalaire, vectorielle et tensorielle,

$$\mathcal{Q}^{\rm s}_{ij} = (\nabla_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\Delta)\mathcal{Q}^{\rm s} + \frac{1}{2}\nabla_{(i}\bar{\mathcal{Q}}^{\rm s}_{j)} + \bar{\bar{\mathcal{Q}}}^{\rm s}_{ij}\,.$$

Une propriété importante des sources actives est que son tenseur énergie-impulsion n'est pas modifié par changement infinitésimal de coordonnées. Ceci résulte encore une fois du lemme de Stewart-Walker, qui assure qu'une quantité perturbée n'est pas modifiée par un tel changement de coordonnées, pour peu que sa partie homogène non perturbée soit nulle. Ainsi, les grandeurs introduites dans les équations ci-dessus sont-elles parfaitement bien définies. Une autre propriété cruciale de ces objets est que leur évolution temporelle n'est pas sensible aux perturbations de la métrique (*i.e.* les potentiels de Bardeen n'interviennent pas dans l'équation d'Euler, *cf* ci-dessous). Là encore cette propriété importante résulte du fait que ce fluide est considéré comme étant uniquement une petite perturbation, sans contribution notable à la densité d'énergie totale de l'Univers. L'écriture des équations de conservation donne alors

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{R}}^{\rm s} &= -3\mathcal{H}(\mathcal{R}^{\rm s} + \mathcal{P}^{\rm s}) - \Delta\mathcal{U}^{\rm s}\,,\\
\dot{\mathcal{U}}^{\rm s} &= -4\mathcal{H}\mathcal{U}^{\rm s} - \mathcal{P}^{\rm s} - \left(\frac{2}{3}\Delta + 2K\right)\mathcal{Q}^{\rm s}\,,\\
\dot{\bar{\mathcal{U}}}^{\rm s}_i &= -4\mathcal{H}\bar{\mathcal{U}}^{\rm s}_i - \left(\frac{1}{2}\Delta + K\right)\bar{\mathcal{Q}}^{\rm s}_i\,.
\end{aligned}$$

Ces trois équations sont les stricts analogues des équations de conservation (**4.4.16–4.4.18**). Enfin, les sources participent aux équations d'Einstein (**4.4.8**, **4.4.9**, **4.4.14**, **4.4.15**, **4.4.7**), qui sont alors modifiées de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\left[\Delta + 3(\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}^2)\right]\Phi &= \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\left(\sum_f \Omega_f\left[\delta^\flat_f - 3\mathcal{H}(1+\omega_f)v^\flat_f\right] + \sum_{\rm s}\left[\frac{\mathcal{R}^{\rm s}}{\rho_{\rm crit}} - 3\mathcal{H}\frac{\mathcal{U}^{\rm s}}{\rho_{\rm crit}}\right]\right)\,,\\
\Psi - \Phi &= -3\mathcal{H}^2\left(\sum_f \Omega_f\omega_f\pi_f + \sum_{\rm s}\frac{\mathcal{Q}^{\rm s}}{\rho_{\rm crit}}\right)\,,\\
\left[\Delta - 2K + 4(\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}^2)\right]\bar{\Phi}_i &= 2\mathcal{H}^2\left(\sum_f \Omega_f\left[-3\mathcal{H}(1+\omega_f)\bar{v}^\flat_{i,f}\right] + \sum_{\rm s}\left[-3\mathcal{H}\frac{\bar{\mathcal{U}}^{\rm s}_i}{\rho_{\rm crit}}\right]\right)\,,\\
\bar{\Psi}_i - \bar{\Phi}_i &= -3\mathcal{H}^2\left(\sum_f \Omega_f\omega_f\bar{\pi}_{i,f} + \sum_{\rm s}\frac{\bar{\mathcal{Q}}^{\rm s}_i}{\rho_{\rm crit}}\right)\,,\\
\ddot{\bar{\bar{E}}}_{ij} + 2\mathcal{H}\dot{\bar{\bar{E}}}_{ij} + (2K - \Delta)\bar{\bar{E}}_{ij} &= 3\mathcal{H}^2\left(\sum_f \Omega_f\omega_f\bar{\bar{\pi}}_{ij,f} + \sum_{\rm s}\frac{\bar{\bar{\mathcal{Q}}}^{\rm s}_{ij}}{\rho_{\rm crit}}\right)\,.
\end{aligned}$$

Notons que pour des raisons historiques regrettables (les premières simulations de réseaux de cordes cosmiques étaient faites en espace-temps de Minkowski, dans lequel le facteur d'échelle n'intervient pas), les quantités utilisées dans la littérature sont plutôt

$$\rho^{\rm s} \equiv \kappa a^2 \mathcal{R}^{\rm s} ,$$
$$P^{\rm s} \equiv \kappa a^2 \mathcal{P}^{\rm s} ,$$
$$v^{\rm s} \equiv \kappa a^2 \mathcal{U}^{\rm s} ,$$
$$\pi^{\rm s} \equiv \kappa a^2 \mathcal{Q}^{\rm s} ,$$

etc, ce qui modifie évidemment la forme des équations de conservation et d'Einstein.

Réseau de défauts topologiques

Comme nous l'avons dit dans la partie I, les deux candidats de défauts topologiques intéressants pour la formation des structures sont les cordes cosmiques locales et les défauts globaux (à l'exception des murs). Ces deux types de défauts sont modélisés de façon extrêmement différente.

Défauts locaux

Les défauts locaux représentent le cas opposé à celui des défauts globaux dans la mesure où l'on suppose que toute la densité d'énergie est localisée sur le défaut lui-même. Comme on s'intéresse dans ce cas uniquement à des cordes cosmiques, le tenseur énergie-impulsion correspondant est simplement celui d'une masse linéique. On le trouve [Achúcarro *et al.*, 1987] en faisant varier l'action dite de Goto-Nambu,

$$S = \mu c^2 \int \sqrt{|\gamma|}\, {\rm d}\sigma\, {\rm d}\tau ,$$

où μ représente la masse linéique de la corde, les $\sigma^\alpha = (\tau, \sigma)$ sont deux coordonnées qui décrivent la trajectoire de la corde, et $\gamma_{\alpha\beta}$ représente la métrique induite sur la surface balayée par la corde,

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{{\rm d}x^\mu}{{\rm d}\sigma^\alpha} \frac{{\rm d}x^\nu}{{\rm d}\sigma^\beta} g_{\mu\nu} .$$

On peut imposer des conditions supplémentaires sur chaque coordonnée τ et σ. En général, on impose que τ est le temps conforme η. Le paramètre σ peut être fixé en rajoutant des conditions de jauge. D'abord, on impose que

$$\dot{\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{X}' = 0 ,$$

où $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(\eta, \sigma)$ est l'équation du mouvement de la corde, $\dot{\boldsymbol{X}} \equiv {\rm d}\boldsymbol{X}/{\rm d}\eta$ et $\boldsymbol{X}' \equiv {\rm d}\boldsymbol{X}/{\rm d}\sigma$. Cette contrainte implique que la vitesse d'un point de la corde (défini par $\sigma = {\rm C}^{\rm ste}$) est toujours perpendiculaire à celle-ci. Il faut encore rajouter la définition de l'abscisse curviligne σ à un instant donné. En général, on prend la condition

$$\dot{\boldsymbol{X}}^2 + \boldsymbol{X}'^2 \big|_{\eta = \eta_{\rm in}} = 1 ,$$

qui signifie que la masse linéique de la corde en unité de σ est constante à l'instant $\eta_{\rm in}$. On en déduit alors le tenseur énergie-impulsion de la corde :

$$T^{\alpha\beta}(\eta, \boldsymbol{x}) = \mu c^2 \int \left(\varepsilon \dot{\boldsymbol{X}}^\alpha \dot{\boldsymbol{X}}^\beta - \varepsilon^{-1} \boldsymbol{X}^{\alpha\prime} \boldsymbol{X}^{\beta\prime} \right) \delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}(\eta, \sigma))\, {\rm d}\sigma ,$$
$$\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{\boldsymbol{X}'^2}{1 - \dot{\boldsymbol{X}}^2}} ,$$

L'équation qu'on résout est celle de l'évolution temporelle de $\boldsymbol{X}(\eta,\sigma)$, qui s'écrit

$$\ddot{\boldsymbol{X}} + 2\mathcal{H}\dot{\boldsymbol{X}}(1-\dot{\boldsymbol{X}}^2) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\boldsymbol{X}'}{\varepsilon}\right)' .$$

Cette équation permet de déduire l'évolution temporelle de ε :

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = -2\mathcal{H}\dot{\boldsymbol{X}}^2 .$$

Ces deux équations admettent une interprétation simple en espace minkowskien, où l'équation du mouvement se simplifie en

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}'' ,$$

dont les solutions sont de la forme d'ondes longitudinales se propageant le long de la corde à la vitesse de la lumière. La principale difficulté dans cette modélisation réside dans le calcul des intersections de deux segments de cordes dont les coordonnées $\boldsymbol{X}(\eta,\sigma_1)$ et $\boldsymbol{X}(\eta,\sigma_2)$ sont proches alors que leurs abscisses curvilignes σ_1 et σ_2 peuvent être très différentes. Après intersection, les abscisses curvilignes de chaque morceau de corde sont modifiées.

Défauts globaux

On suppose que les défauts globaux sont générés par un champ vectoriel ψ^a à N composantes. Le tenseur énergie-impulsion correspondant est alors

$$T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}V(\boldsymbol{\psi}) + \sum_{a=1}^{N} D_\alpha\psi^a D_\beta\psi^a + g_{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{2}D_\mu\psi^a D^\mu\psi^a\right) .$$

On trouve dans ces composantes des termes de gradient ($D_\alpha\psi^a D_\beta\psi^a$, *etc*) et un terme potentiel $V(\boldsymbol{\psi})$. Pour des défauts globaux, on suppose que la partie du champ qui n'est pas a son minimum de potentiel est d'énergie négligeable devant les termes en gradient, c'est-à-dire qu'on enlève le terme $g_{\alpha\beta}V(\boldsymbol{\psi})$ du tenseur énergie-impulsion. On calcule l'évolution du tenseur énergie-impulsion en regardant celle du champ lui-même, qui obéit à l'équation de Klein-Gordon :

$$\Box\psi^a + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\psi^a} = 0 .$$

Habituellement, on suppose que le potentiel $V(\boldsymbol{\psi})$ a une forme de chapeau mexicain :

$$V(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{\psi}^2 - \psi_0^2)^2 .$$

Comme on néglige la contribution de la densité d'énergie au voisinage du défaut, on peut simplifier le problème en supposant que le champ est presque partout à son minimum de potentiel, c'est-à-dire qu'on rajoute la contrainte

$$\boldsymbol{\psi}^2 = \psi_0^2 .$$

Dans ce cas, l'équation de Klein-Gordon se réécrit à l'aide des multiplicateurs de Lagrange (*cf* par exemple [Diu *et al.*, 1989]) en

$$\Box\hat{\boldsymbol{\psi}} - [\hat{\boldsymbol{\psi}}\cdot\Box\hat{\boldsymbol{\psi}}]\hat{\boldsymbol{\psi}} = 0 ,$$

avec $\hat{\boldsymbol{\psi}} \equiv \boldsymbol{\psi}/\psi_0$. C'est cette équation qui est résolue numériquement sur une grille. On suppose donc que sur chaque point de la grille, le champ est de module ψ_0, et que les défauts proprement dits sont situés entre les points de la grille. Une telle hypothèse n'est pas gênante puisqu'on s'intéresse uniquement au comportement des gradients du champ. L'équation de Klein-Gordon indique alors que celui-ci a tendance à "s'aligner" sur les volumes de plus en plus grands (croissant aussi vite que l'horizon)[1].

Cette dernière équation est cependant assez délicate à résoudre car le second terme est non linéaire. Il est cependant possible de la simplifier en supposant le nombre de composantes du champ très grand[2], auquel cas le théorème central limite nous assure que le terme $[\boldsymbol{\psi}\cdot\Box\boldsymbol{\psi}]$ est une variable aléatoire gaussienne dont on peut calculer la variance. Dans cette limite, l'évolution du champ redevient linéaire, et ses corrélateurs s'expriment simplement en terme de fonctions de Bessel. On peut d'ailleurs vérifier en prenant des valeurs de N de plus en plus grandes qu'on tend peu à peu vers la limite $N \to \infty$ dont les résultats sont obtenus analytiquement [Durrer *et al.*, 1999a].

Petite revue de la littérature

Essentiellement quatre pistes ont été explorées dans le domaine des anisotropies du rayonnement fossile générées par des sources actives : deux types de modèles semi-analytiques (les sources cohérentes et les sources incohérentes), et deux types de modèles "numériques" (les défauts globaux et les cordes cosmiques locales).

Les modèles de sources cohérentes sont (de loin) les plus simples. Leur principal défaut est qu'ils ne représentent pas *a priori* un modèle réaliste. Quelques propriétés mathématiques de ces modèles ont été étudiées (assez récemment) dans [Durrer & Kunz, 1998]. Auparavant, quelques exemples simples avaient été étudiés par Turok qui avait montré que ces modèles, qui présentent une série de pics Doppler, pouvaient produire un premier pic à l'endroit prédit par l'inflation [Turok, 1996a] [Turok, 1996c]. Une étude plus exhaustive a été réalisée par Durrer et Sakellariadou [Durrer & Sakellariadou, 1997], et une comparaison avec les observations [Durrer *et al.*, 1997] a indiqué que ces modèles pouvaient éventuellement représenter une alternative viable aux modèles inflationnaires.

Battye *et al.* ont adopté une approche hybride entre simulation d'un réseau de cordes cosmiques et sources actives, en modélisant un "gaz" de segments dont la longueur croît avec le temps, simulant l'évolution moyenne du rayon de courbure d'un vrai réseau de cordes. Ce modèle possède plusieurs paramètres libres, mais le choix le plus naturel de paramètres était en désaccord avec les observations [Albrecht *et al.*, 1997]. Les résultats obtenus en la présence d'une constante cosmologique étaient plus encourageants [Battye *et al.*, 1998], mais une étude détaillée a néanmoins conclu à un désaccord profond avec les données observationnelles [Albrecht *et al.*, 1999], sauf à imaginer des jeux de paramètres hautement non standard (comme la perte partielle de scaling). Quelques tentatives peu convaincantes ont également été faites sur des modèles hybrides [Battye *et al.*, 1999b] [Battye & Weller, 2000], mais sans donner de résultats probants.

Les défauts globaux ont été étudiés par les équipes de Turok *et al.* et Durrer *et al.*. Dans leurs travaux, le schéma de brisure de symétrie est $\mathrm{O}(N) \to \mathrm{O}(N-1)$ (*cf* chapitre 3, §3.1). Les premiers calculs des anisotropies du rayonnement fossile dans le cadre de ces modèles remontent semble-t-il à [Pen *et al.*, 1994], où il est remarqué pour la première fois que le spectre d'anisotropies produit est à peu près invariant d'échelle aux grands multipoles. Des résultats semblables (et un peu plus pré-

[1] D'où le terme de *global field ordering* parfois employé dans la littérature [Pen *et al.*, 1994]

[2] On parle alors de "large N limit".

cis) ont été obtenus peu après [Durrer & Zhou, 1996]. Des calculs à plus petite échelle angulaire ont été faits dans [Crittenden & Turok, 1995], mais il s'agissait en fait d'un modèle mi-analytique mi-numérique, dérivé dans le cadre d'une approximation de type source cohérente (*cf* chapitre 8). Un autre calcul dans la limite cohérente a été fait dans le cadre de la limite à grand N [Kunz & Durrer, 1997], dont certains résultats sont calculables analytiquement, ce qui permet de s'affranchir des simulations numériques (assez lourdes) de l'évolution du réseau de défauts. Une première carte des anisotropies à petite échelle a été obtenue par Turok [Turok, 1996b]. C'est en 1997 et 1999 qu'ont été faits les premiers calculs précis des anisotropies de température et de polarisation générées par des défauts globaux [Pen *et al.*, 1997] [Seljak *et al.*, 1997] [Turok *et al.*, 1998] [Durrer *et al.*, 1999a]. Contrairement aux travaux précédents, la méthode utilisée ici tient compte de la "décohérence" du modèle (*i.e.* des effets non linéaires dans l'évolution du réseau de défauts ; la méthode utilisée est celle de la décomposition des corrélateurs du tenseur énergie-impulsion des défauts en une somme de termes cohérents, *cf* chapitre 9). De plus, l'évolution des perturbations de matière est faite à l'aide d'un code Boltzmann. Le tout représente un gain considérable en précision par rapport aux premiers travaux. Les spectres obtenus ne présentent presque pas d'oscillations, qui sont tout de même un peu plus marquées dans les modèles à grand N (ce qui est logique, puisque les modèles sont moins non linéaires dans la limite à grand N).

Magueijo *et al.* ont étudié des modèles de cordes cosmiques locales. Ils ont été parmi les premiers à comprendre le rôle important joué par la décohérence dans la structure des pics Doppler [Magueijo *et al.*, 1996a] [Magueijo *et al.*, 1996b]. Le code de Vincent, Hindmarsh et Sakellariadou [Vincent *et al.*, 1997] [Vincent *et al.*, 1997], initialement écrit en espace plat, a été repris et adapté (comment ? ? ?) pour calculer les anisotropies du rayonnement fossile produites par un réseau de cordes cosmiques. Les résultats trouvés sont en désaccord avec les observations du fait que le modèle prédisait trop de puissance à petite échelle. Des tentatives avec des modèles hybrides (cordes + inflation) [Contaldi *et al.*, 1999b] et des essais avec divers jeux de paramètres cosmologiques [Copeland *et al.*, 1999] n'ont pas donné de meilleurs résultats.

En fait, les meilleures simulations de cordes cosmiques locales semblent être l'œuvre de Bennett et Bouchet, il y a une dizaine d'années [Bouchet *et al.*, 1988] [Bennett & Bouchet, 1989] [Bennett & Bouchet, 1990]. Ces auteurs ont entre autres été les premiers à montrer que le comportement de scaling était effectivement atteint pour un réseau de cordes cosmiques [Bennett & Bouchet, 1988]. Malheureusement, ce travail prometteur n'a pas été prolongé pour obtenir les anisotropies du rayonnement fossile.

Enfin, le dernier groupe à s'être intéressé aux simulations de cordes cosmiques locales est celui de Shellard *et al.*. Ces auteurs ont calculé les anisotropies produites par des cordes cosmiques, d'abord au niveau du quadrupole [Allen *et al.*, 1994], puis sur les grandes échelles angulaires [Allen *et al.*, 1996], et ensuite (de façon nettement moins convaincante) sur des échelles inférieures au degré [Allen *et al.*, 1997]. Cependant, la majeure partie de leurs travaux a porté sur la dynamique du réseau de cordes lui-même [Martins & Shellard, 1996] [Martins, 1997], ou sur son influence sur le spectre de puissance de la matière [Avelino *et al.*, 1997] [Avelino *et al.*, 1998] [Avelino *et al.*, 1999].

Présentation des chapitres suivants

La difficulté de la modélisation d'un réseau de défauts topologiques est telle qu'elle a amené la plupart des auteurs qui s'y sont attaqués à étudier des modèles plus simples. Une des difficultés de cette approche est qu'il est en général difficile d'évaluer l'impact des diverses approximations qu'on est amené à faire. Ceci est d'autant plus gênant que plusieurs de ces travaux se caractérisent par une absence coupable d'interprétation physique aux résultats obtenus.

Nous avons donc décidé de nous intéresser à l'impact de certains des paramètres physiques qui interviennent dans la modélisation d'un réseau de défauts topologiques. Pour l'instant, les équations que nous avons écrites sur le tenseur énergie-impulsion valent pour n'importe quel type de sources actives. Nous allons dans les chapitres qui suivent nous focaliser sur certaines de ses propriétés dans le cas où celles-ci modélisent des défauts topologiques, sans pour autant avoir à résoudre l'équation de Nambu pour les cordes locales ou l'équation de Klein-Gordon des défauts globaux. La philosophie sous-jacente est donc simple : accepter de perdre en précision en considérant une classe de modèles plus générale (*i.e.* avec plus de paramètres libres) que les défauts topologiques, mais comprendre et maîtriser l'impact de chacun de ces paramètres libres.

Au chapitre 8, nous allons introduire quelques considérations sur le processus de formation du réseau de défauts topologiques. L'idée de base est que les variables qui décrivent le tenseur énergie-impulsion du réseau ($\rho^{\rm s}$, $P^{\rm s}$, *etc*), peuvent être décrites en terme de variables aléatoires. Ce sont les corrélateurs à n points entre ces variables aléatoires qui donnent toute l'information statistique sur le réseau de défauts et qui sont nécessaires au calcul des anisotropies du rayonnement fossile. Seules des simulations numériques peuvent permettre de connaître la forme exacte de ces corrélateurs, mais on peut en étudier quelques propriétés génériques sans faire appel à ces simulations.

Dans le chapitre suivant, on tient compte du fait que l'évolution du réseau de défauts topologiques est, comme nous venons de le voir, non linéaire. La conséquence principale est que chaque composante du tenseur énergie-impulsion n'est pas décrite par une seule variable aléatoire, mais par une infinité d'entre elles. Le spectre d'anisotropies produit se trouve alors être une somme de plusieurs spectres (en pratique, on ne prend que la dizaine de spectres qui ont l'amplitude la plus grande). Cet effet, appelé *décohérence* a pour effet de "lisser" le spectre final, et d'en faire disparaître les pics Doppler caractéristiques de l'inflation, offrant ainsi une possibilité très nette de distinction entre les scénarios d'inflation et de défauts topologiques.

Le chapitre 10 porte sur un autre aspect important de la dynamique d'un réseau de cordes cosmiques locales. Contrairement aux défauts globaux, les défauts locaux n'ont pas un tenseur énergie-impulsion conservé. En effet, les cordes cosmiques connaissent un comportement de "scaling" uniquement parce qu'on fait l'hypothèse que les petites échelles, essentiellement composées par des boucles, disparaissent en rayonnant des particules ou par rayonnement gravitationnel. Il existe donc au moins une autre espèce dans l'Univers dont le tenseur énergie-impulsion n'est pas conservé. Il se trouve que la nature de cette espèce n'a aucune influence sur la dynamique du réseau de défauts, mais un impact énorme sur la dynamique des autres perturbations.

Enfin, le chapitre 11 est consacré à une étude sommaire sur la viabilité de ces scénarios. Les mesures actuelles excluent la quasi-totalité des modèles de défauts topologiques, d'une part parce qu'on a maintenant des indications fortes en faveur de la présence de deux et peut-être trois pics Doppler, et d'autre part parce que l'excès d'amplitude présent dans le spectre à l'échelle du degré est beaucoup plus compatible, tant dans sa position, que dans son amplitude, avec celle du premier pic des scénarios inflationnaires qu'avec la "bosse" caractéristique des scénarios basés sur des défauts topologiques. On montre dans ce chapitre qu'un scénario "hybride", comportant à la fois des perturbations d'origine inflationnaire et des défauts topologiques en quantités à peu près égales peut permettre un bon accord avec les observations récentes (BOOMERanG et MAXIMA-1) avec un jeu de paramètres cosmologiques tout à fait raisonnable.

Chapitre 8

Généralités sur les sources cohérentes (article)

Sommaire

Le chapitre qui suit est inspiré d'un article paru dans les Comptes-Rendus du XIX$^{\text{ème}}$ Texas symposium qui s'est tenu à Paris en décembre 1998 [Uzan *et al.*, 2000a]. Nous y étudions certaines des propriétés statistiques des corrélateurs à deux points des composantes du tenseur énergie-impulsion d'un réseau de défauts topologiques (équation **8.3.1**). Il y a 10 composantes indépendantes à ce tenseur, donc *a priori* 55 corrélateurs différents. Cependant, utilisant le fait que la distribution des défauts topologiques est statistiquement homogène et isotrope, on réduit le nombre de corrélateurs indépendants à 14 (§3.1, équations **8.3.10–8.3.23**). Ensuite, nous utilisons une des propriétés essentielles d'un réseau de défauts topologiques, à savoir le fait qu'il est complètement décorrélé sur des distances supérieures à la longueur de corrélation du réseau, qu'on identifie à l'horizon calculé à partir de la transition de phase générant les défauts, c'est-à-dire sans tenir compte d'une éventuelle phase d'inflation qui l'aurait précédée (§3.2, équation **8.3.25**). Ceci nous assure que les corrélateurs sont en bruit blanc sur les grandes échelles. On montre de même, en utilisant le fait que la distance moyenne entre les défauts est grande, que les corrélateurs tendent vers 0 à petite échelle.

Nous faisons ensuite (§3.3) l'hypothèse de *cohérence statistique*, qui revient formellement à dire que les composantes du tenseur énergie-impulsion sont décrites par seulement cinq variables aléatoires (une pour les quantités scalaires, deux pour les quantités vectorielles et tensorielles), exactement comme dans les scénarios inflationnaires. Cette hypothèse, très simplificatrice, permet de contraindre encore un peu plus la forme de certains corrélateurs. Il est à noter que cette hypothèse n'est *a priori* pas bien justifiée ici[1], c'est pourquoi nous l'abandonnerons dès le chapitre suivant.

Nous utilisons ensuite (§3.4) l'hypothèse dite de "*scaling*", selon laquelle le réseau de défauts topologiques n'est sensible qu'à une seule échelle privilégiée, à savoir sa longueur de corrélation[2]. Cette hypothèse simplifie à nouveau la forme des corrélateurs, dont le seul comportement difficile à modéliser a lieu lors de la transition radiation-matière (§3.5). En imposant enfin que le tenseur énergie-impulsion est conservé, on obtient la forme la plus générique possible pour les corrélateurs sous les hypothèses considérées (**8.3.77–8.3.83**).

Il nous reste à chercher les conditions initiales pour les perturbations des autres fluides (§4), qui s'écrivent assez simplement dans un choix judicieux de coordonnées (la jauge de feuilletage plat), puisque cela revient à considérer que les autres fluides ne sont initialement pas perturbés[3].

Une fois ceci fait, on calcule les anisotropies du rayonnement fossile de la façon habituelle (§5). Les calculs ont ici été faits à l'aide d'un code fluide car le code Boltzmann présenté dans la partie I n'était pas tout à fait au point à l'époque de la rédaction de l'article. Les conclusions de ce travail (§6) ne sont pas qualitativement changées par un code plus précis.

Les spectres obtenus présentent des caractéristiques déjà connues, comme notamment la série de pics Doppler régulièrement espacés et l'amortissement des perturbations à petite échelle (pour peu qu'on inclue la physique relevante...). Il existe cependant plusieurs différences avec les spectres issus des scénarios inflationnaires :

- L'absence de perturbations "super-horizon"[4], qui empêche la présence du "plateau" Sachs-Wolfe à grandes échelles angulaires.
- Cet effet est contrebalancé par un effet Sachs-Wolfe intégré tardif important (les potentiels de Bardeen ne sont plus constants dans l'ère de matière, mais varient dès l'entrée du mode dans l'horizon). Cet effet est important, et a en général tendance à remonter l'amplitude aux grandes échelles angulaires jusqu'à un niveau proche de celui du premier pic Doppler.
- La présence de modes vectoriels et tensoriels en quantité éventuellement importante. Les modes vectoriels ne présentent pas d'oscillations car l'évolution des perturbations ne suit pas une équation d'onde. Les modes vectoriels et tensoriels sont amortis à petite échelle sans présenter d'excès de puissance aux échelles intermédiaires. Cela a pour effet de remonter encore un peu plus le plateau Sachs-Wolfe par rapport aux pics Doppler.
- La position des pics Doppler, qui varie selon les paramètres du modèle. Souvent les pics sont décalés vers la droite, caractéristique habituelle de certains scénarios isocourbures (en modifiant les conditions initiales, on modifie la phase à l'origine des ondes sonores circulant

[1]Elle l'est dans les scénarios inflationnaires, mais uniquement parce qu'on fait (implicitement) l'hypothèse d'une inflation à un seul champ scalaire. Une inflation à plusieurs champs scalaires génère des fluctuations qui sont décrites par un plus grand nombre de variables aléatoires.

[2]Nous avons ici pris le rayon de Hubble au lieu de l'horizon, ce qui correspond sans doute à un choix moins judicieux, comme l'indiquent les simulations numériques [Wu *et al.*, 1998]. Cependant l'idée générale reste la même dans les deux cas, tant qu'on se restreint comme ici à un Univers dominé par la matière ou la radiation, car rayon de Hubble et horizon sont du même ordre. La distinction devient importante dans un Univers fortement ouvert ou dominé par une constante cosmologique.

[3]Ce résultat est parfaitement évident, mais il est à noter qu'un autre choix de jauge amène à des conclusions *e*n apparence différentes, ce qui a donné naissance au concept assez obscur de "*compensation*" [Veeraraghavan & Stebbins, 1990] [Cheung & Magueijo, 1997].

[4]Il n'y a jamais à proprement parler de perturbations "super-horizon". On emploie ce terme dans les scénarios inflationnaires, pour dire que l'horizon a crû d'un facteur énorme pendant la phase inflationnaire, et que le "vrai" horizon est beaucoup plus grand que l'horizon prédit pas le scénario cosmologique standard. Le terme de "super-rayon de Hubble" serait par conséquent mieux adapté, mais beaucoup moins esthétique...

dans le plasma, ce qui décale d'autant le plateau, *cf* par exemple [Hu *et al.*, 1997b]).
- L'absence d'indice spectral dans le spectre initial de fluctuations. On ne peut donc plus facilement augmenter l'amplitude du spectre à petite ou à grande échelle. On montre au §6.4 que les modes vectoriels et tensoriels sont approximativement invariants d'échelle (grâce à l'effet Sachs-Wolfe intégré) pour les petits multipoles. Un tel résultat est également obtenu pour les modes scalaires [Uzan, 1998b]. Intuitivement, cela résulte du fait qu'un observateur voit l'influence gravitationnelle d'une série de réseaux de cordes situés entre $z = 0$ et $z \sim 1000$. Cet ensemble de réseaux est par un double effet de perspective et d'évolution vu comme une superposition de réseaux de taille angulaire de plus en plus petite (la taille angulaire diminue avec la distance, ainsi que la taille réelle du réseau car on regarde alors des époques plus anciennes). Si la taille caractéristique du réseau varie "comme il faut" au cours du temps (en l'occurence comme le rayon de Hubble), alors chaque échelle angulaire va avoir une contribution équivalente au spectre d'anisotropies, qui sera alors sera invariant d'échelle.

Il reste possible de jouer sur les paramètres libres du modèle pour obtenir un spectre plus proche d'un spectre inflationnaire :
- On peut faire en sorte de minimiser l'effet Sachs-Wolfe intégré (figure 8.4). De même, on peut décider de prendre une contribution négligeable des modes vectoriels et tensoriels. Même dans ce cas, il ne semble pas facile de rabaisser de beaucoup le plateau. Notons que cela est tout de même possible, comme l'a montré Turok sur un exemple simple [Turok, 1996c], mais il s'agit là d'un choix en fait très particulier, comme l'a montré Wayne Hu [Hu *et al.*, 1997a].
- La largeur caractéristique des corrélateurs a une influence sur la répartition de la puissance entre petites et grandes échelles. On a montré que le spectre était approximativement invariant d'échelle quand le réseau de défauts topologiques était décorrélé sur des échelles supérieures à la taille de l'horizon. On peut dans notre modèle changer "à la main" la longueur de corrélation du réseau. Quand on la rallonge, on augmente la puissance à grande échelle, et inversement quand on la raccourcit (figure 8.3). Une longueur de corrélation supérieure à la taille de l'horizon n'est pas très physique. Par contre, le contraire est tout à fait plausible, ce qui augmenterait l'amplitude des fluctuations à petite échelle. De façon intéressante, c'est ce qui semble être le cas dans certaines simulations de défauts locaux [Contaldi *et al.*, 1999a] [Pogosian & Vachaspati, 1999]. Pour des défauts globaux, dont la physique est plus simple, il est clair que la longueur de corrélation est égale à l'horizon, et les simulations indiquent que le spectre d'anisotropies correspondant est moins tilté et présente un maximum à plus grande échelle angulaire [Turok *et al.*, 1998] [Durrer *et al.*, 1999a].

Tout ceci indique qu'il n'est pas facile d'obtenir à l'aide de ces modèles génériques un spectre "proche" d'un spectre inflationnaire. C'est une bonne nouvelle car cela laisse espérer qu'il n'y a pas de "dégénérescence" entre scénarios à base de sources actives et scénarios inflationnaires. Cependant de tels modèles semblent beaucoup moins bien s'accorder avec les données que les scénarios inflationnaires. D'autres travaux ayant exploré une grande classe de modèles de ce type sont arrivés à des conclusions identiques [Durrer & Sakellariadou, 1997] [Durrer *et al.*, 1997]

Nous ne pouvons cependant pas encore conclure quant à la viabilité des scénarios de formation des structures à l'aide de défauts topologiques, car nous n'avons pas encore mis tous les ingrédients nécessaires à une modélisation raisonnablement bonne du problème. Notamment, deux hypothèses que nous avons faites sont critiquables. D'abord, nous avons utilisé l'hypothèse de cohérence que nous n'avons pas justifiée, et qui est en fait incorrecte. Ensuite, nous avons supposé que le tenseur énergie-impulsion des sources actives était conservé, ce qui n'est peut-être pas vérifié dans la réalité. Ce sont ces deux points que nous étudierons en détail aux chapitres 9 et 10.

Cosmic microwave background anisotropies seeded by coherent topological defects: a semi-analytic approach

Jean-Philippe Uzan[1*], Nathalie Deruelle[1,2†] and Alain Riazuelo[1‡]

[1] *Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, UPR 176 du Centre National de la Recherche Scientifique, Observatoire de Paris, F-92195 Meudon Cedex (France)*

[2] *Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Silver Street, Cambridge, CB3 9EW (England)*

Abstract : We consider a perfectly homogeneous, isotropic and spatially flat universe which undergoes a sudden phase transition producing topological defects. We assume that these defects form a coherent network which scales like the background density during the radiation and matter dominated eras, and describe them in terms of a few free functions. We carefully model the loss of scaling invariance during the transition from radiation to matter dominated era. We choose a simple set for the free functions, compute the microwave background temperature anisotropies generated by such a network, and compare our results to previous calculations.

PACS numbers : 98.80.Cq, 98.70.Vc

1 Introduction

The origin of the small inhomogeneities in the cosmic fluids which eventually evolved into the large scale structures that we observe today in the universe is still under debate. Two classes of models are at present in competition. The inflationary models on one hand [Guth, 1981] explain those inhomogeneities by the amplification of quantum fluctuations at the end of an accelerated phase of expansion of the universe [Guth & Pi, 1982] [Hawking, 1982] [Starobinsky, 1982]. On the other hand topological defects appearing during a phase transition in the early universe [Kibble, 1976] can also seed inhomogeneities [Vilenkin, 1981] [Bouchet *et al.*, 1988] [Turok, 1989] [Hindmarsh & Kibble, 1995].

A way to discriminate between those two classes of models is to compute the cosmic microwave background (CMB) anisotropies they predict and confront the results to observations. At present the anisotropies on large angular scales are known from the COBE measurements [Bennett *et al.*, 1996]. On smaller scales, the present balloon and ground experiments [Smoot, 1997b] are still unprecise but the measurements should improve when the MAP [MAP, http] and PLANCK [PLANCK, http] satellite missions are launched.

*Email addres: uzan@amorgos.unige.ch
†Email addres: Nathalie.Deruelle@obspm.fr
‡Email addres: Alain.Riazuelo@obspm.fr

On the theoretical front, the CMB anisotropy predictions from the inflationary models (at least the simplest ones) are robust, and can now in many cases be obtained by plugging into the CMBFAST code [Seljak & Zaldarriaga, 1996] [CMBFAST, http] the initial conditions given by the particular model at hand. On the other hand the predictions from defect scenarios are still unclear, the reason being that the defects, which act as a continuous source of inhomogeneities, are difficult to model. Indeed the description of the formation, evolution and decay of defects requires heavy numerical simulations (see, *e.g.*, [Bennett & Bouchet, 1988] [Sakellariadou & Vilenkin, 1988] [Sakellariadou & Vilenkin, 1990] [Allen *et al.*, 1996] [Allen *et al.*, 1997] [Crittenden & Turok, 1995]), and the CMB anisotropies their networks create seem to be very sensitive to their detailed structure. Recent results [Pen *et al.*, 1997] [Albrecht *et al.*, 1999] indicate that defect model predictions do not agree with the data. It is clear however that more work needs to be done before rejecting topological defects as a possible explanation for the CMB anisotropies as they may for example have a more complex internal structure (see, *e.g.*, [Peter, 1992]) than that assumed in those numerical models.

Considering the complexity of modeling realistic topological defects, the semi-analytic approach initiated by Durrer and collaborators [Durrer & Zhou, 1996] [Durrer *et al.*, 1996] [Durrer & Sakellariadou, 1997] [Durrer & Kunz, 1998] seems to be a fruitful compromise. The idea is to model the defect network by a stress-energy tensor which acts as a source to the linearized Einstein equations and induces inhomogeneities in the cosmic fluids. The ten components of this stress-energy tensor are then drastically constrained by a number of physical requirements. In this paper, we shall impose, as in [Durrer & Zhou, 1996] [Durrer *et al.*, 1996] [Durrer & Sakellariadou, 1997] [Durrer & Kunz, 1998] [Turok *et al.*, 1998], that the defect network

1. is statistically homogeneous and isotropic (hence obeys the Copernican principle),
2. is created at a phase transition in an up to then perfectly homogeneous and isotropic universe (hence obeys specific causality [Turok, 1996c] and matching [Deruelle *et al.*, 1997] conditions),
3. evolves deep in the radiation era and deep in the matter era in a way which is statistically independent of time (scaling requirement [Durrer & Zhou, 1996] [Durrer *et al.*, 1996] [Durrer & Sakellariadou, 1997] [Durrer & Kunz, 1998]).
4. satisfies the conservation equations,
5. is statistically coherent (see, *e.g.*, [Deruelle *et al.*, 1997] and below for a precise definition).

Of all those requirements the latter two are stringent and probably not fulfilled by realistic defect networks (see, *e.g.*, [Durrer & Zhou, 1996] [Durrer *et al.*, 1996] [Durrer & Sakellariadou, 1997] [Pen *et al.*, 1997] [Durrer & Kunz, 1998] [Contaldi *et al.*, 1999a]).

Now, as for assumption 5., it is a sensible one to make, as incoherent sources can in principle be described as a sum of coherent ones [Pen *et al.*, 1997] (see §3.3). As for assumption 4., all authors who describe semi-analytically the defects as a fluid have up to now made it. All authors who consider global defects construct *conserved* stress energy tensors (see, *e.g.*, [Turok, 1996c]). Those who study local strings may have to add an extra fluid so that the total stress energy tensor is conserved (see, *e.g.*, [Albrecht *et al.*, 1999] [Turok, 1996b]). Only Contaldi *et al.* [Contaldi *et al.*, 1999a], as far as we are aware, have questioned it. In order to take into account the network loss of energy through gravitational radiation or particle production, they have added an extra fluid which compensates for the non conservation of the defect stress-energy tensor (which comes from excising small loops from the numerical simulation in order for the network to scale). The problem with such a modeling (as Contaldi *et al.* themselves note) is, first, that the results are very sensitive to the equation of state of that extra fluid (which is left as a free parameter), and, second, that the energy lost by the network is transferred exclusively to that extra fluid and not to the background photons, baryons, Cold Dark Matter (CDM) and neutrinos. Therefore the modeling of the defect network energy loss is still in a primitive stage and needs to be improved by a careful analysis of the microphysics involved in the evolution of the network (which includes friction effects, particle and gravitational radiation production by decaying loops, as well as electromagnetic interactions with the plasma when the network carries currents). In this paper, in order to keep arbitrariness to a minimum, we choose to ignore the network energy losses.

Those five conditions being imposed, the stress-energy tensor of the defects will turn out to depend only on four free functions, two describing its scalar part and two describing respectively its vectorial and tensorial parts. Moreover, for a particular ansatz which guarantees that the defects evolve from the two scaling regimes in such a way that the conservation equations are satisfied, those four functions will, as we shall see, depend only on one variable u and tend to constants when $u \to 0$, and to 0 when $u \to \infty$.

We shall choose simple ansätze for those four functions (their precise shape can in principle be obtained by numerical simulations) and solve the well-known (see, *e.g.*, [Kodama & Sasaki, 1984] [Mukhanov *et al.*, 1992] [Durrer, 1994]) linearized Einstein equations which couple the defect network to the cosmic fluid inhomogeneities. Finally we shall compute numerically the CMB anisotropies those inhomogeneities produce.

In agreement with [Durrer & Zhou, 1996] [Durrer *et al.*, 1996] [Durrer & Sakellariadou, 1997] [Durrer & Kunz, 1998] (as well as with [Albrecht *et al.*, 1999] [Turok *et al.*, 1998]) we shall see that those anisotropies are very sensitive to the choices made for the free functions describing the defects. Our results therefore confirm previous work but the loss of scaling invariance during the transition is treated more carefully. They are also more complete as they include the vector and tensor contributions.

The paper is organized as follows: in §2 we write down the linearized Einstein equations (in longitudinal gauge) describing the evolution of the cosmic fluid inhomogeneities driven by the defect stress-energy tensor (we suppose that the material content of the universe is a mixture of four perfect fluids: CDM, neutrinos, baryons and photons, the latter two fluids being tightly coupled before decoupling). In §3 we see in a detailed way how the five conditions given above constrain the defect stress-energy tensor. In §4 we solve analytically the linearized Einstein equations deep in the radiation era, when all scales of interest today were larger than the Hubble radius, and we set the initial conditions on the cosmic fluid perturbations, following [Deruelle *et al.*, 1997]. In §5 we give the correlation function of the CMB anisotropies in function of the cosmic fluid perturbations, assuming instantaneous decoupling (our computation is slightly different from the standard one — see, *e.g.*, [Ma & Bertschinger, 1995] [Hu & Sugiyama, 1995a] [Hu & White, 1997b]). Finally in §6 we compute numerically the multipole coefficients C_ℓ of the CMB anisotropy correlation function using a perfect fluid code and compare our results to previous computations. We discuss the approximations made, to wit perfect fluid description, tight coupling and instantaneous decoupling hypotheses, by comparing our perfect fluid code to a Boltzmann one. We also show how to evaluate analytically the vector and tensor contributions to the C_ℓ for small ℓ.

2 Einstein equations

2.1 The background

The universe at large appears to be remarkably homogeneous and isotropic and governed by the gravitational force created by its material content. We suppose that that was always so, and describe it in a first approximation by a Robertson-Walker geometry (that we shall for simplicity suppose spatially flat) whose time evolution satisfies Friedmann's equations. We suppose that its material content is a mixture of perfect fluids made of decoupled black body radiations of photons and massless neutrinos, of baryons with which the photons were coupled until their temperature dropped to $\simeq 3000$ K, and of uncoupled CDM. We thus take the line element to be:

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)[-\mathrm{d}\eta^2 + \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j] \,, \tag{8.2.1}$$

where η is conformal time (we set the velocity of light equal to 1), where x^i, $i = 1,2,3$ are three Cartesian coordinates and δ_{ij} is the Kronecker symbol, and where $a(\eta)$ is the scale factor.

The conservation equations for the fluids read:

$$\dot{\rho}_n = -3\mathcal{H}(\rho_n + P_n) \,, \tag{8.2.2}$$

where ρ_n and P_n are the energy density and pressure of the n-th fluid and where $\mathcal{H} \equiv \dot{a}/a$ is the comoving Hubble radius, with an overdot denoting a derivative with respect to conformal time. The radiation fluids of photons and neutrinos both have a pressure equal to a third of their energy density, and the fluids of baryons and CDM have zero pressure (whence they have become non-relativistic). Hence the two former scale as a^{-4} and the two latter as a^{-3}.

The Friedmann equation is:

$$\mathcal{H}^2 = \kappa\frac{a^2}{3}\rho_t \,, \tag{8.2.3}$$

where $\kappa \equiv 8\pi\mathcal{G}$ is Einstein's constant and $\rho_t \equiv \sum_n \rho_n$.

Combining Eqns (**8.2.2**) and (**8.2.3**) yields:

$$h^2 = \frac{1}{x^2}(\Omega^0_{\mathrm{rad}} + x\Omega^0_{\mathrm{mat}}) \,, \tag{8.2.4}$$

with

$$\Omega^0_{\mathrm{rad}} \equiv \Omega^0_\gamma + \Omega^0_\nu \,, \tag{8.2.5}$$
$$\Omega^0_{\mathrm{mat}} \equiv \Omega^0_{\mathrm{b}} + \Omega^0_{\mathrm{c}} \,, \tag{8.2.6}$$
$$x \equiv a/a_0 \,, \tag{8.2.7}$$
$$h \equiv \mathcal{H}/\mathcal{H}_0 \,, \tag{8.2.8}$$

where $\Omega_n \equiv \rho_n/\rho_t$ (with $\sum_n \Omega_n = 1$), where the index zero means the present time and where the indices $\gamma, \nu, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ refer respectively to the photons, neutrinos, baryons and CDM.

The numerical values of Ω^0_n are known from:

1. the value of the Hubble constant $H_0 \equiv \mathcal{H}_0/a_0$, which determines ρ^0_t via Eq. (**8.2.3**) (we shall take $H_0 = 100h$ km sec^{-1} Mpc^{-1} with $h = 0.5$),

2. the temperature of the microwave background (2.726 K), which determines ρ^0_γ via Stefan's law,

3. electroweak theory, which determines the ratio $\rho^0_\nu/\rho^0_\gamma \simeq 0.68132$ (assuming three families of massless, non-degenerate neutrinos),

4. nucleosynthesis, which determines ρ^0_{b} (we shall take $\Omega^0_{\mathrm{b}}h^2 = 0.0125$).

All that yields:

$$\Omega^0_\gamma \simeq 9.4\times 10^{-5}\ , \tag{8.2.9}$$
$$\Omega^0_\nu \simeq 6.3\times 10^{-5}\ , \tag{8.2.10}$$
$$\Omega^0_{\rm b} = 5.0\times 10^{-2}\ , \tag{8.2.11}$$
$$\Omega^0_{\rm c} \simeq 0.95\ . \tag{8.2.12}$$

The value $x_{\rm dec}$ of x at decoupling is given by the ratio of the present temperature of the photon background and its temperature at decoupling: $x_{\rm dec}\simeq 0.9\times 10^{-3}$. Equality of matter and radiation is defined by $x_{\rm eq}\equiv \Omega^0_{\rm rad}/\Omega^0_{\rm mat}$ and occurs before decoupling.

Equation (**8.2.4**) can be easily solved to give $x(\eta)$:

$$\eta_0-\eta=\frac{2}{\Omega^0_{\rm mat}\mathcal{H}_0}\left[1-\sqrt{\Omega^0_{\rm rad}+x\Omega^0_{\rm mat}}\right]\ . \tag{8.2.13}$$

In the radiation era ($x\ll x_{\rm eq}$), $x\propto\eta$, in the matter era ($x\gg x_{\rm eq}$), $x\propto\eta^2$ and in both eras $\mathcal{H}\propto 1/\eta$.

Finally, when the scale factor behaves as $a(\eta)\propto\eta^q$ with $q>0$ when $\eta\to 0$ (which is the case in the standard scenario we consider here) the particle horizon of the point x^i is defined by $r=\eta$ (where $r\equiv|x^i-x'^i|$ is the comoving spatial distance from x^i) and is proportional to the comoving Hubble radius $\mathcal{H}^{-1}$.

2.2 Perturbation equations

Following Bardeen [Bardeen, 1980] (see also [Stewart, 1990]) we split the perturbations of the geometry and the matter variables into (spatial) scalar, vector and tensor components (for reviews of this formalism, see, *e.g.*, [Kodama & Sasaki, 1984] [Mukhanov *et al.*, 1992] [Durrer, 1994]). We shall work in the longitudinal (also called Newtonian) gauge in which the line element of a perturbed Friedmann-Robertson-Walker space time reads:

$$\mathrm{d}s^2=a^2(\eta)\left[-(1+2\Phi)\mathrm{d}\eta^2-2\bar{\Phi}_i\mathrm{d}x^i\mathrm{d}\eta+\Big((1-2\Psi)\delta_{ij}+2\bar{\bar{E}}_{ij}\Big)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right]\ . \tag{8.2.14}$$

Here and in the following all barred spatial vectors (such as $\bar{\Phi}_i$) are divergenceless ($\partial_i\bar{\Phi}^i=0$), all barred spatial tensors (such as $\bar{\bar{E}}_{ij}$) are divergenceless and traceless ($\partial_p\bar{\bar{E}}^{pi}=0,\bar{\bar{E}}^q_q=0$) and all spatial indices are moved with the Kronecker symbol δ_{ij}. The six functions (Φ,Ψ), $\bar{\Phi}_i$ and $\bar{\bar{E}}_{ij}$ are respectively the scalar, vector and tensor parts of the metric perturbations in longitudinal gauge.

We shall treat the material content of the universe as a mixture of *perfect* fluids (see §6 below for a discussion of this hypothesis). The perturbations of the stress-energy tensor of the n-th perfect fluid in this perturbed universe are:

$$\delta T^n_{00}=a^2\rho_n(\delta_n+2\Phi)\ , \tag{8.2.15}$$
$$\delta T^n_{0i}=a^2[\rho_n\bar{\Phi}_i-(\bar{v}_{i\,n}+\partial_i v_n)(\rho_n+P_n)]\ , \tag{8.2.16}$$
$$\delta T^n_{ij}=a^2P_n[2\bar{\bar{E}}_{ij}+\delta_{ij}(\delta_n-2\Psi)]\ , \tag{8.2.17}$$

where $\delta_n\equiv\delta\rho_n/\rho_n$ is its density contrast and $\partial_i v_n+\bar{v}_{i\,n}$ its velocity perturbation.

The stress-energy tensor of the topological defects is in itself a small perturbation (this is the so-called "stiff approximation", see, *e.g.*, [Veeraraghavan & Stebbins, 1990]). We decompose its components as:

$$\frac{\kappa}{\mathcal{H}_0^2}\Theta_{00} = \rho^{\rm s}\ , \tag{8.2.18}$$

$$\frac{\kappa}{\mathcal{H}_0^2}\Theta_{0i} = -\left(\bar{v}_i^{\rm s} + \partial_i v^{\rm s}\right)\ , \tag{8.2.19}$$

$$\frac{\kappa}{\mathcal{H}_0^2}\Theta_{ij} = \bar{\bar{\Pi}}_{ij}^{\rm s} + \partial_i \bar{\Pi}_j^{\rm s} + \partial_j \bar{\Pi}_i^{\rm s} + \delta_{ij}\left(P^{\rm s} - \frac{1}{3}\Delta\Pi^{\rm s}\right) + \partial_{ij}\Pi^{\rm s}\ . \tag{8.2.20}$$

The ten source functions $(\rho^{\rm s}, P^{\rm s}, v^{\rm s}, \Pi^{\rm s}), (\bar{v}_i^{\rm s}, \bar{\Pi}_i^{\rm s})$ and $\bar{\bar{\Pi}}_{ij}^{\rm s}$ will be discussed later.

We shall write the evolution equations in Fourier space, the Fourier transform of any function $f(\eta, x^i)$ being defined (formally) as:

$$\widehat{f}(\eta, k^i) = \frac{\mathcal{H}_0^3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int e^{-ik_i x^i} f(\eta, x^i)\ {\rm d}^3 x\ , \tag{8.2.21}$$

$$f(\eta, x^i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\mathcal{H}_0^3}\int e^{ik_i x^i}\widehat{f}(\eta, k^i)\ {\rm d}^3 k\ . \tag{8.2.22}$$

(The factor $\mathcal{H}_0^3$ insures that $\widehat{f}$ and f have the same dimension.)

As announced in the introduction, we assume that the defects interact only gravitationally with the rest of the matter. Therefore their stress-energy tensor is conserved, which yields for all (but the $k^i = 0$) modes:

$$\dot{\widehat{\rho}}^{\rm s} = -\mathcal{H}\widehat{\rho}^{\rm s} - 3\mathcal{H}\widehat{P}^{\rm s} + k\widehat{V}^{\rm s}\ , \tag{8.2.23}$$

$$\dot{\widehat{V}}^{\rm s} = -2\mathcal{H}\widehat{V}^{\rm s} + k\left(-\widehat{P}^{\rm s} + \frac{2}{3}\widehat{\pi}^{\rm s}\right)\ , \tag{8.2.24}$$

$$\dot{\widehat{\bar{v}}}_i^{\rm s} = -2\mathcal{H}\widehat{\bar{v}}_i^{\rm s} + k\widehat{\bar{\pi}}_i^{\rm s}\ , \tag{8.2.25}$$

where we have introduced $k \equiv \sqrt{k_i k^i}$, where a barred vector is orthogonal to k^i and where

$$\widehat{V}^{\rm s} \equiv k\widehat{v}^{\rm s}\ , \tag{8.2.26}$$

$$\widehat{\pi}^{\rm s} \equiv k^2\widehat{\Pi}^{\rm s}\ , \tag{8.2.27}$$

$$\widehat{\bar{\pi}}_i^{\rm s} \equiv k\widehat{\bar{\Pi}}_i^{\rm s}\ . \tag{8.2.28}$$

After decoupling the fluids of neutrinos, photons, baryons and CDM are decoupled. Their stress-energy tensors are therefore separately conserved, which yields:

$$\dot{\widehat{\delta}}_\nu^\flat = \frac{4}{3}k\widehat{V}_\nu\ ,\quad \dot{\widehat{V}}_\nu = -k\left(\widehat{\Phi} + \frac{1}{4}\widehat{\delta}_\nu\right)\ ,\quad \dot{\widehat{\bar{v}}}_\nu^i = 0\ , \tag{8.2.29}$$

$$\dot{\widehat{\delta}}_\gamma^\flat = \frac{4}{3}k\widehat{V}_\gamma\ ,\quad \dot{\widehat{V}}_\gamma = -k\left(\widehat{\Phi} + \frac{1}{4}\widehat{\delta}_\gamma\right)\ ,\quad \dot{\widehat{\bar{v}}}_\gamma^i = 0\ , \tag{8.2.30}$$

$$\dot{\widehat{\delta}}_{\rm b}^\flat = k\widehat{V}_{\rm b}\ ,\quad \dot{\widehat{V}}_{\rm b} = -\mathcal{H}\widehat{V}_{\rm b} - k\widehat{\Phi}\ ,\quad \dot{\widehat{\bar{v}}}_{\rm b}^i = -\mathcal{H}\widehat{\bar{v}}_{\rm b}^i\ , \tag{8.2.31}$$

$$\dot{\widehat{\delta}}_{\rm c}^\flat = k\widehat{V}_{\rm c}\ ,\quad \dot{\widehat{V}}_{\rm c} = -\mathcal{H}\widehat{V}_{\rm c} - k\widehat{\Phi}\ ,\quad \dot{\widehat{\bar{v}}}_{\rm c}^i = -\mathcal{H}\widehat{\bar{v}}_{\rm c}^i\ . \tag{8.2.32}$$

where we have introduced

$$\widehat{\delta}_n^\flat \equiv \widehat{\delta}_n - 3\left(1 + \frac{P_n}{\rho_n}\right)\widehat{\Psi}\ , \tag{8.2.33}$$

$$\widehat{V}_n \equiv k\widehat{v}_n\ . \tag{8.2.34}$$

Before decoupling the density contrasts and velocity perturbations of the neutrino and CDM energy fluids still obey Eqns (**8.2.29**) and (**8.2.32**) but the baryons and photons being tightly coupled, Eqns (**8.2.30**) and (**8.2.31**) must be replaced by (using also the fact that the number of baryons is conserved)

$$\dot{\widehat{\delta}}^{\flat}_{\rm b} = k\widehat{V}_{\rm b}\,, \qquad \dot{\widehat{\delta}}^{\flat}_{\gamma} = \frac{4}{3}k\widehat{V}_{\gamma}\,, \tag{8.2.35}$$

$$\widehat{V}_{\rm b} = \widehat{V}_{\gamma}\,, \qquad \dot{\widehat{V}}_{\gamma} = -\mathcal{H}R\widehat{V}_{\gamma} - k\left(\frac{1}{4}(1-R)\widehat{\delta}_{\gamma} + \widehat{\Phi}\right)\,, \tag{8.2.36}$$

$$\widehat{\bar{v}}^{i}_{\rm b} = \widehat{\bar{v}}^{i}_{\gamma}\,, \qquad \dot{\widehat{\bar{v}}}^{i}_{\gamma} = -\mathcal{H}R\widehat{\bar{v}}^{i}_{\gamma}\,, \tag{8.2.37}$$

where we have introduced $R \equiv (3\alpha x)/(4+3\alpha x)$, $\alpha \equiv \Omega^0_{\rm b}/\Omega^0_{\gamma}$. (It is clear that imposing that the density contrasts and velocity perturbations of the baryon and photon fluids obey Eqns (**8.2.35**–**8.2.37**) until decoupling and (**8.2.30**, **8.2.31**) after decoupling, all variables being continuous at $x = x_{\rm dec}$, is a first approximation: see §6 below.)

The Einstein equations give, after linearization, the scalar and vector metric perturbations algebraically in function of the matter perturbations as

$$\widehat{\Psi} = \frac{-1}{k^2 + 3(\mathcal{H}^2 - \dot{\mathcal{H}})}\left[3\mathcal{H}^2\left(\sum_n \Omega_n\left(\widehat{\delta}^{\flat}_n - 3(1+\omega_n)\frac{\mathcal{H}}{k}\widehat{V}_n\right)\right) + \mathcal{H}_0^2\left(\widehat{\rho}^{\rm s} - 3\frac{\mathcal{H}}{k}\widehat{V}^{\rm s}\right)\right]\,, \tag{8.2.38}$$

$$\widehat{\Phi} = \widehat{\Psi} - \frac{\widehat{\pi}^{\rm s}}{q^2}\,, \tag{8.2.39}$$

$$\widehat{\bar{\Phi}}_i = \frac{2}{k^2}\left(3\mathcal{H}^2\sum_n \Omega_n(1+\omega_n)\widehat{\bar{v}}_{i\,n} + \mathcal{H}_0^2\widehat{\bar{v}}^{\rm s}_i\right)\,. \tag{8.2.40}$$

(The other Einstein equations are redundant because of Bianchi's identities. The index n runs on the four background fluids, and we have set $\omega_{\rm b} = \omega_{\rm c} = 0$, $\omega_\nu = \omega_\gamma = 1/3$ and $q \equiv k/\mathcal{H}_0$.) Finally the tensor metric perturbations are not determined algebraically: they solve the differential equation

$$\ddot{\widehat{\bar{\bar{E}}}}_{ij} - 2\mathcal{H}\dot{\widehat{\bar{\bar{E}}}}_{ij} + k^2\widehat{\bar{\bar{E}}}_{ij} = \mathcal{H}_0^2\widehat{\bar{\bar{\Pi}}}^{\rm s}_{ij}\,. \tag{8.2.41}$$

where a barred tensor is traceless and orthogonal to k^i.

The background quantity $\mathcal{H}(\eta)$ being known from Eqns (**8.2.4**, **8.2.13**) and (**8.2.29–8.2.41**) give the evolution of the perturbations in function of η and the comoving wavenumber k, once the source variables [constrained by Eqns (**8.2.23–8.2.25**)], are known in function of η and k (§3) and once the initial conditions are set (§4).

3 The stress-energy tensor $\Theta_{\mu\nu}$ of the sources

3.1 Homogeneity and isotropy constraints

The ten components of the stress-energy tensor $\Theta_{\mu\nu}(\eta, x^i)$ of the topological defects ($\mu,\nu = 0,1,2,3$) are ten statistically spatially homogeneous and isotropic random fields. So are their ten Fourier transforms $\widehat{\Theta}_{\mu\nu}(\eta, k^i)$, which are complex but such that $\widehat{\Theta}^*_{\mu\nu}(\eta, k^i) = \widehat{\Theta}_{\mu\nu}(\eta, -k^i)$. We ignore the $k^i = 0$ mode which can be absorbed in the background.

The statistical properties of those ten random fields will be described by their unequal time two-point correlators

$$\left\langle \Theta_{\mu\nu}(\eta, x^i)\Theta_{\rho\sigma}(\eta', x'^i)\right\rangle \equiv \frac{\mathcal{H}_0}{\kappa^2} C_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta, \eta', r^i) \,, \tag{8.3.1}$$

where $\langle ... \rangle$ means an ensemble average on a large number of realizations, and where the correlator $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ is a tensor which depends only on η, η' and $r^i \equiv x^i - x'^i$ because of the spatial homogeneity of the distribution. The power spectra of the correlators $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ are defined as

$$P_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta, \eta', k^i) \equiv (2\pi)^{3/2} \widehat{C}_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta, \eta', k^i) \,, \tag{8.3.2}$$

where a caret denotes a Fourier transform. The power spectra are related to the correlators in Fourier space by

$$\left\langle \widehat{\Theta}^*_{\mu\nu}(\eta, k^i)\widehat{\Theta}_{\rho\sigma}(\eta', k'^i)\right\rangle = \delta(k^i - k'^i)\frac{\mathcal{H}_0^4}{\kappa^2} P_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta, \eta', k^i) \,. \tag{8.3.3}$$

The spatial isotropy of the distribution now forces the power spectra to be of the form

$$P_{0000} = A_0 \,, \tag{8.3.4}$$

$$P_{000i} = ik_i B_1 \,, \tag{8.3.5}$$

$$P_{00ij} = C_0 \delta_{ij} + C_2 k_i k_j \,, \tag{8.3.6}$$

$$P_{0i0j} = D_0 \delta_{ij} + D_2 k_i k_j \,, \tag{8.3.7}$$

$$P_{0ijk} = i\left[E_1 k_i \delta_{jk} + \bar{E}_1 (k_j \delta_{ik} + k_k \delta_{ij}) + E_3 k_i k_j k_k\right] \,, \tag{8.3.8}$$

$$\begin{aligned} P_{ijkl} = {} & F_0 \delta_{ij}\delta_{kl} + \bar{F}_0(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + F_2(k_i k_j \delta_{kl} + k_k k_l \delta_{ij}) + \\ & \bar{F}_2(k_i k_k \delta_{jl} + k_i k_l \delta_{jk} + k_j k_l \delta_{ik} + k_j k_k \delta_{il}) + F_4 k_i k_j k_k k_l \,, \end{aligned} \tag{8.3.9}$$

where A_0, B_1 *etc* are 14 real functions of η, η' and the modulus k of the spatial vector k^i.

When $\Theta_{\mu\nu}$ is decomposed into its scalar, vector and tensor components according to Eq. (**8.2.18–8.2.20**), then Eqns (**8.3.3**) and (**8.3.4–8.3.9**) yield

$$\langle \widehat{\rho}_{\rm s}^* \widehat{\rho}_{\rm s}\rangle = A_0 \,, \tag{8.3.10}$$

$$\left\langle \widehat{\rho}_{\rm s}^* \widehat{V}_{\rm s}\right\rangle = -kB_1 \,, \tag{8.3.11}$$

$$\left\langle \widehat{\rho}_{\rm s}^* \widehat{P}_{\rm s}\right\rangle = C_0 + \frac{1}{3}k^2 C_2 \,, \tag{8.3.12}$$

$$\langle \widehat{\rho}_{\rm s}^* \widehat{\pi}_{\rm s}\rangle = -k^2 C_2 \,, \tag{8.3.13}$$

$$\left\langle \widehat{V}_{\rm s}^* \widehat{V}_{\rm s}\right\rangle = D_0 + k^2 D_2 \,, \tag{8.3.14}$$

$$\left\langle \widehat{V}_{\rm s}^* \widehat{P}_{\rm s}\right\rangle = k\left[\left(E_1 + \frac{2}{3}\bar{E}_1\right) + \frac{k^2}{3}E_3\right] \,, \tag{8.3.15}$$

$$\left\langle \widehat{V}_{\rm s}^* \widehat{\pi}_{\rm s}\right\rangle = -k(2\bar{E}_1 + k^2 E_3) \,, \tag{8.3.16}$$

$$\left\langle \widehat{P}_{\rm s}^* \widehat{P}_{\rm s}\right\rangle = \left(F_0 + \frac{2}{3}\bar{F}_0\right) + \frac{2}{3}k^2\left(F_2 + \frac{2}{3}\bar{F}_2\right) + \frac{1}{9}k^4 F_4 \,, \tag{8.3.17}$$

$$\left\langle \widehat{P}_{\rm s}^* \widehat{\pi}_{\rm s}\right\rangle = -k^2\left[\left(F_2 + \frac{4}{3}\bar{F}_2\right) + \frac{1}{3}k^2 F_4\right] \,, \tag{8.3.18}$$

$$\langle \widehat{\pi}_{\rm s}^* \widehat{\pi}_{\rm s}\rangle = 3\bar{F}_0 + 4k^2\bar{F}_2 + k^4 F_4 \,, \tag{8.3.19}$$

$$\left\langle \widehat{v}_i^{s*} \widehat{v}_j^{s} \right\rangle = D_0 P_{ij} \; , \quad \textbf{(8.3.20)}$$

$$\left\langle \widehat{v}_i^{s*} \widehat{\pi}_j^{s} \right\rangle = -k\bar{E}_1 P_{ij} \; , \quad \textbf{(8.3.21)}$$

$$\left\langle \widehat{\pi}_i^{s*} \widehat{\pi}_j^{s} \right\rangle = (\bar{F}_0 + k^2 \bar{F}_2) P_{ij} \; , \quad \textbf{(8.3.22)}$$

$$\left\langle \widehat{\bar{\bar{\Pi}}}{}_{ij}^{s*} \widehat{\bar{\bar{\Pi}}}{}_{kl}^{s} \right\rangle = \bar{F}_0 (P_{ik}P_{jl} + P_{il}P_{jk} - P_{ij}P_{kl}) \; , \quad \textbf{(8.3.23)}$$

where $\langle \widehat{\rho}_s^*(\eta,k^i)\widehat{\rho}_s(\eta',k'^i)\rangle = \delta(k^i - k'^i)\,\langle \widehat{\rho}_s^* \widehat{\rho}_s \rangle$ *etc*, and where $P_{ij} \equiv \delta_{ij} - k_i k_j/k^2$. All other correlators are zero so that the scalar, vector and tensor parts of $\Theta_{\mu\nu}$ fall into statistically independent sets.

We also note that *if* both $k^2\bar{F}_2$ and $k^4 F_4$ are of higher order in k than $\bar{F}_0$, then, for small k [Pen *et al.*, 1997] [Turok, 1996c]

$$\frac{1}{3}\langle \widehat{\pi}_s^* \widehat{\pi}_s \rangle \simeq \frac{1}{2}\left\langle \widehat{\pi}_i^{s*} \widehat{\pi}_s^{i} \right\rangle \simeq \frac{1}{4}\left\langle \widehat{\bar{\bar{\Pi}}}{}_{ij}^{s*} \widehat{\bar{\bar{\Pi}}}{}_{s}^{ij} \right\rangle \; . \quad \textbf{(8.3.24)}$$

3.2 Causality constraints

Since the network of defects appeared at a definite time the distribution must be, for causality reasons, completely uncorrelated on scales larger than the particle horizon. Therefore, as stressed, *e.g.*, by Turok [Turok, 1996c], the unequal time correlators are strictly zero outside the intersection of the past light-cones, that is:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta,\eta',r^i) = 0 \quad \text{if} \quad r > \eta + \eta' \; . \quad \textbf{(8.3.25)}$$

Property (**8.3.25**) translates in Fourier space into the fact that the equal time power spectra are white noise on super horizon scales (that is for $k\eta \ll 1$). Indeed, because the correlators (**8.3.25**) have compact supports their Fourier transforms are C^∞ in k^i. Therefore causality forces the fourteen functions A_0, B_1 *etc* to be C^∞ in k^2. Moreover, since within one horizon volume there are almost no defects, those fourteen functions must tend to zero on small scales, that is for $k\eta \gg 1$.

3.3 Coherence hypothesis

Any distribution of active sources such as topological defects must be homogeneous, isotropic and causal. The hypothesis of statistical coherence, that we shall now make, is stringent but motivated by the fact that any incoherent distribution can in principle be decomposed into a sum of coherent ones [Pen *et al.*, 1997].

By definition two statistically homogeneous random fields $\widehat{S}_1(\eta,k^i)$ and $\widehat{S}_2(\eta,k^i)$ are statistically coherent if their correlators factorize, that is if

$$\left\langle \widehat{S}_a^*(\eta,k^i)\widehat{S}_b(\eta',k'^i) \right\rangle = \delta(k^i - k'^i) p_a(\eta,k^i) p_b(\eta',k^i) \; , \quad \textbf{(8.3.26)}$$

for $a,b = 1,2$. For our purposes this is equivalent to saying that

$$\widehat{S}_a(\eta,k^i) = p_a(\eta,k^i) e(k^i) \; , \quad \textbf{(8.3.27)}$$

where $p_a(\eta,k^i)$ is a real function and where $e(k^i)$ is a normalized complex random field such that $\langle e^*(k^i)e(k'^i)\rangle = \delta(k^i - k'^i)$.

Let us first combine coherence and isotropy, that is (**8.3.26–8.3.27**) and (**8.3.10–8.3.23**). The four scalar components $\widehat{\rho}^{\mathrm{s}}$, $\widehat{V}^{\mathrm{s}}$, $\widehat{P}^{\mathrm{s}}$, and $\widehat{\pi}^{\mathrm{s}}$ of $\widehat{\Theta}_{\mu\nu}$ form a statistically independent set. The hypothesis (**8.3.27**) of maximal coherence implies that

$$\widehat{\rho}^{\mathrm{s}}(\eta,k^i) = p_\rho(\eta,k)e(k^i)\ , \tag{8.3.28}$$
$$\widehat{V}^{\mathrm{s}}(\eta,k^i) = p_V(\eta,k)e(k^i)\ , \tag{8.3.29}$$
$$\widehat{P}^{\mathrm{s}}(\eta,k^i) = p_P(\eta,k)e(k^i)\ , \tag{8.3.30}$$
$$\widehat{\pi}^{\mathrm{s}}(\eta,k^i) = p_\pi(\eta,k)e(k^i)\ . \tag{8.3.31}$$

Hence, out of the fourteen functions A_0, B_1 *etc* appearing in (**8.3.10–8.3.19**) ten can be expressed in terms of the four real functions p_a and the four functions (*e.g.*, D_0, $\bar{E}_1$, $\bar{F}_0$ and $\bar{F}_2$) that remain arbitrary. More precisely:

$$A_0 = p_\rho^2\ , \tag{8.3.32}$$
$$B_1 = -\,p_\rho\frac{p_V}{k}\ , \tag{8.3.33}$$
$$C_0 = p_\rho\left(p_P+\frac{1}{3}p_\pi\right)\ , \tag{8.3.34}$$
$$C_2 = -\,p_\rho\frac{p_\pi}{k^2}\ , \tag{8.3.35}$$
$$E_1 = \frac{p_V}{k}\left(p_P+\frac{1}{3}p_\pi\right)\ , \tag{8.3.36}$$
$$D_2 = \left(\frac{p_V}{k}\right)^2-\frac{D_0}{k^2}\ , \tag{8.3.37}$$
$$E_3 = -\left(\frac{p_V}{k}\right)\left(\frac{p_\pi}{k^2}\right)-2\frac{\bar{E}_1}{k^2}\ , \tag{8.3.38}$$
$$F_2 = -\frac{p_\pi}{k^2}\left(p_P+\frac{1}{3}p_\pi\right)+\frac{\bar{F}_0}{k^2}\ , \tag{8.3.39}$$
$$F_0 = \left(p_P+\frac{1}{3}p_\pi\right)^2-\bar{F}_0\ , \tag{8.3.40}$$
$$F_4 = \left(\frac{p_\pi}{k^2}\right)^2-3\frac{\bar{F}_0}{k^4}-4\frac{\bar{F}_2}{k^2}\ . \tag{8.3.41}$$

The four vector components $\widehat{\bar{v}}_i^{\mathrm{s}}$ and $\widehat{\bar{\pi}}_i^{\mathrm{s}}$ of $\widehat{\Theta}_{\mu\nu}$ form yet another statistically independent set. In order to obey (**8.3.27**) as well as (**8.3.20–8.3.22**) they must fall into two independent subsets corresponding to two different polarizations. Hence we shall write them as

$$\widehat{\bar{v}}_i^{\mathrm{s}}(\eta,k^i) = p_{\bar{v}}(\eta,k)\bar{e}_i(k^i)\ , \tag{8.3.42}$$
$$\widehat{\bar{\pi}}_i^{\mathrm{s}}(\eta,k^i) = p_{\bar{\pi}}(\eta,k)\bar{e}_i(k^i)\ , \tag{8.3.43}$$
$$\bar{e}_i(k^i) \equiv l_i e_l(k^i)+m_i e_m(k^i)\ , \tag{8.3.44}$$

where $\left\langle \bar{e}_A^*(k'^i)\bar{e}_B(k^i)\right\rangle = \delta_{AB}\delta(k'^i-k^i)$ with A,B standing for l or m, and where l^i and m^i form with k^i/k an orthonormal basis (so that $P_{ij}=l_il_j+m_im_j$). Hence two of the three previously free functions D_0, $\bar{E}_1$ and $\bar{F}_0$ can be expressed in terms of the two real functions $p_{\bar{V}}$ and $p_{\bar{\Pi}}$ as [see

(**8.3.20–8.3.22**)]

$$D_0 = p_{\bar{v}}^2 \; , \tag{8.3.45}$$

$$\bar{E}_1 = -\frac{p_{\bar{v}}}{k} p_{\bar{\pi}} \; , \tag{8.3.46}$$

$$\bar{F}_0 = p_{\bar{\pi}}^2 - k^2 \bar{F}_2 \; . \tag{8.3.47}$$

Finally the two tensor components $\hat{\bar{\bar{\Pi}}}{}^{\rm s}_{ij}$ of $\widehat{\Theta}_{\mu\nu}$ form a third statistically independent set. In order to obey (**8.3.23**) they cannot be coherent but, on the contrary, independent of each other. Hence we shall write them as

$$\hat{\bar{\bar{\Pi}}}{}^{\rm s}_{ij}(\eta, k^i) = p_T(\eta, k) \bar{\bar{e}}_{ij}(k^i) \; , \tag{8.3.48}$$

$$\bar{\bar{e}}_{ij}(k^i) \equiv l_{ij} e_+(k^i) + m_{ij} e_\times(k^i) \; , \tag{8.3.49}$$

where $l_{ij} \equiv l_i l_j - m_i m_j$ and $m_{ij} \equiv l_i m_j + l_j m_i$ are the two polarization tensors, where the two variables $e_{+,\times}(k^i)$ are such that $\left\langle e_A^*(k'^i) e_B(k^i) \right\rangle = \delta_{AB} \delta(k'^i - k^i)$ with A, B standing for $+$ or $\times$, and where [see Eqns (**8.3.23**)]

$$\bar{F}_0 = p_T^2 \; . \tag{8.3.50}$$

In conclusion combining coherence and isotropy reduces the number of free functions from fourteen to seven: $p_\rho, p_V, p_P, p_\pi, p_{\bar{v}}, p_{\bar{\pi}}$ and p_T.

Let us add now the causality constraint which states that the fourteen functions A_0, B_1 *etc* must be C^∞ in k^2. It implies [see (**8.3.32**)] that p_ρ , p_V/k , p_P and p_π/k^2 are C^∞. This in turn implies [see Eqns (**8.3.37–8.3.41**)] that D_0/k^2, $\bar{E}_1/k^2$, $\bar{F}_2/k^2$ and $\bar{F}_0/k^4$ are analytic as well, and therefore, from (**8.3.45**), $p_{\bar{v}}/k$ and $p_{\bar{\pi}}/k^2$ are C^∞. Finally, from (**8.3.50**), p_T is also C^∞.

An immediate consequence of this regularity requirement is that

$$\langle \widehat{\pi}_{\rm s}^* \widehat{\pi}_{\rm s} \rangle = p_\pi^2 = \mathcal{O}(k^4) \; , \tag{8.3.51}$$

$$\left\langle \widehat{\bar{\pi}}{}^{\rm s*}_i \widehat{\bar{\pi}}{}^i_{\rm s} \right\rangle = 2 p_{\bar{\pi}}^2 = \mathcal{O}(k^4) \; , \tag{8.3.52}$$

$$\left\langle \hat{\bar{\bar{\Pi}}}{}^{\rm s*}_{ij} \hat{\bar{\bar{\Pi}}}{}^{ij}_{\rm s} \right\rangle = 4 p_T^2 = \mathcal{O}(k^4) \; , \tag{8.3.53}$$

so that, contrary to the general case (**8.3.24**), the anisotropic stress correlators of coherent defects (when $p_\pi \neq p_{\bar{\pi}} \neq p_T$) are not in a definite ratio for small k.

A question that can be asked is how can a sum of coherent defects (with anisotropic stress correlators of order k^4) leads to an incoherent defect (with anisotropic stress correlator of order k^0). In a paper to be submitted [Riazuelo & Deruelle, 2000b], we show explicitely how the k^0-behavior of incoherent defects can be obtained as a (infinite) sum of k^4-behaving coherent defects. We also show how the causality constraints fade away in the process and how the procedure introduces almost no extra arbitrariness.

3.4 Scaling hypothesis

We shall now make the other assumption that, as long as the evolution of the universe is described by a single scale (to wit the Hubble radius $\mathcal{H}^{-1}$), that is deep in the radiation era and deep in the matter era but not during the transition, the dimensionless quantities $\Theta^{\nu}_{\mu}/\rho_t$ are scale invariant, that is such that

$$C_{\mu\nu\mu\nu}(\eta,\eta,r^i) = \mathcal{H}^4 F_{\mu\nu}(r^i\mathcal{H}) \,, \tag{8.3.54}$$

(using the fact that $\kappa a^2 \rho_t \propto \mathcal{H}^2$ in both eras). This assumption is supported by a number of numerical simulations [Bennett & Bouchet, 1988] [Sakellariadou & Vilenkin, 1988] [Sakellariadou & Vilenkin, 1990] [Pen *et al.*, 1994] [Crittenden & Turok, 1995] [Allen *et al.*, 1996] [Durrer & Zhou, 1996] [Durrer *et al.*, 1996] [Allen *et al.*, 1997] [Durrer & Sakellariadou, 1997] [Durrer & Kunz, 1998] as well as qualitative arguments [Bray, 1990] [Durrer & Zhou, 1996] [Durrer *et al.*, 1996] [Durrer & Sakellariadou, 1997] [Durrer & Kunz, 1998]. In Fourier space this hypothesis translates as

$$P_{\mu\nu\mu\nu}(\eta,\eta,k^i) = (2\pi)^{3/2}\mathcal{H}\widehat{F}_{\mu\nu}(k^i/\mathcal{H}) \,. \tag{8.3.55}$$

This implies [see (**8.3.4–8.3.20**)] that the functions $A_0/\mathcal{H}$, $D_0/\mathcal{H}$, $F_0/\mathcal{H}$, $\bar{F}_0/\mathcal{H}$ on one hand, $D_2\mathcal{H}$, $F_2\mathcal{H}$, $\bar{F}_2\mathcal{H}$ on another and finally $F_4\mathcal{H}^3$ are all functions of $k/\mathcal{H}$ only (when $\eta=\eta'$). From Eqns (**8.3.10–8.3.23**) one then obtains the behavior of the equal time correlators $\langle\widehat{\rho}_{\rm s}^*\widehat{\rho}_{\rm s}\rangle$, $\left\langle\widehat{V}_{\rm s}^*\widehat{V}_{\rm s}\right\rangle$, $\left\langle\widehat{P}_{\rm s}^*\widehat{P}_{\rm s}\right\rangle$, $\langle\widehat{\pi}_{\rm s}^*\widehat{\pi}_{\rm s}\rangle$, $\left\langle\widehat{\bar{v}}^{{\rm s}*}_i\widehat{\bar{v}}^{\rm s}_j\right\rangle$, $\left\langle\widehat{\bar{\pi}}^{{\rm s}*}_i\widehat{\bar{\pi}}^{\rm s}_j\right\rangle$ and $\left\langle\widehat{\bar{\bar{\Pi}}}{}^{{\rm s}*}_{ij}\widehat{\bar{\bar{\Pi}}}{}^{\rm s}_{kl}\right\rangle$. Combining this scaling hypothesis with the one of coherence implies [see Eqns (**8.3.32–8.3.41**)] that all seven $p_a/\sqrt{\mathcal{H}}$ are functions of $k/\mathcal{H}$ only.

Therefore, all in all, coherent defects, which scale during the radiation and matter dominated eras, which are causal and statistically homogeneous and isotropic, are described by the following random variables:

$$\widehat{\rho}^{\rm s} = \sqrt{h}\, f_1(q/h,x)\, e(q^i) \,, \tag{8.3.56}$$
$$\widehat{P}^{\rm s} = \sqrt{h}\, f_2(q/h,x)\, e(q^i) \,, \tag{8.3.57}$$
$$\widehat{V}^{\rm s} = -\frac{q}{\sqrt{h}}\, f_3(q/h,x)\, e(q^i) \,, \tag{8.3.58}$$
$$\widehat{\pi}^{\rm s} = \frac{q^2}{h^{3/2}}\, f_4(q/h,x)\, e(q^i) \,, \tag{8.3.59}$$
$$\widehat{\bar{v}}^{\rm s}_i = \frac{q}{\sqrt{h}}\, f_5(q/h,x)\, \bar{e}_i(q^i) \,, \tag{8.3.60}$$
$$\widehat{\bar{\pi}}^{\rm s}_i = \frac{q^2}{h^{3/2}}\, f_6(q/h,x)\, \bar{e}_i(q^i) \,, \tag{8.3.61}$$
$$\widehat{\bar{\bar{\Pi}}}{}^{\rm s}_{ij} = \frac{q^2}{h^{3/2}}\, f_7(q/h,x)\, \bar{\bar{e}}_{ij}(q^i) \,, \tag{8.3.62}$$

where we have reintroduced the dimensionless quantities $x \equiv a/a_0$, $h \equiv \mathcal{H}/\mathcal{H}_0$ and $q^i \equiv k^i/\mathcal{H}_0$, and where the seven dimensionless functions $f_a(q/h,x)$ depend only on q/h deep in the radiation or matter eras, tend to constants on super-horizon scale (that is for $k\eta \propto q/h \ll 1$) and to zero on small scales.

3.5 Conservation laws and loss of scaling invariance during the radiation to matter dominated transition

When the defects are described by Eqns (**8.3.56–8.3.62**) the conservation equations (**8.2.23–8.2.25**) become

$$\frac{1}{2}(1+3\omega)u\frac{\partial f_3}{\partial u}+x\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{3}{4}(3+\omega)f_3 = f_2-\frac{2}{3}u^2 f_4\ , \qquad \mathbf{(8.3.63)}$$

$$\frac{1}{2}(1+3\omega)u\frac{\partial f_1}{\partial u}+x\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{3}{4}(1-\omega)f_1 = -3f_2-u^2 f_3\ , \qquad \mathbf{(8.3.64)}$$

$$\frac{1}{2}(1+3\omega)u\frac{\partial f_5}{\partial u}+x\frac{\partial f_5}{\partial x}+\frac{3}{4}(3+\omega)f_5 = u^2 f_6\ , \qquad \mathbf{(8.3.65)}$$

where we have introduced

$$u \equiv q/h\ , \qquad \mathbf{(8.3.66)}$$

$$\omega \equiv \frac{1}{3}\frac{\Omega^0_{\rm rad}}{\Omega^0_{\rm rad}+x\Omega^0_{\rm mat}}\ . \qquad \mathbf{(8.3.67)}$$

Deep in the radiation or matter eras $\omega \to 1/3$ or 0, and scaling solutions independent of x are readily found for f_2, f_4 and f_6 in terms of the four free functions f_1, f_3 and f_5. During the transition from the radiation to matter dominated eras, scaling is lost. How can this loss of scaling be modeled, and how is the final result dependent on this modelization?

Two different approaches have been followed:

1. Durrer *et al.* [Durrer & Zhou, 1996] [Durrer *et al.*, 1996] [Durrer & Sakellariadou, 1997] [Durrer & Kunz, 1998] used a "sudden transition" approximation in which $\omega = 1/3$ until $x = x_{\rm eq}$ and $\omega = 0$ afterwards. The problem here is that the functions f_a cannot all be continuous at $x = x_{\rm eq}$ and that energy momentum conservation is violated during the transition[5].

2. Turok [Turok, 1996c], Hu *et al.* [Hu *et al.*, 1997a], Cheung and Magueijo [Cheung & Magueijo, 1998] fix the time dependence of two source functions and determine the other two by integrating (**8.3.63–8.3.65**).

We follow a route similar to 2., which also amounts to making fairly artificial ansätze but which guarantees that the conservation equations are exactly satisfied: we first impose

$$f_1 = \mathcal{F}(u)\ , \qquad \mathbf{(8.3.68)}$$

$$f_3 = \tilde{f}_3(u)g(x)\ , \qquad \mathbf{(8.3.69)}$$

$$f_5 = \tilde{f}_5(u)p(x)\ , \qquad \mathbf{(8.3.70)}$$

$$f_7 = \mathcal{Q}(u)\ . \qquad \mathbf{(8.3.71)}$$

It then follows from (**8.3.63–8.3.65**) that

$$\tilde{f}_3(u) = -\frac{(1-\omega)\mathcal{F}}{3(3+\omega)g+4x\mathrm{d}g/\mathrm{d}x}+u^2\mathcal{G}(u,x)\ , \qquad \mathbf{(8.3.72)}$$

$$\tilde{f}_5(u) = \frac{u^2\mathcal{P}(u,x)}{3(3+\omega)p+4x\mathrm{d}p/\mathrm{d}x}\ , \qquad \mathbf{(8.3.73)}$$

[5] Note added in proof: In Durrer *et al.* [Durrer *et al.*, 1999a], the loss of scaling is taken into account by interpolating the source functions computed respectively in the radiation and matter era. The fit is performed by using either the function $t_{\rm eq}/(t+t_{\rm eq})$ or $exp(-t/t_{\rm eq})$ and the results do not depend too much on this interpolation. However, energy conservation is still violated during the transition.

where $\mathcal{G}(u,x)$ and $\mathcal{P}(u,x)$ are some functions, C^∞ in u^2, that we impose to depend on u only

$$\mathcal{G}(u,x) = \mathcal{G}(u)\ , \quad \mathcal{P}(u,x) = \mathcal{P}(u)\ . \qquad \textbf{(8.3.74)}$$

This implies that $g(x)$ and $p(x)$ satisfy the following differential equations

$$(3+\omega)g + \frac{4}{3}x\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = 1-\omega\ , \qquad \textbf{(8.3.75)}$$

$$(3+\omega)p + \frac{4}{3}x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 1 \qquad \textbf{(8.3.76)}$$

(up to irrelevant overall constants), with ω given by (**8.3.67**) and $\lim_{x\to 0} g(x) = 1/5$, $\lim_{x\to 0} p(x) = 3/10$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 1/3$). We hence arrive at the following expressions for the seven functions f_a in terms of the four arbitrary C^∞ functions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{G}(u)$, $\mathcal{P}(u)$ and $\mathcal{Q}(u)$, with $g(x)$ and $p(x)$ being given by (**8.3.75–8.3.76**):

$$f_1 = \mathcal{F}\ , \qquad \textbf{(8.3.77)}$$

$$f_2 = -\frac{1}{4}(1-\omega)\mathcal{F} - \frac{1}{6}(1+3\omega)u\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}u} + \frac{u^2}{9}g\mathcal{F} - \frac{u^4}{3}g\mathcal{G}\ , \qquad \textbf{(8.3.78)}$$

$$f_3 = \left[-\frac{1}{3}\mathcal{F} + u^2\mathcal{G}\right]g\ , \qquad \textbf{(8.3.79)}$$

$$\begin{aligned} f_4 = {} & \frac{1}{4}(1+3\omega)\left[(g-1)\frac{1}{u}\frac{\mathcal{F}}{\mathrm{d}u} - 6\mathcal{G}g - 3gu\frac{\mathrm{d}\mathcal{G}}{\mathrm{d}u}\right] \\ & + \frac{1}{6}g\mathcal{F} - \frac{9}{8}(1-\omega)\mathcal{G} - \frac{u^2}{2}\mathcal{G}g\ , \end{aligned} \qquad \textbf{(8.3.80)}$$

$$f_5 = \frac{1}{3}u^2\mathcal{P}p\ , \qquad \textbf{(8.3.81)}$$

$$f_6 = \left[\frac{1}{4} + (1+3\omega)\frac{p}{3}\right]\mathcal{P} + \frac{1}{6}(1+3\omega)pu\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}u}\ , \qquad \textbf{(8.3.82)}$$

$$f_7 = \mathcal{Q}\ . \qquad \textbf{(8.3.83)}$$

In conclusion, we note that in our model both components of the defects stress-energy tensor are generically present, in contrary to, *e.g.*, the "pressure model" or the "anisotropic stress model" [Hu *et al.*, 1997a] [Cheung & Magueijo, 1998].

4 Initial conditions

The set of equations (**8.2.29–8.2.41**) with the defects described by Eqns (**8.3.56–8.3.62**) and (**8.3.77–8.3.83**) will be solved numerically. However, deep in the radiation era when all scales of cosmological interest today were larger than the Hubble radius, an analytic solution exists, which is easily found when adding to the set (**8.2.29–8.2.41**) the Einstein equations for scalar perturbations which we had not included because they were redundant (by virtue of the Bianchi identities). Those two extra equations can be written as:

$$x\frac{\mathrm{d}\widehat{\Psi}}{\mathrm{d}x} = -\widehat{\Phi} - \frac{\widehat{V}^{\mathrm{s}}}{2qh} - \frac{1}{2qhx^2}[4(\Omega_\nu^0\widehat{V}_\nu + \Omega_\gamma^0\widehat{V}_\gamma) + 3x(\Omega_{\mathrm{b}}^0\widehat{V}_{\mathrm{b}} + \Omega_{\mathrm{c}}^0\widehat{V}_{\mathrm{c}})]\,, \tag{8.4.1}$$

$$\begin{aligned}(\Omega_{\mathrm{rad}}^0 + x\Omega_{\mathrm{mat}}^0)\frac{\mathrm{d}^2\widehat{\Psi}}{\mathrm{d}x^2} =& -\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}\widehat{\Psi}}{\mathrm{d}x}\left(4\Omega_{\mathrm{rad}}^0 + \frac{9}{2}x\Omega_{\mathrm{mat}}^0\right) - \frac{\widehat{\Psi}}{x}\left(\frac{5}{2}\Omega_{\mathrm{mat}}^0 + \frac{1}{3}q^2x\right)\\ &+ \frac{1}{q^2x}\left[\frac{\mathrm{d}\widehat{\pi}^{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}x}(\Omega_{\mathrm{rad}}^0 + x\Omega_{\mathrm{mat}}^0) + \Omega_{\mathrm{mat}}^0\widehat{\pi}^{\mathrm{s}}\right] - \left(\frac{\widehat{\pi}^{\mathrm{s}}}{3} + \frac{\widehat{\rho}^{\mathrm{s}}}{6} - \frac{\widehat{P}^{\mathrm{s}}}{2}\right)\\ &- \frac{1}{2x}(\Omega_{\mathrm{b}}^0\widehat{\delta}_{\mathrm{b}}^\flat + \Omega_{\mathrm{c}}^0\widehat{\delta}_{\mathrm{c}}^\flat)\,.\end{aligned} \tag{8.4.2}$$

Deep in the radiation era, when $x\Omega_{\mathrm{mat}}^0 \ll \Omega_{\mathrm{rad}}^0$, $hx \simeq \sqrt{\Omega_{\mathrm{rad}}^0}$ and $x \propto \eta$. The wavelengths we are interested in are then much bigger than the Hubble radius: $q/h \ll 1$, that is $q^2x^2 \ll \Omega_{\mathrm{rad}}^0$ (or $u^2 \ll 1$). In that regime the conservation equations for the defects [Eqns (**8.3.77–8.3.83**)] yield that the functions f_a are constants such that

$$f_1 = -6f_2 + \mathcal{O}(u^2)\,, \tag{8.4.3}$$

$$f_3 = \frac{2}{5}f_2 + \mathcal{O}(u^2)\,, \tag{8.4.4}$$

$$f_5 = \frac{2}{9}u^2 f_6 + \mathcal{O}(u^4)\,. \tag{8.4.5}$$

Let us first solve the equations for the scalar perturbations. The conservation equations for the fluids (**8.2.29**, **8.2.32**, **8.2.35–8.2.37**) impose that in the long wavelength limit all the density perturbations $\widehat{\delta}_n^\flat$ are constant, that is random variables independent of time.

$$\widehat{\delta}_\nu^\flat \simeq \widehat{\delta}_\nu^{\flat\,\mathrm{in}}\,, \tag{8.4.6}$$

$$\widehat{\delta}_{\mathrm{c}}^\flat \simeq \widehat{\delta}_{\mathrm{c}}^{\flat\,\mathrm{in}}\,, \tag{8.4.7}$$

$$\widehat{\delta}_{\mathrm{b}}^\flat \simeq \widehat{\delta}_{\mathrm{b}}^{\flat\,\mathrm{in}}\,, \tag{8.4.8}$$

$$\widehat{\delta}_\gamma^\flat \simeq \widehat{\delta}_\gamma^{\flat\,\mathrm{in}}\,, \tag{8.4.9}$$

where $\simeq$ means deep in the radiation era and up to terms of order u^2. Equation (**8.4.2**) for $\widehat{\Psi}$ is therefore a closed equation in that regime. Its solution is

$$\widehat{\Psi} \simeq \left[\widehat{\Psi}_0 + \frac{\widehat{\Psi}_1}{x^3} + \frac{2}{9}x^{3/2}(\tilde{f}_4 + \tilde{f}_2)e(q^i) - \frac{\widehat{\delta}_{\mathrm{mat}}^{\flat\,\mathrm{in}}}{8\Omega_{\mathrm{rad}}^0}x\right]\,, \tag{8.4.10}$$

$$\widehat{\delta}_{\mathrm{mat}}^{\flat\,\mathrm{in}} \equiv \Omega_{\mathrm{b}}^0\widehat{\delta}_{\mathrm{b}}^{\flat\,\mathrm{in}} + \Omega_{\mathrm{c}}^0\widehat{\delta}_{\mathrm{c}}^{\flat\,\mathrm{in}}\,, \tag{8.4.11}$$

where $\widehat{\Psi}_0$ and $\widehat{\Psi}_1$ are two integration constant random variables and where we have set $\tilde{f}_a \equiv {\Omega_{\mathrm{rad}}^0}^{-3/4}\lim_{u\to 0} f_a$. The perturbation $\widehat{\Phi}$ then follows from Eq. (**8.2.39**)

$$\widehat{\Phi} \simeq \left[\widehat{\Psi}_0 + \frac{\widehat{\Psi}_1}{x^3} + \frac{1}{9}x^{3/2}(2\tilde{f}_2 - 7\tilde{f}_4)e(q^i) - \frac{\widehat{\delta}_{\mathrm{mat}}^{\flat\,\mathrm{in}}}{8\Omega_{\mathrm{rad}}^0}x\right]\,. \tag{8.4.12}$$

The Euler equations (**8.2.29**, **8.2.32**, **8.2.35–8.2.37**) then give the velocity perturbations of the fluids

$$\frac{\widehat{V}_\nu}{q} \simeq \frac{\widehat{V}_\nu^{\rm in}}{q} - \frac{1}{\sqrt{\Omega^0_{\rm rad}}}\left[\left(\frac{1}{4}\widehat{\delta}_\nu^{\flat\,\rm in} + 2\widehat{\Psi}_0\right)x - \frac{\widehat{\Psi}_1}{x^2} + \frac{2}{45}x^{5/2}(4\tilde{f}_2 - 5\tilde{f}_4)e(q^i) - \frac{\widehat{\delta}^{\flat\,\rm in}_{\rm mat}}{8\Omega^0_{\rm rad}}x^2\right]\,, \quad (\mathbf{8.4.13})$$

$$\frac{\widehat{V}_{\rm c}}{q} \simeq \frac{\widehat{V}_{\rm c}^{\rm in}}{xq} - \frac{1}{\sqrt{\Omega^0_{\rm rad}}}\left[\frac{\widehat{\Psi}_0}{2}x - \frac{\widehat{\Psi}_1}{x^2} + \frac{2}{63}x^{5/2}(2\tilde{f}_2 - 7\tilde{f}_4)e(q^i) - \frac{\widehat{\delta}^{\flat\,\rm in}_{\rm mat}}{24\Omega^0_{\rm rad}}x^2\right]\,, \quad (\mathbf{8.4.14})$$

$$\frac{\widehat{V}_{\rm b}}{q} = \frac{\widehat{V}_\gamma}{q} \simeq \frac{\widehat{V}_\gamma^{\rm in}}{q} - \frac{1}{\sqrt{\Omega^0_{\rm rad}}}\left[\left(\frac{1}{4}\widehat{\delta}_\gamma^{\flat\,\rm in} + 2\widehat{\Psi}_0\right)x - \frac{\widehat{\Psi}_1}{x^2} + \frac{2}{45}x^{5/2}(4\tilde{f}_2 - 5\tilde{f}_4)e(q^i) - \frac{\widehat{\delta}^{\flat\,\rm in}_{\rm mat}}{8\Omega^0_{\rm rad}}x^2\right]\,, \quad (\mathbf{8.4.15})$$

where $\widehat{V}_\nu^{\rm in}$, $\widehat{V}_{\rm c}^{\rm in}$ and $\widehat{V}_\gamma^{\rm in}$ are constants of integration. The nine integration constants introduced (the four density perturbations $\widehat{\delta}_n^{\flat\,\rm in}$, $\widehat{\Psi}_0$, $\widehat{\Psi}_1$ and the three initial velocity perturbations $\widehat{V}_n^{\rm in}$) are constrained by the remaining equations (**8.4.1**) and (**8.2.38**)

$$\widehat{\Psi}_0 = -\frac{1}{6\Omega^0_{\rm rad}}(\Omega^0_\gamma\widehat{\delta}_\gamma^{\flat\,\rm in} + \Omega^0_\nu\widehat{\delta}_\nu^{\flat\,\rm in})\,, \quad (\mathbf{8.4.16})$$

$$\widehat{V}_\nu^{\rm in} = -\widehat{V}_\gamma^{\rm in}\,, \quad (\mathbf{8.4.17})$$

so that the system depends on seven integration constants as requested.

Solving the equations for the vector perturbations, deep in the radiation era and for long wavelengths, is straightforward. The conservations equations (**8.2.29**, **8.2.32**, **8.2.35–8.2.37**) yield

$$\widehat{\bar{v}}^i_\nu = \widehat{\bar{v}}^{i\,\rm in}_\nu\,, \quad (\mathbf{8.4.18})$$

$$\widehat{\bar{v}}^i_{\rm c} = \frac{\widehat{\bar{v}}^{i\,\rm in}_{\rm c}}{x}\,, \quad (\mathbf{8.4.19})$$

$$\widehat{\bar{v}}^i_{\rm b} = \widehat{\bar{v}}^i_\gamma = \widehat{\bar{v}}^{i\,\rm in}_\gamma\,, \quad (\mathbf{8.4.20})$$

where $\widehat{\bar{v}}^{i\,\rm in}_n$ are three constant vectors orthogonal to k^i, and Eq. (**8.2.40**) gives

$$\widehat{\bar{\Phi}}^i \simeq \frac{\widehat{\bar{\Phi}}^i_0}{x^2} + \frac{\widehat{\bar{\Phi}}^i_1}{x} + \frac{4}{9}\frac{q}{\sqrt{\Omega^0_{\rm rad}}}x^{5/2}\tilde{f}_6\bar{e}^i(q^i)\,, \quad (\mathbf{8.4.21})$$

with $\widehat{\bar{\Phi}}^i_0 \equiv (2/q^2)[3\Omega^0_{\rm c}\widehat{\bar{v}}^{i\,\rm in}_{\rm c} + 4(\Omega^0_\gamma\widehat{\bar{v}}^{i\,\rm in}_\gamma + \Omega^0_\nu\widehat{\bar{v}}^{i\,\rm in}_\nu)]$, and $\widehat{\bar{\Phi}}^i_1 \equiv 6\Omega^0_{\rm b}\widehat{\bar{v}}^{i\,\rm in}_\gamma/q^2$.

Finally the tensor perturbations solve Eq. (**8.2.41**) [with $\widehat{\bar{\bar{\Pi}}}{}^{\rm s}_{ij}$ given by (**8.3.62**)]:

$$\widehat{\bar{\bar{E}}}{}^{ij} \simeq \widehat{\bar{\bar{E}}}{}^{ij}_0 + \frac{\widehat{\bar{\bar{E}}}{}^{ij}_1}{x} + \frac{4}{63}\frac{q^2}{\Omega^0_{\rm rad}}x^{7/2}\tilde{f}_7\bar{\bar{e}}^{ij}(q^i)\,, \quad (\mathbf{8.4.22})$$

where $\widehat{\bar{\bar{E}}}{}^{ij}_0$ and $\widehat{\bar{\bar{E}}}{}^{ij}_1$ are two constant traceless tensors orthogonal to k^i.

The solution we have obtained is valid deep in the radiation era, for wavelengths larger than the Hubble radius, but late enough so that the baryons and CDM are non-relativistic. At the epoch of the phase transition which gave rise to the defects all the matter was relativistic and the solution (given in [Deruelle *et al.*, 1997]) is (**8.4.6–8.4.22**) where one sets $\Omega_{\rm b}^0 = \Omega_{\rm c}^0 = \Omega_\nu^0 = 0$ and $\Omega_\gamma^0 \equiv \Omega_{\rm rad}^0 = 1$. As shown in [Deruelle *et al.*, 1997], the simple fact that the defects suddenly appear in an up to then perfectly homogeneous and isotropic universe in such a way that the standard general relativistic matching conditions are satisfied determines some of the constants of integration in terms of the $\tilde{f}_a$. More precisely, two of the seven integration constants which appear in the scalar perturbation set, one of the three integration constant vectors for the vector set and the two integration constant tensors for the tensor set are determined by these matching conditions (see [Deruelle *et al.*, 1997] for details). The other constants must be fixed by the physics at the epochs when the baryons and CDM become non-relativistic. For example, if one assumes that the transition is sudden and occurs on a hypersurface of constant density then (see [Deruelle *et al.*, 1997]) Ψ must be continuous and therefore $\delta^\flat_{m\rm in} = 0$.

It turns out however that almost all those initial conditions which fix the integration constants are "forgotten" at late times, that is long enough after the transitions. This is clearly seen for all the metric perturbations and the scalar velocity perturbations. Indeed, asymptotically [see Eqns (**8.4.10–8.4.15**, **8.4.21–8.4.22**)].

$$\widehat{\Psi} \rightarrow \frac{2}{9} x^{3/2} (\tilde{f}_4 + \tilde{f}_2) e(q^i) \,, \tag{8.4.23}$$

$$\widehat{\Phi} \rightarrow \frac{1}{9} x^{3/2} (2\tilde{f}_2 - 7\tilde{f}_4) e(q^i) \,, \tag{8.4.24}$$

$$\widehat{\bar{\Phi}}_i \rightarrow \frac{4}{9} \frac{q}{\sqrt{\Omega_{\rm rad}^0}} x^{5/2} \tilde{f}_6 \bar{e}_i(q^i) \,, \tag{8.4.25}$$

$$\widehat{\bar{\bar{E}}}_{ij} \rightarrow \frac{4}{63} \frac{q^2}{\Omega_{\rm rad}^0} x^{7/2} \tilde{f}_7 \bar{\bar{e}}_{ij}(q^i) \,, \tag{8.4.26}$$

$$\widehat{V}_\nu \rightarrow \widehat{V}_{\rm b} = \widehat{V}_\gamma \rightarrow \frac{2}{45} \frac{q}{\sqrt{\Omega_{\rm rad}^0}} x^{5/2} (4\tilde{f}_2 - 5\tilde{f}_4) e(q^i) \,, \tag{8.4.27}$$

$$\widehat{V}_{\rm c} \rightarrow -\frac{2}{63} \frac{q}{\sqrt{\Omega_{\rm rad}^0}} x^{5/2} (2\tilde{f}_2 - 7\tilde{f}_4) e(q^i) \,. \tag{8.4.28}$$

In order now to obtain the asymptotic behaviors of the scalar density perturbations one must solve the equations at next order in q. This is easily done: injecting the asymptotic expressions (**8.4.27–8.4.28**) for the scalar velocity perturbations into the conservation equations (**8.2.29**, **8.2.32**, **8.2.35–8.2.37**) one gets

$$\widehat{\delta}^\flat_\nu \rightarrow \widehat{\delta}^\flat_\gamma \rightarrow \frac{4}{3} \widehat{\delta}^\flat_{\rm b} \rightarrow -\frac{16}{945} \frac{q^2}{\Omega_{\rm rad}^0} (4\tilde{f}_2 - 5\tilde{f}_4) x^{7/2} e(q^i) \,, \tag{8.4.29}$$

$$\widehat{\delta}^\flat_{\rm c} \rightarrow -\frac{4}{441} \frac{q^2}{\Omega_{\rm rad}^0} (2\tilde{f}_2 - 7\tilde{f}_4) x^{7/2} e(q^i) \,. \tag{8.4.30}$$

Finally the solutions (**8.4.18–8.4.20**) hold for all wavelengths so that the initial conditions for the vector velocity perturbations are not "forgotten" in the evolution (apart from $\widehat{v}^i_{\rm c}$). We shall take (rather arbitrarily)

$$\widehat{v}^{i\,{\rm in}}_n = 0 \,. \tag{8.4.31}$$

In conclusion, we shall start the numerical integration of the set (**8.2.29–8.2.41**) with the initial conditions (**8.4.23–8.4.31**), at $x = x_{\rm in}$ (in practice $x_{\rm in} = 10^{-9}$), for various sets of the constants f_2,

f_4, f_6 and f_7 (which will depend on our choices for the functions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{G}(u)$, $\mathcal{P}(u)$ and $\mathcal{Q}(u)$ which describe the defects [see Eqns (**8.3.77–8.3.83**)]), and all relevant values of q (in practice $5\times 10^{-2} < q < 5\times 10^{2}$, which corresponds to wavelengths from ten times to one thousandth of the horizon size today).

An important point to note is that all scalar perturbations, collectively called $\widehat{S}(\eta, k^i)$, are proportional to the same random variable $e(k^i)$ such that $\langle e^*(k'^i)e(k^i)\rangle = \delta(k'^i - k^i)$, and can be written as

$$\widehat{S}(k^i) = \tilde{S}(k)e(k^i)\,, \tag{8.4.32}$$

where $\tilde{S}$ is a function of k only which is entirely determined once the two functions $f_1(u)$ and $\mathcal{G}(u)$ describing the scalar components of the defects are known. As for the vector perturbations, collectively called $\widehat{\bar{V}}_i(k^i)$, they can be written as

$$\widehat{\bar{V}}_i(k^i) = \tilde{\bar{V}}(k)\bar{e}_i(k^i)\,, \tag{8.4.33}$$

with [see (**8.3.42**)] $\langle \bar{e}_i^*(k'^i)\bar{e}_k(k^i)\rangle = \delta(k'^i - k^i)P_{ik}$. Finally the tensor perturbations, collectively called $\widehat{\bar{\bar{T}}}_{ij}(k^i)$, can be written as

$$\widehat{\bar{\bar{T}}}_{ij}(k^i) = \tilde{\bar{\bar{T}}}(k)\bar{\bar{e}}_{ij}(k^i)\,, \tag{8.4.34}$$

with [see (**8.3.48**)] $\left\langle \bar{\bar{e}}_{ij}^*(k'^i)\bar{\bar{e}}_{kl}(k^i)\right\rangle = \delta(k'^i - k^i)(P_{ik}P_{jl} + P_{il}P_{jk} - P_{ij}P_{kl})$. The functions $\tilde{\bar{V}}(k)$ and $\tilde{\bar{\bar{T}}}(k)$ are entirely determined once the functions $\mathcal{P}(u)$ and $\mathcal{Q}(u)$ describing the vector and tensor components of the defects are known.

5 The correlation function of the microwave background anisotropies

The energy of a microwave background photon in the direction $\hat{\gamma}^i$, as measured by an observer 0 at x_0^μ is: $E^0_{\hat{\gamma}} = -(g_{\mu\nu}K^\mu u^\nu)|_0$ where $g_{\mu\nu}|_0$ is the metric (**8.2.14**) evaluated at x_0^μ, $K^\mu|_0$ (with $g_{\mu\nu}K^\mu K^\nu = 0$) is the wave vector of the photon at x_0^μ and $u^\nu|_0$ (with $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$) is the velocity vector of the observer 0. $E^0_{\hat{\gamma}}$ depends on $K^0|_0$, on the direction of observation $\hat{\gamma}^i \equiv -(K^i/|K|)_0$ and the position and velocity of the observer O. Assuming that the photon has followed a null geodesic (no-collision hypothesis) since it has decoupled from the baryons on a surface of constant electronic density or, almost equivalently, constant photon density, it is a standard calculation (see, *e.g.*, [Panek, 1986] for a detailed derivation) to relate $E^0_{\hat{\gamma}}$ to $E^{\rm dec} = -(g_{\mu\nu}K^\mu u_{\rm b}^\nu)|_{\rm dec}$, its energy at decoupling, which is independent of $\hat{\gamma}^i$ when "measured" by an observer comoving with the baryons. The result is

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\hat{\gamma}} \equiv \frac{E^0_{\hat{\gamma}} - \bar{E}^0}{\bar{E}^0} &= -\left[\Phi + \frac{1}{4}\delta_\gamma - \hat{\gamma}^i\,(\partial_i v + \bar{v}_i)\right]_0 \\ &+ \left[\Phi + \frac{1}{4}\delta_\gamma - \hat{\gamma}^i\,(\partial_i v_{\rm b} + \bar{v}_{i\,\rm b})\right]_{\rm dec} + \int_{\eta_{\rm dec}}^{\eta_0}\left(\dot{\Phi} + \dot{\Psi} - \hat{\gamma}^i\dot{\bar{\Phi}}_i - \hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\dot{\bar{\bar{E}}}_{ij}\right)\,{\rm d}\eta\,,\end{aligned} \tag{8.5.1}$$

where $\bar{E}^0 \equiv E^{\rm dec}x_{\rm dec}$ [with $x_{\rm dec} \equiv a(\eta_{\rm dec})/a(\eta_0)$], where the index 0 means that the quantity is evaluated today at $(\eta_0, x_0^i = 0)$, where the index "dec" means that the quantity is evaluated at

$(\eta_{\rm dec}, x^i_{\rm dec} = \hat{\gamma}^i(\eta_0 - \eta_{\rm dec}))$ and where the integrands in the integrals are evaluated on the photon trajectory that is at $x^\mu = \left(\eta, \hat{\gamma}^i(\eta_0 - \eta)\right)$. Assuming that the microwave background is and always was a perfect black body radiation, Eq. (**8.5.1**) defines its temperature anisotropies.

Equation (**8.5.1**), where the reception event x^μ_0 is defined (rather arbitrarily) as belonging to a surface of constant photon density, defines $\delta T/T|_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}$ as a gauge invariant quantity. The first term is the sum of a monopole $(-[\Phi + \frac{1}{4}\delta_\gamma]_0)$ which does not depend on $\hat{\gamma}^i$ and a dipole $(\left[\hat{\gamma}^i\,(\partial_i v + \bar{v}_i)\right]_0)$ which is a Doppler effect due to the peculiar velocity of the observer. In the following we shall ignore these contributions and define the temperature background anisotropies as

$$\Theta_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} = \Theta^{\rm S}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} + \Theta^{\rm V}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} + \Theta^{\rm T}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\,, \qquad \textbf{(8.5.2)}$$

with

$$\Theta^{\rm S}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} = \left[\Phi + \frac{1}{4}\delta_\gamma - \hat{\gamma}^i\partial_i v_{\rm b}\right]_{\rm dec} + \int_{\eta_{\rm dec}}^{\eta_0}\left(\dot{\Phi} + \dot{\Psi}\right)\,{\rm d}\eta\,, \qquad \textbf{(8.5.3)}$$

$$\Theta^{\rm V}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} = -\,\hat{\gamma}^i\left(\bar{v}_{i\,{\rm b}}|_{\rm dec} + \int_{\eta_{\rm dec}}^{\eta_0}\dot{\bar{\Phi}}_i\,{\rm d}\eta\right)\,, \qquad \textbf{(8.5.4)}$$

$$\Theta^{\rm T}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} = -\,\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\int_{\eta_{\rm dec}}^{\eta_0}\dot{\bar{\bar{E}}}_{ij}\,{\rm d}\eta\,. \qquad \textbf{(8.5.5)}$$

The next step consists in expressing the perturbations in terms of their Fourier transforms [see Eq. (**8.2.21**)] and to expand $e^{ik_ix^i}$ as

$$e^{ik_ix^i} = \sum_\ell i^\ell(2\ell+1)\,j_\ell(kx)P_\ell(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}/kx)\,, \qquad \textbf{(8.5.6)}$$

where j_ℓ is a Bessel function, P_ℓ a Legendre polynomial, and where $kx \equiv \sqrt{k_ik^i}\sqrt{x_ix^i}$ and $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} \equiv k_ix^i$. Equations (**8.5.3–8.5.5**) then read (reintroducing the dimensionless wave vector $q^i \equiv k^i/\mathcal{H}_0$)

$$\Theta^{\rm S,V,T}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_\ell i^\ell(2\ell+1)\int P_\ell(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}})G^{\rm S,V,T}_\ell(q^i)q^2\,{\rm d}q\,{\rm d}\Omega_{\boldsymbol{q}}\,, \qquad \textbf{(8.5.7)}$$

where $\Omega_{\hat{\boldsymbol{q}}}$ defines the direction of the vector q^i in Fourier space, where $\hat{\boldsymbol{q}} \equiv \boldsymbol{q}/q$ and where [integrating on $x \equiv a/a_0$ rather than on η and recalling the notations (**8.4.32–8.4.34**)]

$$G^{\rm S}_\ell(q^i) \equiv \tilde{G}^{\rm S}_\ell(q)e(q^i)\,, \qquad \textbf{(8.5.8)}$$

$$G^{\rm V}_\ell(q^i) \equiv \tilde{G}^{\rm V}_\ell(q)\hat{\gamma}^i\bar{e}_i(q^i)\,, \qquad \textbf{(8.5.9)}$$

$$G^{\rm T}_\ell(q^i) \equiv \tilde{G}^{\rm T}_\ell(q)\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\bar{\bar{e}}_{ij}(q^i)\,, \qquad \textbf{(8.5.10)}$$

with

$$\tilde{G}^{\rm S}_\ell(q) = j_\ell(y_{\rm dec})\left[\tilde{\Phi} + \frac{1}{4}\tilde{\delta}_\gamma\right]_{\rm dec} - \left[\frac{\rm d}{{\rm d}y}j_\ell(y)\right]_{\rm dec}\tilde{V}_{\rm b}|_{\rm dec} + \int_{x_{\rm dec}}^1 j_\ell(y)\frac{\rm d}{{\rm d}x}(\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi})\,{\rm d}x\,, \qquad \textbf{(8.5.11)}$$

$$\tilde{G}^{\rm V}_\ell(q) = -\,j_\ell(y_{\rm dec})\,\tilde{\bar{v}}_{\rm b}|_{\rm dec} - \int_{x_{\rm dec}}^1 j_\ell(y)\frac{\rm d}{{\rm d}x}\tilde{\bar{\Phi}}\,{\rm d}x\,, \qquad \textbf{(8.5.12)}$$

$$\tilde{G}^{\rm T}_\ell(q) = -\int_{x_{\rm dec}}^1 j_\ell(y)\frac{\rm d}{{\rm d}x}\tilde{\bar{\bar{E}}}\,{\rm d}x\,, \qquad \textbf{(8.5.13)}$$

where $y \equiv kr = k(\eta_0 - \eta) = 2q(1 - \sqrt{\Omega^0_{\rm rad} + x\Omega^0_{\rm mat}})/\Omega^0_{\rm mat}$ [see Eq. (**8.2.13**)] and where the index "dec" means that the quantity is evaluated at $x = x_{\rm dec}$.

$\Theta^{\rm S}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}$, $\Theta^{\rm V}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}$, and $\Theta^{\rm T}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}$ are random variables which fall into statistically independent sets so that the temperature anisotropy correlation function factorizes as

$$C(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\equiv\langle\Theta_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1}\Theta_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2}\rangle=\left\langle\Theta^{\rm S}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1}\Theta^{\rm S}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2}\right\rangle+\left\langle\Theta^{\rm V}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1}\Theta^{\rm V}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2}\right\rangle+\left\langle\Theta^{\rm T}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1}\Theta^{\rm T}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2}\right\rangle\,, \tag{8.5.14}$$

where $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2$ is the cosine of the angle between the two directions of observation $\hat{\gamma}^i_1$ and $\hat{\gamma}^i_2$.

Injecting Eqns (**8.5.7**–**8.5.13**) into Eq. (**8.5.14**) one therefore gets

$$\begin{aligned}\left\langle\Theta^{\rm S,V,T}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1}\Theta^{\rm S,V,T}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2}\right\rangle=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{\ell,\ell'}(-i)^{\ell'}i^{\ell}(2\ell'+1)(2\ell+1)\times\\ \int\tilde{G}^{\rm S,V,T*}_{\ell'}\tilde{G}^{\rm S,V,T}_{\ell}P_{\ell'}(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1)P_{\ell}(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\mathcal{A}^{\rm S,V,T}q^2\,{\rm d}q\,{\rm d}\Omega_{\hat{\boldsymbol{q}}}\,,\end{aligned} \tag{8.5.15}$$

where

$$\mathcal{A}^{\rm S}=1\,, \tag{8.5.16}$$

$$\mathcal{A}^{\rm V}=\hat{\gamma}^i_2\hat{\gamma}^j_1P_{ij}=\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2-(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1)(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\,, \tag{8.5.17}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\rm T}&=\hat{\gamma}^i_2\hat{\gamma}^j_2\hat{\gamma}^k_1\hat{\gamma}^l_1(P_{ik}P_{jl}+P_{il}P_{jk}-P_{ij}P_{kl})\\&=2[\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2-(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1)(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)]^2-[1-(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1)^2][1-(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)^2]\,.\end{aligned} \tag{8.5.18}$$

Using now the identity [Gradshteyn & Ryzhik, 1980]

$$\int P_{\ell}(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1)P_{\ell'}(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\,{\rm d}\Omega_{\hat{\boldsymbol{q}}}=\frac{4\pi}{2\ell+1}P_{\ell}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\delta_{\ell\ell'}\,, \tag{8.5.19}$$

one first obtains (see, *e.g.*, [Abbott & Wise, 1984b] [White *et al.*, 1994])

$$\left\langle\Theta^{\rm S}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1}\Theta^{\rm S}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2}\right\rangle=\frac{1}{4\pi}\sum_{\ell}(2\ell+1)C^{\rm S}_{\ell}P_{\ell}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\,, \tag{8.5.20}$$

$$C^{\rm S}_{\ell}=\frac{2}{\pi}\int|\tilde{G}^{\rm S}_{\ell}|^2q^2\,{\rm d}q\,. \tag{8.5.21}$$

where $\tilde{G}^{\rm S}_{\ell}$ is the function of q given by Eq. (**8.5.11**). The other identity [6]

$$\begin{aligned}\int(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1)(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)P_{\ell}(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1)P_{\ell'}(\hat{\boldsymbol{q}}\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\,{\rm d}\Omega_{\boldsymbol{q}}\\ =4\pi\frac{\ell+1}{(2\ell+3)(2\ell+1)}\left[\frac{\ell+1}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}+\frac{\ell+2}{2\ell+5}\delta_{\ell',\ell+2}\right]P_{\ell+1}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\\ +4\pi\frac{\ell}{(2\ell+1)(2\ell-1)}\left[\frac{\ell}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}+\frac{\ell-1}{2\ell-3}\delta_{\ell',\ell-2}\right]P_{\ell-1}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\,.\end{aligned} \tag{8.5.22}$$

together with standard recursion relations for the Legendre polynomials and Bessel functions [Gradshteyn & Ryzhik, 1980] then yield (see, *e.g.*, [Ma & Bertschinger, 1995] [Hu & Sugiyama, 1995a] [Hu & White, 1997b])

$$\left\langle\Theta^{\rm V}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1}\Theta^{\rm V}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2}\right\rangle=\frac{1}{4\pi}\sum_{\ell}(2\ell+1)C^{\rm V}_{\ell}P_{\ell}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\,, \tag{8.5.23}$$

$$C^{\rm V}_{\ell}=\frac{2}{\pi}\ell(\ell+1)\int\left[\frac{j_{\ell}(y_{\rm dec})}{y_{\rm dec}}\,\tilde{\tilde{v}}_{\rm b}|_{\rm dec}+\int_{x_{\rm dec}}^{1}\frac{j_{\ell}(y)}{y}\frac{\rm d}{{\rm d}x}\tilde{\tilde{\Phi}}{\rm d}x\right]^2q^2\,{\rm d}q\,. \tag{8.5.24}$$

[6] We thank Luc Blanchet for showing us how to demonstrate it by means of the STF formalism (see, *e.g.*, [Blanchet & Damour, 1980])

The computation of $\left\langle \Theta^{\mathrm{T}}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1}\Theta^{\mathrm{T}}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2}\right\rangle$ can proceed along similar lines but is more involved. The result is (see, *e.g.*, [Abbott & Wise, 1984b] [White *et al.*, 1994])

$$\left\langle \Theta^{\mathrm{T}}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1}\Theta^{\mathrm{T}}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2}\right\rangle = \frac{1}{4\pi}\sum_\ell (2\ell+1)C^{\mathrm{T}}_\ell P_\ell(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\,, \qquad \textbf{(8.5.25)}$$

$$C^{\mathrm{T}}_\ell = \frac{2}{\pi}\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}\int\left[\int_{x_{\mathrm{dec}}}^1 \frac{j_\ell(y)}{y^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{\tilde{E}}\mathrm{d}x\right]^2 q^2\,\mathrm{d}q\,. \qquad \textbf{(8.5.26)}$$

The coefficients $C^{\mathrm{S,V,T}}_\ell$, which will be computed numerically in the next section for various choices of the source functions describing the defects, are the quantities to be compared with observations, through the inverse formula

$$C^{\mathrm{S}}_\ell + C^{\mathrm{V}}_\ell + C^{\mathrm{T}}_\ell = 2\pi\int_{-1}^{+1} C(z)P_\ell(z)\,\mathrm{d}z\,, \qquad \textbf{(8.5.27)}$$

$$z \equiv \hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2, \qquad \textbf{(8.5.28)}$$

$$C(z) \equiv \left\langle \Theta_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1}\Theta_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2}\right\rangle\,. \qquad \textbf{(8.5.29)}$$

(Observationally, the ensemble average $\langle\ldots\rangle$ is replaced by an average on different regions of the celestial sphere. For large angles there are few such independent regions so that the “cosmic variance” problem arises; see, *e.g.*, [Bunn, 1997].)

6 Numerical results

Two of us (J.P.U. and A.R.) have developed a numerical code to solve the equations for the perturbations (**8.2.29–8.2.41**) and compute the coefficients C_ℓ in function of the multipoles ℓ [Eqns (**8.5.21**, **8.5.24**, **8.5.25**)] when the defects are described by Eqns (**8.3.56–8.3.62**) and (**8.3.77–8.3.83**), and the initial conditions are given by Eqns (**8.4.23–8.4.31**) (the computations start at $x_{\mathrm{in}} = 10^{-9}$, $q \in [2\times10^{-2} - 2\times10^3]$ and $\ell \in [2-1500]$). This code incorporates Silk damping (that is the decay of the C_ℓ at large ℓ due to the fact that a fluid description no longer holds on small scales) by a simple multiplication of G^{S} in (**8.5.11**) by the decaying exponential (see [Kaiser, 1983] [Seljak, 1994] [Fukugita *et al.*, 1990])

$$e^{-2k^2\eta^2_{\mathrm{dec}}x_s^2}\,, \qquad \textbf{(8.6.1)}$$

where $x_s = 0.6\Omega^{1/4}_{\mathrm{mat}}(\Omega_{\mathrm{b}}h)^{-1/2}a^{3/4}_{\mathrm{dec}}$ [Seljak, 1994]. As for the fact that decoupling is not instantaneous, we take it into account by convolving Eqns (**8.5.11–8.5.13**) with the visibility function (see [Ma & Bertschinger, 1995] [Hu & Sugiyama, 1995a] [Hu & White, 1997b] for a detailed derivation; a simple multiplication by $\mathrm{e}^{-k^2\eta^2_{\mathrm{rec}}\sigma^2}$ with $\sigma = 0.03$ for standard recombination [Seljak, 1994], is too rough an approximation). Instead of Eq. (**8.6.1**) we could have used the better fit proposed by Hu and Sugiyama [Hu & Sugiyama, 1995b] but it is an analytical fit deduced from a Boltzmann code whereas Eq. (**8.6.1**) is obtained from physical arguments [Kaiser, 1983].

In this section we first test our code and discuss the approximations made. We then give a few examples of solutions and compare the results with previous calculations. (Note that for a better visibility, the results are not normalized to the COBE data at $\ell = 10$ as is usual [Tegmark, 1996].)

6.1 No sources and adiabatic conditions: comparison with a Boltzmann code

The code which we have implemented can of course also be used to study scenarios where no defects are present and where adiabatic initial conditions (as imposed by, *e.g.*, the standard inflationary scenario) are imposed. One has just to set $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{P} = \mathcal{Q} = 0$ and replace the initial conditions (**8.4.23–8.4.31**) by

$$\widehat{\delta}^{\flat}_{\nu} = \widehat{\delta}^{\flat}_{\gamma} = \frac{4}{3}\widehat{\delta}^{\flat}_{\mathrm{b}} = \frac{4}{3}\widehat{\delta}^{\flat}_{\mathrm{c}} = -6\widehat{\Psi}_0 \,, \tag{8.6.2}$$

$$\widehat{V}_{\nu} = \widehat{V}_{\gamma} = \widehat{V}_{\mathrm{b}} = \widehat{V}_{\mathrm{c}} = -\frac{1}{2}\frac{qx}{\sqrt{\Omega^0_{\mathrm{rad}}}}\widehat{\Psi}_0 \,, \tag{8.6.3}$$

$$\widehat{\Psi} = \widehat{\Phi} = \widehat{\Psi}_0 \,, \tag{8.6.4}$$

where $\widehat{\Psi}_0$, in the standard chaotic inflationary model, is fixed by the quantization of the inflaton so that (see, *e.g.*, [Linde, 1990] [Steinhard, 1995]) $\widehat{\Psi}_0 \propto q^{-3/2}$. (We restrict ourselves to the scalar perturbations as the vector and tensor contributions are negligible in the standard inflationary scenario — see, *e.g.*, [Deruelle & Mukhanov, 1995].)

The C^{S}_{ℓ} coefficients as computed with our fluid code, with the Boltzmann code we have developed [Riazuelo, 2000], and with CMBFAST [CMBFAST, `http`] are compared on Fig. 8.1 (top). One first notes the excellent agreement between our Boltzmann code with CMBFAST. One also notes that if the position of the Doppler peaks, as given by our fluid code and the Boltzmann ones, coincide, their heights differ by about 15%, which we consider enough for our present purposes considering that the physics in our fluid code (as well as in, *e.g.*, Seljak's in [Seljak, 1994]) and a Boltzmann code differs on four points:

- We use a perfect fluid approximation to describe the various matter and radiation components of the universe,
- We make a tight-coupling approximation, that is we assume that the baryons and photons have exactly the same velocities until decoupling,
- We suppose instantaneous decoupling,
- We correct for those assumptions by an ad-hoc damping of the scalar perturbations on small scales [see Eq. (**8.6.1**)] and we take into account the finite width of the last scattering surface.

whereas a description based on Boltzmann's equation is used in our Boltzmann code and in CMBFAST. We find that the difference in the height of the peaks is due to these approximations.

In conclusion a perfect fluid code is useful to find the *positions* of the peaks predicted by various types of topological defects but can be inaccurate when it comes to their *height*. In the following we shall use a perfect fluid code and therefore comment only on the position of the peaks. In [Riazuelo, 2000] we shall use our Boltzmann code and shall therefore be able to compare not only the positions but also the heights of the peaks predicted by various defects as well as with those predicted by inflationary scenarios, the latter being also computed using a Boltzmann code.

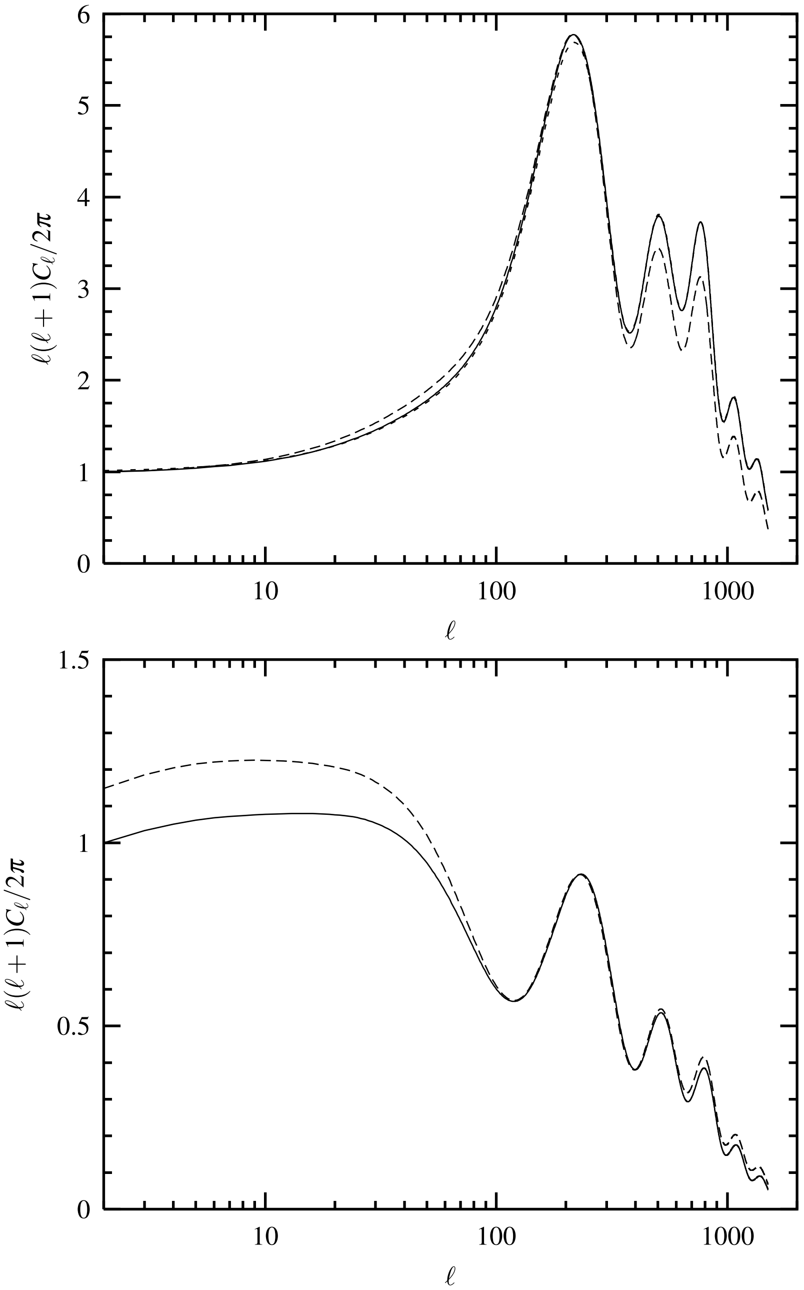


FIGURE 8.1 – Comparison between our fluid code (solid line), our Boltzmann code (dashed line) and CMBFAST (short-dashed line) in the case of inflation (top). Comparison between our fluid code (solid line) and our Boltzmann code (dashed line) in the case of topological defects (bottom) with $\mathcal{F} = \exp(-u^2)$ and $\mathcal{G} = 0$.

6.2 The scalar contribution of coherent defects to the CMB anisotropies

The scalar component $C_\ell^{\rm S}$ of the C_ℓ coefficients is given by (**8.5.21**) and is entirely determined once the two functions $\mathcal{F}(u)$ and $\mathcal{G}(u)$ (with $u \equiv q/h = k/\mathcal{H}$) describing the scalar component of the stress-energy tensor of the defects are known.

First Fig. 8.2 shows, on the particular case $\mathcal{G}(u) = 0$ and $\mathcal{F}(u) \propto \exp(-u^2)$ (Fig. 8.2, bottom), that, contrary to what happens in inflationary scenarios (Fig. 8.2, top), the integrated Sachs-Wolfe (ISW) contribution to $C_\ell^{\rm S}$ (that is the integral term in Eq. (**8.5.11**)) dominates at low ℓ. This is in agreement with intuition: in inflationary scenarios the large scale anisotropies are built in the initial conditions, whereas in defect scenarios they are due to line-of-sight gravitational effects. We are aware that the inverse Fourier transform of a Gaussian does not meet condition (**8.3.25**) but we note that the Fourier transform of any compact supported C^∞ function decreases faster than any power law.

Figure 8.3 illustrates the case when $\mathcal{G} = 0$ and $\mathcal{F} = \exp(-u^2/L^2)$ for various values of L. The most striking feature of these curves is that they do not exhibit a plateau at low ℓ when $L \neq 1$. As ℓ decreases the first "peak" is shifted to lower multipoles and tends to the position predicted by the standard inflationary scenario (see Fig. 8.1, top). This can be explained by the fact that the defects decay on larger scales.

Figure 8.4 illustrates the case when both $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ are proportional to $\exp(-u^2)$, with $\mathcal{G}/\mathcal{F} = r$. First, as expected, when r is small one recovers Fig. 8.2, bottom or Fig. 8.3 with $L = 1$. Second, when $\mathcal{G} \neq 0$, the dominant component to the stress-energy tensor of the defects is their anisotropic stress $\Pi^{\rm s}$ [see Eqns (**8.3.77–8.3.80** and **8.3.56**)]. The first Doppler peak is then washed out. This result compares to [Pen *et al.*, 1997] where incoherent sources are studied, for which the anisotropic stress dominates too. An interesting particular case is when $a \simeq 0.3$ which minimizes the anisotropic stress contribution f_4 [see Eq. (**8.3.80**)]. The first Doppler peak is then higher than the plateau.

Finally, as a caveat not to comment too seriously on the height of the Doppler peaks when a perfect fluid code is used, Fig. 8.1, bottom compares $C_\ell^{\rm S}$ as given by the perfect fluid code used here and the Boltzmann code used in [Riazuelo, 2000] for $\mathcal{G}(u) = 0$ and $\mathcal{F}(u) \propto \exp(-u^2)$. The much bigger discrepancy in the height of the peaks in that case as compared to the case of inflation is due to the fact that Eq. (**8.6.1**) for Silk damping is valid only if the metric perturbations in the evolution equations for δ_γ can be approximated by constant (see, *e.g.*, Eq. (98) of Hu and White [Hu & White, 1997b]). It can be shown that this is approximatively true in the case of inflationary scenarios in a flat universe without cosmological constant, but here it is not true, as it can be checked by looking at the ISW contribution. Of course, it is also possible to do some a posteriori corrections by comparing fluid and Boltzmann codes and by fitting ad hoc damping terms in order to find a good agreement between the two, see Hu and Sugiyama [Hu & Sugiyama, 1995a], but we did not find them necessary since we simply wanted to present a semi-analytic formalism. Let us note finally that in the case of the pressure model [Hu *et al.*, 1997a] [Cheung & Magueijo, 1998], the discrepancy between this (simple) fluid code and an accurate Boltzmann code is less serious, probably because the ISW contribution is smaller.

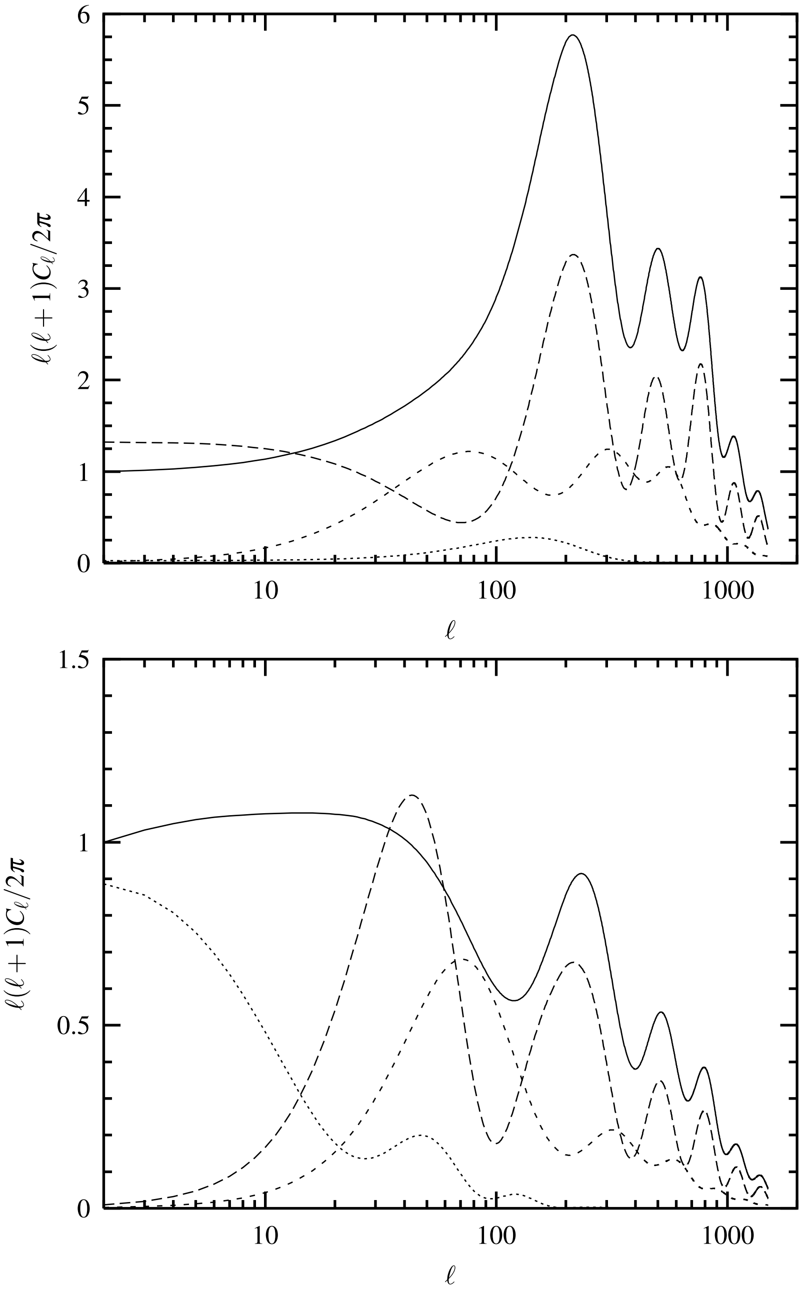


FIGURE 8.2 – Decomposition of the different contributions of the $C_\ell^{\rm S}$ in the case of inflation (top) and topological defects (bottom) with $\mathcal{F} = \exp(-u^2)$ and $\mathcal{G} = 0$. In each case, we have represented the Sachs-Wolfe, Doppler, Integrated Sashs-Wolfe contribution, as well as the total contribution (dashed, short-dashed, dotted and solid lines respectively).

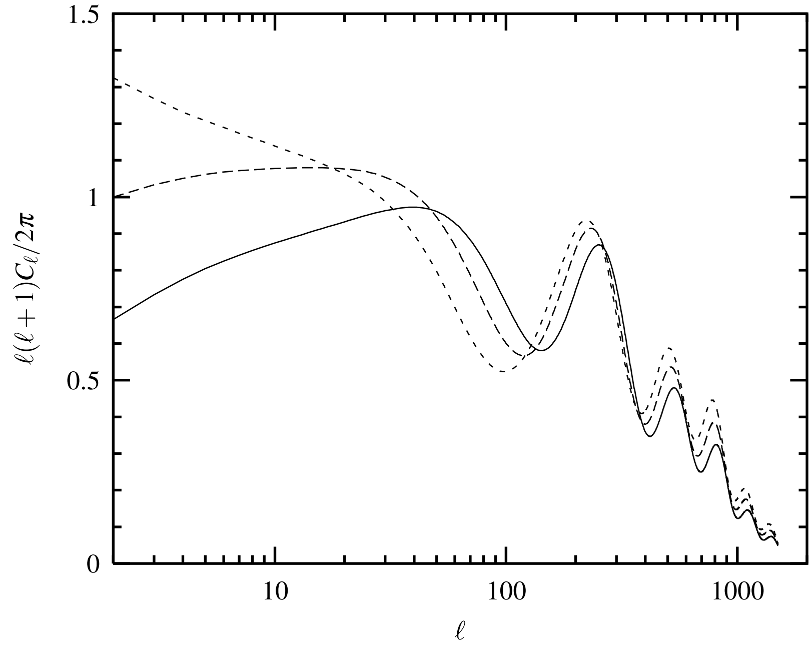


FIGURE 8.3 – The dependence of the coefficients C_ℓ^{S} in defect scenarios where we have varied the scale of decay, L, of the defects by choosing $\mathcal{F} = \exp(-u^2/L^2)$ and $\mathcal{G} = 0$, with $L^2 = 0.5, 1, 2$ (dotted, dashed and solid line respectively).

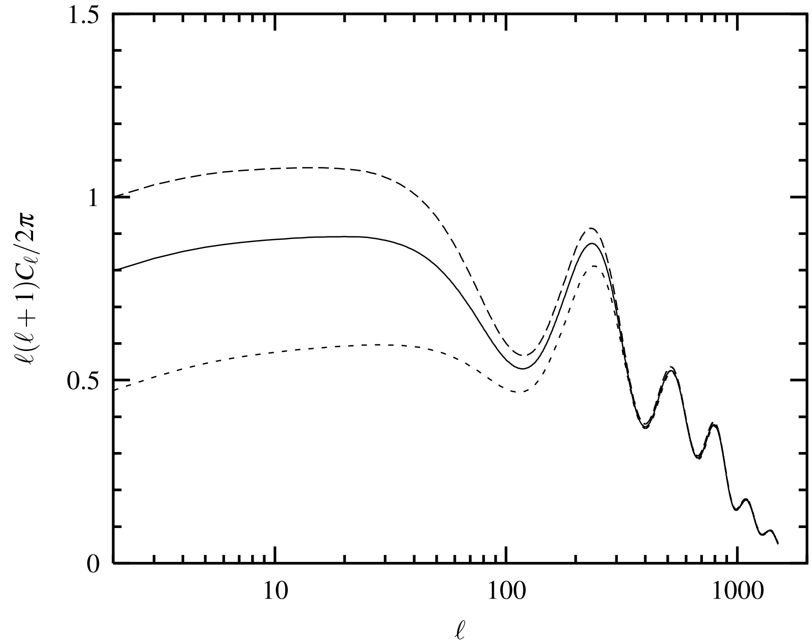


FIGURE 8.4 – The effect of the function $\mathcal{G} = \exp(-u^2)$. For that purpose we have varied the ratio $r = \mathcal{G}/\mathcal{F}$ with $r = 0, 0.1, 0.3$ (dotted, dashed and solid line respectively).

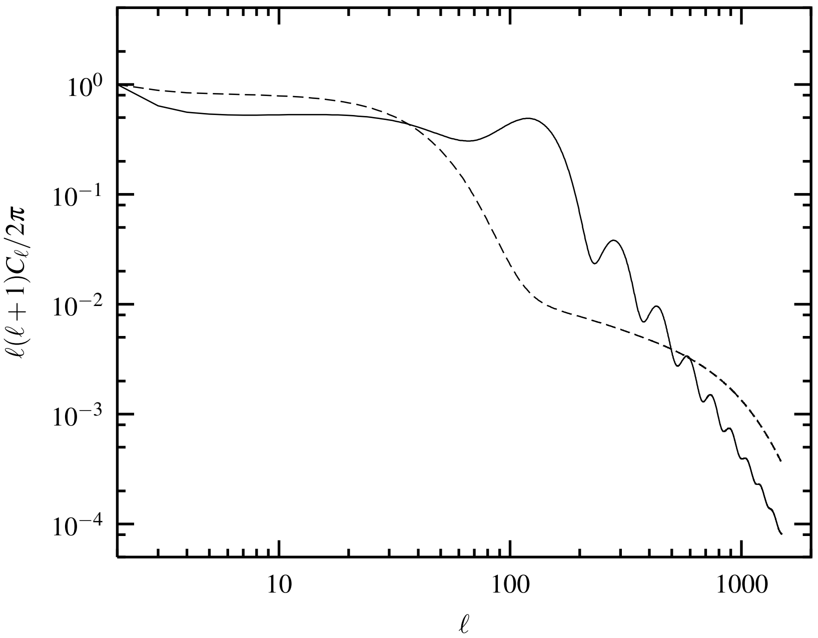


FIGURE 8.5 – The vector (dashed line) and the tensor (solid line) contributions to the CMB temperature anisotropies in a model where $\mathcal{P} = \mathcal{Q} = \exp(-u^2)$

6.3 The vector and tensor contributions

The vector and tensor components of the C_ℓ coefficients [given by Eqns (**8.5.24**, **8.5.25**)] are entirely determined once the functions $\mathcal{P}(u)$ and $\mathcal{Q}(u)$ describing the vector and tensor components of the stress-energy momentum of the defects are known. Since we supposed $\bar{v}^i_{\rm b} = 0$ they both reduce to their integrated Sachs-Wolfe contributions.

6.4 Analytic estimate of the $C_\ell^{\mathbf{V,T}}$ at small ℓ

As we have seen, only the integrated Sachs-Wolfe effect contributes to the vector and tensor parts of the C_ℓ. In this section, we estimate them at small ℓ. We first assume that the last scattering surface is deep enough in the matter dominated era to approximate $\mathcal{H}$ and u by $\mathcal{H} = 2/\eta$ and $u = k\eta/2$. The equations (**8.2.40**) and (**8.2.41**) for $\bar{\Phi}_i$ and $\bar{\bar{E}}_{kl}$ can then be rewritten [using Eqns (**8.2.25**, **8.3.60–8.3.62**) and (**8.4.33–8.4.34**)] as

$$\dot{\tilde{\bar{\Phi}}} + \frac{4}{\eta}\tilde{\bar{\Phi}} = \kappa\frac{k\eta^{3/2}}{\sqrt{2}}f_6(u)\,, \qquad \textbf{(8.6.5)}$$

$$\ddot{\tilde{\bar{\bar{E}}}} + \frac{4}{\eta}\dot{\tilde{\bar{\bar{E}}}} + k^2\tilde{\bar{\bar{E}}} = \kappa\frac{k\eta^{3/2}}{2\sqrt{2}}f_7(u)\,, \qquad \textbf{(8.6.6)}$$

the solutions of which are given by

$$\tilde{\bar{\Phi}} = \frac{\alpha}{u^4} + \frac{k^{-3/2}}{u^4}\int_0^u v^{11/2}f_6(v)\,\mathrm{d}v\,, \qquad \textbf{(8.6.7)}$$

$$\tilde{\bar{\bar{E}}} = \alpha\frac{j_1(u)}{u} + \beta\frac{n_1(u)}{u}\frac{k^{-3/2}}{2u}\int_0^u v^{3/2}\frac{j_1(u)n_1(v) - j_1(v)n_1(u)}{j_1(v)n_0(v) - j_0(v)n_1(v)}f_7(v)\,\mathrm{d}v\,. \qquad \textbf{(8.6.8)}$$

We now make the ansatz that the defects disappear as soon as they enter the horizon *i.e.*, that $f_6(v) \propto f_7(v) \propto \mathrm{Y}(v-1)$ where Y is the Heaviside function.

Computing (**8.6.7–8.6.8**), their time derivative and inserting the result in Eqns (**8.5.24**, **8.5.25**), we obtain that

$$C_\ell^{\mathrm{V}} \propto \ell(\ell+1)\int_0^A \frac{j_\ell^2(y)}{y^2}\frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y\,, \tag{8.6.9}$$

$$C_\ell^{\mathrm{T}} \propto \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}\int_0^A \frac{j_\ell^2(y)}{y^4}\frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y\,, \tag{8.6.10}$$

with $A \equiv \eta_0/\eta_{\mathrm{dec}} - 1$. The main contribution to the two integrals comes from the points $y \simeq l$ (since the Bessel functions are peaked around that point). In a matter dominated universe, we have that $A = \sqrt{a_0/a_{\mathrm{dec}}} - 1 \simeq 32$ and for $\ell < 30$ we will assume that $A \to \infty$. With that approximation, we are led to compute the integrals

$$\mathcal{B}_p^\ell \equiv \int_0^\infty \frac{j_\ell^2(y)}{y^{p-1}}\frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y\,, \quad -1 < p < 2\ell+2\,, \tag{8.6.11}$$

with $p = 5$ and $p = 3$ for the tensor and vector modes respectively. Using the relation [Gradshteyn & Ryzhik, 1980]

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_p^\ell &\equiv \int_0^\infty \frac{j_\ell^2(y)}{y^p}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{2^{2+p}}\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma^2(1+p/2)}\frac{\Gamma(\ell+1/2-p/2)}{\Gamma(\ell+3/2+p/2)}\,, \quad -1 < p < 2\ell+1\,,\end{aligned} \tag{8.6.12}$$

it can be shown that

$$\mathcal{B}_p^\ell = \mathcal{A}_p^\ell(1-\mathcal{R}_p^\ell)\,, \tag{8.6.13}$$

with

$$0 \leq \mathcal{R}_5^\ell \leq \frac{15\pi}{3\times 2^{11}}\frac{1}{(\ell-5/2)}\,, \tag{8.6.14}$$

$$0 \leq \mathcal{R}_3^\ell \leq \frac{9\pi}{2^5}\frac{1}{(\ell-3/2)}\,. \tag{8.6.15}$$

Thus, the ℓ dependence of $C_\ell^{\mathrm{V,T}}$ at small ℓ is given by

$$\ell(\ell+1)C_\ell^{\mathrm{V}} \propto \frac{\ell(\ell+1)}{(\ell+2)(\ell-1)}\,, \tag{8.6.16}$$

$$\ell(\ell+1)C_\ell^{\mathrm{T}} \propto \frac{\ell(\ell+1)}{(\ell+3)(\ell-2)}\,, \quad 3 \leq \ell \leq 20\,. \tag{8.6.17}$$

This solution is compared to our numerical results on Fig. 8.6 where $C_\ell^{\mathrm{T}}/C_\ell^{\mathrm{V}}$ and its analytic estimate are plotted (when $f_6 = f_7$). The agreement is excellent for $3 \leq \ell \leq 20$ as expected.

This estimation only assumes that we are in a matter dominated universe, that $\eta_0/\eta_{\mathrm{dec}} - 1 < 20$ and that $f_6 \propto f_7 \propto \mathrm{Y}$. The two first approximations are well satisfied for small multipoles. The ansatz concerning the modelization of the functions f_6 and f_7 will affect only the numerical prefactors in Eqns (**8.6.9–8.6.10**) and (**8.6.16–8.6.17**), as long as the scale of decay of the defects is comparable with the horizon.

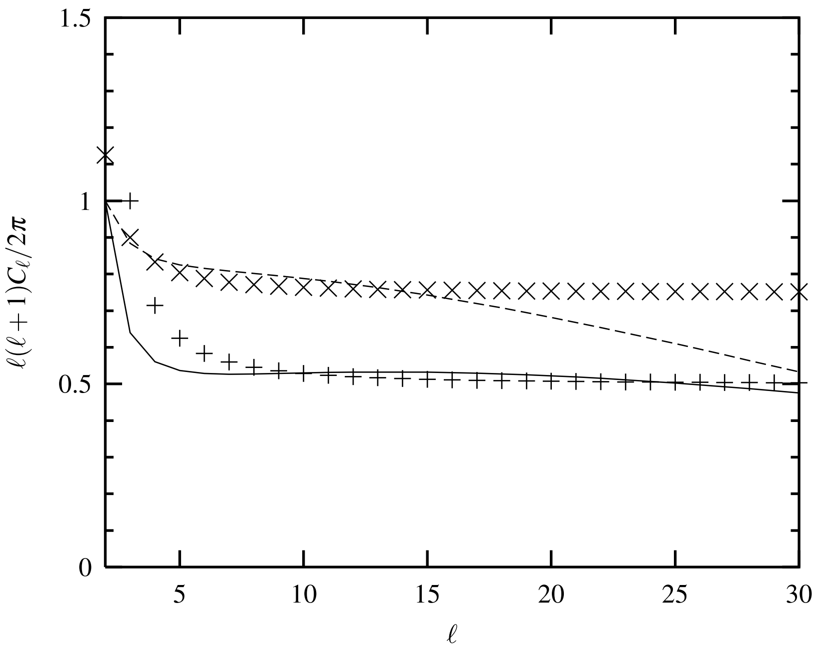


FIGURE 8.6 – Comparison between the vector and tensor part to the CMB anisotropies (dashed and solid lines respectively) with their analytic estimates ($\times$-es and $+$-es respectively) computed in §6.4. It can be seen that the agreement is good up to a multipole of $\ell \simeq 20$ for the vector part and $\ell > 30$ for the tensor part.

6.5 Conclusions

In this article, we have studied the signature of coherent scaling defects on the cosmic microwave background. For that purpose, we have developed a semi-analytic formalism to describe the topological defect network as well as two numerical codes (based respectively on a fluid and a Boltzmann approach) to compute the scalar, vector and tensor components of the coefficients C_ℓ of the CMB anisotropy correlation function.

Concerning the scalar component, and contrary to what happens in standard inflationary scenarios, there is an important contribution from the integrated Sachs-Wolfe term, which does not in general build up as a plateau. In the generic case, this term dominates at low ℓ so that the power on large scales is of the same order or even higher than on small scales. Such characteristics do not fit the present observations [Smoot, 1997b].

However, one can improve the model in various ways. First one can find special combinations of the arbitrary functions which yield results that are more compatible with the data (see Fig. 8.4). But of course such a fine tuning needs to be justified. Second one can play with the cosmological parameters. Third one can extend our approach to more realistic defects (incoherent defects, loss of scaling ...). Finally one can consider defects that are produced at the end of an inflationary period [Contaldi *et al.*, 1999a] (and not, as in this paper, in an up to then perfectly homogeneous and isotropic universe). Various extensions of the standard model of particle physics predict such a possibility (see, *e.g.*, [Jeannerot, 1996]). We plan to explore those various improvements in future work.

7 Acknowledgments

We thank David Langlois, Neil Turok and Mairi Sakellariadou for helpful discussions.

Chapitre 9

Sources incohérentes (article)

Sommaire

Au chapitre précédent, nous avons traité le cas relativement simple des sources actives cohérentes. Il s'agissait d'objets décrit par "peu" de variables aléatoires. Plus précisément, chaque mode de Fourier des composantes du tenseur énergie-impulsion était à tout instant décrit par seulement cinq variables aléatoires (une pour les modes scalaires, deux pour les modes vectoriels, et deux pour les modes tensoriels), tout comme dans le cas inflationnaire. Une perturbation quelconque $\tilde{X}^{(m)}(\boldsymbol{k})$ est initialement écrite sous la forme

$$\tilde{X}^{(m)}(\boldsymbol{k}) = \widehat{X}^{(m)}(k) e^{(m)}(\boldsymbol{k}) \ , \qquad \textbf{(9.0.1)}$$

où l'indice $m = -2, ..., 2$ décrit la nature de la perturbation (scalaire, vectorielle, tensorielle), $e^{(m)}(\boldsymbol{k})$ est en une variable aléatoire (en général gaussienne) normalisée ($\left\langle e^{(m)}(\boldsymbol{k}) e^{(m')*}(\boldsymbol{k'}) \right\rangle = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'})\delta_{mm'}$) indépendante du temps. Le problème auquel on s'intéresse est celui de l'évolution de la variance $|\widehat{X}^{(m)}(k)|^2$ de la variable aléatoire. Dans les théories inflationnaires, la quantité $\widehat{X}^{(m)}(k)$ évolue de façon *linéaire*, aussi, l'évolution de chaque variable aléatoire est-il de la forme (*cf* équation **9.4.5**)

$$\tilde{X}^{(()}_{m}\eta, \boldsymbol{k}) = \widehat{X}^{(m)}(\eta, k) e^{(m)}(\boldsymbol{k}) \ , \qquad \textbf{(9.0.2)}$$

$$\widehat{X}^{(m)}(\eta, k) = \sum_a F^{(m)}_a(\eta, k) \widehat{X}^{(m)}_a(\eta_{\rm in}, k) \ . \qquad \textbf{(9.0.3)}$$

où l'index a décrit toutes les perturbations (en nombre éventuellement infini si on résout l'équation de Boltzmann) qui participent au même système d'équations différentielles linéaires couplées que

$\widehat{X}^{(m)}$. Ainsi, le corrélateur à n points de n'importe quelle perturbation ne dépend toujours que d'une seule variable aléatoire $e^{(m)}(\boldsymbol{k})$. Pour des défauts topologiques, la variable dont on suit l'évolution (la position de la corde ou le champ à N composantes) obéit à une équation *non linéaire*, aussi sa solution s'écrit-elle de façon plus compliquée de la forme

$$\widehat{X}^{(m)}(\eta,\boldsymbol{k}) = \int f_{X^{(m)}}(\eta,\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\widehat{X}^{(m)}(\eta_{\rm in},\boldsymbol{k}')\,{\rm d}\boldsymbol{k}' ,$$

et la variable aléatoire correspondante

$$\tilde{X}^{(m)}(\eta,\boldsymbol{k}) = \int f_{X^{(m)}}(\eta,\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\widehat{X}^{(m)}(\eta_{\rm in},\boldsymbol{k}')e^{(m)}(\boldsymbol{k}')\,{\rm d}\boldsymbol{k}' .$$

À tout instant ultérieur à l'instant initial, la variable aléatoire $\tilde{X}$ est donc décrite par une infinité de variables aléatoires, simplement à cause du couplage entre modes dû à l'évolution non linéaire du réseau. Notons qu'il n'y a pas "plus" de variables aléatoires dans les scénarios basés sur les défauts topologiques, mais c'est leur répartition dans chaque mode qui diffère sensiblement des scénarios inflationnaires. Une source évoluant ainsi de façon non linéaire est appelée *source incohérente*.

La suite de ce chapitre est tirée d'un article [Riazuelo & Deruelle, 2000b] paru dans *Annalen der Physik*. On y étudie certaines propriétés génériques des corrélateurs des sources actives, qui sont en fait caractéristiques des sources incohérentes (§2.1). On montre ensuite (§2.2) sur un exemple concret d'où viennent certaines de ces propriétés. Bien que les corrélateurs des sources incohérentes aient des propriété sensiblement différentes de celles des sources cohérentes, il reste cependant possible de décrire les premières comme une somme de ces dernières (§3), essentiellement en utilisant l'équation (9) dans une version discrétisée. Il est alors possible de calculer les anisotropies générées par des sources incohérentes en utilisant les équations du chapitre précédent (§4). La principale caractéristique du spectre obtenu (*cf* figure 9.1) est un effacement de la série de pics Doppler, qui provient de la combinaison de deux effets :

– Le fait qu'on effectue la somme de plusieurs spectres, chacun présentant une série régulière de pics Doppler. Chaque spectre représente en fait la contribution d'une certaine échelle du réseau (équation **9.3.12**). Sur la figure 9.1, la contribution des grandes échelles est donnée par les spectres les plus "rouges", et celle des petites échelles par les spectres "bleus" (voir aussi figure 8.3 du chapitre précédent).
– Le fait que la série de pics se déphase d'un spectre à l'autre. La raison à cela est que les grandes échelles excitent les perturbations avant les petites échelles. Le spectre correspondant présente par conséquent des oscillations à plus grande échelle angulaire comme on peut le vérifier sur la figure 9.1.

Cosmic microwave background anisotropies seeded by incoherent sources

Alain Riazuelo[1*] and Nathalie Deruelle[1,2,3†]

[1] *Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, UMR 8629 du Centre National de la Recherche Scientifique, Observatoire de Paris, F-92195 Meudon Cedex (France)*

[2] *Institut des Hautes Études Scientifiques, F-91140 Bures-sur-Yvette (France)*

[3] *Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Silver Street, Cambridge, CB3 9EW (England)*

Abstract : The cosmic microwave background anisotropies produced by active seeds, such as topological defects, have been computed recently for a variety of models by a number of authors. In this paper we show how the generic features of the anisotropies caused by active, incoherent, seeds (that is the absence of acoustic peaks at small scales) can be obtained semi-analytically, without entering into the model dependent details of their formation, structure and evolution.

PACS numbers : 98.80.Cq, 98.70.Vc

Keywords : cosmology, cosmic microwave background, topological defects

1 Introduction

Two cosmological scenarios are currently in competition to explain the large scale ($\theta > 7^\circ$), fairly flat, spectrum of cosmic microwave background (CMB) anisotropies which has been observed by the COBE satellite [Bennett *et al.*, 1996]: inflation (see, *e.g.*, [Guth, 1981] [Linde, 1990] [Mukhanov *et al.*, 1992]), and active seed models (see, *e.g.*, [Vilenkin & Shellard, 1994]).

Observations of the CMB anisotropy spectrum on smaller scales have been performed by balloon and ground experiments [Netterfield *et al.*, 1997] [Coble *et al.*, 1999] [Torbet *et al.*, 1999], which tend to indicate the presence of a peak at $\theta \simeq 1^\circ$. This peak in the spectrum gives at present the lead to the inflationary scenario.

One should however be careful not to exclude too hastily active seeds at this stage. Indeed, to start with, the predictions from specific topological defect models are not yet very robust, the reason being that they act as a continuous, non-linear source of inhomogeneities, and hence are

*Email addres: `Alain.Riazuelo@obspm.fr`
†Email addres: `Nathalie.Deruelle@obspm.fr`

difficult to model. Second, there exist simple models of active seeds which "mimic" inflation and reproduce a peak in the spectrum on the degree scale [Turok, 1996c]. Third, including some microphysics in the evolution of the defect network modifies the "standard" picture [Riazuelo *et al.*, 2000]. Even if such modelings are arguably unrealistic, they show that the absence of a peak is not the seal of all types of active seeds.

It is also important to be able to predict which active seeds produce secondary peaks, like inflationary models, and which do not. As we shall see, the absence of secondary peaks is the generic signature of "incoherent" seeds described within the "stiff" approximation. More then that the presence of a sharp peak on the degree scale, the absence of secondary peaks, which will be probed by the MAP and PLANCK satellite missions [MAP, `http`] [PLANCK, `http`] (and possibly also by the BOOMERanG and ARCHÉOPS [BOOMERanG, `http`] [ARCHÉOPS, `http`] balloon experiments), will toll the bell of active seeds as the main contributor to CMB anisotropies.

It is clear that the (semi-)analytic calculations of the seed stress-energy tensor correlators pioneered by Durrer and collaborators [Durrer & Zhou, 1996] [Durrer *et al.*, 1996] [Durrer & Sakellariadou, 1997] have the advantage, over heavy numerical calculations within specific topological defect models, to test the influence on the CMB anisotropies of each component of the seed stress-energy tensor. This semi-analytic approach has already allowed to grasp some generic features of the CMB anisotropies seeded by active sources (see, *e.g.*, [Turok, 1996a] [Riazuelo *et al.*, 2000] [Deruelle *et al.*, 1997] [Uzan *et al.*, 2000a]).

The object of this paper is to study, within this semi-analytic approach, incoherent active seeds and show that, within the stiff approximation, they all lead to CMB spectra exhibiting no secondary peaks.

The paper is organized as follows: in §2, we first recall the some statistical properties of the seed stress-energy tensor correlators at large wavelengths [see Eq. (**9.2.26**)], and write some up-to-now unmentioned relations [see Eqns (**9.2.27**)]. We then give the new result that any active source described by a test scalar field must obey these properties [see Eqns (**9.2.40–9.2.42**)]. In §3, we first recall the definition and properties [see Eq. (**9.3.7**)] of coherent sources (*e.g.*, [Deruelle *et al.*, 1997] [Uzan *et al.*, 2000a]), and then explicitely construct for the first time a generic (*i.e.*, incoherent) active source as a sum of coherent ones. Finally, in §4, we exhibit the generic behavior of the CMB anisotropies seeded by active sources.

2 The statistical properties of incoherent sources

2.1 The 2-point correlators

The stress-energy tensor of active sources is a small perturbation added to the other cosmic fluids. This is the so-called "stiff approximation", see, *e.g.*, [Veeraraghavan & Stebbins, 1990]. We decompose its components $\Theta_{\mu\nu}(\eta, x^i)$ into their scalar, vector and tensor parts (SVT) as ($\mu, \nu = 0,1,2,3$, η is the conformal time, x^i are 3 Cartesian coordinates; space is assumed to be flat for simplicity):

$$\Theta_{00} = \rho^{\rm s} , \qquad \textbf{(9.2.1)}$$

$$\Theta_{0i} = -\left(\bar{v}^{\rm s}_i + \nabla_i v^{\rm s}\right) , \qquad \textbf{(9.2.2)}$$

$$\Theta_{ij} = \delta_{ij} P^{\rm s} + \left(\nabla_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\right)\Pi^{\rm s} + \nabla_i \bar{\Pi}^{\rm s}_j + \nabla_j \bar{\Pi}^{\rm s}_i + \bar{\bar{\Pi}}^{\rm s}_{ij} . \qquad \textbf{(9.2.3)}$$

Barred spatial vectors are divergenceless; barred spatial tensors are traceless and divergenceless.

We work in Fourier space, the Fourier transform of any function $f(\eta, x^i)$ being defined as:

$$\widehat{f}(\eta, k^i) = \int e^{ik_i x^i} f(\eta, x^i)\, \mathrm{d}^3x \Longleftrightarrow f(\eta, x^i) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ik_i x^i} \widehat{f}(\eta, k^i)\, \mathrm{d}^3k\,. \tag{9.2.4}$$

From (**9.2.1–9.2.3**), we therefore have:

$$\left(k_i k_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} k^2\right) \widehat{\Pi}^{\mathrm{s}} = \left(\frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} + L_i^k L_j^l\right) \widehat{\Theta}_{kl}\,, \tag{9.2.5}$$

$$2k_{(i} \widehat{\bar{\Pi}}^{\mathrm{s}}_{j)} = 2\left(P^{(k}_{(i} L^{l)}_{j)}\right) \widehat{\Theta}_{kl}\,, \tag{9.2.6}$$

$$\widehat{\bar{\bar{\Pi}}}^{\mathrm{s}}_{ij} = \left(P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl}\right) \widehat{\Theta}_{kl}\,, \tag{9.2.7}$$

and similar expressions for the other variables, with

$$L_{ij} \equiv \delta_{ij} - P_{ij} \equiv \frac{k_i}{k} \frac{k_j}{k} \equiv \hat{k}_i \hat{k}_j\,. \tag{9.2.8}$$

The ten components of $\Theta_{\mu\nu}(\eta, x^i)$ of the active source are ten statistically spatially homogeneous and isotropic random fields. The statistical properties of those ten random fields are described by their unequal time two-point correlators

$$\left\langle \Theta_{\mu\nu}(\eta, x^i) \Theta_{\rho\sigma}(\eta', x'^i) \right\rangle \equiv C_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta, \eta', r^i)\,, \tag{9.2.9}$$

where $\langle \ldots \rangle$ means an ensemble average on a large number of realizations, and where the correlator $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ is a tensor which depends only on η, η' and $r^i \equiv x^i - x'^i$ because of the spatial homogeneity of the distribution. The power spectra of the Fourier transforms are given by:

$$\left\langle \widehat{\Theta}^*_{\mu\nu}(\eta, k^i) \widehat{\Theta}_{\rho\sigma}(\eta', k'^i) \right\rangle = \delta(k^i - k'^i) \widehat{C}_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta, \eta', k^i)\,. \tag{9.2.10}$$

The spatial isotropy of the distribution now forces the power spectra to be of the form

$$\widehat{C}_{0000} = A_0\,, \tag{9.2.11}$$

$$\widehat{C}_{000i} = ik_i B_1\,, \tag{9.2.12}$$

$$\widehat{C}_{00ij} = C_0 \delta_{ij} + C_2 k_i k_j\,, \tag{9.2.13}$$

$$\widehat{C}_{0i0j} = D_0 \delta_{ij} + D_2 k_i k_j\,, \tag{9.2.14}$$

$$\widehat{C}_{0ijk} = i\left[E_1 k_i \delta_{jk} + \bar{E}_1 (k_j \delta_{ik} + k_k \delta_{ij}) + E_3 k_i k_j k_k\right]\,, \tag{9.2.15}$$

$$\begin{aligned}\widehat{C}_{ijkl} = {} & F_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + \bar{F}_0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + F_2 (k_i k_j \delta_{kl} + k_k k_l \delta_{ij}) + \\ & \bar{F}_2 (k_i k_k \delta_{jl} + k_i k_l \delta_{jk} + k_j k_l \delta_{ik} + k_j k_k \delta_{il}) + F_4 k_i k_j k_k k_l\,,\end{aligned} \tag{9.2.16}$$

where A_0, B_1 *etc* are 14 real functions of η, η' and the modulus k of the spatial vector k^i.

We suppose that the active sources appeared at a definite time so that the distribution must be, for causality reasons, completely uncorrelated on scales larger than the particle horizon (we assume a standard Big Bang scenario). Therefore, as stressed, *e.g.*, by Turok [Turok, 1996a], the unequal time correlators are strictly zero outside the intersection of the past light-cones, that is:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta, \eta', r^i) = 0 \quad \text{if} \quad r > \eta + \eta'\,. \tag{9.2.17}$$

Property (**9.2.17**) translates in Fourier space into the fact that the equal time power spectra are white noise on super-horizon scales (that is for $k\eta \ll 1$). Indeed, because the correlators (**9.2.17**) have compact supports, their Fourier transforms are C^∞ in k^i. Therefore causality forces the fourteen functions A_0, B_1 *etc* to be C^∞ in k^2. Moreover, since within one horizon volume there are almost no sources, those fourteen functions must tend to zero on small scales, that is for $k\eta \gg 1$. When $\Theta_{\mu\nu}$ is decomposed into its scalar, vector and tensor components according to Eqns (**9.2.1–9.2.3**), then Eqns (**9.2.10**) and (**9.2.11–9.2.16**) yield

$$\left\langle \widehat{V}_{\rm s}^{*}\widehat{V}_{\rm s}\right\rangle = D_0 + k^2 D_2\ , \tag{9.2.18}$$

$$\left\langle \widehat{\bar{v}}_i^{\rm s*}\widehat{\bar{v}}_j^{\rm s}\right\rangle = D_0 P_{ij}\ , \tag{9.2.19}$$

$$\left\langle \widehat{V}_{\rm s}^{*}\widehat{\pi}_{\rm s}\right\rangle = -k(2\bar{E}_1 + k^2 E_3)\ , \tag{9.2.20}$$

$$\left\langle \widehat{\bar{v}}_i^{\rm s*}\widehat{\bar{\pi}}_j^{\rm s}\right\rangle = -k\bar{E}_1 P_{ij}\ , \tag{9.2.21}$$

$$\left\langle \widehat{\pi}_{\rm s}^{*}\widehat{\pi}_{\rm s}\right\rangle = 3\bar{F}_0 + 4k^2\bar{F}_2 + k^4 F_4\ , \tag{9.2.22}$$

$$\left\langle \widehat{\bar{\pi}}_i^{\rm s*}\widehat{\bar{\pi}}_j^{\rm s}\right\rangle = (\bar{F}_0 + k^2\bar{F}_2)P_{ij}\ , \tag{9.2.23}$$

$$\left\langle \widehat{\bar{\bar{\Pi}}}_{ij}^{\rm s*}\widehat{\bar{\bar{\Pi}}}_{kl}^{\rm s}\right\rangle = \bar{F}_0(P_{ik}P_{jl} + P_{il}P_{jk} - P_{ij}P_{kl})\ , \tag{9.2.24}$$

and similar expressions for the other correlators (see, *e.g.*, [Uzan *et al.*, 2000a]), where we have defined $\left\langle \widehat{\rho}_{\rm s}^{*}(\eta,k^i)\widehat{\rho}_{\rm s}(\eta',k'^i)\right\rangle \equiv \delta(k^i - k'^i)\left\langle \widehat{\rho}_{\rm s}^{*}\widehat{\rho}_{\rm s}\right\rangle$ *etc*, and where we have introduced

$$\widehat{\pi}^{\rm s} \equiv k^2\widehat{\Pi}^{\rm s}\ ,\quad \widehat{\bar{\pi}}_i^{\rm s} \equiv k\widehat{\bar{\Pi}}_i^{\rm s}\ ,\quad V^{\rm s} \equiv kv^{\rm s}\ . \tag{9.2.25}$$

An important property of these correlators is that since (for causality reasons) $(k^2\bar{F}_2)$ and (k^4F_4) are generically of higher order in k than $\bar{F}_0$, then, for small k [Turok, 1996a] [Uzan *et al.*, 2000a]:

$$\frac{1}{3}\left\langle \widehat{\pi}_{\rm s}^{*}\widehat{\pi}_{\rm s}\right\rangle \simeq \frac{1}{2}\left\langle \widehat{\bar{\pi}}_i^{\rm s*}\widehat{\bar{\pi}}_{\rm s}^{i}\right\rangle \simeq \frac{1}{4}\left\langle \widehat{\bar{\bar{\Pi}}}_{ij}^{\rm s*}\widehat{\bar{\bar{\Pi}}}_{\rm s}^{ij}\right\rangle\ . \tag{9.2.26}$$

Similarly, when $(k^2\bar{D}_2)$ is of higher order in k than D_0, and when $(k^2\bar{E}_3)$ is of higher order in k than $\bar{E}_1$, one has:

$$\left\langle \widehat{v}_{\rm s}^{*}\widehat{v}_{\rm s}\right\rangle \simeq \frac{1}{2}\left\langle \widehat{\bar{v}}_i^{\rm s*}\widehat{\bar{v}}_{\rm s}^{i}\right\rangle\ ,\quad \left\langle \widehat{v}_{\rm s}^{*}\widehat{\pi}_{\rm s}\right\rangle \simeq \left\langle \widehat{\bar{v}}_i^{\rm s*}\widehat{\bar{\pi}}_{\rm s}^{i}\right\rangle\ . \tag{9.2.27}$$

These ratios are due to the geometric properties of the SVT decomposition and the non-linear structure of the seed stress-energy tensor. In order to give some insight about this phenomenon, we shall present in the next paragraph the example of a scalar field.

2.2 An example

We consider a N-component real scalar field ψ^A evolving in an arbitrary potential V according to the general Klein-Gordon equations:

$$\Box\psi^A + \frac{\partial V}{\partial\psi^A} = 0\ . \tag{9.2.28}$$

This equation describes the evolution of a large class of topological defects. The spatial traceless part of the stress-energy tensor (denoted with a subscript ST) does not depend on V, and reads (see also [Durrer & Kunz, 1998]):

$$\widehat{\Theta}_{ij}^{\rm ST} = \widehat{\nabla_i\psi} * \widehat{\nabla_j\psi} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\widehat{\nabla_r\psi} * \widehat{\nabla^r\psi}\,, \tag{9.2.29}$$

where a sum on the index A is understood, and where $*$ stands for the convolution product, so that

$$\widehat{\Theta}_{ij}^{\rm ST} = -\int X_{ij}\widehat{\psi}(\eta,\boldsymbol{p})\widehat{\psi}(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}\,, \tag{9.2.30}$$

$$X_{ij} = p_{(i}(k_{j)} - p_{j)}) - \frac{1}{3}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} - p^2)\delta_{ij}\,. \tag{9.2.31}$$

We decompose X_{ij} into its scalar vector and tensor parts, denoted respectively by the superscripts S, V, T:

$$X_{ij}^{\rm S} = p^2\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j\right)\left(-\frac{1}{2} - \mu\frac{k}{p} + \frac{3}{2}\mu^2\right)\,, \tag{9.2.32}$$

$$X_{ij}^{\rm V} = p^2\left(\frac{k}{p} - 2\mu\right)\left(\frac{\hat{p}_i\hat{k}_j + \hat{k}_i\hat{p}_j}{2} - \mu\hat{k}_i\hat{k}_j\right)\,, \tag{9.2.33}$$

$$X_{ij}^{\rm T} = p^2\left[\frac{1}{2}\delta_{ij}(1-\mu^2) - \frac{1}{2}\hat{k}_i\hat{k}_j(1+\mu^2) - \hat{p}_i\hat{p}_j + \mu(\hat{p}_i\hat{k}_j + \hat{k}_i\hat{p}_j)\right]\,, \tag{9.2.34}$$

with the notations

$$\hat{k}_i \equiv k_i/k\,, \quad \hat{p}_i \equiv p_i/p\,, \quad \mu \equiv \hat{p}_i\hat{k}^i\,. \tag{9.2.35}$$

Now, the correlators of the spatial traceless part of the stress-energy tensor are:

$$\left\langle\widehat{\Theta}_{ij}^{\rm ST*}(\eta,\vec{k})\widehat{\Theta}_{kl}^{\rm ST}(\eta',\vec{k}')\right\rangle = \int X_{ij}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k})X_{kl}(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}' \times\left\langle\widehat{\psi}^*(\eta,\boldsymbol{p})\widehat{\psi}^*(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\widehat{\psi}(\eta',\boldsymbol{p}')\widehat{\psi}(\eta',\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{p}')\right\rangle\,. \tag{9.2.36}$$

Since the source distribution is homogeneous and isotropic, this expression can be written under a form similar to Eqns (**9.2.10–9.2.16**):

$$\left\langle\widehat{\Theta}_{ij}^{\rm ST*}(\eta,\boldsymbol{k})\widehat{\Theta}_{kl}^{\rm ST}(\eta',\boldsymbol{k}')\right\rangle = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\int X_{ij}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k})X_{kl}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k})Q(\eta,\eta',k,|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}|)\,\mathrm{d}\boldsymbol{p}\,. \tag{9.2.37}$$

We see that the angular dependence arises only in the tensors X_{ij}. Moreover, in the limit $k\to 0$, one has

$$\int X_{ij}^{\rm S}X_{\rm S}^{ij}\,\mathrm{d}\mu \to \frac{4}{15}p^4\,, \quad \int X_{ij}^{\rm V}X_{\rm V}^{ij}\,\mathrm{d}\mu \to \frac{2}{15}p^4\,, \quad \int X_{ij}^{\rm T}X_{\rm T}^{ij}\,\mathrm{d}\mu \to \frac{8}{15}p^4. \tag{9.2.38}$$

(The scalar, vector and tensor parts are always decoupled.) In addition, we see that in the same limit $k\to 0$, all the correlators (**9.2.37**) are proportional to the integral

$$I = \int p^6 Q(\eta,\eta',0,p)\,\mathrm{d}p\,, \tag{9.2.39}$$

(which is always non zero, being the average of a quartic term) so that using Eqns (**9.2.5–9.2.7**, **9.2.37–9.2.39**), one gets:

$$\left\langle \widehat{\Pi}^{s*}\widehat{\Pi}^{s} \right\rangle = \frac{I\alpha}{k^4} \times 3 \Longleftrightarrow \langle \widehat{\pi}^{s*}\widehat{\pi}^{s} \rangle = I\alpha \times 3 \,, \qquad (9.2.40)$$

$$\left\langle \widehat{\bar{\Pi}}^{s*}_{i}\widehat{\bar{\Pi}}^{i}_{s} \right\rangle = \frac{I\alpha}{k^2} \times 2 \Longleftrightarrow \left\langle \widehat{\bar{\pi}}^{s*}_{i}\widehat{\bar{\pi}}^{i}_{s} \right\rangle = I\alpha \times 2 \,, \qquad (9.2.41)$$

$$\left\langle \widehat{\bar{\bar{\Pi}}}^{s*}_{ij}\widehat{\bar{\bar{\Pi}}}^{ij}_{s} \right\rangle = \frac{I\alpha}{k^0} \times 4 \,, \qquad (9.2.42)$$

where α is a numerical factor of order unity. It is easy to show along similar lines that the correlators involving the velocities obey Eqns (**9.2.27**).

Several conclusions arise from this simple, although generic, model. The first is that, in the long wavelength limit, one finds, as expected, that the scalar, vector and tensor correlators of the anisotropic stress (**9.2.22–9.2.24**) are in the ratio 3 : 2 : 4. The second is that this ratio is only an artefact of the SVT decomposition and of the fact that the seed stress-energy tensor is quadratic in $\widehat{\psi}$: it does not depend on the detailed dynamics of ψ. However, due to the presence of the k/p terms in the X^a_{ij}, as well as the presence of k in Q [see Eqns (**9.2.32–9.2.34**, **9.2.37**)], the angular dependence for larger k will no longer be in the same 3 : 2 : 4 ratio: the function $\bar{F}_0$ defined in Eq. (**9.2.24**) is therefore proportional to I, and the higher order terms in k in $X^{S,V}_{ij}$ and Q generate the expressions for $\bar{F}_2$ and F_4.

3 Active sources as sums of coherent ones

3.1 Coherent sources

By definition, a coherent source is such that the correlators (**9.2.11–9.2.16**) factorize:

$$\widehat{C}_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta,\eta',k^i) = \widehat{c}_{\mu\nu}(\eta,k^i)\widehat{c}_{\rho\sigma}(\eta',k^i) \,. \qquad (9.3.1)$$

Such a requirement implies, as shown in details in [Uzan *et al.*, 2000a], that:

$$\widehat{\rho}^{s} = \sqrt{\mathcal{H}} f_1(u,\eta)e(\boldsymbol{k}) \,, \quad \widehat{P}^{s} = \sqrt{\mathcal{H}} f_3(u,\eta)e(\boldsymbol{k}) \,, \qquad (9.3.2)$$

$$\widehat{V}^{s} = \sqrt{\mathcal{H}} u f_2(u,\eta)e(\boldsymbol{k}) \,, \quad \widehat{\bar{V}}^{s}_{i} = \sqrt{\mathcal{H}} u f_5(u,\eta)\bar{e}_i(\boldsymbol{k}) \,, \qquad (9.3.3)$$

$$\widehat{\pi}^{s} = \sqrt{\mathcal{H}} u^2 f_4(u,\eta)e(\boldsymbol{k}) \,, \quad \widehat{\bar{\pi}}^{s}_{i} = \sqrt{\mathcal{H}} u^2 f_6(u,\eta)\bar{e}_i(\boldsymbol{k}) \,, \qquad (9.3.4)$$

$$\widehat{\bar{\bar{\Pi}}}^{s}_{ij} = \sqrt{\mathcal{H}} u^2 f_7(u,\eta)\bar{\bar{e}}_{ij}(\boldsymbol{k}) \,, \qquad (9.3.5)$$

where $\mathcal{H}$ is the comoving Hubble parameter, where $u \equiv k/\mathcal{H}$. All the f_i are arbitrary functions behaving as u^0 when $u \to 0$, and decaying to 0 when $u \to \infty$. When the f_i do not depend on η, the sources have a scaling behavior. The e, $\bar{e}_i$, $\bar{\bar{e}}_{ij}$ are independent complex random variables which can be defined in such a way that

$$\left\langle e^*(\boldsymbol{k})e(\boldsymbol{k}') \right\rangle = \left\langle \bar{e}^*_i(\boldsymbol{k})\bar{e}^i(\boldsymbol{k}') \right\rangle = \left\langle \bar{\bar{e}}^*_{ij}(\boldsymbol{k})\bar{\bar{e}}^{ij}(\boldsymbol{k}') \right\rangle = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \,. \qquad (9.3.6)$$

An immediate consequence of (**9.3.2–9.3.6**) is:

$$\langle \widehat{\pi}^*_s \widehat{\pi}_s \rangle \,, \quad \left\langle \widehat{\bar{\pi}}^{s*}_{i}\widehat{\bar{\pi}}^{i}_{s} \right\rangle \,, \quad \left\langle \widehat{\bar{\bar{\Pi}}}^{s*}_{ij}\widehat{\bar{\bar{\Pi}}}^{ij}_{s} \right\rangle = \mathcal{O}(k^4/\mathcal{H}^3) \,, \qquad (9.3.7)$$

and that, contrarily to the general case (**9.2.26**), the anisotropic stress correlators of coherent sources are not in a definite ratio for small k. The question to be asked is whether a sum of coherent sources (with for example anisotropic stresses correlators of order k^4) can lead to a generic incoherent source (with anisotropic stresses correlators of order k^0).

3.2 Coherent decomposition of a generic source

As already stressed by several authors [Pen *et al.*, 1997] [Durrer & Kunz, 1998] [Contaldi *et al.*, 1999a], an incoherent source can formally be decomposed into a sum a coherent eigenmodes, that is its correlators can be written as:

$$\widehat{C}_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta,\eta',k) = \sum_{(i)} \lambda^{(i)} \widehat{c}^{(i)}_{\mu\nu}(\eta,k)\widehat{c}^{(i)}_{\rho\sigma}(\eta',k) \ . \tag{9.3.8}$$

By coherent decomposition, we mean that the eigenmodes $\widehat{c}^{(i)}_{\mu\nu}$ behave at low k like the coherent sources of Eqns (**9.3.2–9.3.5**). In a given topological model, these eigenmodes are extracted from the $\widehat{C}_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta,\eta',k)$ given by the numerical simulation of the network [Pen *et al.*, 1997] [Durrer & Kunz, 1998] [Contaldi *et al.*, 1999a].

In the semi-analytic approach adopted here, one can conversely construct an active source by summing several functions f_7 (for the tensorial part) behaving as k^0 but in such a way that their sum behaves as k^{-4} so as both Eqns (**9.2.24**) and (**9.3.5**) are satisfied. We show here a simple example of how this can be realized.

Let us consider a set of N functions $f_n(k)$ obeying causality and white noise constraints [*i.e.*, $f_n(k) \propto k^0$ when $k \to 0$, and $f_n \to 0$ when $k \to \infty$]. For simplicity only, we consider

$$f_n(k) = A_n \Upsilon(k_n - k) \ , \tag{9.3.9}$$

A_n and k_n being two sets of N positive real numbers. We also impose for simplicity that $\forall n$, $k_{n+1} < k_n$. Let us consider then

$$F_N = \sum_n f_n \ . \tag{9.3.10}$$

It is easy to see that

$$F_N(k_0) = \sum_n f_n(k_0) = \sum_{n=0}^{n_0} A_n \quad \text{with} \quad n_0 \equiv \max\{n | k_n > k_0\} \ . \tag{9.3.11}$$

We then consider a function F which is decreasing on $\mathbb{R}_+$ and tends towards ∞ around 0 (for example, $F(k) = k^{-\alpha}$). It is straightforward to see that by choosing

$$A_n = 1/\sqrt{N} \ , \quad k_n = F^{-1}(n/\sqrt{N}) \ , \tag{9.3.12}$$

the set F_N converges towards F. We have therefore explicitely built a function behaving as $1/k^\alpha$ with an (infinite) sum of functions behaving individually as k^0. Coming back to the correlators, the cost is that the causality constraints fade away as we increase the number of functions in the sum since $x_n \to 0$ when $N \to \infty$. However, the causality constraints need not be satisfied by the coherent eigenmodes, only the sum requires causality to be satisfied.

The fact that we have taken a Heaviside function instead of a more regular function is not important. A set of Gaussians of various widths would give the same result at the leading order in k. The fact that we use a finite truncated sum is unimportant as well, as long as the eigenmodes we neglect influence scales much bigger than today's Hubble radius only.

4 Results and conclusion

We considered here tensor modes only, and we computed their contribution to the CMB anisotropies by means of a Boltzmann code developed by one of us (A.R., see [Ma & Bertschinger, 1995] [Seljak & Zaldarriaga, 1996] [Hu & White, 1997b] for the detailed equations). We took a sum of coherent and scaling modes such that

$$\widehat{\bar{\bar{\pi}}}^{\mathrm{s}\,(n)}_{ij} = \sqrt{\mathcal{H}}u^2\sqrt{A_n}\exp(-k_n^2u^2/2)\bar{\bar{e}}_{ij}\,, \qquad (\mathbf{9.4.1})$$

with A_n and k_n given by Eqns (**9.3.12**), such that

$$\left\langle \widehat{\bar{\bar{\pi}}}^{ij*}_{\mathrm{s}}\, \widehat{\bar{\bar{\pi}}}^{\mathrm{s}}_{ij} \right\rangle = \sum_n \left\langle \widehat{\bar{\bar{\pi}}}^{ij*}_{\mathrm{s}\,(n)}\, \widehat{\bar{\bar{\pi}}}^{\mathrm{s}\,(n)}_{ij} \right\rangle \propto k^0\,. \qquad (\mathbf{9.4.2})$$

The results are shown on Fig. 9.1. We see that the sum converges, and that some of the modes have roughly the same amplitude in the region of the Doppler peaks, but not the same phase: the Doppler peak structure is washed out.

The disappearance of Doppler peaks comes from the fact that although each coherent eigenmode gives an oscillatory contribution to the CMB anisotropy, their sum does not. Indeed, as n increases, the extension in u of $\widehat{\bar{\bar{\pi}}}^{s,(n)}_{ij}$ decreases. This implies that the metric is perturbed for shorter and shorter duration hence on larger and larger scales.

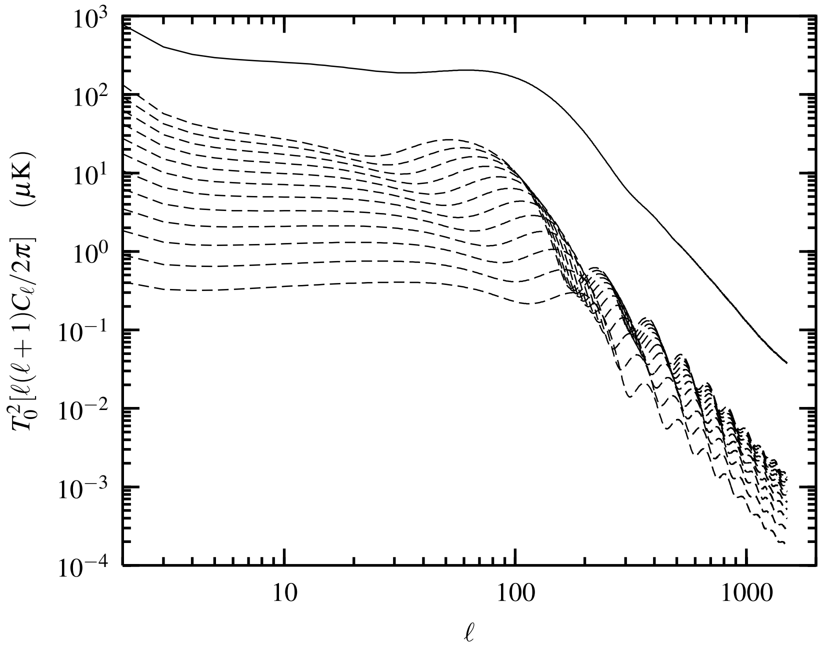


FIGURE 9.1 – Analytic construction of the tensorial contribution of incoherent active sources to the CMB anisotropies. The incoherent source (solid line) is a sum of 12 coherent eigenmodes (dashed lines). The correlators of the coherent eigenmodes behave as k^4, whereas the correlator of the incoherent source behaves as k^0. Vertical units are arbitrary.

The fact that one has to consider a sum of several eigenmodes comes from Eq. (**9.2.37**), which is a convolution product, hence is not factorizable as a product of functions $\widehat{c}(\eta,k)\widehat{c}(\eta',k)$. However, it is possible that one eigenmode dominates the sum, in which case the Doppler peak structure can partially remain, as seems to be the case in the large N model [Durrer *et al.*, 1999b].

Finally, the convolution product appearing in Eq. (**9.2.36**) comes from the fact that any stress-energy tensor component is (a least) *quadratic* with respect to the perturbation (*i.e.*, the field ψ), therefore any correlator is at least quartic with respect to the field. In the most optimistic case, by using Wick's theorem (this is possible when one studies the large N model, see [Durrer *et al.*, 1999b]), this quartic contribution can be reduced to a quadratic one, but even in this case, the remaining formula Eq. (**9.2.36**) is not factorizable as a product of two quantities.

On the contrary, in inflationary scenarios (and, more generally, in any scenario producing an initial power spectrum of fluctuations), the cosmic fluids (baryons, neutrinos, *etc*) are described as coherent sources. Indeed their correlators are only quadratic in the perturbations, because there exists a contribution of the fluids to the background. For example, one has (forgetting here the metric perturbation):

$$\widehat{\delta T}_{00} \propto \rho(\eta)\widehat{\delta}(\eta, \boldsymbol{k}) \ , \tag{9.4.3}$$

$$\widehat{\delta T}_{ij} \propto P(\eta)\widehat{\pi}_{ij}(\eta, \boldsymbol{k}) \ , \tag{9.4.4}$$

and so on, and solving the equations of evolution, one will find that the perturbations are *linear* with respect to the initial conditions (as in the case of the large N model, but here, the stress energy-tensor is also linear with respect to the perturbations):

$$\widehat{\delta}(\eta, \boldsymbol{k}) = \sum_a F_a(\eta, k)\widehat{X}_a(\eta^{\mathrm{in}}, \boldsymbol{k}) \ , \tag{9.4.5}$$

where X_a stands for all the δ, V, π of the different species which take part in the initial conditions (at $\eta = \eta^{\mathrm{in}}$). Then if one calculates the correlators of the stress-energy tensor components, one obtains a quadratic dependence with respect to the perturbations, which can be canceled by using the correlators of the initial conditions. For example:

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{\delta T}^{*}_{00}(\eta, \boldsymbol{k}), \widehat{\delta T}_{00}(\eta', \boldsymbol{k}')\right\rangle &\propto \sum_{a,b} \rho(\eta)\rho(\eta')F_a(\eta, k)F_b(\eta', k')\left\langle \widehat{X}^*_a(\eta^{\mathrm{in}}, \boldsymbol{k})\widehat{X}_b(\eta^{\mathrm{in}}, \boldsymbol{k}')\right\rangle \\ &\propto \sum_{a,b} \rho(\eta)\rho(\eta')F_a(\eta, k)F_b(\eta', k')\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')\widehat{C}_{ab}(k) \ .\end{aligned} \tag{9.4.6}$$

Moreover, all the perturbations generally are supposed (but this is not always the case, see, *e.g.*, [Langlois & Riazuelo, 2000]) to depend on only one random variable so that the sum in the last expression is reduced to one component. We also see that one will not get any convolution product of the form $F_a(\eta, p)F_b(|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}|, \eta')$, and therefore the correlators will factorize.

In conclusion, topological defects are incoherent because their stress-energy tensor is quadratic with respect to the field, whereas for standard fluids (*i.e.*, fluid which have a contribution to the background) it is only linear. Therefore, the fact that defects are incoherent is ultimately linked with the stiff approximation.

5 Acknowledgments

It is a pleasure to thank Martin Kunz and Jean-Philippe Uzan for helping us to clarify some points about the O(N) model, and Ruth Durrer for numerous, fruitful, enjoyable discussions.

Chapitre 10

Microphysique des défauts topologiques et rayonnement fossile (article)

Sommaire

Pour l'instant, nous avons étudié des sources actives dont le tenseur énergie-impulsion était conservé, c'est-à-dire qu'on a considéré des sources qui n'interagissaient que gravitationnellement avec le reste de l'Univers. Dans certains cas, cette hypothèse est justifiée. Par exemple, dans le cas de défauts globaux, on impose que le champ à N composantes n'interagit pas avec le reste de l'Univers, et on résout l'équation de Klein-Gordon, qui est une réécriture des équations de conservation correspondantes. Il faut donc vérifier (et c'est ce qu'on fait en pratique [Durrer *et al.*, 1999a]) que le tenseur énergie-impulsion est bien conservé. Une autre façon (beaucoup moins satisfaisante) de faire est de ne calculer que certaines des composantes du tenseur énergie-impulsion et de déduire les autres des équations de conservation [Pen *et al.*, 1997]. Dans le cas des cordes cosmiques locales, la situation est plus subtile. L'équation du mouvement d'un point de la corde correspond aussi à l'équation d'évolution d'un tenseur énergie-impulsion conservé, mais quand on fait des simulations numériques, il faut inclure une autre étape essentielle dans la modélisation : le calcul à chaque pas de temps des intercommutations entre les différents segments de cordes. Ces intercommutations ont tendance à favoriser l'apparition de petites boucles de cordes cosmiques. Bien qu'il soit en principe possible de suivre l'évolution de ces boucles, il est fréquent qu'on les enlève purement et simplement de la simulation pour économiser du temps de calcul. Physiquement, il est raisonnable d'imaginer que ces boucles puissent disparaître au cours du temps, puisqu'elle correspondent à des configurations de champ topologiquement triviales. Cependant, même dans ce cas, l'énergie contenue dans ces boucles doit être réinjectée quelque part.

Le devenir de ces boucles de cordes cosmiques est en fait très dépendant du modèle de physique des hautes énergies sous-jacent. À la lecture des travaux réalisés dans le domaine (voir les références du §2), il semble que les modèles les plus réalistes de cordes cosmiques prédisent que celles-ci produisent diverses particules parmi lesquelles photons, baryons et neutrinos, dont il convient par conséquent d'étudier l'influence sur la formation des structures.

Dans ce chapitre, tiré d'un article paru dans *Physical Review D* [Riazuelo *et al.*, 2000], nous discutons quelques conséquences observationnelles d'un modèle de sources actives dont le tenseur énergie-impulsion n'est pas conservé. Dans notre modélisation, cela revient (§3) à changer les équations de conservation des sources actives en

$$\dot{\mathcal{R}}^{\rm s} = -3\mathcal{H}(\mathcal{R}^{\rm s}+\mathcal{P}^{\rm s}) - \Delta\mathcal{U}^{\rm s} - \dot{\mu}\mathcal{R}^{\rm s} , \quad (\mathbf{10.0.1})$$

$$\dot{\mathcal{U}}^{\rm s} = -4\mathcal{H}\mathcal{U}^{\rm s} - \mathcal{P}^{\rm s} - \left(\frac{2}{3}\Delta + 2K\right)\mathcal{Q}^{\rm s} - \dot{\mu}\mathcal{U}^{\rm s} , \quad (\mathbf{10.0.2})$$

$$\dot{\bar{\mathcal{U}}}{}^{\rm s}_i = -4\mathcal{H}\bar{\mathcal{U}}^{\rm s}_i - \left(\frac{1}{2}\Delta + K\right)\bar{\mathcal{Q}}^{\rm s}_i - \dot{\mu}\bar{\mathcal{U}}^{\rm s}_i , \quad (\mathbf{10.0.3})$$

où $\dot{\mu}$ représente un taux de désintégration. Ce terme est ensuite réinjecté dans les équations de conservation des autres fluides (§7, **4.4.16–4.4.18**) :

$$\dot{\delta}^\flat_f = -(1+\omega_f)\Delta v^\flat_f - 3\mathcal{H}(1+\omega_f)\Gamma_f + 3\mathcal{H}(\omega_f - u^2_{{\rm s},f})\delta^\flat_f + x_f\dot{\mu}\frac{\mathcal{R}^{\rm s}}{\rho_f} , \quad (\mathbf{10.0.4})$$

$$\begin{aligned}\dot{v}^\flat_f = & -(1-3u^2_{{\rm s},f})\mathcal{H}v^\flat_f - \Psi - 3u^2_{{\rm s},f}\Phi - \Gamma - \frac{u^2_{{\rm s},f}}{1+\omega_f}\delta^\flat_f - \frac{2}{3}\frac{\omega_f}{1+\omega_f}(\Delta+3K)\pi_f \\ & + x_f\dot{\mu}\frac{\mathcal{U}^{\rm s}}{(1+\omega_f)\rho_f} ,\end{aligned} \quad (\mathbf{10.0.5})$$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{v}}{}^\flat_{i,f} = & -(1-3u^2_{{\rm s},f})\mathcal{H}\bar{v}^\flat_{i,f} - \bar{\Psi}_i - 3u^2_{{\rm s},f}\bar{\Phi}_i - \frac{1}{2}\frac{\omega_f}{1+\omega_f}(\Delta+2K)\bar{\pi}_{i,f} \\ & + x_f\dot{\mu}\frac{\bar{\mathcal{U}}^{\rm s}_i}{(1+\omega_f)\rho_f} .\end{aligned} \quad (\mathbf{10.0.6})$$

Les quantités x_f représentent les "rapports de branchement", c'est-à-dire la portion de sources actives se désintégrant dans le fluide f, et satisfont à la contrainte

$$\sum_f x_f = 1 . \quad (\mathbf{10.0.7})$$

Nous avons étudié les conséquences de ces modèles tant sur les anisotropies du rayonnement fossile (§4.1) que sur le spectre de puissance de la matière baryonique (§4.2). Sans surprise, nous avons trouvé que c'est en injectant de l'énergie dans les photons qu'on modifiait le plus les anisotropies du rayonnement fossile (figure 10.1) et que c'est en injectant de l'énergie dans les baryons qu'on affectait le plus le spectre de puissance de la matière baryonique (figure 10.4). Injecter de l'énergie dans les baryons et les photons a également une influence non négligeable respectivement sur les anisotropies du rayonnement fossile et le spectre de puissance de la matière baryonique car photons et baryons sont couplés par diffusion Thomson pendant une grande partie de l'histoire de l'Univers.

Le principal résultat de cette analyse est que ce terme supplémentaire dans les équations a une importance au moins aussi grande que les autres paramètres libres de notre modèle. D'une manière générale, cet effet a tendance à remonter l'amplitude du spectre des anisotropies du rayonnement fossile au niveau du premier pic, laissant espérer un meilleur accord entre la plupart des modèles de défauts topologiques et les observations. Une meilleure modélisation de cet effet s'avère donc indispensable pour faire des prédictions fiables dans le cadre de ces modèles de formation des structures.

Topological Defects and CMB anisotropies: are the predictions reliable?

Alain Riazuelo[1*], Nathalie Deruelle[1,2,3†] and Patrick Peter[1,4‡]

[1] *Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, UMR 8629 du Centre National de la Recherche Scientifique, Observatoire de Paris, F-92195 Meudon Cedex (France)*

[2] *Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Silver Street, Cambridge, CB3 9EW (England)*

[3] *Institut des Hautes Études Scientifiques, F-91140 Bures-sur-Yvette (France)*

[4] *Institut d'Astrophysique de Paris, UPR 341 du Centre National de la Recherche Scientifique, 98 bis boulevard Arago, F-75014 Paris (France)*

Abstract : We consider a network of topological defects which can partly decay into neutrinos, photons, baryons, or Cold Dark Matter. We find that the degree-scale amplitude of the cosmic microwave background (CMB) anisotropies as well as the shape of the matter power spectrum can be considerably modified when such a decay is taken into account. We conclude that present predictions concerning structure formation by defects might be unreliable.

PACS numbers : 98.80.Cq, 98.70.Vc

1 Introduction

Two challenging paradigms to explain structure formation in the Universe are currently developed, namely cosmological inflation [Guth, 1981] [Linde, 1990] and topological defects [Vilenkin & Shellard, 1994]. On the one hand, inflation is a simple theory, based on the linear evolution of acausal and coherent initial perturbations produced during an accelerated phase of expansion of the early Universe. Several public codes are available, notably CMBFAST [Seljak & Zaldarriaga, 1996] [CMBFAST, `http`], to compute the CMB anisotropies of a given model in few minutes, and these predictions are robust. On the other hand, topological defects, which are supposed to have formed after a cosmological phase transition in the early Universe, are much more difficult to handle, because

*Email addres: `Alain.Riazuelo@obspm.fr`
†Email addres: `Nathalie.Deruelle@obspm.fr`
‡Email addres: `Patrick.Peter@obspm.fr`

of the highly non-linear structure of their dynamics. After some pioneering work by Bennett, Bouchet, Stebbins [Bouchet *et al.*, 1988] [Bennett & Bouchet, 1990], Shellard, Allen [Shellard & Allen, 1990], Perivolaropoulos [Perivolaropoulos, 1995], Caldwell *et al.* [Allen *et al.*, 1997], the first detailed predictions of some defect models have been published only recently. In particular, Turok, then Pen, Seljak and Turok [Turok, 1996a] [Pen *et al.*, 1997] [Turok *et al.*, 1998] have considered global defects, as well as Durrer and collaborators [Durrer *et al.*, 1996] [Durrer & Zhou, 1996] [Durrer & Kunz, 1998] who studied more carefully the large N limit. Following Vincent, Hindmarsh and Sakellariadou [Vincent *et al.*, 1997], Battye, Albrecht and Robinson [Albrecht *et al.*, 1999] [Battye *et al.*, 1998], have studied a network of line-like segments with given correlation length and velocity distribution, as well as Pogosian and Vachaspati [Pogosian & Vachaspati, 1999] who also considered the wiggly structure of the strings. Allen, Shellard and collaborators [Avelino *et al.*, 1999] [Wu *et al.*, 1998], and Contaldi, Hindmarsh and Magueijo [Contaldi *et al.*, 1998] [Contaldi *et al.*, 1999a] have considered local cosmic strings.

Several ground experiments (Saskatoon, PythonV, TOCO, see [Netterfield *et al.*, 1997] [Coble *et al.*, 1999] [Torbet *et al.*, 1999]; see also [Tegmark, `http`] for an up-to-date compilation of the current results) have by now probed the degree-scale anisotropy of the microwave sky. They seem to indicate the presence of a high peak in the spectrum. Now, in contradiction with these observations, topological defect models do not produce generically much more power on the degree scale than on the largest scales observed by the COBE satellite [Smoot *et al.*, 1992] [Bennett *et al.*, 1996]. The reason is that, although the defects evolve according to causal processes, thus producing power on small angular scales on the last scattering surface, one must also take into account their gravitational interaction with the photons *after* last scattering. This so-called Integrated Sachs-Wolfe effect (see, *e.g.*, [Hu, 1996]), known to be negligible in most inflationary scenarios, greatly increases in the case of defects the power on large angular scales, thus contradicting the present observations (see however [Pogosian & Vachaspati, 1999], where the wiggly structure of strings is properly taken into account, yielding more power on the degree scale). Moreover, in most defect theories, the situation is also worsened by the fact that scalar, vector and tensor modes all contribute significantly to the overall CMB anisotropies, whereas only the scalar contribution is expected to produce more power on small angular scales than on larger ones.

It must however be stressed that, in all the numerical defect models already mentioned, an important physical effect, to wit their decay into gravitational radiation and/or elementary particles, has been considered in most cases in a phenomenological way only (but see however [Buonanno & Damour, 1999]). Turok *et al.* and Durrer *et al.* have imposed and checked that their global defect stress-energy tensor is conserved. In cosmic string numerical simulations one has to deal with the problem of loop production and evolution, which has been treated in various ways. Turok *et al.* have introduced an extra radiation fluid into which their cosmic string loops are supposed to decay, Battye *et al.* have introduced an extra fluid with given constraints on its stress-energy tensor, and Magueijo *et al.*, whose stress-energy tensor is not conserved due to the fact that the smallest loops are extracted out of the simulation, "dump" the string energy losses into either extra-fluids with no anisotropic stress and various equations of state, or in one or the other of the existing background fluids, that is the baryons, photons, neutrinos or CDM. Finally, Shellard *et al.* treat the loops as relativistic point masses, and Pogosian *et al.* treat them as small segments.

The aim of this paper is first to show that the microphysics of defects imposes that energy be released in the cosmic fluids and that the predictions concerning the CMB anisotropies change drastically when even a small fraction of the network energy is released directly in the form of photons or baryons, and, to a lesser extent, neutrinos. As for the matter power spectrum, we will see that it is greatly affected if the network energy is released into photons, neutrinos, or baryons.

Such a lack of generic predictive power for seeds-based models has already been pointed out in another context by Durrer and Sakellariadou [Durrer & Sakellariadou, 1997], who have used various ansätze for the stress-energy tensor components of scaling coherent seeds and have found a wide variety of results for the positions and heights of the induced CMB anisotropies Doppler peaks. One could argue that these results were obtained by using very ad-hoc hypothesis for the seeds correlators, but at least three other works have reached similar conclusions by using more realistic models. Perivolaropoulos [Perivolaropoulos, 1995] has pointed out that a correct modeling of the gravitational interaction between cosmic strings wiggles and electrons could induce more small scale anisotropies than previously expected, and this analysis was confirmed by the more precise numerical works of Pogosian and Vachaspati [Pogosian & Vachaspati, 1999]. Finally, the inclusion of decay products in the specific model of Contaldi *et al.* [Contaldi *et al.*, 1998] [Contaldi *et al.*, 1999a] proved to have an important effect on the CMB anisotropies spectrum. Interestingly enough, these two models which add some small-scale physics give a better agreement with observations than those which do not include any small-scale physics. We show here that such effects are not restricted to any specific model but hold for a very large class of defects and decay processes.

We shall first discuss the microphysics behind such effects, then show how one can generically take them into account, and finally present some results.

2 The decay products of realistic string models

Topological defects fall in various classes [Vilenkin & Shellard, 1994].

Uncharged Goto-Nambu strings form loops which are usually supposed to decay dominantly into gravitational radiation [Vilenkin & Vachaspati, 1987] [Allen, 1997], thus guaranteeing the scaling behavior of the network (that is the fact that the ratio of the energy density contained in the network with the total energy density is constant in time). This extra gravitational radiation added to the background is observationally constrained by, *e.g.*, the millisecond pulsar timing measurements [Stinebring *et al.*, 1990] [Kaspi *et al.*, 1994] [Thorsett & Dewey, 1996] [Mac Hugh *et al.*, 1996].

Uncharged global strings, when seen from a distance, appear very much like local ones, but with an energy per unit length renormalized to include long-range interaction effects [Goldstone, 1961]. The overall global string network is therefore expected to behave much like a Goto-Nambu network, except for the small loops [Lund & Regge, 1976] [Dabholkar & Quashnock, 1990] [Copeland *et al.*, 1990]. The main difference between a local and a global string loop is that while the former is supposed to radiate mostly in gravitational waves, the latter looses energy mainly through massless Goldstone boson radiation, a process known to be far more efficient [Lund & Regge, 1976] [Dabholkar & Quashnock, 1990] [Copeland *et al.*, 1990]. This new extra component added to the background is only constrained by nucleosynthesis [Davis, 1985a] [Davis, 1985b].

The last potentially interesting class of strings in the context considered here is that of Grand-Unified (GUT) superconducting cosmic strings [Witten, 1985] [Davis & Davis, 1997] (only GUT strings can be relevant in large scale structure formation and CMB fluctuations). Again, their network evolution is almost the same as that of Goto-Nambu strings because most of the evolution takes place when the currents flowing along the strings are negligible [Copeland *et al.*, 1987]. This is however true only for infinite strings or for those having very large radius of curvature.

When a superconducting loop decays, its energy can be very efficiently released in the background *directly* in the form of electromagnetic radiation [Copeland *et al.*, 1988]. The electromagnetic radiation cannot propagate because of the surrounding plasma, the influence of which cannot be neglected. The waves form shells where energy is concentrated. These shells are the basis for the explosive Ostriker, Thompson and Witten large scale structure formation model [Ostriker *et al.*, 1986] and yield a distortion in the microwave background by modifying its spectrum, implying non zero values for the parameters μ (chemical potential distortion, see, *e.g.*, [Hu & Silk, 1993]) and y (characterizing the Sunyaev-Zel'dovich effect, see, *e.g.*, [Zel'dovich & Sunyaev, 1969] [Stebbins, 1997]). This very stringent constraint, together with, *e.g.*, nucleosynthesis constraints [Sigl *et al.*, 1995] almost rules the scenario out, leaving as the only possibility that the radiation can only be emitted at much higher frequencies (to allow propagation in the plasma). This requires that the strings can be considered current-free until they have shrunk to a sufficiently small size, the wavelength of the radiation being proportional to the emitting loop radius. As a result, one can consider the network evolution as, again, that of a Goto-Nambu network with the difference that part of the energy contained in the loops can now be transferred *directly* into the photon fluid.

When such a loop shrinks however, the integrated current being conserved, the energy it contains per unit length increases and its effects become more and more important on the string dynamics. The resulting loop distribution can accumulate to stationary states known as vortons [Carter, 1991] [Carter, 1995] [Brandenberger *et al.*, 1996]. This overproduction of vortons breaks the scaling behavior of the network, thus leading to such a cosmological catastrophe that one must assume that the vortons are sufficiently unstable to decay in less than one Hubble time.

The new phenomenon one therefore needs to consider is the fate of the small charged loops. As discussed above, they can decay into gravitational radiation, or directly into photons. The third, largely overlooked possibility when it comes to compute CMB anisotropies or matter power spectrum, is that they might decay into their constituents [Martin & Peter, 2000], namely massive Higgs and gauge bosons and the particles they couple to and that make the current, collectively referred to as "X"-particles. As these particles have masses comparable to the grand unification scale, their decay products can only be estimated by the relevant QCD extrapolations at high energy [Hill, 1983] [Aharonian *et al.*, 1992]. The standard scenario is that the primary X-particle will decay into a lepton (usually an electron) and a quark which subsequently initiate a hadronic shower. Once the shower has evolved, one ends up with roughly 3% nucleons [Hill, 1983] [Aharonian *et al.*, 1992], and the rest in π's, which, because of their decays or interactions with other background fluids, turn into neutrinos, photons and electrons. These interactions have even been used to try and explain the ultra high energy cosmic ray [Linsley, 1963] [Brooke *et al.*, 1985] [Efimov *et al.*, 1991] [Lawrence *et al.*, 1991] [Watson, 1991] [Egorov, 1993] [Yoshida *et al.*, 1995] enigma by means of topological defects [Hill *et al.*, 1987] [Bhattacharjee & Rana, 1990] [Bhattacharjee *et al.*, 1992] [Gill & Kibble, 1994] [Bhattacharjee & Sigl, 1995] [Protheroe & Johnson, 1996a]. Note that this picture does not take into account the possibility that part of the decay product be a stable particle, *i.e.*, a constituent of the dark matter. The Lightest Super Particle is a possible candidate, for instance if SUSY is demanded, as should be the case for any GUT model.

This analysis of small superconducting loops has led us to conclude that they mostly decay (hence ensuring that their network scales) *directly* into the constituents of the Universe rather than into extra-fluids such as gravitational radiation.

In fact one can also argue that *non* superconducting strings, because they intercommute, can also partly decay into photons, baryons, neutrinos or dark matter, and not only into gravitational radiation or Goldstone bosons for the global ones. Even global defects can also decay [Vilenkin & Shellard, 1994]: when the gradients are strong enough high energy particles and gravitational radiation are produced. One might expect however that the energy losses in the form of background fluids be far more efficient for superconducting, rather than uncharged, defects.

3 A two-parameter decay model

When one solves the classical (Goto-Nambu) equations of motion for the string network in a Friedmann-Robertson-Walker (FRW) background, completed by a set of rules which fixes the intercommutation of long strings into loops, in the stiff approximation [Veeraraghavan & Stebbins, 1990] framework (in which the defect network energy is a first order perturbation to the FRW background), and if no extra physics is added to the problem, the corresponding stress-energy tensor of the strings *must* be covariantly conserved. If it is not, that only means that the numerical integration is not precise enough. The same holds true for global defects.

Now, as we have seen in §2, extra physics *must* be added. Indeed intercommutation leads to the formation of more and more small loops per Hubble volume which would prevent scaling to take place and soon dominate the evolution of the Universe, were they not eliminated by turning into gravitational radiation and/or various elementary particles. The string stress-energy tensor cannot then be conserved. This is particularly clear in numerical simulations when loops smaller than a given size are phenomenologically extracted by hand from the network (as in, *e.g.*, [Contaldi *et al.*, 1998] [Contaldi *et al.*, 1999a]).

In the semi-analytic approach we use here (see below), we model active seeds by a stress-energy tensor $\Theta^{s}_{\mu\nu}$ which, from the start, embodies the scaling properties of the network: first, deep in the radiation-dominated or matter-dominated eras, its equal-time correlators $\left\langle \Theta^{s}_{\mu\nu}(\eta,\boldsymbol{x})\Theta^{s}_{\rho\sigma}(\eta,\boldsymbol{x}')\right\rangle$ depend on $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')/\eta$ only, second they vanish at small scales (η is conformal time and x^i are comoving coordinates). Therefore this effective stress-energy tensor describes in fact, not only the defects themselves but also their decay products, as long as these decay products are themselves "seeds", that is an active perturbation added to the background fluids. Now among the possible decay products described in §2, only the gravitational and Goldstone radiations enter in that category. Hence, if the defects were scaling only via the production of this "extra" radiation, the effective stress-energy tensor we use, being the sum of the stress-energy tensor of the defects and that of the extra radiation they produce, would be conserved. In contrast, in numerical simulations where the defect stress-energy tensor is not conserved, such decay products must be treated as an extra fluid with given equation of state.

However, as we have seen, in the case of superconducting strings at least, loops decay mainly through the emission of high energy particles which soon turn into (mostly) neutrinos and photons, which must be added to those already existing in the background. Therefore we shall describe the defects by an effective stress energy-tensor which will not be conserved in order to take into account the decay of the loops into high energy particles, and we shall dump the string energy losses not in an extra component but into the background fluids.

In the semi-analytic approach initiated by Durrer and collaborators [Durrer *et al.*, 1996] [Durrer & Zhou, 1996] [Durrer & Kunz, 1998], the defect network and the extra "seeds" they decay into are modeled by a stress-energy tensor $\Theta^{s}_{\mu\nu}$ which acts as a source for the linearized Einstein equations and induces inhomogeneities in the cosmic fluids. The ten components of this stress-energy tensor are then drastically constrained by a number of physical requirements [Turok, 1996c] [Deruelle *et al.*, 1997] [Uzan *et al.*, 2000a], which take into account that the seeds:

1. are statistically homogeneous and isotropic,

2. are created at a phase transition in an up to then perfectly homogeneous and isotropic Universe (hence obeys specific causality [Turok, 1996c] and matching [Deruelle *et al.*, 1997] conditions),

3. evolve deep in the radiation era and deep in the matter era in a way which is statistically independent of time (scaling requirement [Uzan *et al.*, 2000a]).

One can now suppose that the defect network is made of long strings of comoving curvature radius $R_L > 1/\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ is the comoving Hubble parameter), which eventually interconnect so as to form loops. When they become too small these loops decay at a certain rate (depending on the details of the decay processes). The loss of energy of the stress-energy tensor can therefore, in a rough approximation, be modeled as

$$D_\mu \Theta_{\rm s}^{\mu\nu} = F^\nu \,, \qquad \textbf{(10.3.1)}$$

$$\widehat{F}^\nu = -\dot{\mu}\widehat{\Theta}_{\rm s}^{0\nu} \quad \text{with} \quad \dot{\mu} = \Gamma \Upsilon(k - k_c) \,, \qquad \textbf{(10.3.2)}$$

where D_μ is a covariant derivative (we assume flat spatial section), a hat denotes a Fourier transform, Υ is the Heaviside function, $k \propto 1/R_L$ is the comoving wavenumber. Γ is a free function which determines the decay rate of the loops into the decay products, and k_c is the scale above which the loops begin to decay. This $\widehat{F}^\nu$ is then injected into the other fluid perturbation equations with branching ratios x_f, so as to ensure that the total stress-energy tensor is conserved (see the appendix for the actual equations we solve). The branching ratios x_f are in principle calculable when the decay microphysics is explicited.

4 Results

4.1 CMB anisotropies

We have computed numerically the CMB anisotropies and the matter power spectrum such decaying seeds produce. We first summarize our findings before going into discussing them. Dumping energy into CDM has negligible effect on the CMB anisotropies spectrum. Dumping energy into neutrinos has a relatively small influence on the spectrum, which is modified by a few tens of percent. This can either increase or decrease the amplitude of the spectrum [we have found that this depends on the parameters of the decay term (**10.3.2**), as well as on the ansätze for the correlators (**10.7.6**, **10.7.7**)]. On the contrary, the spectrum is tremendously affected by injecting energy into either photons or baryons, although the effect is much stronger when one injects energy directly into photons, which can boost the degree-scale amplitude of the spectrum by a factor as large as 50. The precise amplitude of the boost depends of course on the underlying defect model, but all those we have checked present the same qualitative features.

A simple interpretation of these results is that energy, when injected into either neutrinos or CDM, influences the photons perturbations only through gravity, so that the influence of this energy injection on the CMB anisotropies is small. On the opposite, by dumping energy into baryons or photons, one directly affects the evolution of the perturbed photons density and/or velocity since photons and baryons are strongly coupled through Thomson diffusion before recombination. The angular scale at which this effect is strongest is given by the angular size of the "decay scale" (*i.e.*, the Hubble radius when $k_c = \mathcal{H}$) at the last scattering surface, that is $\theta \simeq 1\,\text{deg}$. For example in Fig. 10.1, we consider the scalar contribution to the CMB anisotropies of a specific coherent model where we have chosen the equal time correlators for the pressure and the anisotropic stress [see Eqns (**10.7.6**, **10.7.7**)] in such a way that they respect the standard causality and scaling requirements (see appendix for more details). We have also chosen the relative amplitudes of the correlators so that, when the stress-energy tensor is conserved, we "mimic" the

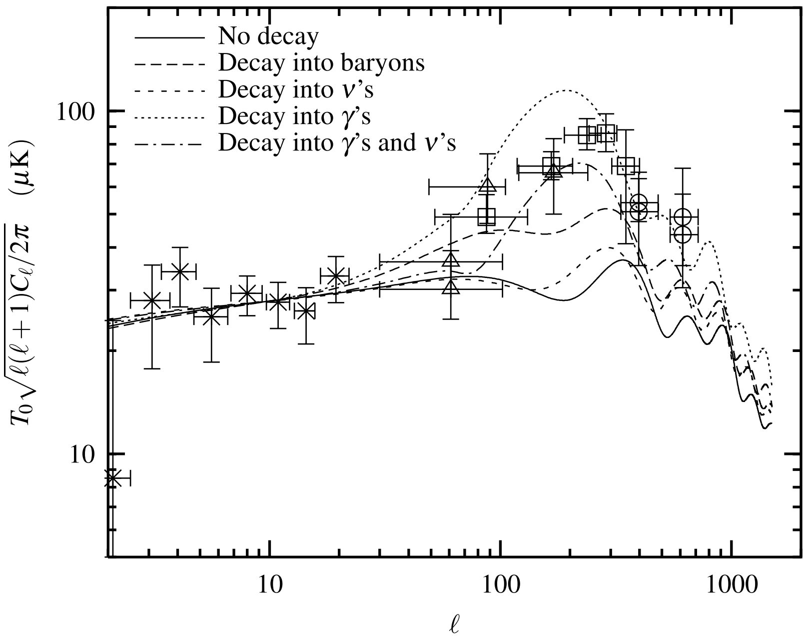


FIGURE 10.1 – CMB anisotropies in a model where the defect stress-energy tensor is not conserved, with $k_c = \Gamma = \mathcal{H}$. The solid line represents the case with conserved stress-energy tensor, as well as the case where one dumps energy into CDM, which are almost identical. The short-dashed and long-dashed lines represent the cases where one dumps energy into neutrinos and baryons respectively. The highest (dotted) line represents the case where energy is injected into photons. The dot-dashed line (which fits the data points best) shows that by tuning by hand the branching ratios (here, $x_\nu = x_\gamma = 0.5$ and $x_c = x_b = 0$) it is possible to be in much better agreement with the data points. Note that the precise values of the best-fit branching ratios depend on the model one considers.

situation of more realistic incoherent numerical defect models (*i.e.*, the CMB anisotropies spectrum lacks power on the degree-scale with respect to observations; the coherent model presented here exhibits acoustic oscillations which are expected to be smoothed out by decoherence, see [Turok, 1996a] [Pen *et al.*, 1997] [Turok *et al.*, 1998]). The two parameters of the decay model, k_c and Γ [see Eq. (**10.3.2**)] have both been chosen equal to $\mathcal{H}$. We have also studied many other models such as the "pressure model" [Cheung & Magueijo, 1997] [where ones sets the anisotropic stress $\widehat{\Pi}^s$ to 0, see Eqns (**10.7.6**, **10.7.7**)], or the "anisotropic stress model" (where the pressure $\widehat{P}^s$ is set to 0, see, *e.g.*, [Hu & White, 1997b]), which all yield similar qualitative results. In all what follows, the CMB data points are taken from [Tegmark, `http`] and the matter power spectrum data points are those of the APM catalog [Baugh & Efstathiou, 1993] and of Dekel *et al.* [Kolatt & Dekel, 1997].

In Figs. 10.2 and 10.3 we study the influence of the parameters k_c and Γ for the model of Fig. 10.1 where energy is equally released into photons or neutrinos. By increasing k_c (Fig. 10.2), which gives essentially the wavenumber scale at which energy is injected, we get that, as expected, the spectrum is enhanced on smaller angular scales, *i.e.*, the bump is shifted to the right. On the contrary, by increasing Γ (Fig. 10.3), namely the defects decay rate, energy is transferred more rapidly into the background fluids, and therefore at larger wavelengths. The spectrum is thus enhanced on larger angular scales, so that the bump is shifted to the left.

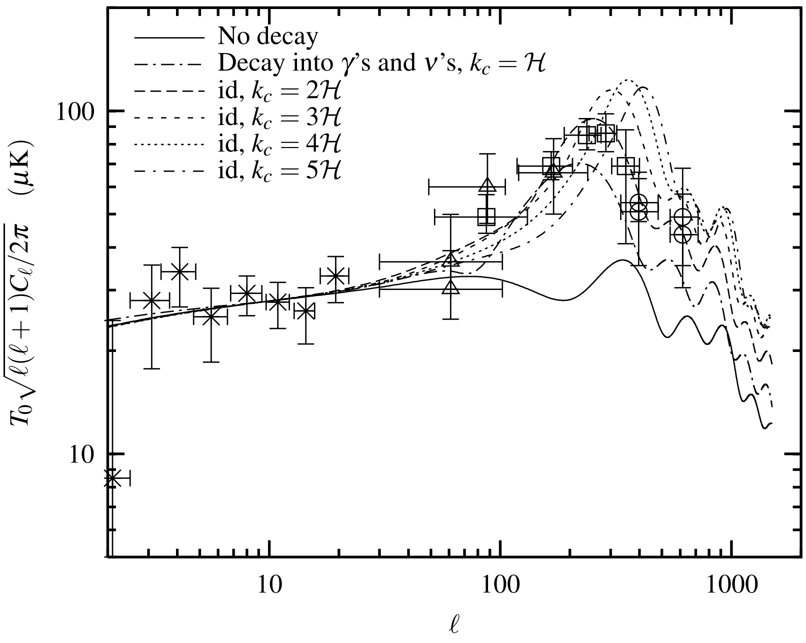


FIGURE 10.2 – Influence of the decay scale k_c on the CMB anisotropies. We use the "best fit" model of Fig. 10.1, with 50% of the energy released into photons and another 50% into neutrinos, and we vary the parameter k_c from $\mathcal{H}$ to $5\mathcal{H}$. The solid line represents as in Fig. 10.1 the case where the seed stress-energy tensor is conserved, and the case $k_c = \Gamma = \mathcal{H}$ corresponds to the dot-dashed curve, also plotted in Fig. 10.1.

4.2 Matter power spectrum

Dumping energy into CDM has also negligible effect on the (baryonic) matter power spectrum. On the contrary, the spectrum is strongly affected by injecting energy into either photons or neutrinos. It has the consequence of reducing the excess of energy on small scales, because of the free streaming of these relativistic particles (see, *e.g.*, [Padmanabhan, 1993]). Finally, injecting energy into baryons gives an intermediate result. Figure 10.4 summarizes these results by showing the matter power spectrum corresponding to the model of Fig. 10.1.

4.3 Observational constraints

In all these numerical analysis, we have assumed that the radiation emitted by the high energy decay product is immediately thermalized as soon as it is produced. However this is only an approximation. Three unwanted effects can be caused by this radiation. First, the radiation emitted before the last scattering surface may not have had the time to thermalize, thus leading to a distortion of the CMB black-body spectrum; this would be the case if too much energy is injected between $z \simeq 10^6$ and $z \simeq 10^3$. However we inject a small amount of energy compared to that already contained in the CMB (roughly 10^{-6} per Hubble time since one is in the radiation-dominated era), so that (considering the current observational bounds on the μ and y parameters) one can assume it had time to thermalize, see [Hu & Silk, 1993]. Second, the radiation emitted after the last scattering surface will not be thermalized, and therefore could produce an important γ-ray background [Sigl *et al.*, 1995]. Third, the high-energy particles could photo-dissociate the ^{4}He nuclei, thus

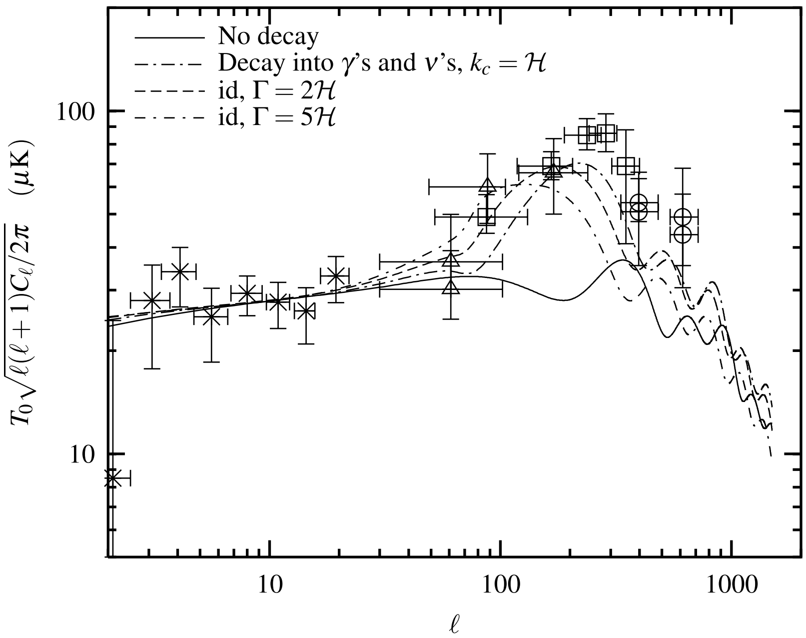


FIGURE 10.3 – Influence of the decay rate Γ on the CMB anisotropies. We use the "best-fit" model of Fig. 10.1, with 50% of the energy released into photons and another 50% into neutrinos, and we vary the parameter Γ from $\mathcal{H}$ to $5\mathcal{H}$. The solid line represents as in Fig. 10.1 the case where the seed stress-energy tensor is conserved, and the case $k_c = \Gamma = \mathcal{H}$ corresponds to the dot-dashed curve, also plotted in Fig. 10.1.

producing lighter nuclei such as ^{3}He and D, which in turn can produce too much ^{6}Li [Jedamzik, 2000].

These three effects are already constrained by the observations of the CMB spectrum, the diffuse γ-ray background and the light elements abundances, but our scenario still happens to be tenable, as shown on Fig. 10.5 (taken from [Sigl *et al.*, 1995]). In the opposite case, this would disproof most scenario of structure formation seeded by topological defects which dominantly decay into photons.

5 Conclusion

We have included some microphysics, up-to-now largely overlooked, in the description of topological defects. This microphysics deals with the decay of defects, and notably superconducting cosmic strings, into background fluids, rather than gravitational radiation as usually assumed. This decay has important observational consequences, which may (depending, of course, on the exact interaction one considers) put the defect models in a better position when confronted to the current observational data.

One could of course argue that the simple model we have considered here (coherent seeds, crude interaction term) is too naive, however our purpose was mainly to illustrate the consequences of this idea rather than to study a more specific realistic model, which we keep for later work. Since the main consequences of dumping energy into the background fluids do not seem to depend too much on the details of the equal time correlators we have considered, but rather on the details of the interactions, we strongly advocate for a more careful study of the branching ratios.

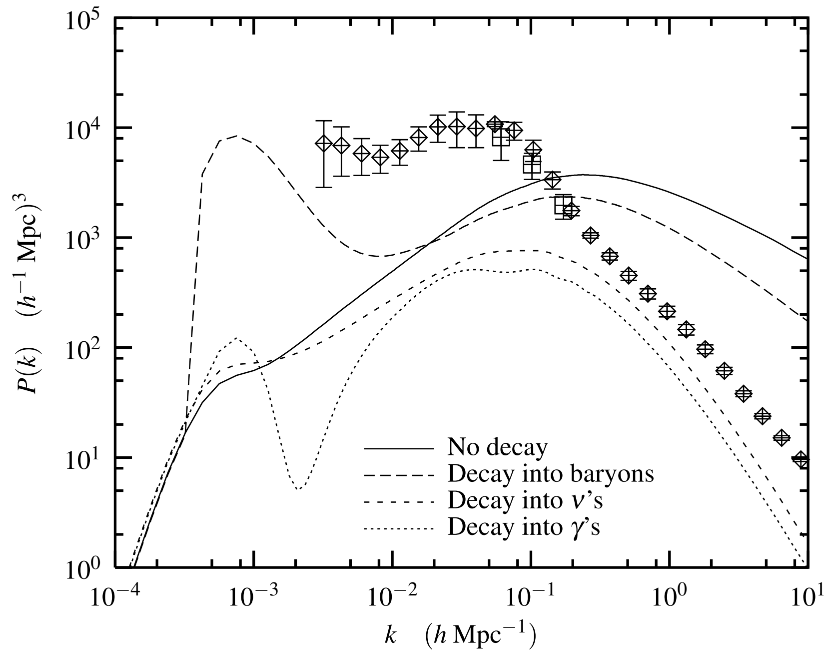


FIGURE 10.4 – Matter power spectrum in the same model as in Fig. 10.1, with $k_c = \Gamma = \mathcal{H}$. The solid line represents the case where the seed stress-energy tensor is conserved. Dumping energy into neutrinos (short-dashed line) or photons (dotted line) has almost the same effect, whereas dumping energy into CDM (solid line) has again negligible effect. Dumping energy into baryons (long-dashed line) boosts the spectrum on larger scales, whereas it damps it on smaller scales. Note that the sharp bump around $k = 10^{-3} h\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ shows the scale at which one injects energy (here, the Hubble radius since $k_c = \mathcal{H}$).

Let us recall that even in inflationary models the inclusion of microphysics and interaction between fluids is absolutely crucial in order to make accurate predictions. For example, if one neglects these by not solving the exact Boltzmann equation for the photons and/or the neutrinos, or by not solving the accurate kinetic recombination equations, one finds an large excess of power at small angular scales (see, *e.g.*, Fig. 4 of [Hu, 1996]).

It is therefore clear that predictions of topological defect models concerning structure formation not only require today's state-of-the-art heavy detailed numerical simulations, but also a rigorous description of their non gravitational interactions before reliable conclusions can be drawn.

6 Acknowledgments

We are happy to thank Günter Sigl and Thibault Damour for enlightening discussions.

7 Appendix: CMB anisotropies calculations

We assume standard cosmological parameters: flat Universe without cosmological constant, baryon density and Hubble parameter such that $\Omega_\mathrm{b} = 0.05$, $h = 0.5$, three massless neutrinos and standard recombination.

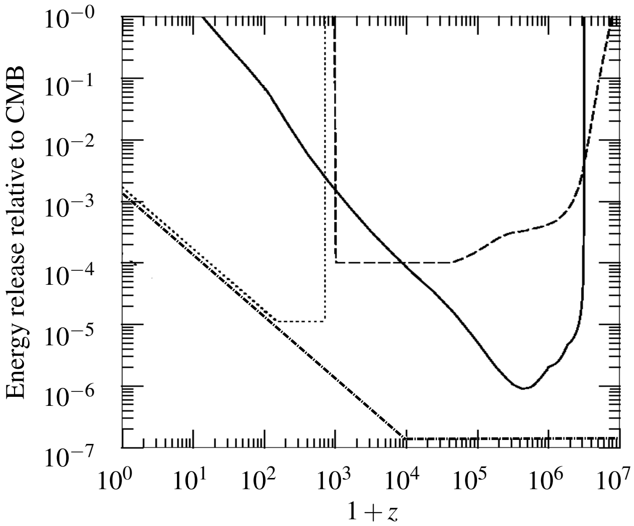


FIGURE 10.5 – Maximal energy release in units of the CMB energy density allowed by the constraints from the observed diffuse $\gamma-$ray background at 5 GeV (dotted curve), CMB distortions (dashed curve), and ^{4}He photo-disintegration (solid curve) as a function of redshift z (taken from [Sigl *et al.*, 1995]). These bounds apply for instantaneous energy release at the specified redshift epoch. The lowest (dot-dashed) curve shows the energy release in our model assuming that $\simeq$10% of the energy is released into photons (energy releases into the other fluid do not add to these constraints). Higher energy release into photons might violate the γ-ray background measurements. Note that the strongest constraint arise today from the diffuse γ-ray background, but better measurements of the CMB spectrum could give an even stronger constraint.

The stress-energy tensor of the seeds can be decomposed as a sum of scalar, vector and tensor [Bardeen, 1980] random fields. The scalar part, the only one we shall consider here, can be written in terms of four random fields $\widehat{\rho}^{\rm s}$, $\widehat{v}^{\rm s}$, $\widehat{P}^{\rm s}$ and $\widehat{\pi}^{\rm s}$, as:

$$\kappa\widehat{\Theta}^{\rm s}_{00} \equiv \widehat{\rho}^{\rm s} , \qquad (10.7.1)$$

$$\kappa\widehat{\Theta}^{\rm s}_{0i} \equiv -ik_i\widehat{v}^{\rm s} , \qquad (10.7.2)$$

$$\kappa\widehat{\Theta}^{\rm s}_{ij} \equiv \widehat{P}^{\rm s}\delta_{ij} + \left(\frac{1}{3}k^2\delta_{ij} - k_ik_j\right)\widehat{\Pi}^{\rm s} . \qquad (10.7.3)$$

(κ is Einstein's constant.) To compute the CMB anisotropies, we need the two-point correlators of the stress-energy tensor. The homogeneity of the distribution imposes:

$$\left\langle \widehat{\Theta}^{\rm s}_{\mu\nu}(\eta,\boldsymbol{k})\widehat{\Theta}^{\rm s}_{\rho\sigma}(\eta',\boldsymbol{k}')\right\rangle = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\widehat{C}_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta,\eta',\boldsymbol{k}) , \qquad (10.7.4)$$

where the $\boldsymbol{k}$-dependence of $\widehat{C}$ is fixed by the requirement that the distribution is isotropic. The correlators can be decomposed as sums of "coherent eigenmodes" [Turok, 1996a] [Pen *et al.*, 1997] [Turok *et al.*, 1998]:

$$\widehat{C}_{\mu\nu\rho\sigma}(\eta,\eta',\boldsymbol{k}) = \sum_{(i)}\lambda^{(i)}\widehat{c}^{(i)}_{\mu\nu}(\eta,\boldsymbol{k})\widehat{c}^{(i)}_{\rho\sigma}(\eta',\boldsymbol{k}') , \qquad (10.7.5)$$

where the $\widehat{c}^{(i)}_{\mu\nu}(\eta,\boldsymbol{k})$ are the correlators of coherent sources. The four random fields that describe coherent sources are all proportional to the same normalized random variable $e(\boldsymbol{k})$ and hence are described by four random fields. Two of these functions are constrained by Eqns (**10.3.1–10.3.2**), and the two other must be either imposed by hand or determined using some more detailed modeling. We take simple ansätze for the pressure $\widehat{P}^{\mathrm{s}}$ and the scalar anisotropic stress $\widehat{\Pi}^{\mathrm{s}}$, in practice (up to a normalization constant):

$$\widehat{P}^{\mathrm{s}} = \eta^{-\frac{1}{2}} \exp(-k^2\eta^2) e(\boldsymbol{k}) \,, \tag{10.7.6}$$

$$\widehat{\Pi}^{\mathrm{s}} = -4\eta^{-\frac{1}{2}} (k^2\eta^2) \exp(-k^2\eta^2) e(\boldsymbol{k}) \,. \tag{10.7.7}$$

This (rather arbitrary) choice of correlators satisfies the requirements imposed by causality, scaling, *etc* [Uzan *et al.*, 2000a], and is tailored in order to obtain a CMB anisotropies spectrum which lacks power on the degree scale. Of course, the precise shape of these functions can in principle be obtained by numerical simulations, and the CMB anisotropies are known to depend very much on the shape of these free functions [Durrer & Sakellariadou, 1997], but, as already stressed, we have carefully checked that the effect we are interested in does *not* qualitatively depend on them.

We solve (in the flat-slicing gauge) the well-known (see, *e.g.*, [Kodama & Sasaki, 1984] [Mukhanov *et al.*, 1992] [Durrer, 1994] [Deruelle *et al.*, 1997] [Uzan *et al.*, 2000a]) linearized Einstein equations which couple the seeds network to the cosmic fluid inhomogeneities, corrected by the decay term (**10.3.1–10.3.2**). They read:

$$\dot{\widehat{\rho}}^{\mathrm{s}} = -\mathcal{H}\widehat{\rho}^{\mathrm{s}} - 3\mathcal{H}\widehat{P}^{\mathrm{s}} + k^2\widehat{v}^{\mathrm{s}} - \dot{\mu}\widehat{\rho}^{\mathrm{s}} \,, \tag{10.7.8}$$

$$\dot{\widehat{v}}^{\mathrm{s}} = -2\mathcal{H}\widehat{v}^{\mathrm{s}} - \widehat{P}^{\mathrm{s}} + \frac{2}{3}\widehat{\Pi}^{\mathrm{s}} - \dot{\mu}\widehat{v}^{\mathrm{s}} \,, \tag{10.7.9}$$

$$\dot{\widehat{\delta}}_\gamma = \frac{4}{3}k^2\widehat{v}_\gamma + x_\gamma\dot{\mu}\frac{\widehat{\rho}^{\mathrm{s}}}{3\mathcal{H}^2\Omega_\gamma} \,, \tag{10.7.10}$$

$$\dot{\widehat{v}}_\gamma = -\frac{1}{4}\widehat{\delta}_\gamma + \frac{1}{6}k^2\widehat{\Pi}_\gamma - \widehat{\Psi} - \widehat{\Phi} - \dot{\tau}\left(\widehat{v}_\gamma - \widehat{v}_{\mathrm{b}}\right) + x_\gamma\dot{\mu}\frac{\widehat{v}^{\mathrm{s}}}{4\mathcal{H}^2\Omega_\gamma} \,, \tag{10.7.11}$$

$$\dot{\widehat{\delta}}_\nu = \frac{4}{3}k^2\widehat{v}_\nu + x_\nu\dot{\mu}\frac{\widehat{\rho}^{\mathrm{s}}}{3\mathcal{H}^2\Omega_\nu} \,, \tag{10.7.12}$$

$$\dot{\widehat{v}}_\nu = -\frac{1}{4}\widehat{\delta}_\nu + \frac{1}{6}k^2\widehat{\Pi}_\nu - \widehat{\Psi} - \widehat{\Phi} + x_\nu\dot{\mu}\frac{\widehat{v}^{\mathrm{s}}}{4\mathcal{H}^2\Omega_\nu} \,, \tag{10.7.13}$$

$$\dot{\widehat{\delta}}_{\mathrm{c}} = k^2\widehat{v}_{\mathrm{c}} + x_{\mathrm{c}}\dot{\mu}\frac{\widehat{\rho}^{\mathrm{s}}}{3\mathcal{H}^2\Omega_{\mathrm{c}}} \,, \tag{10.7.14}$$

$$\dot{\widehat{v}}_{\mathrm{c}} = -\mathcal{H}\widehat{v}_{\mathrm{c}} - \widehat{\Phi} + x_{\mathrm{c}}\dot{\mu}\frac{\widehat{v}^{\mathrm{s}}}{3\mathcal{H}^2\Omega_{\mathrm{c}}} \,, \tag{10.7.15}$$

$$\dot{\widehat{\delta}}_{\mathrm{b}} = k^2\widehat{v}_{\mathrm{b}} + x_{\mathrm{b}}\dot{\mu}\frac{\widehat{\rho}^{\mathrm{s}}}{3\mathcal{H}^2\Omega_{\mathrm{b}}} \,, \tag{10.7.16}$$

$$\dot{\widehat{v}}_{\mathrm{b}} = -\mathcal{H}\widehat{v}_{\mathrm{b}} - \widehat{\Phi} - \frac{4}{3}\frac{\rho_\gamma}{\rho_{\mathrm{b}}}\dot{\tau}\left(\widehat{v}_{\mathrm{b}} - \widehat{v}_\gamma\right) + x_{\mathrm{b}}\dot{\mu}\frac{\widehat{v}^{\mathrm{s}}}{3\mathcal{H}^2\Omega_{\mathrm{b}}} \,, \tag{10.7.17}$$

where Ω_f, δ_f, v_f, Π_f are respectively the density parameter, the density contrast, the velocity and the anisotropic stress perturbations for the fluid f, the subscripts b, c, ν, γ mean respectively the baryonic, Cold Dark Matter, neutrino and photon fluid, Ψ and Φ are the two Bardeen gravitational potentials, $\dot{\tau}$ is the photons differential opacity [Peebles, 1993], and a dot denotes a derivation with respect to the conformal time. The terms in $\dot{\mu}$ account for the seeds decay, and the branching ratios

x_f are constants such that:

$$\sum_f x_f = 1 \,. \tag{10.7.18}$$

In addition, the two equations for the Bardeen potentials are:

$$2\left[-k^2 + 3(\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}^2)\right]\widehat{\Psi} = 3\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \left[\widehat{\delta}_f - 3\mathcal{H}(1+\omega_f)\widehat{v}_f\right] + \widehat{\rho}^{\mathrm{s}} - 3\mathcal{H}\widehat{v}^{\mathrm{s}} \,, \tag{10.7.19}$$

$$\widehat{\Phi} = \widehat{\Psi} - 3\mathcal{H}^2 \sum_f \Omega_f \omega_f \widehat{\Pi}_f - \widehat{\Pi}^{\mathrm{s}} \,. \tag{10.7.20}$$

Finally, the photons and neutrinos fluids obey a Boltzmann equation which reads (for $\ell \geq 2$, see, *e.g.*, [Ma & Bertschinger, 1995] or [Hu & White, 1997b] for more details):

$$\dot{\widehat{\Delta}}{}^\ell_\gamma = \frac{k}{2\ell+1}\left(\ell\widehat{\Delta}^{\ell-1}_\gamma - (\ell+1)\widehat{\Delta}^{\ell+1}_\gamma\right) - \dot{\tau}\left(\widehat{\Delta}^\ell_\gamma - \delta_{\ell,2}\widehat{P}_\gamma\right) \,, \tag{10.7.21}$$

$$\dot{\widehat{E}}{}^\ell_\gamma = \frac{k}{2\ell+1}\left(\ell\sqrt{1-4/\ell^2}\widehat{E}^{\ell-1}_\gamma - (\ell+1)\sqrt{1-4/(\ell+1)^2}\widehat{E}^{\ell+1}_\gamma\right) - \dot{\tau}\left(\widehat{E}^\ell_\gamma + \sqrt{6}\widehat{P}_\gamma\delta_{\ell,2}\right) \,, \tag{10.7.22}$$

$$\widehat{P}_\gamma = \frac{1}{10}\left(\widehat{\Delta}^2_\gamma - \sqrt{6}\widehat{E}^2_\gamma\right) \,, \tag{10.7.23}$$

$$\dot{\widehat{\Delta}}{}^\ell_\nu = \frac{k}{2\ell+1}\left(\ell\widehat{\Delta}^{\ell-1}_\nu - (\ell+1)\widehat{\Delta}^{\ell+1}_\nu\right) \,, \tag{10.7.24}$$

with Δ^ℓ_f and E^ℓ_f being respectively the ℓ-th moment of the temperature and electric-type polarization distribution functions of the species f, and where P_f is the coupling between temperature and polarization. The lowest multipoles of the distribution function are related to the perturbed stress-energy tensor components by:

$$\widehat{\delta}_f = 4\widehat{\Delta}^0_f \,, \tag{10.7.25}$$

$$\widehat{v}_f = -\frac{3}{k}\widehat{\Delta}^1_f \,, \tag{10.7.26}$$

$$\widehat{\Pi}_f = \frac{12}{k^2}\widehat{\Delta}^2_f \,. \tag{10.7.27}$$

Equations (**10.7.1–10.7.27**) are solved numerically using a Boltzmann code developed by one of us (A.R.) using standard initial conditions [Deruelle *et al.*, 1997]. The CMB anisotropies at present conformal time η_0 are then calculated by the line-of-sight integration method [Seljak & Zaldarriaga, 1996]:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}^\ell_\gamma(\eta_0,k) = \quad & \int_0^{\eta_0} \dot{\tau}e^{-\tau}\left(\frac{1}{4}\widehat{\delta}_\gamma + \widehat{\Psi} + \widehat{\Phi}\right) j_\ell(k(\eta_0-\eta))\,\mathrm{d}\eta \\
& + \int_0^{\eta_0} \dot{\tau}e^{-\tau}(-k\widehat{v}_{\mathrm{b}})\, j'_\ell(k(\eta_0-\eta))\,\mathrm{d}\eta \\
& + \int_0^{\eta_0} e^{-\tau}\left(\dot{\widehat{\Psi}} + \dot{\widehat{\Phi}}\right) j_\ell(k(\eta_0-\eta))\,\mathrm{d}\eta \\
& + \int_0^{\eta_0} \dot{\tau}e^{-\tau}\frac{5}{2}\widehat{P}_\gamma\left(3j''_\ell(k(\eta_0-\eta)) + j_\ell(k(\eta_0-\eta))\right)\,\mathrm{d}\eta \,.
\end{aligned} \tag{10.7.28}$$

In the line-of-sight integration formula (**10.7.28**), we have omitted the terms arising from the energy injection due to the seeds decay into photons. These terms are proportional to $e^{-\tau}\dot{\mu}$ and therefore are generated between the last scattering surface and today. The photons emitted because of this decay have therefore very high energy and do not have time to thermalize. Hence, they do not participate to the microwave background, but rather to the diffuse γ-ray background, which might put some interesting constraints on these models as discussed in §4.3.

Finally, the scalar part of the 2-point correlator of the CMB anisotropies is decomposed as:

$$\left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{n}}_1)\frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{n}}_2) \right\rangle_{\hat{\boldsymbol{n}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2=\cos(\theta)} = \frac{1}{4\pi}\sum_{\ell}(2\ell+1)C_\ell^{\mathrm{S}}P_\ell(\cos\theta)\,, \qquad \textbf{(10.7.29)}$$

where P_ℓ is the Legendre polynomial of order ℓ, and the coefficients C_ℓ^{S} are deduced from the photon distribution multipoles by:

$$C_\ell^{\mathrm{S}} = \frac{2}{\pi}\int \left|\widehat{\Delta}_\gamma^\ell(\eta_0,k)\right|^2 k^2\,\mathrm{d}k\,. \qquad \textbf{(10.7.30)}$$

Chapitre 11

Comparaison de scénarios hybrides avec les observations récentes (article)

Sommaire

Dans les chapitres 8 et 10, nous avons vu que les sources actives pouvaient générer des spectres d'anisotropies extrêmement variés et qu'il n'était pas certain que les simulations actuelles donnaient des résultats fiables. Au chapitre 9, nous avons vu la signature la plus claire qui permettait de distinguer ces modèles des scénarios inflationnaires : l'absence de pics Doppler secondaires. Jusqu'à récemment, les observations ne permettaient pas de trancher en faveur d'un scénario ou de l'autre, car la résolution angulaire et la précision des expériences était insuffisante. La présence d'un excès de puissance à l'échelle du degré semblait clairement établie, mais un tel comportement du spectre pouvait s'expliquer dans le cadre des théories inflationnaires et de celles basées sur les défauts topologiques.

Plus récemment les données des expériences BOOMERanG et MAXIMA ont quelque peu changé la donne. Ces expériences de nouvelle génération ont permis d'avoir une résolution angulaire et un volume de données suffisamment bons pour espérer détecter d'éventuels pics secondaires. Les résultats de ces expériences ont été un peu inattendus. D'une part, le spectre au-delà du premier pic présente une amplitude relativement faible. D'autre part, il n'y a pas d'indication certaine en faveur d'un deuxième pic. Le spectre de BOOMERanG présente un soupçon d'oscillation dans la région de la position attendue du deuxième pic, mais les barres d'erreur sont encore grandes et le spectre est statistiquement compatible avec un spectre sans pics secondaires. L'interprétation de ces résultats par la communauté scientifique a néanmoins été de voir un second pic, plus ou moins confirmé par les données de MAXIMA [Hanany *et al.*, 2000].

Le jeu de l'ajustement des paramètres cosmologiques aux observations a également réservé quelques surprises. Le deuxième pic s'avère extrêmement bas, d'amplitude à peine supérieure au plateau à grande échelle mesuré par COBE. Il existe plusieurs explications possibles à un second pic aussi bas :

- Le moyen le plus simple et le plus brutal pour rabaisser l'amplitude à petite échelle est d'invoquer une réionisation à haut redshift. Cette possibilité, très inesthétique car ne relevant pas d'un principe premier, est mise en difficulté par la présence de fluctuations au-delà du deuxième pic, alors qu'on s'attendrait ici à un amortissement exponentiel des fluctuations à petite échelle (*cf* chapitre 6).
- Un autre moyen simple est de supposer un indice spectral des perturbations assez "rouge". Les modèles d'inflation les plus simples prédisent effectivement un indice spectral plus rouge que l'invariance d'échelle, mais l'écart à l'invariance d'échelle est supposé relativement faible. Il n'est donc pas certain que cette possibilité soit favorisée du point de vue de la physique des hautes énergies[1].
- La densité baryonique a également une influence sur la hauteur des pics. En effet, la présence de baryons (non relativistes et couplés aux photons avant la recombinaison) a tendance à décaler vers le bas le point zéro des oscillations dans le plasma de photons et de baryons, rabaissant ainsi les pics pairs et le plateau Sachs-Wolfe par rapport aux pics impairs (*cf* chapitre 6). Une forte densité baryonique pourrait donc expliquer un pic aussi bas. Malheureusement la densité baryonique ainsi déduite n'est pas bien compatible avec les dernières mesures d'abondance des éléments légers et la nucléosynthèse primordiale.
- Une dernière possibilité, peut-être plus conciliante[2], est de supposer un problème de calibration dans l'expérience BOOMERanG. Il y a en effet un certain désaccord entre l'amplitude du premier pic mesuré par BOOMERanG et celui mesuré par d'autres expériences (TOCO et Saskatoon notamment). Un écart, plus faible, est présent avec MAXIMA. De toute ces expériences, c'est BOOMERanG qui observe la plus faible amplitude.

Une autre possibilité, peut-être plus naturelle, pourrait expliquer la faible hauteur du second pic : il suffirait de rajouter une contribution au spectre d'anisotropies qui n'ait d'amplitude significative qu'au niveau du plateau Sachs-Wolfe et du premier pic, remontant ceux-ci par rapport au second pic. Parmi les candidats possibles, un réseau de défauts topologiques (notamment des défauts globaux) convient parfaitement, comme nous le montrons dans la suite de ce chapitre, tiré d'un article paru après une lutte de près d'un an et demi avec des referees pas tout-à-fait objectifs dans *Physical Review D* [Bouchet *et al.*, 2002].

Le principe en lui-même est extrêmement simple : on suppose que la fin de l'inflation a donné lieu à une transition de phase générant des défauts topologiques, que l'amplitude des perturbations ainsi produites est du même ordre que celles d'origine quantiques créées durant la phase inflationnaire, et que les deux types de perturbation sont totalement décorrélés. De tels modèles ont déjà été trouvés, la plupart prédisant même le rapport des deux amplitudes. Ici, nous supposons que tous les autres paramètres cosmologiques sont fixés à des valeurs raisonnables (nous avons pris ici un modèle ΛCDM), mais que le rapport des amplitudes est un paramètre libre, et nous regardons dans quelle mesure la somme des deux spectres, l'un inflationnaire et l'autre généré par des défauts (que nous prenons ici globaux [Turok *et al.*, 1998]) peut être compatible avec les observations. Le résultat est un très bon accord entre ces modèles hybrides et les observations.

[1] La façon dont ont été traitées les données n'est pas parfaitement satisfaisante car la contribution des modes tensoriels n'a pas été correctement prise en compte. Il n'est donc pas possible pour l'instant de savoir l'indice spectral le plus probable indiqué par les observations, et si celui-ci reste compatible avec le scénario classique d'inflation à un seul champ scalaire et l'approximation du slow-roll (*cf* chapitre 14).

[2] surtout pour un théoricien !

Evidence against or for topological defects in the BOOMERanG data?

François R. Bouchet[1*], Patrick Peter[1,2†], Alain Riazuelo[2‡] and Mairi Sakellariadou[2§]

[1] *Institut d'Astrophysique de Paris, UPR 341 du Centre National de la Recherche Scientifique, 98 bis boulevard Arago, F-75014 Paris (France)*

[2] *Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, UMR 8629 du Centre National de la Recherche Scientifique, Observatoire de Paris, F-92195 Meudon Cedex (France)*

Abstract : The recently released BOOMERanG data was taken as "contradicting topological defect predictions". We show that such a statement is partly misleading. Indeed, the presence of a series of acoustic peaks is perfectly compatible with a non-negligible topological defects contribution. In such a mixed perturbation model (inflation and topological defects) for the source of primordial fluctuations, the natural prediction is a slightly lower amplitude for the Doppler peaks, a feature shared by many other purely inflationary models. Thus, for the moment, it seems difficult to rule out these models with the current data.

PACS numbers : 98.80.Cq, 98.70.Vc

1 Introduction

For almost two decades, two families of models have been considered challengers for describing, within the framework of gravitational instability, the formation of large-scale structure in the universe. Initial density perturbations can either be induced by quantum fluctuations of a scalar field during inflation [Guth, 1981] [Linde, 1982] [Albrecht & Steinhard, 1982] [Linde, 1990], or they may be triggered by a class of topological defects [Kibble, 1976] [Vilenkin & Shellard, 1994] [Hindmarsh & Kibble, 1995]. The inflationary paradigm was proposed in order to explain the shortcomings of the standard Big Bang model, namely the horizon and flatness problems. Topological defects, on the other hand, can be formed during symmetry-breaking phase transitions in the early universe [Kibble, 1980]. Moreover they are naturally predicted by many realistic models of particle physics aiming at describing interactions at energies much higher than what is currently reachable in accelerators [Vilenkin & Shellard, 1994] [Hindmarsh & Kibble, 1995].

The Cosmic Microwave Background (CMB) anisotropies provide a powerful tool to discriminate among inflation and topological defects. CMB anisotropies are conveniently characterized

*Email addres: `bouchet@iap.fr`
†Email addres: `peter@iap.fr`
‡Email addres: `Alain.Riazuelo@obspm.fr`
§Email addres: `mairi@amorgos.unige.ch`

by their angular power spectrum C_ℓ, the average value of the square of the coefficients, $|a_{\ell m}|^2$, of a spherical harmonic decomposition of the measured CMB pattern. This spectrum fully characterizes a normal distributed field, and $\ell(\ell+1)C_\ell$ is the logarithmic contribution to the variance of multipoles ℓ.

On large angular scales ($\ell \lesssim 50$), both families of models lead to approximately scale-invariant spectra, with however a different prediction regarding the statistics of the induced perturbations. Provided the quantum fields are initially placed in the vacuum, inflation predicts generically Gaussian fluctuations, whereas in the case of topological defects models, the induced perturbations are clearly non-Gaussian, at least at sufficiently high angular resolution. This is an interesting fingerprint, even though it is difficult to test through the data. In the context of inflation, non-Gaussianity can however also be present, such as, for example in the case of stochastic inflation [Gangui, 1994] [Gangui *et al.*, 1994] [Matacz, 1997], or in a class of inflationary models involving two scalar fields leading to non-Gaussian isothermal fluctuations with a blue spectrum [Linde & Mukhanov, 1997]. In addition, allowing non-vacuum initial states for the cosmological perturbations of quantum-mechanical origin, one generically obtains a non-Gaussian spectrum [Martin *et al.*, 2000a]. Finally, in a cosmological model where perturbations are induced by inflation with a non-negligible topological defects contribution, one again expects deviation from Gaussianity.

Both inflation and defect models predict a spectrum of temperature anisotropies at the required 10^{-5} level [Smoot *et al.*, 1992] [Bennett *et al.*, 1996] (see [Tegmark, `http`] for an up-to-date compilation of the current data) on large angular scales. However, on intermediate and small angular scales, the predictions of inflation are quite different than those of topological defects, due to the different nature of the induced perturbations. More precisely, the inflationary fluctuations are coherent, in the sense that the perturbations are initially at the same phase and subsequently evolve linearly and independently of each other. The subsequent progressive phase shift between different modes thus produces the so-called acoustic (or Doppler) peak structure. On the other hand, in topological defect models, fluctuations are constantly induced by the sources (defects). Since topological defects evolve in a non-linear manner, and since the random initial conditions of the source term in the perturbation equations of a given scale leaks into other scales, perfect coherence is destroyed [Magueijo *et al.*, 1996b] [Riazuelo & Deruelle, 2000b].

In the inflationary case, coherent adiabatic fluctuations lead to a rather high first acoustic peak, around $\ell \sim 200$ (for $\Omega \sim 1$) followed by a set of oscillatory peaks for larger ℓ. As a matter of illustration, in the Standard Cold Dark Matter (SCDM) model with $n_{\rm S} = 1$, $h = 0.5$, $\Omega_0 = 1$, $\Omega_{\rm b} = 0.05$, and vanishing cosmological constant, the second peak is expected to be three times higher than the low ℓ (Sachs-Wolfe) plateau.

On the other hand, in topological defect models, incoherent fluctuations lead to a single bump at smaller angular scales (larger ℓ). For instance, global $\mathrm{O}(4)$ textures predict a peak whose position is shifted to $\ell \simeq 350$ having an amplitude which is ~ 1.5 times higher than the Sachs-Wolfe plateau [Durrer *et al.*, 1996]. Global $\mathrm{O}(N)$ textures in the large N limit lead to a rather flat spectrum, with a slow decay after $\ell \sim 100$ [Durrer *et al.*, 1999a]. Roughly similar results are obtained with other global $\mathrm{O}(N)$ defects [Turok *et al.*, 1998] [Pen *et al.*, 1997]. Local cosmic string predictions are unfortunately not very well established in detail and range from an almost flat spectrum [Allen *et al.*, 1997] to a single wide bump at $\ell \sim 500$ [Contaldi *et al.*, 1999a] with an extremely rapidly decaying tail. It seems that the microphysics of the string network plays a crucial role in the height and in the position of the bump [Pogosian & Vachaspati, 1999] [Riazuelo *et al.*, 2000]. An interesting point however is that global textures (and especially global $\mathrm{O}(N)$ defects in the large N limit, where every component of the field which produces the defects evolves almost linearly, see [Durrer *et al.*, 1999a]) are in a sense "less non-linear" than local cosmic strings. This translates into the presence of a very smooth second peak in the spectrum.

Before the first Antarctic BOOMERanG [de Bernardis *et al.*, 2000] results, several experiments had already given some hints for a rise in the power spectrum at the degree scale ($\ell \sim 200$). Then, more recently, the TOCO [Torbet *et al.*, 1999] [Miller *et al.*, 1999] experiment and the technical flight over North America of BOOMERanG itself [Mauskopf *et al.*, 2000] detected a maximum in the spectrum around the same scale, followed by a subsequent decay, thereby ruling out pure topological defect based scenarios. But measurements at $\ell > 400$ were rather crude (*e.g.*, [Scott *et al.*, 1996] [Baker *et al.*, 1999]). The BOOMERanG experiment has spanned in a single experiment a very wide range of angular scales, from $\ell \simeq 50$ to $\ell \simeq 800$ and has reached sufficient sensitivity to map out the second and third peak region of the spectrum.

Since then, the observational situation has dramatically improved. The analysis of the BOOMERanG-LDB data set, which is exceptional in data quality, span of scales covered, and angular resolution, firmly reveals the presence of a relatively narrow peak in the power spectrum at $\ell \sim 200$ followed by an almost flat plateau, roughly at the same level as the Sachs-Wolfe part. The first peak is found to be at the position expected in the case of a flat universe.

The data at higher ℓ lead to some confusion. In the first release of the data [de Bernardis *et al.*, 2000], only a relatively low secondary peak could be accommodated. Even though there was no direct measurement of the height of the second peak, one could still, safely enough, remark that the relative amplitude between the two peaks was rather high. Indeed it was well above its expected value, even in the case of a high baryonic density universe which tends to enhance the contrast between odd and even peaks (see [Hu *et al.*, 1997b] for a detailed description of the influence of cosmological parameters on the CMB anisotropy spectrum). This finding has led to new directions for the explanation of the CMB anisotropies. We briefly discuss some suggestions below. Within the context of inflationary perturbations, the data required [White *et al.*, 2000] a tilted model with a red spectrum (neglecting the possible contribution of tensor modes, i.e., gravitational waves, the measured spectral index would appear to be of order $n_S \simeq 0.85$) and/or a very high baryonic density, more than one standard deviation away from the nucleosynthesis constraint[Nolleth & Burles, 2000]. Such conclusions put the simplest inflationary scenario in difficulty. Other scenarios were then proposed in order to explain a relatively low second peak together with a high and narrow first one, such as, e.g., including a leptonic asymmetry [Lesgourgues & Peloso, 2000]. Another possibility was to add power at low ℓ. There are several possibilities to do so, for example by adding a tensor contribution (which is rather flat before $\ell \simeq 100$ and rapidly decays afterwards; note that if one considers an inflationary scenario with a red spectral index, there is necessarily such a non negligible tensor contribution), or isocurvature fluctuations [Enqvist & Kurki-Suonio, 2000] [Langlois & Riazuelo, 2000]. These possibilities were discussed in Ref. [Tegmark & Zaldarriaga, 2000b].

The more recent BOOMERanG data [de Bernardis *et al.*, 2002] [Netterfield *et al.*, 2002] somewhat changed this picture. A new estimation of the beam size and of the calibration uncertainties, led to a significant increase of the power spectrum in the region of the secondary peaks, as well as a confirmation of the long expected acoustic oscillations in the spectrum. Then, the estimation of the cosmological parameters from the shape of the spectrum led to values definitely more compatible with the currently ones derived by many independent astrophysical measurements. Although there are still some differences with the new MAXIMA data [Lee *et al.*, 2001] [Stompor *et al.*, 2001] , this might be seen as the long-awaited advent of “consistent cosmology” [Wang *et al.*, 2002]. However, in order to give firm bounds on the value of the cosmological parameters, we still must ensure that we have explored the correct region of the parameter space. Since there already exist very good fits to the data, this causes us to ask at what extent the currently favored set of cosmological parameters might be degenerate with other yet non explored but physically relevant parameters.

2 A simple hybrid model

In this article, we illustrate a new degeneracy arising in the data, that would be due to a small but significant contribution of topological defects. These mixed perturbation models (i.e., both of inflationary type and seeded by topological defects) have already been proposed on other grounds. Indeed, the formation of topological defects provides the necessary mechanism in order to successfully exit the inflationary era [Jeannerot, 1997] in a number of particle physics motivated inflationary [Kofman & Linde, 1987] [Linde & Riotto, 1997] [Lyth & Riotto, 1999] models. Within the context of hybrid inflation [Linde, 1991] [Linde, 1994] in supergravity, a model leading to a scenario where CMB anisotropies may be produced by cosmic strings on a $\sim 10^{16}$ GeV mass scale, and where galaxy formation may be due to inflationary perturbations, was proposed in Ref. [Linde & Riotto, 1997] and further investigated in Refs. [Contaldi *et al.*, 1999b] [Battye *et al.*, 1999b] [Battye & Weller, 2000]. In addition, in most classes of superstring compactification involving the spontaneous breaking of a pseudo-anomalous $\mathrm{U}(1)$ gauge symmetry [Dine *et al.*, 1987b] [Atick *et al.*, 1987] [Dine *et al.*, 1987a], strings of the cosmic kind [Casas *et al.*, 1989] [Casas & Muñoz, 1989] are also formed [Harvey & Naculich, 1989] and turn out to be local [Binétruy *et al.*, 1998]. We therefore consider a model in which a network of cosmic strings evolved [Bouchet *et al.*, 1988] [Bennett & Bouchet, 1989] [Bennett & Bouchet, 1990] independently of any pre-existing fluctuation background generated by a standard cold dark matter with a non-zero cosmological constant (ΛCDM) inflationary phase. As we shall restrict our attention to the angular spectrum, we can remain in the linear regime all along our analysis, so that setting C_ℓ^{I} and C_ℓ^{S} as the (COBE normalized) Legendre coefficients due to adiabatic inflation fluctuations and those stemming from the string network respectively, we have

$$C_\ell = \alpha C_\ell^{\mathrm{I}} + (1-\alpha) C_\ell^{\mathrm{S}}. \tag{11.2.1}$$

In the above equation, the C_ℓ are to be compared with the observed data and the coefficient α is a free parameter giving the relative amplitude for the two contributions. In this preliminary work, we do not vary C_ℓ^{S} characteristics and simply use the model of Ref. [Pen *et al.*, 1997]. Strictly speaking, the anisotropy power spectrum reported in Ref. [Pen *et al.*, 1997] concerns theories of global defects. However, the finding that vector and tensor modes provide substantial contribution to the large angular scale anisotropies, hold for both global defect models [Turok *et al.*, 1998] [Pen *et al.*, 1997] and cosmic string scenarios [Allen *et al.*, 1997]. Moreover, models of global strings as well as of local strings, are characterized by incoherent perturbations. We thus believe that the spectrum of Ref. [Turok *et al.*, 1998] examplifies the power spectra of both global and local cosmic strings. In addition, another advantage of this model, is that it takes into account the expansion of the universe. To obtain the power spectrum from numerical simulations with cosmic strings, one must take into account the "three-scale model" [Austin *et al.*, 1993] of cosmic string networks, the small-scale structure (wiggliness) [Pogosian & Vachaspati, 1999] of the strings, the microphysics of the string network [Riazuelo *et al.*, 2000], as well as the expansion of the universe. This is a rather difficult task and to our knowledge no currently available simulation includes all of them.

Figure 11.1 shows the two uncorrelated spectra as a function of ℓ, both normalized on the COBE data, together with the weighted sum. The best fit, having $\alpha \sim 0.82$ yields a contribution in strings which is not negligible, although the inflation-produced perturbations definitely represent the dominant part for this spectrum. Also, our conclusions are not significantly affected if we remove the new MAXIMA [Lee *et al.*, 2001] [Stompor *et al.*, 2001] and DASI [Halverson *et al.*, 2002] [Pryke *et al.*, 2002] data. The fact that the string content extracted from the data is not very large is of course related to the fact that our choice of value for the cosmological parameters are very similar to the best fit found by the BOOMERanG team [de Bernardis *et al.*, 2002] [Netterfield *et al.*, 2002].

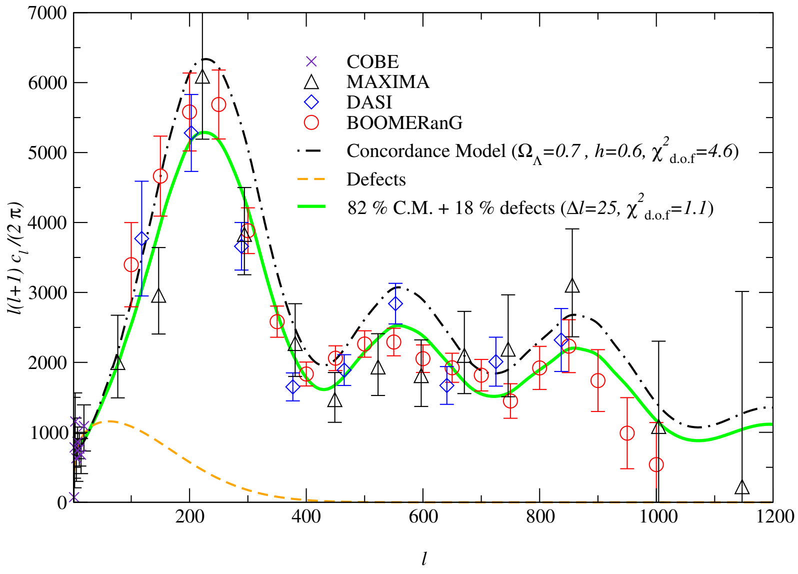


FIGURE 11.1 – $\ell(\ell+1)C_\ell$ versus ℓ for three different models. The upper dot-dashed line represents the prediction of a ΛCDM model, with cosmological parameters set as $n_S = 1$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_{mat} = 0.3$, $\Omega_b = 0.05$ and $h = 0.6$ in agreement with all other data but CMB's. The lower dashed line is a typical string spectrum. Both of these are seen not to fit the new BOOMERanG, MAXIMA and DASI data (circles, triangles and diamonds respectively) and are normalized at the COBE scale (crosses). Combining both curves with the extra-parameter α produces the solid curve, with a χ^2 per degree of freedom slightly above unity. The string contribution turns out to be some 18% of the total. With the former BOOMERanG data which produced a much lower second peak, the string content was raised to 38% of the total.

For example, the string content would be larger should we consider the former BOOMERanG 2000 [de Bernardis *et al.*, 2000] data instead. Nevertheless, it illustrates that there is some degree of degeneracy between this model with a string contribution and the model without strings even with popular cosmological parameters and "good" data. It thus seems to us necessary to add the string contribution as a new parameter to the standard parameter space. Actually, it appears quite natural to enlarge the parameter space as increasingly high quality data begin to be at our disposal. In the same vein, there seems to be a growing agreement on the fact that a tensor contribution has to be taken into account when trying to fit the data, and that the presence of non adiabatic initial conditions also deserves to be more carefully studied.

We would like to briefly comment upon the "biasing problem" in structure formation. Topological defect models have been sometimes claimed to be ruled out, since they would not lead to large enough matter density perturbations, once normalized to the Cosmic Background Explorer (COBE) data on very large scales. This normalization fixes the only free parameter of a given defect model, namely the symmetry breaking scale. More precisely, on scales of $100\,h^{-1}$ Mpc, which are most probably unaffected by non-linear gravitational evolution, standard topological defect models, once normalized to COBE, require a bias factor of $b_{100} \sim 5$, whereas b_{100} is most probably close to unity. In cosmic string models, the biasing problem is definitely not that severe, since it is model dependent. More precisely, the matter power spectrum are very sensitive to the assumptions made about string decay [Contaldi *et al.*, 1999a] [Riazuelo *et al.*, 2000]. Clearly, the "biasing problem" may be cured within mixed perturbation scenarios, in which structure arises by the combined effect of both adiabatic density perturbations produced at the end of inflation and isocurvature fluctuations seeded by topological defects.

3 Conclusion

In conclusion, we have found that a mixture of inflation and topological defects can perfectly well accommodate the current CMB data, with standard values of the cosmological parameters. We think that this new, unexpected, degeneracy should be carefully taken into account in the future CMB data analysis. We are well aware that the analysis presented in this paper is very coarse. For instance, the actual shape of the string spectrum which we used is yet very uncertain and a more detailed study is required. In particular, it could be parametrized so that a more thorough analysis could be performed, not only on one single variable α, but over the full cosmological parameter set in order to incorporate all the effects here neglected. In addition one would have to use the full covariance matrix of the BOOMERanG band powers rather than their quoted error bars only. However, we believe that the result shown in Fig. 11.1 provides an indication that the role of topological defects in structure formation should not be underestimated just on the ground that they happen to be unable to reproduce all the data if they are the sole source of primordial fluctuations.

4 Acknowledgments

It is a pleasure to thank B. Carter, N. Deruelle, R. Juszkiewicz, A.D. Linde and J.-P. Uzan for enlightening comments.

Troisième partie

Conditions initiales en fin d'inflation

Introduction

Nous avons vu au chapitre 3 comment l'évolution des modes tensoriels était modifiée lors de la phase inflationnaire. Nous allons maintenant traiter le problème plus en détail en étudiant la quantification des perturbations.

La plupart des notes présentées ici sont inspirées des travaux de [Langlois, 1994], [Martin, 1995] et [Lesgourgues, 1998]

Approche générale

Évolution des perturbations

L'équation d'évolution des modes tensoriels peut se réécrire dans l'espace de Fourier à l'aide des variables

$$\widehat{v}^{(m)} \equiv a\widehat{\bar{\bar{E}}}^{(m)} ,$$

L'équation d'évolution de $\widehat{v}^{(m)}$ est alors [Grishchuk, 2000]

$$\ddot{\widehat{v}}^{(m)} + \left(k^2 - \frac{\ddot{z}}{z}\right)\widehat{v}^{(m)} = 0 ,$$

où nous avons ici posé $z \equiv a$. Pour les modes scalaires, on peut trouver une équation du même type portant sur la variable $v \equiv a\delta\phi^\flat$ [Mukhanov, 1988] :

$$\ddot{\widehat{v}} + \left(k^2 - \frac{\ddot{z}}{z}\right)\widehat{v} = 0 ,$$

avec ici

$$z \equiv \frac{a\dot{\phi}}{\mathcal{H}} .$$

Cette équation n'est valable que quand les sections spatiales sont plates et qu'il n'y a qu'un seul champ scalaire[1]. Les modes scalaires et les modes tensoriels obéissent donc à l'équation d'un oscillateur de masse $m^2 \equiv \ddot{z}/z$, variable au cours du temps. Tant que $k^2 \gg m^2$ (*i.e.* à petites longueurs d'ondes), on a comportement oscillatoire (qui correspond à un amortissement quand on revient aux variables h ou $\delta\phi^\flat$). À grandes longueurs d'ondes ($k^2 \ll m^2$), il existe deux solutions asymptotiques à l'équation, qui s'écrivent

$$v_+ = z ,$$
$$v_- = z\int^\eta \frac{\mathrm{d}\eta'}{z^2(\eta)} ,$$

c'est-à-dire qu'on a une solution croissante (v_+) et une solution décroissante (v_-), qui sont dues à l'interaction de l'onde avec la "barrière de potentiel" $\ddot{z}/z$. Ce genre d'équation possède donc des

[1]Dans les autres cas, il faut résoudre de la façon habituelle (*cf* chapitres 4 et 6) les équations d'évolution et les équations d'Einstein. Pour un ensemble de n champs scalaires, on se retrouve alors avec n équations de Klein-Gordon (ou $2n$ équations de conservation), et une seule équation d'Einstein, car du fait de l'absence de pression anisotrope, les deux potentiels de Bardeen sont égaux.

zones d'instabilité lorsque la fréquence k approche de la "masse" m. On parle alors d'amplification paramétrique. Pour les modes tensoriels, on a $v_+ \propto ah$ et $z \propto a$, donc la solution croissante v_+ est en fait la solution constante que nous avions déjà trouvée pour les perturbation de la métrique. Pour un espace quasi-de Sitter, on a $\ddot{a}/a \sim \mathcal{H}^2$, et c'est donc lorsque le mode est en train de sortir du rayon de Hubble qu'a lieu l'amplification des modes tensoriels comme nous l'avions déjà remarqué. Pour les modes scalaires, il en est de même si l'on remarque que les conditions de slow-roll impliquent que $\mathcal{H}$ et $\dot{\phi}$ varient peu devant a, et que par conséquent $\ddot{z}/z \sim \ddot{a}/a$. Par contre, les fluctuations du champ scalaire ne sont pas constantes, mais évoluent proportionnellement à $\dot{\phi}/\mathcal{H}$, qui est une quantité évoluant lentement.

Quantification des perturbations

Nous connaissons maintenant les équations d'évolution des perturbations. Il nous reste maintenant à déterminer leurs conditions initiales. Nous allons supposer que les fluctuations "produites" pendant l'inflation sont en fait simplement des fluctuations quantiques du champ qui sont amplifiées lors de leur sortie du rayon de Hubble.

Plusieurs problèmes se posent lors de cette approche. D'abord, l'état initial des perturbations n'est *a priori* pas connu. L'hypothèse la plus naturelle est que l'état initial des perturbations est l'état d'énergie minimale, que nous appellerons le vide. Un autre problème est que nous allons quantifier les fluctuations du champ sans quantifier le champ lui-même (*i.e.* sa partie non perturbée), qui obéit aux équations d'Einstein. Il n'y a pas d'autres alternatives à cette façon de procéder dans la mesure où il n'existe pas (encore) de théorie quantique de la gravitation, mais il existe plusieurs arguments qui justifient plus ou moins bien cette approche (voir références dans l'article du chapitre 12). Enfin, les fluctuations amplifiées pendant l'inflation sont aujourd'hui considérées comme des variables stochastiques classiques. Il nous faudra donc justifier comment ces fluctuations quantiques "deviennent" classiques lors de leur évolution.

L'équation d'évolution des perturbations peut soit être trouvée à l'aide des équations de Klein-Gordon et d'Einstein perturbées, soit en développant l'action au second ordre des perturbations. Cette seconde possibilité est préférable à la première car nous allons ensuite quantifier les perturbations, ce qui ne peut se faire qu'en partant de l'action (le moment conjugué est défini à partir du lagrangien, *cf* ci-dessous). L'action qui décrit les perturbations s'écrit

$$\delta^{(2)}S = \frac{1}{2}\int \left[\dot{\widehat{v}}\dot{\widehat{v}}^* - k^2\widehat{v}\widehat{v}^* + \frac{\ddot{z}}{z}\widehat{v}\widehat{v}^*\right] \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}^3k \, ,$$

à des termes de divergence près. Cette action décrit un ensemble d'oscillateurs harmoniques dont la masse varie avec le temps. Il faut ici faire attention que les variables $\widehat{v}$ sont définies dans l'espace de Fourier et ne sont pas réelles, mais soumises à la condition

$$\widehat{v}(\boldsymbol{k}) = \widehat{v}^*(-\boldsymbol{k}) \, .$$

On obtient alors l'opérateur $\hat{w}_{\boldsymbol{k}}$, conjugué de $\hat{v}_{\boldsymbol{k}}$ et les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned}\widehat{w}_{\boldsymbol{k}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\widehat{v}}^*_{\boldsymbol{k}}} = \dot{\widehat{v}}_{\boldsymbol{k}} \, , \\ [\hat{v}_{\boldsymbol{k}}, \hat{w}_{\boldsymbol{k}'}] &= i\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') \, , \\ \left[\hat{v}_{\boldsymbol{k}}, \hat{w}^\dagger_{\boldsymbol{k}'}\right] &= i\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \, .\end{aligned}$$

Le hamiltonien du système dérive de l'action et vaut

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int\left(\hat{w}_{\boldsymbol{k}}\hat{w}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} + k^2\hat{v}_{\boldsymbol{k}}\hat{v}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} - \frac{\ddot{z}}{z}\hat{v}_{\boldsymbol{k}}\hat{v}_{\boldsymbol{k}}\right)\,\mathrm{d}^3k\ .$$

Les opérateurs $\hat{v}_{\boldsymbol{k}}$ suivent la même loi d'évolution que les variables $\widehat{v}(\eta,\boldsymbol{k})$, obtenue ici à l'aide du hamiltonien

$$\frac{\mathrm{d}\hat{v}_{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{d}\eta} = -\,i\left[\hat{v}_{\boldsymbol{k}},\hat{H}\right]\ ,$$
$$\frac{\mathrm{d}\hat{w}_{\boldsymbol{k}}}{\mathrm{d}\eta} = -\,i\left[\hat{w}_{\boldsymbol{k}},\hat{H}\right]\ .$$

La solution pour $\hat{v}_{\boldsymbol{k}}$ s'écrit alors

$$\hat{v}_{\boldsymbol{k}} = \hat{a}_{\boldsymbol{k}}u_k(\eta) + \hat{a}^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}}u^*_k(\eta)\ ,$$

où $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}$ est un opérateur indépendant du temps et $u_k(\eta)$ est une solution complexe de l'équation différentielle d'évolution des modes. On peut imposer une relation de normalisation pour les $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}$:

$$\left[\hat{a}_{\boldsymbol{k}},\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'}\right] = i\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\ ,$$

qui donne la contrainte suivante pour la fonction u_k :

$$u_k\dot{u}^*_k - u^*_k\dot{u}_k = i\ .$$

La solution u_k dépendait *a priori* de quatre constantes d'intégration réelles. La condition ci-dessus réduit le nombre de constantes à trois. Deux autres constantes sont imposées par l'hypothèse portant sur l'état initial. L'idée est de pouvoir retrouver les résultats habituels de la théorie quantique des champs en espace plat tant que celui-ci ne "voit" pas la courbure de l'espace-temps, c'est-à-dire ici tant que le mode est très à l'intérieur du rayon de Hubble. On a alors le résultat classique de la théorie des champs pour un champ libre [Itzykson & Zuber, 1980] :

$$u_k \to \frac{1}{\sqrt{2k}}e^{-ik\eta}\ ,\quad k\eta \to -\infty\ .$$

La fonction est maintenant correctement normalisée. (Elle reste en fait définie à un facteur de phase près, mais celui-ci est sans importance.) Reste maintenant à choisir l'état initial des perturbations. On prend habituellement l'état du vide $|0\rangle \equiv \bigotimes_{\boldsymbol{k}}|0_{\boldsymbol{k}}\rangle$, annihilé par tous les opérateurs $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}$:

$$\hat{a}_{\boldsymbol{k}}|0\rangle = 0\ .$$

La transition quantique-classique

La dernière étape qu'il nous reste à franchir est de comprendre comment on passe de la description à l'aide de fluctuations quantiques à une description (plus intuive) en termes de variables aléatoires classiques pour les perturbations cosmologiques.

On peut montrer qu'à l'aide d'une certaine combinaison linéaire des quantités $\hat{v}$ et $\hat{w}$, on peut fabriquer deux variables $\hat{p}$ et $\hat{q}$ qui saturent strictement l'inégalité de Heisenberg, mais dont les variances sont respectivement proportionnelle et inversement proportionnelle à e^r, où r est une quantité appelée facteur de compression dont on peut montrer qu'elle croît de façon importante lorsque le mode sort de l'horizon. Un tel état est appelé *état comprimé*.

L'obtention de cet état comprimé est en fait une propriété générique des hamiltoniens quadratiques du type de celui que nous avons obtenu précédemment, et donc des modèles inflationaires sous-jacents. Schématiquement, un état comprimé peut être représenté par une ellipse dont les axes sont proportionnels aux variances de $\hat{p}$ et $\hat{q}$. Si on représente cette ellipse dans un système de coordonnées dont les vecteurs de base sont colinéaires à $\hat{v}$ et $\hat{w}$, l'ellipse sera penchée par rapport aux deux axes. Dans la limite où le paramètre de compression est très grand, l'ellipse devient une droite et à chaque valeur de $\hat{v}$ est alors associée une valeur unique de $\hat{w}$. Cela signifie que la connaissance de la distribution de probabilité d'une de ces deux variables suffit à déterminer entièrement l'autre, les deux se comportant alors comme des variables aléatoires classiques.

Cette formulation permet de justifier de façon heuristique pourquoi nous n'avons pas à quantifier la partie non perturbée du champ : celle-ci correspond aux plus grandes longueurs d'ondes, qui sont déjà en dehors du rayon de Hubble en début d'inflation. Ainsi, les modes du champ à ces échelles peuvent toujours être considérés de façon classique.

Présentation des chapitres suivants

Les travaux présentés dans les trois chapitres qui vont suivre portent sur des commentaires des trois hypothèses que nous avons faites.

Au chapitre 12, on relaxe l'hypothèse portant sur l'état initial des perturbations. Supposer que cet état initial n'est pas le vide donne une grande liberté de choix pour le nouvel état initial, mais on se restreint ici à un "petit" écart au vide, en l'occurence, un état qui possède une seule échelle privilégiée. L'espace des états reste petit et il est possible de voir quels sont les états admissibles en regard des observations actuelles. On arrive ainsi à construire une nouvelle classe de spectres "BSI" (pour *broken scale invariant*), qui pourraient être compatibles avec les observations.

Le chapitre 13 est consacré à l'étude des anisotropies générées par un modèle d'inflation à deux champs scalaires massifs, minimalement couplés et sans interactions. Il s'agit d'un modèle relativement simple d'inflation à plusieurs champs scalaires qui génère à la fois des perturbations adiabatiques et isocourbures, qui peuvent ou non être corrélées selon les paramètres du modèle. Un tel scénario donne lieu à une plus grande richesse de spectres d'anisotropies que les modèles à un seul champ scalaire (notamment, la relation $\delta T/T \simeq \frac{1}{3}\Phi$ n'est plus valable), et s'avère en fait conforter le "paradigme" de l'inflation à un seul champ scalaire, car dans la majeure partie des cas, les spectres obtenus sont déjà exclus par les observations actuelles (le plateau Sachs-Wolfe est en général trop haut par rapport au premier pic).

Enfin, le dernier chapitre de cette partie est consacré à une discussion sur la façon dont sont exploitées les données des expériences récentes. Nous insistons sur le fait qu'il serait grandement préférable de prendre comme paramètres libres les paramètres du slow-roll et non ceux de l'inflation en loi de puissance, qui sont d'ailleurs utilisés de manière erronée. Nous en profitons également pour signaler une erreur numérique dans les deux codes CMBFAST et CAMB pour le calcul du quadrupole du spectre d'anisotropies des ondes gravitationnelles.

Chapitre 12

État initial des perturbations (article)

Sommaire

Pendant la phase inflationnaire, l'Univers atteint un état homogène et isotrope, aussi est-il raisonnable d'imposer que l'état initial des perturbations possède les mêmes symétries. Il n'est par contre pas clair qu'il doive également ne pas privilégier d'échelle.

Le fait que l'état initial soit pris égal au vide (donc sans échelle privilégiée) repose à la fois sur des arguments de simplicité et sur la théorie quantique des champs. En cosmologie, la situation est quelque peu particulière, car l'espace n'est pas celui de Minkowski, mais un espace de Robertson-Walker. Le fait qu'on utilise la théorie quantique des champs en cosmologie résulte d'une approximation semi-classique, où l'on traite la métrique de façon classique tant que celle-ci varie à un taux faible devant la fréquence des modes. Aux époques les plus reculées cependant, *tous* les modes d'intérêt cosmologique étaient plus petits que la longueur de Planck, échelle à laquelle on ne peut en principe plus effectuer ce traitement semi-classique.

La gravité quantique est en principe la théorie qui permettrait de prédire avec certitude l'état initial des perturbations, malheureusement cette théorie n'existe pas encore. Il est donc pour l'instant raisonnable de supposer que l'état initial des perturbations possède une échelle privilégiée donnée par la longueur de Planck en début d'inflation. Une hypothèse séduisante serait que cette échelle privilégiée soit observable dans les anisotropies du rayonnement fossile ou dans les fonctions de corrélations des galaxies. Cette échelle a crû au minimum d'un facteur $\sim e^{60}$ pendant l'inflation, puis d'un facteur $\sim 10^{28}$ après (en supposant une température de reheating de l'ordre de 10^{16} GeV). Aujourd'hui, les modes qui étaient à la longueur de Planck au début de l'inflation mesurent au moins 1 kpc. Si l'inflation a duré relativement peu de temps (entre 70 et 75 e-folds, par exemple), il est possible que ces modes soient déjà revenus dans l'Univers observable. De tels modèles d'inflation existent [Adams *et al.*, 1997b] bien que ce ne soient pas les plus populaires (à l'inverse, l'inflation chaotique prédit un nombre d'e-folds beaucoup plus grand [Linde, 1990]).

Dans ce chapitre, tiré d'un article paru dans *Physical Review D* [Martin *et al.*, 2000a], nous examinons quelques conséquences observationnelles de tels modèles qui privilégient une échelle dans l'état initial des perturbations, en supposant que cette échelle privilégiée se situe aujourd'hui aux alentours de 100 Mpc, ce qui la met à la hauteur du premier pic Doppler dans le spectre des anisotropies du fond diffus cosmologique.

Après une discussion sur les différentes motivations pour le choix de tel ou tel état initial (§1), nous faisons d'abord un rappel sur la quantification des perturbations en inflation (§2.1), puis nous construisons un état quantique isotrope possédant une échelle privilégiée k_0 (§2.2). Cet état n'est plus le vide, mais est obtenu en faisant une superposition d'états produits en faisant agir des opérateurs de création sur le vide. Nous calculons ensuite le spectre de puissance des perturbations en fin d'inflation (§2.3). Un point important est que comme l'état initial n'est plus le vide, les perturbations ne sont plus gaussiennes, ce qui donne en principe un moyen de distinguer entre ces modèles et les modèles BSI [Lesgourgues & Polarski, 1997] où le spectre de puissance possède une échelle privilégiée à cause d'une irrégularité dans le potentiel de l'inflaton (mais les fluctuations restent gaussiennes contrairement à ici). Nous effectuons ensuite quelques comparaisons aux observations (§3) dans le cadre de quelques modèles simples. Il apparaît qu'un écart important au vide est assez facilement observable. Au vu des observations actuelles, il est par conséquent vraisemblable que l'état initial n'était pas trop éloigné du vide (du moins aux échelles observables aujourd'hui), mais un petit écart au vide reste en principe détectable. Cela renforce *a posteriori* (mais sans le justifier) le choix du vide comme état initial des perturbations.

Non-vacuum initial states for cosmological perturbations of quantum-mechanical origin

Jérôme Martin[1]*, Alain Riazuelo[1]† and Mairi Sakellariadou[2,3]‡

[1] *Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, UPR 176 du Centre National de la Recherche Scientifique, Observatoire de Paris, F-92195 Meudon Cedex (France)*

[2] *Theory Division, CERN, CH-1211 Geneva 23 (Switzerland)*

[3] *Centre for Theoretical Physics, University of Sussex, Brighton, Falmer BN1 9QH (England)*

Abstract : In the context of inflation, non-vacuum initial states for cosmological perturbations that possess a built in scale are studied. It is demonstrated that this assumption leads to a falsifiable class of models. The question of whether they lead to conflicts with the available observations is addressed. For this purpose, the power spectrum of the Bardeen potential operator is calculated and compared with the CMBR anisotropies measurements and the redshift surveys of galaxies and clusters of galaxies. Generic predictions of the model are: a high first acoustic peak, the presence of a bump in the matter power spectrum and non-Gaussian statistics. The details are controlled by the number of quanta in the non-vacuum initial state. Comparisons with observations show that there exists a window for the free parameters such that good agreement between the data and the theoretical predictions is possible. However, in the case where the initial state is a state with a fixed number of quanta, it is shown that this number cannot be greater than a few. On the other hand, if the initial state is a quantum superposition, then a larger class of initial states could account for the observations, even though the state cannot be too different from the vacuum. Planned missions such as the MAP and PLANCK satellites and the Sloan Survey, will demonstrate whether the new class of models proposed here represents a viable alternative to the standard theory.

PACS numbers : 98.80.Cq, 98.70.Vc

1 Introduction

The observed large-scale structure in the Universe has been currently addressed, within the framework of gravitational instability, by two families of models: initial density perturbations can either

*Email addres: `martin@edelweiss.obspm.fr`
†Email addres: `Alain.Riazuelo@obspm.fr`
‡Email addres: `Mairi.Sakellariadou@cern.ch`

be due to "freezing in" of quantum fluctuations of a scalar field (inflaton) during an inflationary era [Guth & Pi, 1982] [Hawking, 1982] [Starobinsky, 1982], or they may be seeded by a class of topological defects, naturally formed during a symmetry-breaking phase transition in the early Universe [Kibble, 1980]. The recent bulk of observational and experimental data and, in particular, the cosmic microwave background anisotropy measurements, and the redshift surveys of the distribution of galaxies and clusters of galaxies, impose severe constraints on the two families of models, as well as on the variety of possible scenarios introduced within each family.

The simplest topological defects models of structure formation show conflicts with observational data. As was first shown in [Durrer *et al.*, 1996], global topological defects models predict strongly suppressed acoustic peaks. While on large angular scales the predicted cosmic microwave background radiation (CMBR) spectrum is in good agreement with COBE measurements, on smaller angular scales the topological defects models cannot reproduce the data of the Saskatoon experiment. One can manufacture models [Durrer & Sakellariadou, 1997] with structure formation being induced by scaling seeds, which lead to an angular power spectrum with the same characteristics (position and amplitude of acoustic peaks), as the one predicted by standard inflationary models. The open question is, though, whether such models are the outcome of a realistic theory. However, the most severe problem for topological defects models of structure formation is their predicted [Pen *et al.*, 1997] [Albrecht *et al.*, 1999] lack of large-scale power in the matter power spectrum, once normalized to COBE. Choosing scales of $100h^{-1}$ Mpc, which are most probably unaffected by non-linear gravitational evolution, standard topological defect models, once normalized to COBE, require a bias factor (b_{100}) on scales of $100h^{-1}$ Mpc of $b_{100} \simeq 5$, to reconcile the predictions for the density field fluctuations with the observed galaxy distribution. However, the latest theoretical and experimental studies favor a current value of b_{100} close to unity.

In what follows, we shall place ourselves within the framework of cosmological perturbations of quantum-mechanical origin in the context of inflationary models. The inflationary paradigm was proposed in order to explain the shortcomings of the standard (Big Bang) cosmological model. In addition, it offers a scenario for the generation of the primordial density perturbations, which can lead to the formation of the observed large-scale structure.

The theory of cosmological perturbations of quantum-mechanical origin rests on two well-established theories. On the one hand, (linearized) general relativity allows a calculation of the evolution and the amplification of perturbations throughout the cosmic evolution; the mechanism at work being parametric amplification of the fluctuations due to the interaction of the perturbations with the background [Grishchuk, 1993a]. On the other hand, quantum field theory permits to understand the origin of these perturbations. If the quantum fields are initially, *i.e.*, at the beginning of inflation, placed in the vacuum state, then because of the Heisenberg principle, fluctuations are unavoidable. Moreover, the amplitude of these fluctuations is completely fixed.

Inflation, employing the theory of cosmological perturbations of quantum-mechanical origin, leads to definite predictions for the anisotropies of the CMBR, as well as for the power spectrum, which can be tested against experimental and observational data. In particular, simple models predict a scale-invariant spectrum, with, provided the quantum fields are initially placed in the vacuum, Gaussian fluctuations.

Let us briefly discuss the observational data, namely the CMBR anisotropies measurements and the redshift surveys of the distribution of galaxies.

The CMBR, last scattered at the epoch of decoupling, has to a high accuracy a black-body distribution [Mather *et al.*, 1990] [Cheng *et al.*, 1996], with a temperature $T_0 = 2.728 \pm 0.002$ K, which is almost independent of direction. The DMR experiment on the COBE satellite measured a tiny variation in intensity of the CMBR, at fixed frequency. This is equivalently expressed as a variation

δT in the temperature, which was measured to be $\delta T/T_0 \simeq 10^{-5}$ [Smoot *et al.*, 1992] [Bennett *et al.*, 1996]. The 4-year COBE data are fitted by a scale-free spectrum; the spectral index was found to be $n_S = 1.2 \pm 0.3$ and the quadrupole anisotropy $Q_{\text{rms}-\text{PS}} = 15.3^{+3.8}_{-2.8}\,\mu$K [Smoot *et al.*, 1992] [Bennett *et al.*, 1996]. The CMBR anisotropies spectrum is usually parameterized in terms of the multipole moments C_ℓ, defined as the coefficients in the expansion of the temperature autocorrelation function

$$\left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{e}}_1)\frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{e}}_2)\right\rangle_{(\hat{\boldsymbol{e}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_2=\cos\theta)} = \frac{1}{4\pi}\sum_\ell (2\ell+1)C_\ell P_\ell(\cos\theta)\;, \qquad \textbf{(12.1.1)}$$

which compares points in the sky separated by an angle θ. The value of C_ℓ is determined by fluctuations on angular scales of order π/ℓ. The angular power spectrum of anisotropies observed today is usually given by the power per logarithmic interval in ℓ, plotting $\ell(\ell+1)C_\ell$ versus ℓ.

On large angular scales, the main physical mechanism which contributes to the redshift of photons propagating in a perturbed Friedmann geometry, originates from fluctuations in the gravitational potential on the last-scattering surface. The COBE DMR experiment, which measured CMBR anisotropies on such large angular scales ($\ell \lesssim 20$), confirmed the predicted scale-invariant spectrum and yields mainly a normalization for the different models of large-scale structure formation.

On intermediate angular scales, $0.1^\circ \lesssim \theta \lesssim 2^\circ$, the main contribution to the CMBR anisotropies comes from the intrinsic inhomogeneities on the surface of the last scattering, due to acoustic oscillations in the coupled baryon-radiation fluid prior to decoupling. On the same angular scales, there is a Doppler contribution to the CMBR anisotropies, due to the relative motions of emitter and observer. The sum of these two contributions is denoted by the term acoustic peaks. An analysis of recent CMBR flat-band measurements on intermediate angular scales gives [Lineweaver & Barbosa, 1998] in the best-fit power spectrum a peak $[\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi]^{1/2}T_0 = 76\,\mu$K with $\ell = 260$.

Among the various experiments measuring CMBR anisotropies, the Saskatoon experiment [Netterfield *et al.*, 1997] [Wollack *et al.*, 1997] is of particular importance since it relates [Einasto *et al.*, 1997] CMBR anisotropies to the power spectrum of matter density perturbations estimated through clustering properties of galaxies and clusters of galaxies. More precisely, the Saskatoon experiment measures temperature anisotropies for multipoles in the range $\ell \simeq 80--400$, which corresponds to the range of wavelengths for which we have data on galaxy clusters.

Analyzing a large number of available data on redshifts of individual galaxies and Abell galaxy clusters, one obtains [Einasto *et al.*, 1997] the power spectrum for clusters of galaxies, over the wave-number interval from $k \simeq 0.03h\,\text{Mpc}^{-1}$ to $k \simeq 0.3h\,\text{Mpc}^{-1}$. On very large scales ($k < 0.03h\,\text{Mpc}^{-1}$), the large error bars are due to incomplete data. However, near the turn over, error bars are small, thus both the relative position and amplitude of the turn over are determined accurately. As discussed in, *e.g.*, [Einasto *et al.*, 1997], the power spectrum reveals the existence of a non-trivial feature at a wave-number $k_0 = 0.052 \pm 0.005h\,\text{Mpc}^{-1}$. Assuming this peak exists (further studies are necessary to confirm it), the amplitude of the observed power spectrum is larger near the peak by a factor 1.4 [Einasto *et al.*, 1997] with respect to the power spectrum of the standard cold dark matter model. The existence of this peak is not related [Atrio-Barandela *et al.*, 1997] to acoustic oscillations in the tight coupled baryon-photon plasma. As stated in [Atrio-Barandela *et al.*, 1997], the current CMBR experimental data combined with observational cluster data, favor theoretical models that have built-in a characteristic scale in their initial spectrum.

Recently, the COBE data have also been used to test the Gaussianity of the CMBR anisotropies. Three groups [Ferreira *et al.*, 1998] [Magueijo *et al.*, 1998] [Pando *et al.*, 1998] [Novikov *et al.*, 1999] have now reported results showing that the fluctuations would not be Gaussian. The three groups work with different methods. In [Ferreira *et al.*, 1998] [Magueijo *et al.*, 1998], the estimation of the bispectrum B_ℓ is used as a criterion to test Gaussianity. The dominant non-Gaussian contribution has been found near $\ell = 16$. It is clear that these results should be taken cautiously since, for example, the issue of foreground contamination could change the conclusions. However, the possibility of non-Gaussian statistics in the CMBR anisotropies should be taken into account seriously.

The Saskatoon measurements could be explained by playing with the values of the cosmological parameters. In particular, the value of the cosmological constant, $\Omega_\Lambda \simeq 0.6$, recently inferred from the SN Ia measurements could account for the high position of the first acoustic peak. But the other features (the presence of a peak in the power spectrum; non-Gaussian fluctuations in the CMBR), if confirmed, clearly go beyond the paradigm of cold dark matter (CDM) and slow roll inflation. In order to explain them, different mechanisms have been advocated. For instance, double-inflation [Kofman *et al.*, 1985] [Kofman & Linde, 1987] [Kofman & Pogosian, 1988] [Gottlöber *et al.*, 1991] [Polarski & Starobinsky, 1992] or multiple-inflation [Adams *et al.*, 1997b] [Adams *et al.*, 1997a] [Sakellariadou & Tetradis, 1998] models have been used to explain the presence of the peak in the power spectrum. Another scenario can be offered within models where the inflaton field evolves through a kink in its potential [Starobinsky, 1992]. To explain the non-Gaussianity, different mechanisms have been proposed. Of course, this appears naturally when the perturbations are induced by topological defects. However, even in the context of inflation, non-Gaussianity can be present, as for example in the case of stochastic inflation [Gangui, 1994] [Gangui *et al.*, 1994] [Matacz, 1997].

All these solutions are in fact different possible modifications of the power spectrum of the primordial fluctuations. In this article, our aim is to discuss the choice of the initial quantum state in which the quantum fields are placed. This choice is of course crucial for the determination of the primordial power spectrum, and different quantum states will lead to different power spectra. In the literature, it is (almost, see [Lesgourgues *et al.*, 1997]) always assumed that the state of the perturbations is the vacuum (In a curved spacetime the definition of the vacuum state is not unique. A more precise definition of the vacuum used in this paper is given in what follows and coincides with the one in [Brandenberger, 1984]):

$$|0\rangle \equiv \bigotimes_{\boldsymbol{k}} |0_{\boldsymbol{k}}\rangle \ . \tag{12.1.2}$$

Let us examine how this choice can be justified. Since this question is a problem of boundary conditions, it must be addressed by means of a theory of the initial conditions for the early Universe. Such a theory should rely on full quantum gravity, which is unknown at present. The only candidate at our disposal is quantum cosmology. Generally, it predicts that the initial state is indeed the vacuum. For example, the no-boundary choice for the wave function of the cosmological perturbations implies that the Bardeen operator is placed in the vacuum state, see [Halliwell & Hawking, 1985] [Halliwell, 1991]. This result does not come as a surprise since the Hartle-Hawking proposal is a generalization of a method that gives the ground-state wave function of a system in ordinary quantum mechanics.

However, although fascinating, quantum cosmology is not yet a well-developed branch of physics and many important questions remain unsolved to this day. To our knowledge, there exists no proof that quantum considerations automatically lead to a vacuum initial state for the perturbations. Such a proof, if it exists, should rely on full quantum gravity.

On the other hand, the choice of the vacuum is also based on the hypothesis that the initial state of the Universe should be a "maximally symmetric state" [Starobinsky, 1979]. Concretely, this means that no scale should be privileged. This seems to be the simplest starting point. However, since the choice of the initial state is supposed to appear naturally in the context of quantum gravity, it could also be argued that such a privileged scale does exist and is equal to the Planck scale,

$l_{\rm Pl} = (\hbar\mathcal{G}/c^3)^{1/2} \simeq 10^{-33}$ cm. This becomes even more intriguing if one recalls that in order to solve the usual problems of the standard model of cosmology, one needs 60 e-folds during inflation. This means that the Planck scale has now been stretched to a scale of at least 60 pc. Accordingly, all the wavelengths below 60 pc were sub-Planckian at the moment of their generation. Of course, the structure of space-time below the Planck scale is unknown and it may be very different from the one we are used to. Probably, such notions as sub-Planckian wavelengths or even scale factor are meaningless in a regime where the gravitational quantum effects are important.

The arguments presented in the previous discussion show that it is worth studying non-vacuum initial states for cosmological perturbations. Rather than relying on theoretical arguments, our goal will be to allow for the possibility of non-vacuum initial states and to establish the consequences for the observables described at the beginning of the introduction. We study whether choices other than the vacuum automatically lead to inconsistencies or conflicts with the available observations or if, on the contrary, there exists a window for the free parameters of the model, which fits the observational data.

Our choice of a non-vacuum initial state is guided by a very simple idea: the initial state could have a built-in characteristic scale since this seems to be the simplest way to generalize the vacuum state. The question now arises as for the physical origin of this scale. A possible answer is that the natural scale is the Planck length stretched by the cosmological expansion. It is clear that, so as not to be in conflict with observations, we would like this fundamental scale to be now translated to the characteristic scale $l_{\rm car} \simeq 200$ Mpc $= 6.2\times 10^{26}$ cm (here, as in the rest of this article we take $h = 0.5$). Since the ratio $l_{\rm car}/l_{\rm Pl}$ is given by $l_{\rm car}/l_{\rm Pl} \simeq 10^{27}e^N$, where N is the number of e-folds during inflation, this means that $N \simeq 75$. Interestingly enough, we note that this leads to a number of e-folds greater than the minimum number required, *i.e.*, 60. In the context of Linde's chaotic inflation, it is assumed that, initially, the inflaton potential $V(\varphi)$ is such that $V(\varphi_i) \simeq m_{\rm Pl}^4$ where $m_{\rm Pl}$ is the Planck mass. If the potential is given by, *e.g.*, $V(\varphi) = (\lambda/4!)\varphi^4$, this leads to an initial value of the scalar field greater than $4.4m_{\rm Pl}$, which is needed to get the usual 60 e-folds. Consequently, this leads to a huge number of e-folds, $N \simeq 10^8$. It is clear that, with such a number, the Planck length cannot be stretched to 200 Mpc presently. Let us note that these models (with a large number of e-folds) suffer from the "super-Planck scale problem" [Brandenberger, 1999]: all the scales of cosmological interest now were sub-Planckian at the beginning of inflation. Since quantum field theory is expected to break down in this regime, the predictions of these models could be questionable. On the other hand, in the spirit of chaotic inflation itself, there exist regions of space in which the initial value of the field was $\varphi_i \simeq 4.9m_{\rm Pl}$. This value leads to a number of e-folds equal to 75. Therefore, the model presented in this article is certainly more relevant in the case where inflation does not last for a long period. In chaotic inflation, the probability of having a long period of inflation is greater than the probability to get a small number of e-folds. Thus, our model does not fit very well within the chaotic inflation approach.

It should also be mentioned that it has been shown in [Brandenberger & Hill, 1986] that a large class of initial states approaches the Bunch Davis vacuum in the de Sitter spacetime. However, this class of initial states has a Gaussian wave functional and therefore the argument that the choice of a non-vacuum initial state would involve exponential fine tuning does not apply to the case considered here.

Recently, a model with a small number of e-folds has been constructed in [Adams *et al.*, 1997b]. This kind of models naturally arises in the context of supersymmetric (SUSY and SUGRA) inflation. They are particularly well suited to the model put forward in this article. They consist in multiple bursts of inflation which in total last for $\simeq 75$ expansion times. In addition, the last stage of inflation is preceded by other inflationary epochs. The "initial state" of this last epoch is the result of the evolution of the "true initial state" through the multiple preceding bursts of inflation. Clearly, there is no reason for assuming this "effective initial state" to be the vacuum. Let us emphasize that this argument holds for every model with many stages of inflation since, in this case, the origin of the characteristic scale could no longer be the Planck length stretched to $l_{\rm car}$ but could correspond to the time where one of the fields starts rolling down.

Our model possesses a privileged scale and therefore belongs to the class of models already envisaged in [Lesgourgues *et al.*, 1998] [Lesgourgues *et al.*, 1999b] [Lesgourgues *et al.*, 1999a]. However, we would like to emphasize that the origin of this scale is physically completely different and we will point out that there exist observables, which, in principle, allow us to distinguish between the different models. A last comment on the fine tuning issue is in order here. It is true that the position of the characteristic scale must be chosen carefully. Otherwise the model would simply be in contradiction with the available data. We would like to emphasize that this is not a feature of our model only but in fact of all the BSI (broken scale invariant) models [Lesgourgues *et al.*, 1998] [Lesgourgues *et al.*, 1999b] [Lesgourgues *et al.*, 1999a]. In this respect our model is similar to the other BSI models.

This paper is organized as follows: In §2 we discuss non-vacuum initial state for the cosmological perturbations. We first briefly describe the theory of perturbations of quantum-mechanical origin. We then describe the non-vacuum initial states considered in this article. We finally calculate the power spectra of the Bardeen potential for these states and show that it possesses either a step or a bump. In §3 we examine the observational consequences of the calculated power spectra; we compare our theoretical predictions with current experimental and observational data, which will fix the parameters of our model. We end with the conclusions given in §4.

2 Non-vacuum initial state for the perturbations

2.1 Perturbations of quantum-mechanical origin

The background model is described by a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metric whose space-like sections are flat ($c=1$): $\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2)$. We assume that inflation is driven by a single scalar field, $\varphi_0(\eta)$. It is convenient to define the background quantities $\mathcal{H}(\eta)$ and $\gamma(\eta)$ by:

$$\mathcal{H} \equiv a'/a\,, \quad \gamma(\eta) \equiv 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}\,, \tag{12.2.1}$$

where the primes denote the derivatives with respect to conformal time. In the case of the de Sitter space-time, γ vanishes.

In the synchronous gauge, without loss of generality, the line element for the FLRW background plus scalar perturbations can be written as [Grishchuk, 1994]:

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left(-\mathrm{d}\eta^2 + \left[\delta_{ij} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left(h(\eta,\boldsymbol{k})\delta_{ij} - \frac{h_l(\eta,\boldsymbol{k})}{k^2}k_ik_j\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\right]\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right)\,, \tag{12.2.2}$$

where the functions h, h_l represent the scalar perturbations of the gravitational field and the longitudinal-longitudinal perturbation, respectively. In the same manner, the perturbations of the scalar field are Fourier decomposed according to:

$$\delta\varphi(\eta,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\varphi_1(\eta,\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,. \tag{12.2.3}$$

The perturbed Einstein equations couple the scalar sector, h and h_l, to the perturbed scalar field φ_1: see [Grishchuk, 1994]. It can be shown that the residual gauge invariant quantity $\mu(\eta,\boldsymbol{k})$ [Grishchuk, 1994] defined by:

$$\mu \equiv \frac{a}{\mathcal{H}\sqrt{\gamma}}(h' + \mathcal{H}\gamma h)\,, \tag{12.2.4}$$

can be used to express all other relevant quantities. The quantity $\mu(\eta,\boldsymbol{k})$ is related to the gauge-invariant Bardeen potential through the equation:

$$\Phi^{(\mathrm{SG})} = \frac{\mathcal{H}\gamma}{2k^2}\left(\frac{\mu}{a\sqrt{\gamma}}\right)'\,, \tag{12.2.5}$$

where "SG" means calculated in the synchronous gauge, see [Martin & Schwarz, 1998]. The quantity $\mu(\eta,\boldsymbol{k})$ is not defined in the de Sitter case. This case must be treated separately and for it we have $\Phi^{(\mathrm{SG})} = 0$: there are no density perturbations at all because the fluctuations of the scalar field are not coupled to the perturbations of the metric when the equation of state is $p = -\rho$. The perturbed Einstein equations imply that the equation of motion for $\mu(\eta,\boldsymbol{k})$ is given by [Grishchuk, 1994]:

$$\mu'' + \left[k^2 - \frac{(a\sqrt{\gamma})''}{(a\sqrt{\gamma})}\right]\mu = 0\,. \tag{12.2.6}$$

The above is the characteristic equation of a parametric oscillator whose time-dependent frequency depends on the scale factor and its derivative (up to $a^{(4)}$).

In this article, we assume that the perturbations are of quantum-mechanical origin. This hypothesis fixes completely the normalization of $\delta\varphi(\eta,\boldsymbol{x})$ and of the scalar perturbations. The normalization is fixed in the high-frequency regime. In this regime, the perturbed field can be considered as a free field in the curved FLRW background space-time. It is therefore necessary to study the quantization of such a free field denoted in the following by $\varphi(\eta,\boldsymbol{x})$. We first address this question and we then make the link between $\varphi(\eta,\boldsymbol{x})$ and $\delta\varphi(\eta,\boldsymbol{x})$. We choose to define the Fourier component of $\varphi(\eta,\boldsymbol{x})$ according to:

$$\varphi(\eta,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{a(\eta)}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \chi(\eta,\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,, \tag{12.2.7}$$

where we have renormalized the time-dependent amplitude with the scale factor. The Fourier component satisfies $\chi(\eta,-\boldsymbol{k}) = \chi^*(\eta,\boldsymbol{k})$, because the field is real. The action, given by:

$$S = \int \mathcal{L}\,\mathrm{d}^4x = \frac{1}{2}\int a^2\left[\left(\varphi'(\eta,\boldsymbol{x})\right)^2 - \sum_i\left(\partial_i\varphi(\eta,\boldsymbol{x})\right)^2\right]\mathrm{d}^4x\,, \tag{12.2.8}$$

can also be written in terms of the Fourier component $\chi(\eta,\boldsymbol{k})$. The result reads:

$$\begin{aligned} S = \int \mathrm{d}\eta \int_{\mathbb{R}^3_+} \bar{\mathcal{L}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k} = \int \mathrm{d}\eta \int_{\mathbb{R}^3_+} \Bigg(&|\chi'(\eta,\boldsymbol{k})|^2 + \left(\frac{a'^2}{a^2} - k^2\right)|\chi(\eta,\boldsymbol{k})|^2 \\ &- \frac{a'}{a}\left[\chi'(\eta,\boldsymbol{k})\chi^*(\eta,\boldsymbol{k}) + \chi'^*(\eta,\boldsymbol{k})\chi(\eta,\boldsymbol{k})\right]\Bigg)\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,. \end{aligned} \tag{12.2.9}$$

The variation of the action leads to the equation of motion for the Fourier component: $\chi'' + [k^2 - a''/a]\chi = 0$. Again, we find a parametric oscillator-type equation. Of course, if there is no expansion, or if the Universe is in the radiation-dominated era, it reduces to the usual equation of motion of an harmonic oscillator.

We now turn to the Hamiltonian formalism. The first step is the calculation of the momentum conjugate to $\varphi(\eta,\boldsymbol{x})$ defined by:

$$\pi(\eta,\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\varphi'(\eta,\boldsymbol{x}))} = a^2\varphi'(\eta,\boldsymbol{x}) \,. \tag{12.2.10}$$

$\pi(\eta,\boldsymbol{x})$ can be expressed in terms of the momentum conjugate to $\chi(\eta,\boldsymbol{k})$,

$$p(\eta,\boldsymbol{k}) \equiv \frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial(\chi'^*(\eta,\boldsymbol{k}))} = \chi'(\eta,\boldsymbol{k}) - \frac{a'}{a}\chi(\eta,\boldsymbol{k}) \,, \tag{12.2.11}$$

through the relation:

$$\pi(\eta,\boldsymbol{x}) = \frac{a(\eta)}{(2\pi)^{3/2}}\int p(\eta,\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k} \,. \tag{12.2.12}$$

As a preparation to the quantization, the normal variable $\alpha(\eta,\boldsymbol{k})$ is introduced. Its definition is given by:

$$\alpha(\eta,\boldsymbol{k}) \equiv N(k)\left[\chi(\eta,\boldsymbol{k}) + \frac{i}{k}p(\eta,\boldsymbol{k})\right] \,, \tag{12.2.13}$$

where $N(k)$ is, at the classical level, a free factor.

We are now in a position where quantization can be carried out. The field $\varphi(\eta,\boldsymbol{x})$ and its conjugate momentum $\pi(\eta,\boldsymbol{x})$ become operators that satisfy the commutation relation:

$$[\hat{\varphi}(\eta,\boldsymbol{x}),\hat{\pi}(\eta,\boldsymbol{x}')] = i\hbar\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \,. \tag{12.2.14}$$

The normal variable $\alpha(\eta,\boldsymbol{k})$ becomes a dimensionless operator $c_{\boldsymbol{k}}(\eta)$ such that, at any time, $[c_{\boldsymbol{k}}(\eta),c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'}(\eta)] = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}$. With the help of Eqns (**12.2.7**) and (**12.2.12**) and of the definition of the normal variable (**12.2.13**), the field operator and the conjugate momentum operator can now be expressed in terms of the annihilation and creation operators $c_{\boldsymbol{k}}(\eta)$ and $c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(\eta)$. The normalization factor $N(k)$ is fixed by the following argument: the energy of the scalar field is given by $E = \int\sqrt{-g}\rho\,\mathrm{d}^3x$, where $\rho = -T^0{}_0$ is the time-time component of the stress-energy tensor. Requiring that E takes the following (usual) suggestive form in the high-frequency regime,

$$E = \int\frac{\hbar\omega}{2}[c_{\boldsymbol{k}}c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} + c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}c_{\boldsymbol{k}}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{k} \,, \tag{12.2.15}$$

leads to

$$N(k) = \sqrt{\frac{k}{2\hbar}} \,. \tag{12.2.16}$$

Therefore, the scalar field operator can be written as:

$$\hat{\varphi}(\eta,\boldsymbol{x}) = \frac{\sqrt{\hbar}}{a(\eta)}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left[c_{\boldsymbol{k}}(\eta)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(\eta)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k}} \,. \tag{12.2.17}$$

This equation no longer contains arbitrary (or unfixed) factors. The spirit of this argument is comparable to that of the method employed in [Grishchuk, 1994].

The Hamiltonian can be deduced from the action in a straightforward manner and reads:

$$H = \frac{\hbar}{2}\int \left[k(c_{\boldsymbol{k}}c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} + c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}}c_{-\boldsymbol{k}}) - i\frac{a'}{a}(c_{\boldsymbol{k}}c_{-\boldsymbol{k}} - c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}})\right] \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,. \tag{12.2.18}$$

In the above expression, the first term represents the Hamiltonian of a set of harmonic oscillators, whereas the second term can be viewed as an interaction term between the perturbations and the background. This term is present only in a dynamical FLRW Universe since the coupling function is proportional to the first time derivative of the scale factor. The time evolution of the field operator is given by the time evolution of the creation and annihilation operators. It can be calculated using the Heisenberg equation:

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\hat{\varphi}(\eta,\boldsymbol{x}) = [\hat{\varphi}(\eta,\boldsymbol{x}),H]\,. \tag{12.2.19}$$

This equation can be solved by a Bogoliubov transformation, expressed as:

$$c_{\boldsymbol{k}}(\eta) = u_k(\eta)c_{\boldsymbol{k}}(\eta_0) + v_k(\eta)c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}}(\eta_0)\,, \tag{12.2.20}$$

$$c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(\eta) = u^*_k(\eta)c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(\eta_0) + v^*_k(\eta)c_{-\boldsymbol{k}}(\eta_0)\,, \tag{12.2.21}$$

where the functions $u_k(\eta)$ and $v_k(\eta)$ only depend on the norm of the vector $\boldsymbol{k}$. These functions are such that $|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1$, so that the commutation relation between the creation and annihilation operators is preserved in time. The time η_0 must be thought of as the time where the initial conditions are fixed. Whatever these last ones are, we have $u_k(\eta_0) = 1$ and $v_k(\eta_0) = 0$. The differential equations that allow the determination of $u_k(\eta)$ and $v_k(\eta)$ are:

$$iu'_k = ku_k + i\frac{a'}{a}v^*_k\,, \quad iv'_k = kv_k + i\frac{a'}{a}u^*_k\,. \tag{12.2.22}$$

If we introduce the Bogoliubov transformation given by Eqns (**12.2.20**) and (**12.2.21**) in the expression of the field operator (**12.2.17**), we obtain:

$$\hat{\varphi}(\eta,\boldsymbol{x}) = \frac{\sqrt{\hbar}}{a(\eta)}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\sqrt{2k}}\left[c_{\boldsymbol{k}}(\eta_0)(u_k+v^*_k)(\eta)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(\eta_0)(u^*_k+v_k)(\eta)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\,. \tag{12.2.23}$$

From Eq. (**12.2.22**), it is easy to see that the function $(u_k + v^*_k)(\eta)$ satisfies the same equation as $\chi(\eta,\boldsymbol{k})$. In the high-frequency regime, the term a''/a becomes negligible and we have $\lim_{k\to+\infty}(u_k+v^*_k)(\eta) = e^{-ik(\eta-\eta_0)}$. This means that, in this regime, the operator $\hat{\chi}(\eta,\boldsymbol{k})$ is given by:

$$\lim_{k\to+\infty}\hat{\chi}(\eta,\boldsymbol{k}) = \sqrt{\hbar}\left[c_{\boldsymbol{k}}(\eta_0)\frac{e^{-ik(\eta-\eta_0)}}{\sqrt{2k}} + c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}}(\eta_0)\frac{e^{ik(\eta-\eta_0)}}{\sqrt{2k}}\right]\,. \tag{12.2.24}$$

We can now come back to our initial problem, which consists in finding the correct normalization of the perturbed scalar field and of the scalar perturbations. We can identify the Fourier component operator of the perturbed field, $\hat{\varphi}_1(\eta,\boldsymbol{k})$, with $\hat{\chi}(\eta,\boldsymbol{k})/a(\eta)$, both operators being considered in the high-frequency regime. Let us emphasize again that this identification is valid only in this regime. Otherwise, the field $\hat{\varphi}_1(\eta,\boldsymbol{k})$ does not behave as the free field $\hat{\varphi}(\eta,\boldsymbol{x})$ and the time dependence of the modes is no longer given by the function $(u_k+v^*_k)(\eta)$. The normalization of the perturbed scalar field fixes automatically the normalization of the scalar perturbations of the metric since they are linked through Einstein's equations. We only need this link in the high-frequency regime. It can be expressed as (see [Grishchuk, 1994] [Martin & Schwarz, 1998]):

$$\lim_{k\to+\infty}\hat{\mu}(\eta,\boldsymbol{k}) = -\sqrt{2\kappa}a(\eta)\lim_{k\to+\infty}\hat{\varphi}_1(\eta,\boldsymbol{k}), \qquad (\mathbf{12.2.25})$$

where $\kappa \equiv 8\pi\mathcal{G}$. From the last expression and Eq. (**12.2.24**), we immediately deduce that:

$$\lim_{k\to+\infty}\hat{\mu}(\eta,\boldsymbol{k}) = -4\sqrt{\pi}l_{\mathrm{Pl}}\left[c_{\boldsymbol{k}}(\eta_0)\frac{e^{-ik(\eta-\eta_0)}}{\sqrt{2k}} + c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}}(\eta_0)\frac{e^{ik(\eta-\eta_0)}}{\sqrt{2k}}\right], \qquad (\mathbf{12.2.26})$$

where $l_{\mathrm{Pl}} = (\mathcal{G}\hbar)^{1/2}$ is the Planck length. As announced, the normalization of the scalar perturbations is now completely determined. In general, the operator $\hat{\mu}(\eta,\boldsymbol{k})$ will be given by:

$$\hat{\mu}(\eta,\boldsymbol{k}) = -4\sqrt{\pi}l_{\mathrm{Pl}}[c_{\boldsymbol{k}}(\eta_0)\xi_k(\eta) + c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}}(\eta_0)\xi_k^*(\eta)]\,. \qquad (\mathbf{12.2.27})$$

The function $\xi_k(\eta)$ is the solution of Eq. (**12.2.6**) such that $\lim_{k\to+\infty}\xi_k = e^{-ik(\eta-\eta_0)}/\sqrt{2k}$. If we introduce the function $f_k(\eta)$ defined by

$$f_k(\eta) \equiv -4\sqrt{\pi}\frac{\mathcal{H}\gamma}{2k^2}\frac{\xi_k}{(a\sqrt{\gamma})'}, \qquad (\mathbf{12.2.28})$$

then the dimensionless Bardeen operator $\hat{\Phi}(\eta,\boldsymbol{x})$ can be written as:

$$\hat{\Phi}(\eta,\boldsymbol{x}) = \frac{l_{\mathrm{Pl}}}{(2\pi)^{3/2}}\int\left[c_{\boldsymbol{k}}(\eta_0)f_k(\eta)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(\eta_0)f_k^*(\eta)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{k}\,. \qquad (\mathbf{12.2.29})$$

This equation is the main equation of this section and will be used in the following.

To conclude this part, it is interesting to consider the previous equations in the case of power law inflation, *i.e.*, when the scale factor is given by:

$$a(\eta) = l_0|\eta|^{1+\beta}\,. \qquad (\mathbf{12.2.30})$$

To have inflation, β must be such that $\beta+2<0$ (the case $-2<\beta<-1$ is not considered here because it cannot be realized with a single scalar field); $\beta=-2$ corresponds to the de Sitter Universe; l_0 has dimension of length and, in the de Sitter case, it is equal to the Hubble radius $l_H \equiv a^2/a'$. Moreover, in a de Sitter Universe, the function $\gamma(\eta)$ turns out to be zero. We would like to notice that the assumption of power-law inflation is not as restrictive as it seems. Indeed, the widely used slow-roll approximation boils down to power-law inflation, with an effective β depending on the slow-roll parameters, see [Lidsey *et al.*, 1997]. In the case of power law inflation, analytical exact solutions for the equations of motion of the perturbations can be found. With the scale factor of Eq. (**12.2.30**), Eq. (**12.2.6**) can be solved in terms of Bessel functions. Then, the exact solution for the function $\xi_k(\eta)$ is:

$$\xi_k(\eta) = -i(\pi/2)^{1/2}e^{i(k\eta_0-\pi\beta/2)}(k\eta)^{1/2}\mathrm{H}^{(2)}_{\beta+1/2}(k\eta)/\sqrt{2k}\,, \qquad (\mathbf{12.2.31})$$

where $\mathrm{H}^{(2)}_{\beta+1/2}$ is the second-kind Hankel function of order $\beta+1/2$. It is straightforward to deduce the corresponding equation for $f_k(\eta)$:

$$f_k(\eta) = -\pi\sqrt{2}\frac{\mathcal{H}\sqrt{\gamma}}{k^2}e^{i(k\eta_0-\frac{\pi\beta}{2})}\frac{ik}{a}\frac{\sqrt{k\eta}}{\sqrt{2k}}\mathrm{H}^{(2)}_{\beta+3/2}(k\eta)\,. \qquad (\mathbf{12.2.32})$$

The previous expression for $f_k(\eta)$ guarantees that the field $\hat{\Phi}(\eta,\boldsymbol{x})$ possesses the correct behavior in the high-frequency regime. Roughly speaking,

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(\eta) \simeq e^{-ik\eta}/\sqrt{2k}\,,$$

with the correct amplitude. This should be the case of any field, regardless of the initial conditions one may choose.

2.2 Quantum states

The formulation of quantum field theory used in the previous subsection was written in the Heisenberg picture. So far, we have only calculated the time dependence of the Bardeen operator. In order to describe completely the system, one must in addition specify in which quantum state the field $\hat{\Phi}(\eta,\boldsymbol{x})$ is placed. As we already mentioned, it is usually found in the literature that the initial state of the perturbations is taken to be the vacuum. Here we address the hypothesis that the perturbations are initially in a non-vacuum state. Our choice of non-vacuum states is guided by the idea that one must introduce a scale in the theory. We denote the corresponding wave number by k_0. We examine three different non-vacuum states.

Let $\mathcal{D}$ be a domain in the momentum space characterized by the numbers k_0 and σ, such that k_0 is the privileged scale and σ the dispersion around it. Concretely, we take $\mathcal{D}$ as the space between the spheres of radius $k_0-\sigma$ and $k_0+\sigma$, *i.e.*, a shell of width 2σ in k-space. The domain $\mathcal{D}$ is invariant under rotations and therefore is compatible with the assumption of isotropy of the Universe. Our first state is given by:

$$\begin{aligned}|\Psi_1(k_0,\sigma,n)\rangle &\equiv \prod_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{D}(k_0,\sigma)} \frac{(c^\dagger_{\boldsymbol{k}})^n}{\sqrt{n!}}\,|0_{\boldsymbol{k}}\rangle \bigotimes_{\boldsymbol{p}\notin\mathcal{D}(k_0,\sigma)} |0_{\boldsymbol{p}}\rangle \\ &= \bigotimes_{\boldsymbol{k}\in\mathcal{D}(k_0,\sigma)} |n_{\boldsymbol{k}}\rangle \bigotimes_{\boldsymbol{p}\notin\mathcal{D}(k_0,\sigma)} |0_{\boldsymbol{p}}\rangle\;.\end{aligned} \tag{12.2.33}$$

The state $|n_{\boldsymbol{k}}\rangle$ is an n-particle state satisfying, at $\eta=\eta_0$: $c_{\boldsymbol{k}}|n_{\boldsymbol{k}}\rangle = \sqrt{n}\,|(n-1)_{\boldsymbol{k}}\rangle$ and $c^\dagger_{\boldsymbol{k}}|n_{\boldsymbol{k}}\rangle = \sqrt{n+1}\,|(n+1)_{\boldsymbol{k}}\rangle$.

More complicated states can be constructed by considering quantum superpositions of $|\Psi_1(k_0,\sigma,n)\rangle$. We will consider the following state:

$$|\Psi_2(k_0,n)\rangle \equiv \int |\Psi_1(k_0,\sigma,n)\rangle\, g(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,, \tag{12.2.34}$$

where, *a priori*, $g(\sigma)$ is an arbitrary function of σ. It is clear from the definition of the state $|\Psi_1\rangle$ that the transition between the empty and the filled modes is sharp. Physically, this is probably not very realistic. The function $g(\sigma)$ will be chosen in order to "smooth out" the quantum state $|\Psi_1\rangle$. Also it should be clear that the writing of $|\Psi_2\rangle$ in Eq. (**12.2.34**) is symbolic. An accurate definition of this state requires to take into account subtleties, which will be considered when we calculate the spectrum in the next section.

Finally a third state can be defined according to:

$$|\Psi_3(k_0)\rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\,|\Psi_2(k_0,n)\rangle\;. \tag{12.2.35}$$

The function $h(n)$ is arbitrary. As demonstrated below, this state will allow us to work with an effective number of quanta, which will no longer be an integer. This state seems to be the most natural rotational-invariant, smooth, quantum state that privileges a scale. Typically, the quantum state given in Eq. (**12.2.35**) depends on k_0 and on the free parameters characterizing the functions $g(\sigma)$ and $h(n)$. Their values will be determined later by confronting our theoretical predictions versus experimental and observational data.

Our aim is now to calculate the power spectra of the Bardeen potential operator in the three states $|\Psi_i\rangle$, $i=1,2,3$.

2.3 Power spectra

From now on, for convenience, we consider that the system is in a box whose edges have length L. As a consequence, the wave vector possesses discrete components given by $k_i = [(2\pi)/L]m_i$, where m_i is an integer. The Bardeen operator can be written as:

$$\hat{\Phi}(\eta,\boldsymbol{x}) = \frac{l_{\rm Pl}}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}}\left[c_{\boldsymbol{k}}(\eta_0)f_k(\eta)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}(\eta_0)f^*_k(\eta)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right] . \qquad \textbf{(12.2.36)}$$

We pass from the discrete representation to the continuous one by sending L to infinity and by applying the rule $1/(2\pi)^3\int \mathrm{d}\boldsymbol{k} \rightarrow 1/L^3\sum_{\boldsymbol{k}}$. It is clear that the final result does not depend on L.

The power spectrum of $\hat{\Phi}(\eta,\boldsymbol{x})$ in the state $|\Psi\rangle$, denoted by $P_{\Phi}(k,|\Psi\rangle)$, is defined through the calculation of the two-point correlation function $K_2(r,|\Psi\rangle)$. In the continuous limit,

$$\begin{aligned} K_2(r,|\Psi\rangle) &\equiv \frac{\langle\Psi|\,\hat{\Phi}(\eta,\boldsymbol{x})\hat{\Phi}(\eta,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\,|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} \\ &= \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}k}{k}\frac{\sin kr}{kr}k^3 P_{\Phi}(k,|\Psi\rangle) \, . \end{aligned} \qquad \textbf{(12.2.37)}$$

In this definition, we have taken into account the fact that the state $|\Psi\rangle$ is not automatically normalized to 1. The power spectrum is a time-dependent function but in the long-wavelength limit this dependence disappears. In order to perform the computation of the correlation function for the state $|\Psi_1\rangle$, one needs the following quantities:

$$\langle\Psi_1(k_0,\sigma,n)|\,c_{\boldsymbol{p}}c_{\boldsymbol{q}}\,|\Psi_1(k_0,\sigma,n)\rangle = 0 \, , \qquad \textbf{(12.2.38)}$$

$$\langle\Psi_1(k_0,\sigma,n)|\,c^{\dagger}_{\boldsymbol{p}}c^{\dagger}_{\boldsymbol{q}}\,|\Psi_1(k_0,\sigma,n)\rangle = 0 \, , \qquad \textbf{(12.2.39)}$$

$$\langle\Psi_1(k_0,\sigma,n)|\,c_{\boldsymbol{p}}c^{\dagger}_{\boldsymbol{q}}\,|\Psi_1(k_0,\sigma,n)\rangle = n\delta(\boldsymbol{q}\in\mathcal{D})\delta_{\boldsymbol{pq}} + \delta_{\boldsymbol{pq}} \, , \qquad \textbf{(12.2.40)}$$

$$\langle\Psi_1(k_0,\sigma,n)|\,c^{\dagger}_{\boldsymbol{p}}c_{\boldsymbol{q}}\,|\Psi_1(k_0,\sigma,n)\rangle = n\delta(\boldsymbol{q}\in\mathcal{D})\delta_{\boldsymbol{pq}} \, . \qquad \textbf{(12.2.41)}$$

In these formulas, $\delta(\boldsymbol{q}\in\mathcal{D})$ is a function that is equal to 1 if $\boldsymbol{q}\in\mathcal{D}$ and 0 otherwise.

As a warm up, we calculate the power spectrum for the state $|\Psi_1\rangle$ with $n=0$, *i.e.*, for the vacuum. Using the previous equations in the definition of the correlation function, Eq. (**12.2.37**), one finds:

$$K_2(r,|0\rangle) = \frac{l^2_{\rm Pl}}{L^3}\sum_{\boldsymbol{k}}|f_k|^2 e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \, , \qquad \textbf{(12.2.42)}$$

which in the continuous limit $L\rightarrow+\infty$ goes to

$$\frac{l^2_{\rm Pl}}{(2\pi)^3}\int |f_k|^2 e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \, . \qquad \textbf{(12.2.43)}$$

After having performed the angular integrations, we recover the power spectrum $P_\Phi(k,|0\rangle)$:

$$k^3 P_\Phi(k,|0\rangle) = \frac{l_{\rm Pl}^2}{2\pi^2} k^3 |f_k|^2 \ . \tag{12.2.44}$$

Let us turn to the calculation of $K_2(r,|\Psi_1\rangle)$. It can be expressed as:

$$K_2(r,|\Psi_1\rangle) = \frac{l_{\rm Pl}^2}{L^3} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(|f_k|^2 e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} [1 + 2n\delta(\boldsymbol{k}\in\mathcal{D})] \right) \ . \tag{12.2.45}$$

From this equation and from the definition of the function $\delta(\boldsymbol{k}\in\mathcal{D})$, we deduce the expression of the power spectrum:

$$k^3 P_\Phi(k,|\Psi_1\rangle) = \frac{l_{\rm Pl}^2}{2\pi^2} k^3 |f_k|^2 \left(1 + 2n[\Upsilon(k-k_0+\sigma) - \Upsilon(k-k_0-\sigma)]\right) \ , \tag{12.2.46}$$

where Y is a Heaviside function. We see that, in addition to the usual vacuum spectrum, there is a new contribution located around the wave number k_0. This new contribution vanishes if $n=0$, as expected.

This spectrum is not continuous. As already mentioned, this is not physically very realistic. It has for origin the very crude definition of the state $|\Psi_1\rangle$. We thus turn to the case where the quantum state is given by $|\Psi_2\rangle$. This refinement will allow us to obtain a smooth and physical spectrum.

Since the system is placed in a box, the state $|\Psi_2\rangle$ can be defined by a discrete sum according to:

$$|\Psi_2(k_0,n)\rangle \equiv \sum_{i=0}^{N} g_i |\Psi_1(k_0,\sigma_i,n)\rangle \ , \tag{12.2.47}$$

where g_i and σ_i, $i=0,\ldots,N$, are just series of numbers. We choose the σ_i's such that:

$$\left\langle \Psi_1(k_0,\sigma_i,n) \middle| \Psi_1(k_0,\sigma_j,n) \right\rangle = \delta_{ij} \ . \tag{12.2.48}$$

This is satisfied if the number of modes in the domains $\mathcal{D}(k_0,\sigma_i)$ and $\mathcal{D}(k_0,\sigma_j)$, $\mathcal{N}(\mathcal{D}_i)$ and $\mathcal{N}(\mathcal{D}_j)$ respectively, are such that: $\mathcal{N}(\mathcal{D}_i) - \mathcal{N}(\mathcal{D}_j) \geq 1$. This condition boils down to $\sigma_i - \sigma_j \geq \pi^2/[L^3(k_0^2+\sigma_i^2)]$, where we have assumed that $\sigma_i - \sigma_j \ll 1$. Therefore, we can always find a value of L such that the condition be fulfilled. Then, the calculation of $\langle\Psi_2|\,\hat\Phi(\eta,\boldsymbol{x})\hat\Phi(\eta,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\,|\Psi_2\rangle$ can be performed. The result reads:

$$\begin{aligned}\langle\Psi_2|\,\hat\Phi(\eta,\boldsymbol{x})\hat\Phi(\eta,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\,|\Psi_2\rangle = {} & \frac{l_{\rm Pl}^2}{L^3} \sum_{\boldsymbol{k}} |f_k|^2 e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ & \times \left(\left[\sum_{i=0}^{N} |g_i|^2 \right] + 2n \left[\sum_{i=0}^{N} |g_i|^2 \delta\left(\boldsymbol{k}\in\mathcal{D}(k_0,\sigma_i)\right) \right] \right) \ . \end{aligned} \tag{12.2.49}$$

Our aim is to calculate $G(k) \equiv \sum_{i=0}^{N} |g_i|^2 \delta(\boldsymbol{k}\in\mathcal{D}_i)$ [for convenience $\mathcal{D}(k_0,\sigma_i)$ is denoted by $\mathcal{D}_i$]. By symmetry, $G(k_0-k') = G(k_0+k')$, so that we will consider the case $k\equiv k_0+k'$, $k'\geq 0$. In this sum k' is fixed. As a consequence, there exists an integer i_0 such that if $i<i_0$, $\delta(\boldsymbol{k}\in\mathcal{D}_i)=0$ and if $i\geq i_0$, then $\delta(\boldsymbol{k}\in\mathcal{D}_i)=1$, or, equivalently, $\sigma_{i_0} < k' \leq \sigma_{i_0+1}$. This means that the sum

$\sum_{i=0}^{N}|g_i|^2\delta(\boldsymbol{k}\in\mathcal{D}_i)$ is in fact equal to $\sum_{i=i_0}^{N}|g_i|^2$. We choose the σ_i's and the coefficients g_i according to:

$$\sigma_i \equiv i\frac{X_{\max}}{N}\,, \quad |g_i|^2 \equiv -\frac{X_{\max}}{N}\times\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\sigma_i}\,, \qquad (\mathbf{12.2.50})$$

where F is any decreasing function such that $F(X_{\max})=0$. Then we have

$$\sum_{i=0}^{N}|g_i|^2\delta(\boldsymbol{k}\in\mathcal{D}_i) = -\frac{X_{\max}}{N}\sum_{i=i_0}^{N}F'\left(i\frac{X_{\max}}{N}\right)\,. \qquad (\mathbf{12.2.51})$$

The last step is to send N to infinity. This means that we consider a continuous series of intervals $\mathcal{D}_i$. We obtain:

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{i=0}^{N}|g_i|^2\delta(\boldsymbol{k}\in\mathcal{D}_i) = -\int_{k'}^{X_{\max}}F'(x)\,\mathrm{d}x = F(k')\,, \qquad (\mathbf{12.2.52})$$

by definition of the Riemann integral. In the same manner, $\sum_{i=0}^{N}|g_i|^2=F(0)$. In what follows, we take

$$G(k)=F(k')\equiv e^{-\frac{(k-k_0)^2}{\Sigma^2}}\,, \qquad (\mathbf{12.2.53})$$

where Σ is a free parameter. This function does not exactly satisfy the assumptions made previously, but it is easy to show that the final result is free of these limitations and is in fact valid for any function F. It is clear that other functions are possible, but only the approximate shape of the distribution is important and the Gaussian is the prototype of the function we have in mind. The spectrum is obtained after having introduced the previous result in Eq. (**12.2.49**) and having taken the limit $L\to+\infty$. We obtain:

$$k^3P_\Phi(k,|\Psi_2\rangle)=\frac{l_{\mathrm{Pl}}^2}{2\pi^2}k^3|f_k|^2\left(1+2ne^{-\frac{(k-k_0)^2}{\Sigma^2}}\right)\,. \qquad (\mathbf{12.2.54})$$

In this equation, it is clear that n is an integer. We now show that this condition can be relaxed if the system is placed in the state $|\Psi_3\rangle$.

To calculate the spectrum for this state, it is sufficient to notice that $\langle\Psi_2(k_0,n)|\Psi_2(k_0,m)\rangle=\delta_{mn}$. Using this formula, straightforward calculations lead to:

$$k^3P_\Phi(k,|\Psi_3\rangle)=\frac{l_{\mathrm{Pl}}^2}{2\pi^2}k^3|f_k|^2\left(1+2n_{\mathrm{eff}}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{\Sigma^2}}\right)\,, \qquad (\mathbf{12.2.55})$$

where the effective number of quanta, n_{eff}, is given by:

$$n_{\mathrm{eff}}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}n|h(n)|^2}{\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|^2}\,. \qquad (\mathbf{12.2.56})$$

An attractive choice for the function $h(n)$ is obviously $h(n)\equiv e^{-\beta n}$ [this β has of course nothing to do with the β defined in Eq. (**12.2.30**)]. In this case, n_{eff} is given by:

$$n_{\mathrm{eff}}=\frac{e^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}}\,. \qquad (\mathbf{12.2.57})$$

The spectra of Eqns (**12.2.54**) and (**12.2.55**) are the main results of this section. Clearly, they possess a peak around the scale k_0. The position of the peak is controlled by the value of k_0, its width by Σ and its height by n or $n_{\rm eff}$ (in fact by β in the last case).

We will need the primordial spectrum only for large wavelengths. In the case of power law inflation, everything can be calculated exactly. In this limit, we have

$$k^3 P_\Phi(k,|0\rangle) = A_{\rm S} k^{n_{\rm S}-1} \,, \qquad \textbf{(12.2.58)}$$

with

$$A_{\rm S} = \frac{l_{\rm Pl}^2}{l_0^2}\frac{\gamma(1+\beta)^2}{2^{2\beta+4}\cos^2(\beta\pi)\Gamma^2(\beta+5/2)} \,, \quad n_{\rm S} = 2\beta+5 \,. \qquad \textbf{(12.2.59)}$$

The above expression is strictly speaking not applicable in the case of a de Sitter Universe, since then there are no scalar metric perturbations and the function $\gamma(\eta)$ turns out to be zero. The generation of density perturbations is only possible after the transition from the exponential inflationary era to the radiation-dominated Universe. If during inflation the Universe was very close to the de Sitter space-time, then the spectrum of density perturbations today is the so-called Harrison-Zel'dovich spectrum ($n_{\rm S}=1$). All expressions derived in this section are still valid for $\beta \lesssim -2$. The initial power spectrum in the case where the Bardeen operator is placed in the state $|\Psi_2\rangle$ can be written as:

$$k^3 P_\Phi(k,|\Psi_2\rangle) = A_{\rm S} k^{n_{\rm S}-1}\left(1+2n e^{-\frac{(k-k_0)^2}{\Sigma^2}}\right) \,. \qquad \textbf{(12.2.60)}$$

If the state is $|\Psi_3\rangle$, we just have to replace the integer n with the real number $n_{\rm eff}$. Let us note that if, instead of considering intervals of the form $[k_0-\sigma, k_0+\sigma]$, one considers intervals such as $]0, k_0+\sigma]$ or $[k_0-\sigma,\infty[$, which still privilege a scale, it is possible to build step-like spectra, the step being located at the scale k_0.

Recently in the literature, BSI spectra have also been studied, see [Lesgourgues *et al.*, 1998] [Lesgourgues *et al.*, 1999b] [Lesgourgues *et al.*, 1999a]. In these articles, the privileged scale arises as a privileged energy in the inflaton potential (more precisely, a discontinuity, or a rapid variation, in the inflaton potential if first derivatives are present). We would like to stress that, in our case, the different physical origin of the privileged scale would in principle allow us to distinguish the different models. Indeed, in [Lesgourgues *et al.*, 1998] [Lesgourgues *et al.*, 1999b] [Lesgourgues *et al.*, 1999a], the fluctuations are Gaussian. In the case studied here, the three-point correlation function still vanishes

$$\left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{e}}_1)\frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{e}}_2)\frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{e}}_3)\right\rangle = 0 \,, \qquad \textbf{(12.2.61)}$$

but the four-point correlation function no longer satisfies the relation

$$\left\langle \left(\frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{e}})\right)^4\right\rangle = 3\left[\left\langle \left(\frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{e}})\right)^2\right\rangle\right]^2 \,, \qquad \textbf{(12.2.62)}$$

which is typical of Gaussian statistics. The reason for this is clear. The ground-state wave function of an harmonic oscillator is a Gaussian and, as a consequence, the CMBR correlation functions for the vacuum exhibit Gaussian properties. On the other hand, the wave function of a state with a non-vanishing number of quanta is no longer a Gaussian and, correspondingly, the correlation functions deviate from Gaussianity. Therefore, a measure of the four-point correlation function (as well as any higher-order even-point correlation function) would permit to distinguish between the class of models presented here and the models of [Lesgourgues *et al.*, 1998] [Lesgourgues *et al.*, 1999b] [Lesgourgues *et al.*, 1999a]. If it turns out that the type of non-Gaussianity apparently detected recently [Ferreira *et al.*, 1998] [Magueijo *et al.*, 1998] [Pando *et al.*, 1998] [Novikov *et al.*, 1999] is really present in the CMBR map, then these two classes of BSI models (as well as standard inflation) are ruled out, because they both predict a vanishing three-point correlation function. But if it turns out that some non-Gaussianity is present in the CMBR at the level of the four-point correlation function then the models presented here could account for this.

3 Comparison with observations

The aim of this section is to confront the power spectra given by Eq. (**12.2.60**) with observations. We will not use any accurate statistical methods to find the best values of the free parameters k_0, Σ and $n/n_{\rm eff}$, because we just want to obtain crude constraints. For this purpose we will use observations of the CMBR anisotropies and of the matter power spectrum.

We choose to work with the following cosmological parameters: the Hubble parameter is $h=0.5$, the baryonic matter-density parameter is $\Omega_{\rm b}=0.05$, the density parameter $\Omega_0\equiv\Omega_{\rm c}+\Omega_{\rm b}+\Omega_\Lambda$ is equal to 1 ($\Omega_{\rm c}$ and Ω_Λ are respectively the CDM and the Λ-density parameters), there is no significant reionization and the spectral index is $n_{\rm S}=1$, when there is no contribution from the gravitational waves. Let us emphasize again that in this case, since it corresponds to a de Sitter phase, the Eq. (**12.2.59**) giving the normalization of the spectrum is strictly speaking not applicable. However, all expressions derived in the previous section can be applied for $n_{\rm S}\lesssim 1$. We will later discuss the case of small deviations from a scale-invariant (Harrison-Zel'dovich) spectrum, including the contribution of gravitational waves in the CMBR anisotropies. We will consider two different values for the cosmological constant density parameter $\Omega_\Lambda\equiv\Lambda/(3H_0^2)$ and the sum of baryon-matter density parameter and CDM density parameter $\Omega_{\rm mat}\equiv\Omega_{\rm b}+\Omega_{\rm c}$, that is $\Omega_\Lambda=0$, $\Omega_{\rm c}=0.95$ (hereafter denoted SCDM), and $\Omega_\Lambda=0.6$, $\Omega_{\rm c}=0.35$ (hereafter denoted ΛCDM). We point out that we have not assumed any biasing in the galaxy distribution with respect to the underlying mass fluctuations (the bias parameter is equal to 1).

The spectrum must be normalized, *i.e.*, the value of $A_{\rm S}$ must be determined. For this purpose, we use the value of $Q_{\rm rms-PS}=T_0(5C_2/4\pi)^{1/2}\simeq 18\,\mu$K ($T_0=2.7$ K) measured by the COBE satellite. We use the value $Q_{\rm rms-PS}\simeq 18\,\mu$K because we have assumed that the spectrum is scale-invariant. In the large-wavelength approximation, we have $\delta T/T\simeq(1/3)\Phi$. In addition the transfer function for the Bardeen potential can be taken equal to 1 (with an appropriate normalization). As a consequence the multipole can be written as:

$$C_\ell=\frac{4\pi}{9}\int_0^{+\infty}\frac{{\rm d}k}{k}\left[j_\ell[k(\eta_0-\eta_{\rm LSS})]^2A_{\rm S}(n_{\rm S})k^{n_{\rm S}-1}\left(1+2ne^{-\frac{(k-k_0)^2}{\Sigma^2}}\right)\right]\,,\qquad(\textbf{12.3.1})$$

where j_ℓ is a spherical Bessel function of order ℓ, and η_0 and $\eta_{\rm LSS}$ denote respectively the conformal times now and at the last scattering surface. Let us remark that the $A_{\rm S}$ in the last expression is not exactly the $A_{\rm S}$ in Eqns (**12.2.58**) and (**12.2.59**). Since the difference is not important for our purpose, we have kept the same notation. The previous expression can be evaluated explicitly. For the quadrupole, the result reads:

$$C_2=\frac{4\pi}{9}A_{\rm S}(n_{\rm S})(\eta_0-\eta_{\rm LSS})^{1-n_{\rm S}}\left(\frac{\pi}{2^{4-n_{\rm S}}}\frac{\Gamma[3-n_{\rm S}]\Gamma[2+(n_{\rm S}-1)/2]}{\Gamma^2[(4-n_{\rm S})/2]\Gamma[4-(n_{\rm S}-1)/2]}+2nI\right)\,,\qquad(\textbf{12.3.2})$$

where

$$I \equiv \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2-n_S}} [j_2(u)]^2 e^{-\frac{(u-u_0)^2}{U^2}} , \qquad \textbf{(12.3.3)}$$

with $u_0 \equiv k_0(\eta_0 - \eta_{\rm LSS})$ and $U \equiv \Sigma(\eta_0 - \eta_{\rm LSS})$. In what follows, we take $\eta_0 - \eta_{LSS} = 1$. The integral will be evaluated numerically for different values of the free parameters. We just have to specialize the last equation to a scale-invariant spectrum to obtain the following value for $A_{\rm S}$:

$$A_{\rm S} = \frac{108}{5T_0^2} Q^2_{\rm rms-PS} \frac{1}{1+24nI} = \frac{9.4\times 10^{-10}}{1+24nI} . \qquad \textbf{(12.3.4)}$$

In terms of the band power δT_ℓ defined by $\delta T_\ell \equiv T_0[\ell(\ell+1)C_\ell/2\pi]^{1/2}$, we find $\delta T_2 = \sqrt{12/5}Q_{\rm rms-PS} = 27.9\,\mu$K.

We must choose the three parameters k_0, n and Σ. Recently, it has been emphasized by many authors [Einasto *et al.*, 1997] that the power spectrum seems to contain large amplitude features at the scale $l_{\rm car} \simeq 100h^{-1}$ Mpc, which corresponds to a wave number equal to $0.062h$ Mpc^{-1}. No other value for a privileged scale has been detected so far, and therefore any other choice would either lie in an unobservable range, or be in conflict with the data available at present. Consequently, we choose:

$$k_0 = 0.062h \,\mathrm{Mpc}^{-1} = 0.031 \,\mathrm{Mpc}^{-1} , \qquad \textbf{(12.3.5)}$$

with our value of the Hubble constant. Let us turn to the choice of the variance Σ. We have seen that the simplest non-vacuum initial states can lead to a power spectrum with either a bump or a step. In this article, we will restrict ourselves to the study of the bump case. Step-like spectra have already been studied in [Lesgourgues *et al.*, 1998] [Lesgourgues *et al.*, 1999b] [Lesgourgues *et al.*, 1999a] and our conclusions would be similar. Therefore we will consider (rather arbitrarily, but the conclusion does not depend on the exact value of Σ, as long as it is not too large):

$$\Sigma = 0.3k_0 = 0.0186h \,\mathrm{Mpc}^{-1} . \qquad \textbf{(12.3.6)}$$

From now on, we will always take these two values for k_0 and Σ in any of the plots shown. In Fig. 12.1 we display the initial power spectrum for a few values of $n_{\rm eff}$. The difference between $n_{\rm eff} = 0$ and $n_{\rm eff} \neq 0$ is obvious. In the case considered here, the integral I is equal to: $I(\Sigma = 0.3k_0) \simeq 1.3\times 10^{-6}$. It is completely negligible and will be taken equal to zero. This arises from the fact that the quadrupole is mainly fed by very large wavelengths (of the order of today's Hubble radius), whereas the bump occurs at much smaller wavelengths (of the order of the Hubble radius at the time of decoupling). Thus, the calculation of the quadrupole, and therefore the normalization, is not modified by the presence of the bump.

Let us discuss the matter power spectrum. The power spectrum can either be obtained by the Boltzmann code developed by one of us (A.R.) or by means of analytical fits. In this case, the baryon power spectrum is given by:

$$\frac{\delta\rho_{\rm b}}{\rho_{\rm b}} \equiv |\delta(k)|^2 = AT^2(k)\frac{g^2(\Omega_0)}{g^2(\Omega_{\rm mat})} k \left[1+2ne^{-\frac{(k-k_0)^2}{\Sigma^2}}\right] , \qquad \textbf{(12.3.7)}$$

where the different terms in this equation are explained below; $T(k)$ is the transfer function, which can be approximated by the following numerical fit [Bardeen *et al.*, 1986]:

$$T(k) = \frac{\ln(1+2.34q)}{2.34q}[1+3.89+(16.1q)^2+(5.46q)^3+(6.71q)^4]^{-1/4} , \qquad \textbf{(12.3.8)}$$

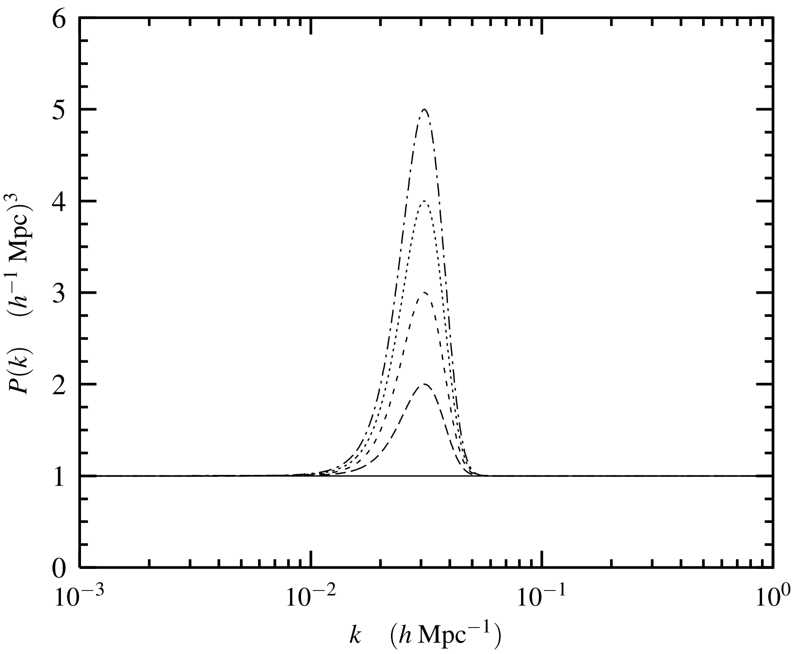


FIGURE 12.1 – Initial power spectrum for n_{eff} ranging from 0 to 2 with steps of 0.5. Vertical units are arbitrary.

with $q \equiv k/[(h\Gamma)\,\mathrm{Mpc}^{-1}]$, where Γ is the so-called shape parameter, which can be written as [Sugiyama, 1995]:

$$\Gamma \equiv \Omega_{\mathrm{mat}} h e^{-\Omega_{\mathrm{b}} - \frac{\Omega_{\mathrm{b}}}{\Omega_{\mathrm{mat}}}} . \qquad \textbf{(12.3.9)}$$

The function $g(\Omega)$ takes into account the modification induced in the power spectrum by the presence of a cosmological constant. Its expression can be written as [Smith *et al.*, 1998]:

$$g(\Omega) \equiv \frac{5\Omega}{2}\left[\Omega^{4/7} - \Omega_\Lambda + \left(1 + \frac{\Omega}{2}\right)\left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{70}\right)\right]^{-1} . \qquad \textbf{(12.3.10)}$$

Finally the coefficient A is the normalization. We normalize the spectrum to COBE data. This leads to the following value for A:

$$\begin{aligned} A &= (2l_H)^4 \frac{6\pi^2}{5} \frac{Q^2_{\mathrm{rms-PS}}}{T_0^2} \frac{1}{1+24nI} \\ &= \frac{6.82 \times 10^5}{1+24nI} h^{-4}\,\mathrm{Mpc}^4 , \end{aligned} \qquad \textbf{(12.3.11)}$$

where the Hubble radius, l_H, is equal to $3000h^{-1}$ Mpc.

We plot the multipole moments and the power spectrum for different values of n and/or n_{eff}. The C_ℓ's are obtained from the Boltzmann code previously used for the power spectrum. In all figures for the C_ℓ's, we represent the COBE data [Hinshaw *et al.*, 1996] by crosses, the Saskatoon data [Netterfield *et al.*, 1997] by squares, and the CAT [Scott *et al.*, 1996] [Baker *et al.*, 1999] data by circles. (For clarity we have not displayed all CMBR data on the figures.) In all figures for the power spectra, we represent the APM data [Baugh & Efstathiou, 1993] [Gatzañaga & Baugh, 1998] by diamonds, the velocities field measurements [Kolatt & Dekel, 1997] by squares, and the data given by Einasto *et al.* [Einasto *et al.*, 1997] by crosses.

3.1 Scalar modes only

We first display the CMBR anisotropies in the SCDM model (Fig. 12.2). In the case were $\Lambda = 0$, Saskatoon data are compatible with the case $n_{\rm eff} = 1$ (third curve).

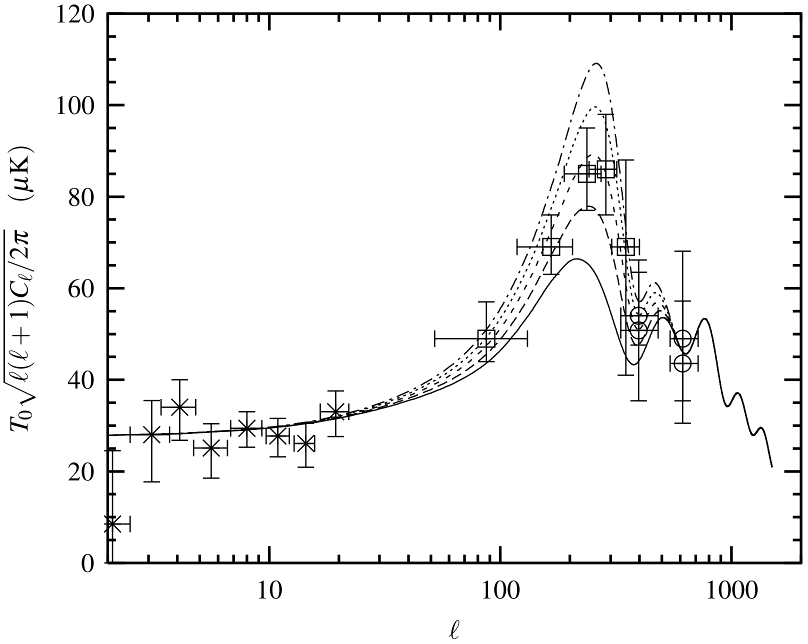


FIGURE 12.2 – Multipole moments for the SCDM model with $n_{\rm eff}$ (and n if it is integer) ranging from 0 to 2 with step of 0.5 (from the bottom to the top). Crosses represent COBE data, squares the Saskatoon data, and circles the CAT data.

We note that the position of the first Doppler peak is no longer around $\ell \simeq 220$. Usually, its position is determined by the angular size of the Hubble radius at recombination. In our case, we must superimpose the bump present in the initial spectrum, the position of which is not at $\ell \simeq 220$ but rather at the angular scale sustained by the built-in scale. As a consequence, the resulting peak is shifted towards higher values of ℓ for the values of the parameters considered here ($\ell \simeq 260$). In addition, it could be difficult to distinguish the effect due to the primordial bump from the one coming from a variation of the cosmological parameters, thus increasing the degeneracy among the free parameters of the model. Let us note, however, that the bump in the initial power spectrum, should be easier to detect in the matter power spectrum since it is a more slowly varying function, as shown in Fig. 12.3. A higher value of $n_{\rm eff}$ (2 rather than 1) seems to be needed to explain the data of Einasto *et al.*, but different cosmological parameters might lead to a better agreement between CMBR and matter power spectrum data.

We now display the CMBR (Fig. 12.4) and matter power spectrum (Fig. 12.5) of the ΛCDM model. When the cosmological constant $\Omega_\Lambda = 0.6$, the early Integrated Sachs-Wolfe effect already boosts the $\ell \simeq 200--300$ scale sufficiently [Hu, 1996]: at $n_{\rm eff} = 1$ this effect already puts too much power on these scales. A different value for k_0 and Σ might also be needed to remain compatible with the CAT data. For the matter power spectrum, the same conclusion as for the SCDM model holds, that is a higher value of $n_{\rm eff}$ is preferred (around 2 or 3).

As a conclusion of this rapid analysis, we stress that our model is much more constrained if one imposes $n_{\rm eff}$ to be an integer instead of a real number. Moreover, our model tends to favor a moderate value of $n_{\rm eff}$ as well as a low value of the cosmological constant if the data of Einasto

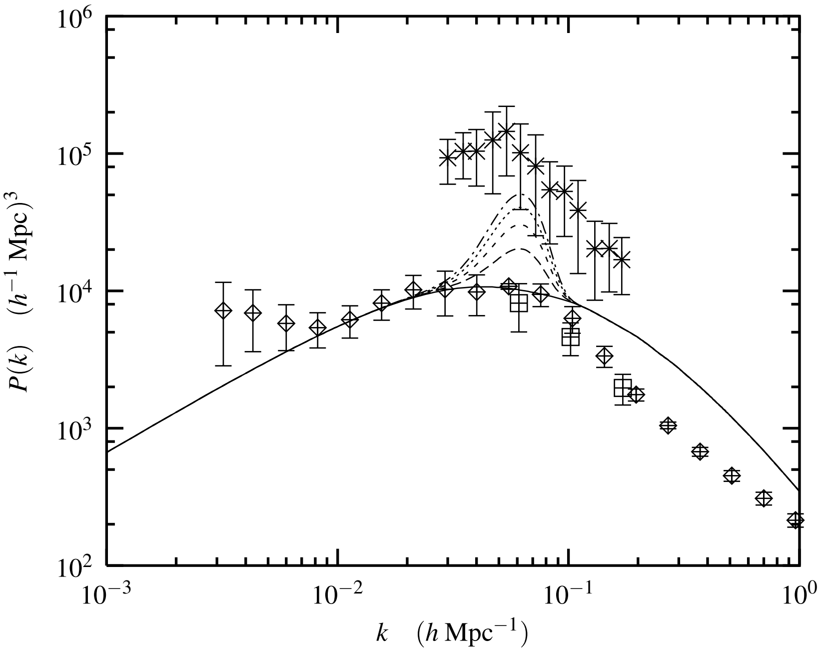


FIGURE 12.3 – Power spectrum for the SCDM model, with $n_{\rm eff}$ ranging from 0 to 2 with step of 0.5 (from the bottom to the top). Diamonds represent the APM data, squares the velocities field measurements, and crosses the data by Einasto *et al.*

et al. are confirmed, or a low value of $n_{\rm eff}$ and a high value of the cosmological constant (*i.e.*, the currently popular cosmological model, with vacuum initial state) in the other case. It is easy to notice from Eq. (**12.2.56**), that since $n_{\rm eff}$ is quite small, $h(n)$ is peaked around small values of n, and therefore the allowed window for the effective number of quanta is constrained to be around small values. In conclusion, the initial state found is not too far from the vacuum.

3.2 Scalar and tensor modes

One should also consider the contribution of the gravitational waves in the CMBR anisotropies. The data currently available are in fact the sum of the scalar plus the tensor contributions to the CMBR anisotropies. We recall that since there are two modes of polarization for the CMBR photons and that one of them is only generated by gravitational waves, it is in principle possible to distinguish between the scalar and tensor contributions to the CMBR anisotropies, see [Hu & White, 1997b]. In what follows, we consider some standard inflationary predictions for gravitational waves: we take $n_{\rm S} = 0.9$, $n_{\rm T} = n_{\rm S} - 1 \simeq -0.1$ (the last equation being rigorous in the case of power-law inflation only), and the ratio of scalar to tensor amplitude $C_2^{\rm T}/C_2^{\rm S} \simeq -7n_{\rm T}$. In Fig. 12.6, we decompose CMBR anisotropies, showing the contributions from scalar and tensor modes separately. In any model, the gravitational wave contribution can be important only for multipoles $\ell \lesssim 100$, while it is negligible at smaller angular scales (roughly speaking, the gravitational waves contribution is two orders of magnitude smaller at $\ell \simeq 300$ than at the quadrupole). The effect of gravitational waves is therefore to boost power on large angular scales (or, equivalently, to lower the height of the acoustic peaks with respect to the height of the low ℓ plateau). The fact that one observes an excess of power on small angular scales (with Saskatoon data), favors a low contribution from gravitational waves (which is in agreement with most inflationary models). In our model, the possibility to have a bump in the initial power spectrum enables us to boost the height of the

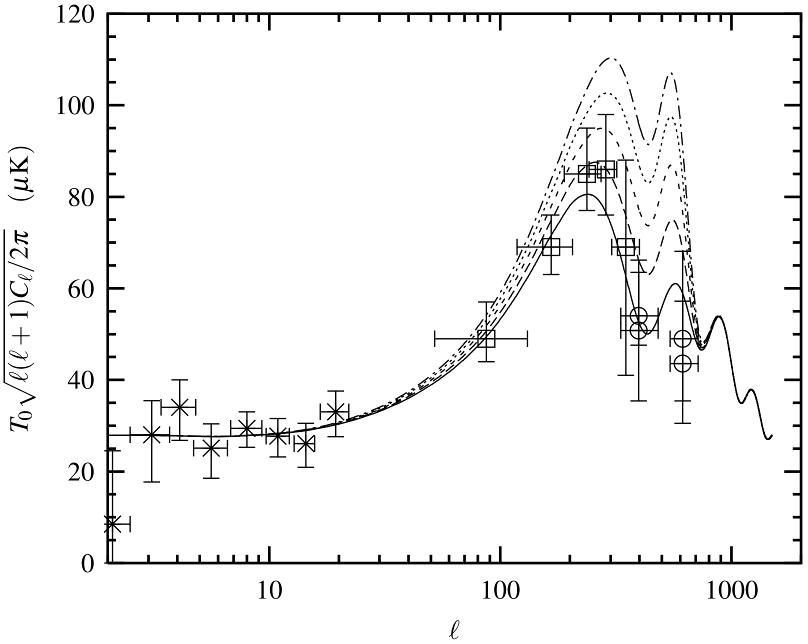


FIGURE 12.4 – Same as Fig. 12.2, but for the ΛCDM model, with $\Omega_\Lambda = 0.6$.

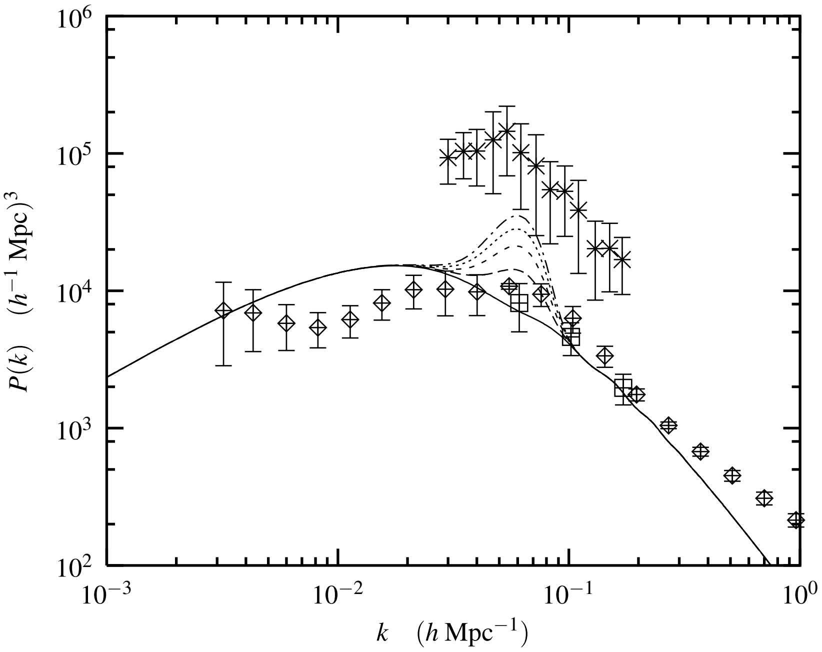


FIGURE 12.5 – Same as Fig. 12.3, but for the ΛCDM model.

acoustic peaks, and therefore to have some non-negligible contribution from gravitational waves: normalizing at COBE data, one imposes the value of $A_S + A_T$ instead of A_S. As a result, the scalar perturbation amplitude A_S is smaller. Since the first acoustic peak depends only on scalar perturbations, we must keep the same value as before for the product $A_S(1+2n\exp[-(k_0-k_{\rm peak})^2/\Sigma^2])$, which permits a higher value of $n_{\rm eff}$ ($k_{\rm peak}$ is the characteristic wave number of the first Doppler peak).

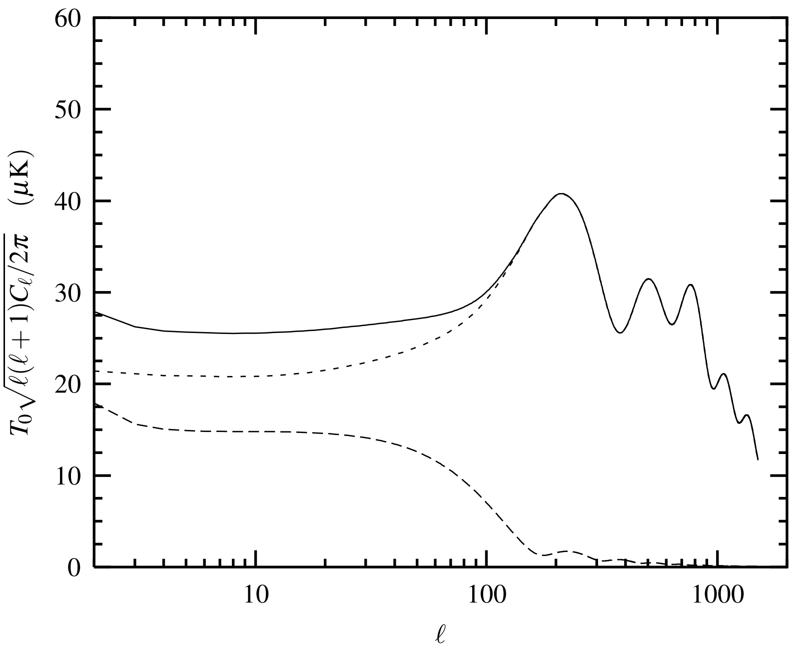


FIGURE 12.6 – CMBR anisotropies decomposition, showing scalar (dotted line) and tensor (dashed line) contributions. The total contribution is given by the solid line.

In Figs. 12.7 and 12.8 we show the CMBR anisotropies and the matter power spectrum for the SCDM model, including both scalar and tensor contributions. Comparing these figures with Figs. 12.2 and 12.3, it can be concluded that if both scalar and tensor modes are included in the calculation of the multipole moments C_ℓ's, then a higher number of quanta ($\simeq 4$) is required as expected.

Finally, in Figs. 12.9 and 12.10 we show the CMBR anisotropies and the matter power spectrum for the ΛCDM model including both scalar and tensor contributions. The same conclusions as for the SCDM model hold, but we note again that, as for the case without gravitational waves, matter power spectrum data favor a higher value of n_{eff} than CMBR anisotropies data.

We emphasize that when the gravitational waves contribution is not negligible, the standard case $n_{\text{eff}} = 0$ is excluded and that extra power in the initial state is necessary.

4 Conclusions

In this paper we address the question of whether non-vacuum initial states for cosmological perturbations are allowed, or whether they are ruled out on the basis of present experimental and observational data.

The choice of the initial quantum state in which the quantum fields are placed should be made on the basis of full quantum gravity. Since this theory is at present unknown, we believe, as we discussed in the Introduction, that it is worth studying non-vacuum initial states for cosmological perturbations. Our choice of a non-vacuum initial state is guided by the idea that the initial state could have a built-in characteristic scale. We examined three different non-vacuum states, which are compatible with the assumption of isotropy of the Universe. Of particular interest is our choice of state $|\Psi_3\rangle$, which seems to be the most natural rotational-invariant smooth quantum state, which privileges a scale. We calculated the power spectra of the Bardeen potential for these

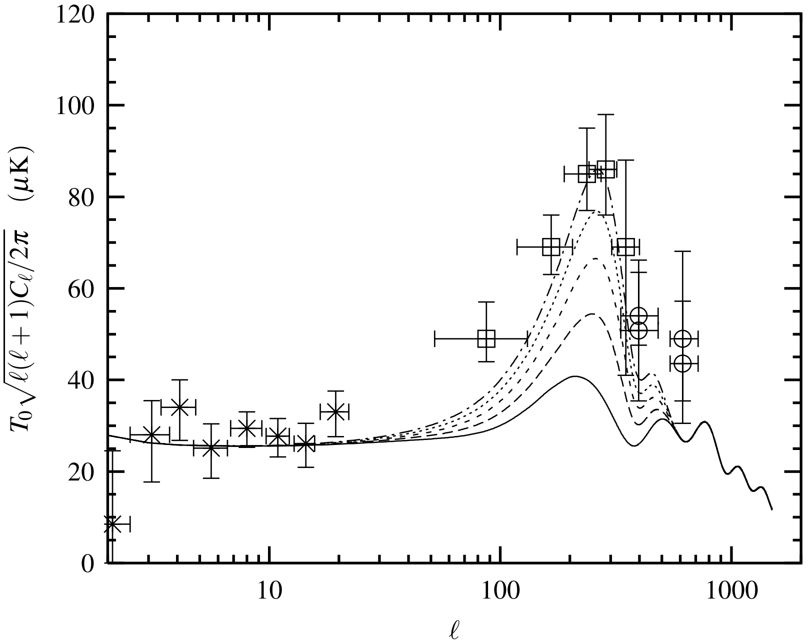


FIGURE 12.7 – CMBR anisotropies for the SCDM model, with $n_{\rm eff}$ ranging from 0 to 4 with a step of 1 (from the bottom to the top). Both scalar and tensor contributions are included. Crosses represent COBE data, squares the Saskatoon data, and circles the CAT data.

three states and compared their theoretical predictions with current experimental and observational data, namely the CMBR anisotropy measurements and the redshift surveys of the distribution of galaxies. With our choice of initial states, the power spectra of the Bardeen potential possess a peak, around the wave number, that corresponds to the built-in characteristic scale of our model. The height of the peak is controlled by the number of quanta n of the initial state and its width by another free parameter of our model. If the initial state is a quantum superposition then the height of the peak is controlled by the number $n_{\rm eff}$, which does not need to be an integer.

The angular power spectrum of CMBR anisotropies for a model with vanishing cosmological constant, tells us that the characteristics of the first acoustic peak, as revealed by the Saskatoon experiment, are compatible with the case $n_{\rm eff} = 1$. In the presence of a cosmological constant, CMBR anisotropy measurements are in agreement with $n_{\rm eff} = 0$ or $n_{\rm eff} = 1$, depending on the value of the cosmological parameters. The observational data for the matter power spectra, as given by Einasto *et al.*, favor higher values of the number of $n_{\rm eff}$ (2 or 3), whatever the value of the cosmological constant.

The most realistic case is the one for which the sum of scalar and tensor mode contributions is included. Considering standard inflationary predictions for gravitational waves, we find that CMBR anisotropies measurements require a higher value of $n_{\rm eff}$ (3 or 4) for both types of models, with and without a cosmological constant, than in the case of an absence of tensor mode contribution. This is in agreement with the matter power spectra. The analysis of the redshift surveys by Einasto *et al.* leads to matter power spectra that favor higher values of $n_{\rm eff}$, once tensor contributions are also included. The interpretation of these results for the states $|\Psi_2\rangle$ and $|\Psi_3\rangle$ leads to the conclusion that since n and $n_{\rm eff}$ cannot be higher than a few, these states must be close to the vacuum.

In conclusion, if the initial state of the cosmological perturbations is not the vacuum but, instead, has a built-in characteristic scale, then generic predictions of the model are: a high amplitude

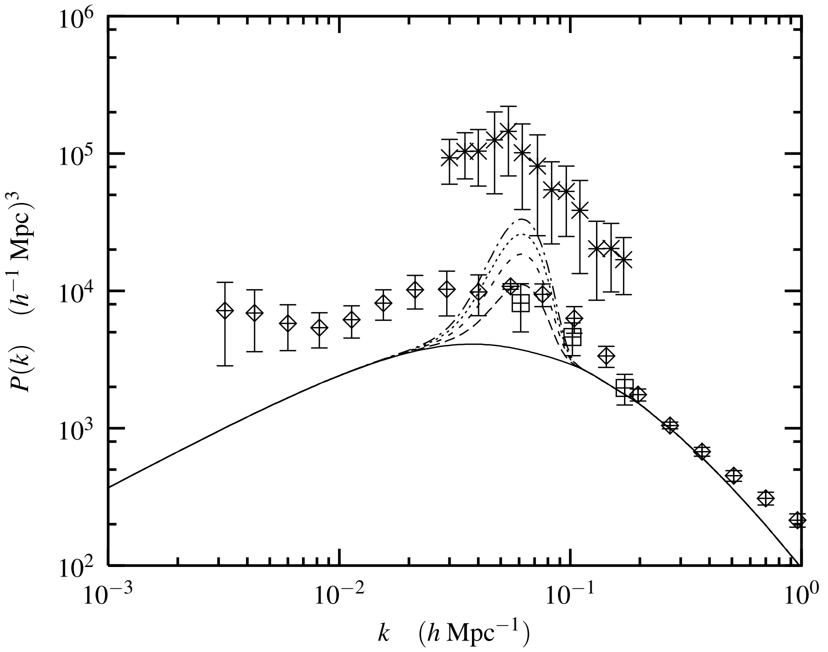


FIGURE 12.8 – Power spectrum for the SCDM model, with $n_{\rm eff}$ ranging from 0 to 4 with step of 1. Diamonds represent the APM data, squares the velocities field measurements, and crosses the data given by Einasto *et al.*

of the first acoustic peak, a non-trivial feature in the matter power spectrum, and deviations from Gaussianity in the CMBR map. It is too early to say whether the results of the Saskatoon experiment (see also [Coble *et al.*, 1999]), as well as the analysis performed recently by Einasto *et al.*, are first steps in this direction. More data are needed and future experiments will be important in determining whether the class of models proposed here provides an explanation which allows a better description of the observations than the standard paradigm of slow roll inflation plus cold dark matter.

5 Acknowledgments

It is a pleasure to thank Robert Brandenberger for useful exchanges of comments. Discussions with Nathalie Deruelle, Ruth Durrer, Alejandro Gangui and David Langlois are also acknowledged. We would also like to thank Volker Müller, who provided us with the cluster data.

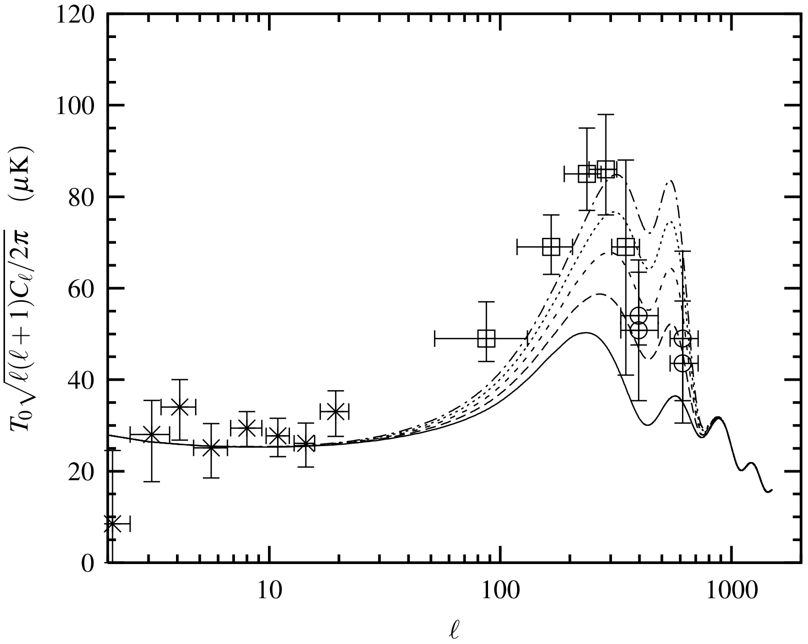


FIGURE 12.9 – Same as Fig. 12.7, but for the ΛCDM model and with n_{eff} ranging from 0 to 4 with a step of 1 (from the bottom to the top).

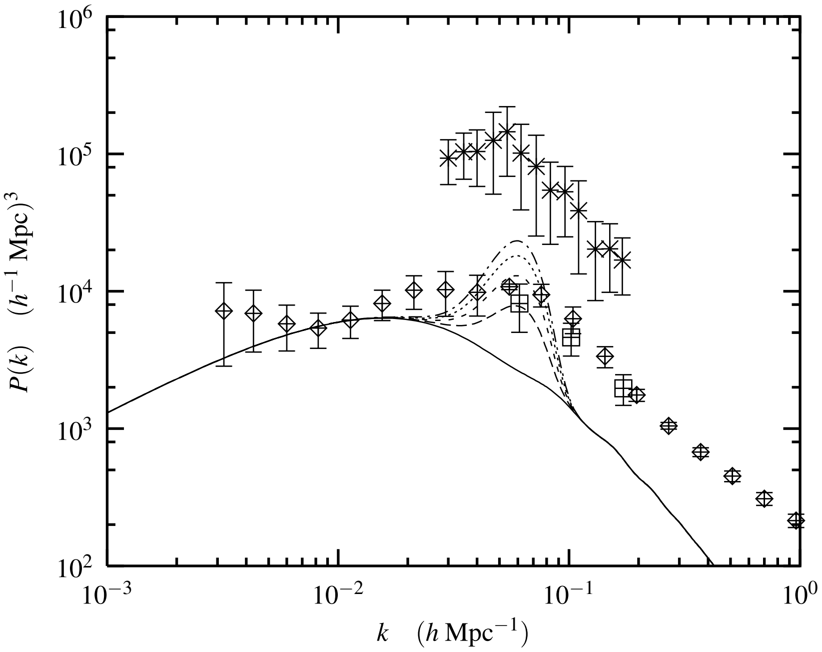


FIGURE 12.10 – Same as Fig. 12.8, but for the ΛCDM model and with n_{eff} ranging from 0 to 4 with a step of 1 (from the bottom to the top).

Chapitre 13

Perturbations adiabatiques et isocourbures corrélées (article)

Sommaire

Le modèle d'inflation le plus simple au-delà de celui à un champ scalaire est certainement celui faisant intervenir deux champs massifs, minimalement couplés, et sans interactions. Ce modèle dépend de trois paramètres, à savoir les masses des deux champs et le rapport initial des amplitudes des champs [Langlois, 1999]. L'idée est ensuite de supposer que lors du reheating, l'un des champs produit les particules du modèle standard (photons, baryons, neutrinos), et que l'autre produit les particules de matière noire. Chacun des champs produit donc des perturbations de type isocourbure. L'amplitude des contrastes de densité de chaque fluide cosmologique dépend à la fois du champ scalaire qui le produit et du potentiel gravitationnel, qui dépend d'une combinaison des deux champs. Il est ainsi possible que même si les champs ne sont pas corrélées, les contrastes de densité des différentes espèces qu'ils produisent le soient. La combinaison des deux types de perturbations isocourbures ainsi produits peut alors être vue comme une perturbation adiabatique et une perturbation de type "isocourbure CDM". Il est évidemment possible d'envisager des perturbations adiabatiques corrélées avec des perturbations isocourbures d'une autre espèce, même si ceci semble moins naturel d'un point de vue de physique des particules.

L'article qui suit [Langlois & Riazuelo, 2000] étudie quelques modèles de perturbations adiabatiques et isocourbures corrélées. Cette classe de modèle est extrêmement vaste, et nous nous sommes restreints à n'étudier qu'un cas particulier, où une seule espèce dévie de l'adiabaticité (comme dans l'exemple précédent).

Nous commençons par donner une définition précise des termes “adiabatique” et “isocourbure” quand il s’agit de perturbations cosmologiques (§2). Nous étudions ensuite le comportement des perturbations en dehors du rayon de Hubble (§4). Le point important est que la relation classique

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3}\Phi \qquad (\mathbf{13.0.1})$$

n’est plus valable à grande échelle, mais est remplacée par une formule plus compliquée faisant intervenir l’amplitude des perturbations isocourbures (**13.4.18–13.4.20**). Ces résultats analytiques sont alors comparés (§5) avec des calculs numériques plus précis. Bien qu’il soit possible d’obtenir un plateau Sachs-Wolfe extrêmement bas par rapport aux pics Doppler (figures 13.7 et 13.8), ce dernier est en général beaucoup plus haut (figure 13.9). Le même résultat serait également obtenu avec des perturbations isocourbures non corrélées, puisque celles-ci ont toujours tendance à remonter le plateau Sachs-Wolfe.

Ce résultat est particulièrement important, car les observations actuelles indiquent un pic Doppler relativement haut par rapport au plateau Sachs-Wolfe. Le scénario classique d’inflation à un seul champ scalaire en sort donc particulièrement renforcé, car c’est le seul qui explique “naturellement” un choix de paramètres inflationnaires menant à un premier pic aussi haut. Un petit écart à l’adiabaticité demeure toujours possible, mais l’espace des paramètres admissibles est relativement restreint. Une autre caractéristique de ces modèles est une normalisation différente entre les perturbations de densité baryonique et les anisotropies du rayonnement fossile à grande échelle, ainsi qu’avec sa polarisation. Ces différences laissent espérer pouvoir mesurer avec une haute précision un éventuel écart aux conditions initiales adiabatiques.

Correlated mixtures of adiabatic and isocurvature cosmological perturbations

David Langlois[1]* and Alain Riazuelo[1]†

[1] *Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, UMR 8629 du Centre National de la Recherche Scientifique, Observatoire de Paris, F-92195 Meudon Cedex (France)*

Abstract : We examine the consequences of the existence of correlated mixtures of adiabatic and isocurvature perturbations on the CMB and large scale structure. In particular, we consider the four types of "elementary" totally correlated hybrid initial conditions, where only one of the four matter species (photons, baryons, neutrinos, CDM) deviates from adiabaticity. We then study the height and position of the acoustic peaks with respect to the large angular scale plateau as a function of the isocurvature to adiabatic ratio.

PACS numbers : 98.80.Cq, 98.70.Vc

1 Introduction

In the near future, a lot of data about the anisotropies of the Cosmic Microwave Background (CMB) will be available to cosmologists, notably thanks to balloon experiments and the planned satellites MAP [MAP, http] and PLANCK [PLANCK, http]. What will be remarkable is the expected high resolution and sensitivity of these experiments, which may turn cosmology into a high precision activity.

One of the hopes of cosmologists is to be able to determine from these data the cosmological parameters describing the geometry and matter contents of our Universe. In this respect, it is important to stress that the fluctuations that are and that will be measured, result, according to our current understanding, from a *combination of the primordial perturbations and of the cosmological parameters*. In the preparation of the future data analysis, one should be careful to avoid oversimplification *a priori* of the primordial perturbations and not to stick to the simplest one-scalar field inflation model. After all, the early Universe is the period in the history of the Universe where the physics is the least known.

A more general description of the primordial perturbations may therefore be needed to be able to interpret the future data. In this perspective, the aim of this work is to examine the consequences of the existence of isocurvature perturbations in addition to the usual adiabatic perturbations. Such studies have already been performed in the case of *independent* mixtures of adiabatic and isocurvature perturbations [Stompor *et al.*, 1996] [Kawasaki *et al.*, 1996] [Burns, 1997] [de Laix & Scherrer, 1996]

*Email addres: `David.Langlois@obspm.fr`
†Email addres: `Alain.Riazuelo@obspm.fr`

[Kanasawa *et al.*, 1999] [Enqvist & Kurki-Suonio, 2000] [Pierpaoli *et al.*, 1999]. This is why we will focus our attention on *correlated* mixtures of adiabatic and isocurvature perturbations. The possibility of such primordial perturbations is motivated by the recent work of one of us, which showed that the simplest model of multiple inflation, a model with two massive non-interacting scalar fields, can produce such correlated mixtures [Langlois, 1999].

Isocurvature perturbations are perturbations in the relative density ratio between various species in the early Universe, in contrast with the more standard adiabatic (or isentropic) perturbations which are perturbations in the total energy density with fixed particle number ratios. Primordial isocurvature perturbations are often ignored in inflationary models. The main reason for this is that they are less universal than adiabatic perturbations because, on one hand, they can be produced only in multiple inflationary models [Linde, 1985] [Kofman, 1986] [Kofman & Linde, 1987], and, on the other hand, they do not necessarily survive until the present epoch.

However, isocurvature perturbations have been shown to be of potential importance in some specific models: axions [Kawasaki *et al.*, 1996] [Burns, 1997], [Kanasawa *et al.*, 1999] [Bond & Efstathiou, 1986], Affleck-Dine baryogenesis mechanism [Enqvist & Mac Donald, 1999], multiple field inflation [Langlois, 1999] [Linde, 1985] [Kofman, 1986] [Kofman & Linde, 1987] [Linde & Mukhanov, 1997] [Polarski & Starobinsky, 1994].

A priori, since the (not too old) Universe is filled with four species, baryons, photons, neutrinos and dark matter (which will be assumed to be cold here), several types of isocurvature perturbations can be envisaged. For example, in the past, a model with isocurvature baryon perturbations was proposed [Peebles, 1987b] [Peebles, 1987a], although it does not seem compatible with the data today [Hu *et al.*, 1995a]. Most of the recent models, however, contain cold dark matter (CDM) isocurvature perturbations. A more general approach, including neutrino isocurvature perturbations (and also isocurvature velocity perturbations), was considered recently [Bucher *et al.*, 1999]. In the present work, we will focus our attention, for simplicity, on primordial perturbations where only one species deviates from adiabaticity, which thus leaves room to four types of hybrid (*i.e.*, adiabatic plus isocurvature) initial perturbations. These four "elementary" modes will be systematically studied, without trying to make any connection with specific early Universe models.

As far as observational constraints are concerned, it has already been established that a pure isocurvature scale-invariant spectrum must be rejected because it predicts on large scales too large temperature anisotropies with respect to density fluctuations [Bond & Efstathiou, 1986], but other possibilities have been envisaged, like tilted isocurvature perturbations. The main trend, however, has been to study models with a mixing of isocurvature and adiabatic perturbations. Confrontation of these models with observational data, like CMB anisotropies and large scale structures, seems to allow only for a small fraction of isocurvature perturbations. Future CMB measurements will also enable us to put much tighter constraints on this kind of models.

It must be emphasized, however, that all these studies assumed *independent* mixing of isocurvature and adiabatic perturbations. While this assumption can be indeed justified in some specific early Universe models, it is certainly not an absolute rule, as it has been shown in [Langlois, 1999]. It is thus the purpose of this paper to investigate the consequences on observational quantities, namely the large scale structure and the CMB anisotropies, of *correlated mixtures of isocurvature and adiabatic* perturbations. As it will be shown, correlation gives more richness to hybrid perturbations. For example, while the first acoustic peak (relatively to the plateau) is always lower for independent hybrid perturbations than for pure adiabatic perturbations, it can be either lower or higher with correlated hybrid perturbations.

The plan of the paper will be the following. In the next section (§2), we recall the basic definitions of isocurvature and adiabatic perturbations and introduce hybrid perturbations. Then,

§3 will discuss the notion of correlation between isocurvature and adiabatic perturbations. In §4, we will begin the systematic analysis of the correlated hybrid perturbations by considering the long wavelength modes, which can be solved analytically. Section 5 is devoted to the numerical investigation for all cosmological scales. Finally, we present our conclusions in §6. There is also an appendix, which details the evolution equations and gives the full solution for the long wavelength modes.

2 Adiabatic and isocurvature perturbations

In this section, we will define precisely the notion of adiabatic and isocurvature perturbations, and introduce the notation that will be used throughout this paper. Only perturbations of the scalar type will be considered here.

The perturbations of the spacetime geometry will be described by two scalar potentials, Φ and Ψ, which appear in the linear perturbation of the (flat) Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metric,

$$\mathrm{d}s^2 = -a^2(\eta)(1+2\Phi)\mathrm{d}\eta^2 + a^2(\eta)(1-2\Psi)\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \;, \tag{13.2.1}$$

choice which corresponds to the longitudinal gauge (η is the conformal time and δ_{ij} is the Kronecker symbol).

For matter, we will consider four different species: two relativistic species, photons and massless neutrinos; two non-relativistic species, baryons and cold dark matter (CDM). Their respective energy density contrasts will be denoted δ_γ, δ_ν, δ_b and δ_c ($\delta_A \equiv \delta\rho_A/\rho_A$).

Before defining adiabatic and isocurvature perturbations, let us introduce the idea of entropy perturbation, which can be defined for any pair of components, A and B, by the expression

$$S_{A,B} \equiv \frac{\delta n_A}{n_A} - \frac{\delta n_B}{n_B} \;, \tag{13.2.2}$$

where n_A represents the particle number density for the species A. When the equation of state for a given species is such that $w \equiv p/\rho = \mathrm{Const}$, then one can re-express the entropy perturbation in terms of the density contrast, in the form

$$S_{A,B} \equiv \frac{\delta_A}{1+w_A} - \frac{\delta_B}{1+w_B} \;. \tag{13.2.3}$$

By definition, an adiabatic (or isentropic) perturbation corresponds to the case where all the entropy perturbations are zero. For our four components, this can be expressed as:

$$\delta_c = \delta_b = \frac{3}{4}\delta_\nu = \frac{3}{4}\delta_\gamma \equiv \delta_{(a)} \;, \tag{13.2.4}$$

where $\delta_{(a)}$ will denote the common value (up to the adiabatic index of the equation of state) of the density contrasts. An adiabatic perturbation is thus characterized by a unique amplitude, which can be $\delta_{(a)}$ but which is usually given, for convenience, in terms of the gravitational potential Ψ, which can be directly relation to $\delta_{(a)}$ through Poisson's equation (see the appendix).

An isocurvature perturbation, as indicated by its name, corresponds to a perturbation for which the gravitational potential perturbation is zero (or approximately zero). To get a non-trivial isocurvature perturbation, one must therefore have several components and at least one non-vanishing entropy perturbation $S_{A,B}$. For N species, there will be one adiabatic mode and $N-1$ independent isocurvature modes (there is also the possibility to have velocity-type isocurvature modes, see [Bucher *et al.*, 1999]). It is to be noticed that the adiabatic or isocurvature character of perturbations is not time-invariant. In the cosmological context, when one talks about adiabatic or isocurvature perturbations, one implicitly assumes that this property corresponds to the *initial* state of the perturbations, which means deep in the radiation era when the wavelength of the perturbation is much larger than the Hubble radius.

In the following, we shall consider primordial perturbations which are hybrid, *i.e.*, which are a sum of adiabatic and isocurvature modes. In order to simplify the exploration of the parameter space, we will restrict our attention to the case of perturbations for which all entropy perturbations within three of the species are zero whereas the last species, X say, departs from adiabaticity. This means that three of the four species will satisfy the above relation (**13.2.4**) while the contrast density for the remaining species X will be written in the form

$$\frac{\delta_X}{1+w_X} = S_X + \delta_{(a)} \,, \tag{13.2.5}$$

expression which defines the isocurvature perturbation S_X associated with the species X. Varying X, one can construct four hybrid perturbations of this type.

3 Correlations

In cosmology, perturbations are treated as homogeneous and isotropic random fields. It is convenient to deal with them in Fourier space rather than ordinary space, and all quantities defined previously can be transformed into their Fourier components, according to the relation (since we work only in flat space):

$$\widehat{f}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \,. \tag{13.3.1}$$

Primordial perturbations are usually assumed to be Gaussian, in which case their statistical properties can be summarized simply in terms of their power spectrum, defined for a quantity f by

$$\left\langle f_{\boldsymbol{k}} f^*_{\boldsymbol{k}'} \right\rangle = 2\pi^2 k^{-3} \mathcal{P}_f(k) \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \,. \tag{13.3.2}$$

When primordial perturbations are described by *several quantities*, such as would be the case if one has a mixture of adiabatic and isocurvature perturbations, one can also define, for any pair of random fields f and g, a *covariance spectrum* $\mathcal{C}_{f,g}(k)$ by the following expression:

$$\Re \left\langle f_{\boldsymbol{k}} g^*_{\boldsymbol{k}'} \right\rangle = 2\pi^2 k^{-3} \mathcal{C}_{f,g}(k) \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \,. \tag{13.3.3}$$

Correlation between f and g can also be expressed in terms of a *correlation spectrum* $\tilde{\mathcal{C}}_{f,g}(k)$ obtained by normalizing $\mathcal{C}_{f,g}(k)$:

$$\tilde{\mathcal{C}}_{f,g}(k) = \frac{\mathcal{C}_{f,g}(k)}{\sqrt{\mathcal{P}_f(k)}\sqrt{\mathcal{P}_g(k)}} \,. \tag{13.3.4}$$

In the present work, we are especially interested in the possible correlation between adiabatic and isocurvature primordial perturbations, *i.e.*, $\tilde{\mathcal{C}}_{\Phi,S}(k)$. Until very recently, only independent mixtures, *i.e.*, with vanishing correlation, were considered in the literature. This statistical independence means that the quantities Φ and S can be expressed as

$$\Phi = \mathcal{P}_{\Phi}^{1/2} e_1 \,, \quad S = \mathcal{P}_{S}^{1/2} e_2 \,, \qquad \textbf{(13.3.5)}$$

where e_1 and e_2 are *independent* normalized centered Gaussian random fields (*i.e.*, such that $\langle e_i(\boldsymbol{k})\rangle = 0$, $\left\langle e_i(\boldsymbol{k}) e_j^*(\boldsymbol{k}')\right\rangle = \delta_{ij}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$, for $i,j = 1,2$), and where the subscripts $\boldsymbol{k}$ are implicit, as it will be the case in the rest of this paper. With the assumption (**13.3.5**), one obtains immediately vanishing covariance and correlation spectra.

However, as it was shown in a specific model of double inflation [Langlois, 1999], one can also envisage models of the early Universe where *correlated* primordial perturbations are generated. To be more specific, this would be the case if one imagines several independent stochastic processes taking place in the early Universe, which contribute *both* to adiabatic and isocurvature perturbations, *i.e.*such that

$$\Phi = \sum_i \Phi_i e_i \,, \quad S = \sum_i S_i e_i \,, \qquad \textbf{(13.3.6)}$$

where the e_i are *independent* normalized centered Gaussian random fields. In the specific example of [Langlois, 1999], there were two independent random fields, generated by the quantum fluctuations of two scalar fields.

In the present article, our goal will be to study systematically the consequences of a *totally correlated mixture* of adiabatic and isocurvature perturbations, *i.e.*, primordial perturbations which can be written in terms of one *single* random field. Of course, the consequences of more general initial conditions can then be obtained by simply adding the spectra (to get the total density power spectrum or the total temperature fluctuation multipole spectrum) of several totally correlated initial conditions.

4 Long wavelength analysis

As shown in the appendix, it is possible to solve analytically for the long wavelength perturbations. Totally correlated perturbations can be defined by two primordial quantities: the gravitational potential perturbation deep in the radiation era, denoted $\hat{\Phi}$, and the entropy perturbation denoted S_X (the index X depends on the species which departs from adiabaticity as explained in Section 2). It is then possible, using the expressions of the appendix, to compute observational quantities at the time of last scattering as functions of the two primordial quantities $\hat{\Phi}$ and S_X, *for scales larger than the Hubble radius at the time of last scattering*.

In this section, we will use, instead of the energy density contrasts δ_A defined previously in the longitudinal gauge (**13.2.1**), the slightly redefined energy density contrasts (defined in the flat-slicing gauge):

$$\delta_\gamma^\flat = \delta_\gamma - 4\Psi \,, \quad \delta_\nu^\flat = \delta_\nu - 4\Psi \,, \quad \delta_{\rm b}^\flat = \delta_{\rm b} - 3\Psi \,, \quad \delta_{\rm c}^\flat = \delta_{\rm c} - 3\Psi \,. \qquad \textbf{(13.4.1)}$$

The reason to use these quantities is essentially that the conservation equations look much simpler (see the appendix). Moreover, it is to be noticed that, with these new density contrasts, the definitions of adiabatic and isocurvature fluctuations keep exactly the same form. In other words, a purely adiabatic perturbation, as defined by (**13.2.4**), will also be characterized by:

$$\delta_{\rm b}^\flat = \delta_{\rm c}^\flat = \frac{3}{4}\delta_\nu^\flat = \frac{3}{4}\delta_\gamma^\flat \equiv \delta_{(a)}^\flat \,. \qquad \textbf{(13.4.2)}$$

For a mixed perturbation, with the species X deviating from adiabaticity, the same relation will hold for the three species other than X, and the density of the latter will be given by

$$\frac{\delta_X}{1+w_X} = S_X + \delta^\flat_{(a)} \,. \qquad \textbf{(13.4.3)}$$

Our purpose will now be to express the observable quantities for long wavelength modes, namely the gravitational potential in the matter era and the temperature anisotropies, in terms of the primordial quantities $\hat{\Phi}$ and S_X. This will be possible by using the two following relations, which are demonstrated in the appendix. The first relation gives the metric perturbation in terms of the primordial density contrast, during the radiation era,

$$\Phi_{\rm rad} \equiv \hat{\Phi} = -\frac{1}{4}\left(3+\frac{4}{5}\Omega_\nu^{\rm RD}\right)^{-1}\left[2\left(1-\frac{4}{5}\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\Omega_\gamma^{\rm RD}\delta^\flat_\gamma + \frac{2}{5}\left(9-4\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\Omega_\nu^{\rm RD}\delta^\flat_\nu\right] , \qquad \textbf{(13.4.4)}$$

the second one being the analogous equation during the matter era,

$$\Phi_{\rm mat} = -\frac{1}{5}\left(\Omega_{\rm b}^{\rm MD}\delta^\flat_{\rm b} + \Omega_{\rm c}^{\rm MD}\delta^\flat_{\rm c}\right) . \qquad \textbf{(13.4.5)}$$

Note that, in the above equations, $\Omega_\nu^{\rm RD}$ and $\Omega_\gamma^{\rm RD}$ are taken in the radiation era, whereas $\Omega_{\rm b}^{\rm MD}$ and $\Omega_{\rm c}^{\rm MD}$ correspond to their values in the matter era.

Our hybrid perturbations can be specified either by the pair $(\hat{\Phi}, S_X)$ or the pair $(\delta^\flat_{(a)}, S_X)$, the relation between the two following immediately from the relation (**13.4.4**). For a purely adiabatic perturbation, it is easy to see, using (**13.4.4**), that

$$\delta^\flat_{(a)} = -\frac{3}{2}\left(3+\frac{4}{5}\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\hat{\Phi} \equiv \alpha\hat{\Phi} \,. \qquad \textbf{(13.4.6)}$$

For a mixed perturbation, there will be in general an additional term proportional to S_X. In the case of the baryons and CDM, the expression for $\delta^\flat_{(a)}$ is the same as the adiabatic case, simply because $\delta^\flat_{\rm b}$ and $\delta^\flat_{\rm c}$ do not appear in (**13.4.4**). For the relativistic species, one obtains

$$\delta^\flat_{(a)} = -\frac{3}{2}\left(3+\frac{4}{5}\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\hat{\Phi} - \left(1-\frac{4}{5}\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\Omega_\gamma^{\rm RD} S_\gamma \equiv \alpha\hat{\Phi} + \beta_\gamma S_\gamma \,, \qquad \textbf{(13.4.7)}$$

for a photon-type hybrid perturbation and

$$\delta^\flat_{(a)} = -\frac{3}{2}\left(3+\frac{4}{5}\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\hat{\Phi} - \frac{1}{5}\left(9-4\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\Omega_\nu^{\rm RD} S_\nu \equiv \alpha\hat{\Phi} + \beta_\nu S_\nu \,, \qquad \textbf{(13.4.8)}$$

for a neutrino-type hybrid perturbation.

Substituting in (**13.4.5**) the expressions of $\delta^\flat_{\rm b}$ and $\delta^\flat_{\rm c}$ in terms of $\delta^\flat_{(a)}$ and S_X, thus in terms of $\hat{\Phi}$ and S_X, it is then possible to find the gravitational potential perturbation during the matter era. For a purely adiabatic perturbation, one finds

$$\Phi_{\rm adia} = \frac{3}{10}\left(3+\frac{4}{5}\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\hat{\Phi} \,. \qquad \textbf{(13.4.9)}$$

One recognizes the standard transfer coefficient of $9/10$ if one ignores the anisotropic pressure of neutrinos (see, *e.g.*, [Liddle & Lyth, 1993]). Here, we have its generalization, which is numerically very close to 1, when the anisotropic pressure is taken into account. For a hybrid perturbation, the gravitational potential perturbation during the matter era, will be of the form

$$\Phi = \Phi_{\rm adia} + \Phi_{\rm isoc}\ , \qquad (\mathbf{13.4.10})$$

where $\Phi_{\rm adia}$ corresponds to the term proportional to $\hat{\Phi}$, which is, in all cases, given by the same expression (**13.4.9**), and $\Phi_{\rm isoc}$ is the term proportional to S_X , whose explicit expression depends on the particular species considered. For baryons and CDM, its form is simply

$$\Phi_{\rm isoc} = -\frac{1}{5}\Omega_X^{\rm MD} S_X\ , \quad X = {\rm b,c}\ . \qquad (\mathbf{13.4.11})$$

For a photon-type mixed perturbation, one finds

$$\Phi_{\rm isoc} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{4}{5}\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\Omega_\gamma^{\rm RD} S_\gamma\ , \qquad (\mathbf{13.4.12})$$

and finally, for a neutrino-type hybrid perturbation, one gets

$$\Phi_{\rm isoc} = \frac{1}{25}\left(9 - 4\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\Omega_\nu^{\rm RD} S_\nu\ . \qquad (\mathbf{13.4.13})$$

The decomposition (**13.4.10**) expresses the fact that a primordial isocurvature perturbation will also contribute, *in the matter era*, to the potential perturbation, whereas it is of course not the case in the radiation era. This illustrates, once more, that the separation between adiabatic and isocurvature modes is not conserved during time evolution.

Let us now evaluate the contribution of the primordial perturbations to the CMB temperature anisotropies, here only for large angular scales since we are restricted to long-wavelength perturbations. Neglecting a local monopole and dipole contribution, the temperature anisotropies, due to scalar perturbations, are approximatively given by: (see [Sachs & Wolfe, 1967] [Panek, 1986])

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{4}\delta^\flat_{\gamma{\rm LSS}} + (\Phi+\Psi)_{\rm LSS} - e^i\partial_i V\big|_{\rm LSS} + \int_{\eta_{\rm LSS}}^{\eta_0}\left(\dot\Phi + \dot\Psi\right)\,{\rm d}\lambda\ , \qquad (\mathbf{13.4.14})$$

where e^i is a spatial unit vector corresponding to the direction of observation, the subscript *LSS* indicates that the quantities are evaluated at the last scattering surface, a dot denotes a derivation with respect to the conformal time η, η_0 is today's conformal time, and the integral in the last term runs on the photon line-of-sight. The contribution due to the first two terms is usually called the Sachs-Wolfe term, while the third term is called the Doppler term and the last one the integrated Sachs-Wolfe term (ISW). In general, but not always (see the pathological cases below), the SW term is dominant for large angular scales. In terms of our variables, the SW term can be written

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm SW} = \frac{1}{4}\delta^\flat_\gamma + \Phi + \Psi \simeq \frac{1}{4}\delta^\flat_\gamma + 2\Phi\ , \qquad (\mathbf{13.4.15})$$

where the quantities are evaluated at the last scattering surface, assuming that last scattering occurs well in the matter era (in this case $\Psi \simeq \Phi$). Using the expressions obtained above, it is now possible to express the SW term as a function of the primordial perturbations $\hat\Phi$ and S_X. As for the gravitational potential perturbation, one can decompose this term into

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm SW} = \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm adia} + \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm isoc}\ , \qquad (\mathbf{13.4.16})$$

where the adiabatic component is the term proportional to $\hat{\Phi}$ and the isocurvature component is proportional to S_X. For all types of hybrid perturbations, the adiabatic term is the same:

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm adia} = \frac{1}{10}\left(3+\frac{4}{5}\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\hat{\Phi}\,. \qquad \textbf{(13.4.17)}$$

Note that one has $\delta T/T_{\rm adia} = \Phi_{\rm adia}/3$, which reminiscent of the standard (adiabatic) Sachs-Wolfe term. As for the isocurvature term, it will depend on the particular type of perturbation. For hybrid perturbations which are baryon or CDM isocurvature, one finds

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm isoc} = -\frac{2}{5}\Omega_X^{\rm MD} S_X\,, \quad X = {\rm b},{\rm c}\,. \qquad \textbf{(13.4.18)}$$

Note that, for baryons and CDM, one has the relation $(\delta T/T)_{\rm isoc} = 2\Phi_{\rm isoc}$, and by comparison with the similar relation for the adiabatic terms, one recognizes the standard statement in the literature that pure isocurvature perturbations (of the baryon- or CDM-type) produce large scale temperature fluctuations *six times bigger* than pure adiabatic perturbations. For photon isocurvature hybrid perturbation, one will get

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm isoc} = \frac{1}{15}\left(6-\frac{9}{5}\Omega_\nu^{\rm RD}+\frac{4}{5}\left(\Omega_\nu^{\rm RD}\right)^2\right)S_\gamma\,, \qquad \textbf{(13.4.19)}$$

whereas, for neutrino isocurvature hybrid perturbation, the expression is

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm isoc} = \frac{1}{75}\left(9-4\Omega_\nu^{\rm RD}\right)\Omega_\nu S_\nu\,. \qquad \textbf{(13.4.20)}$$

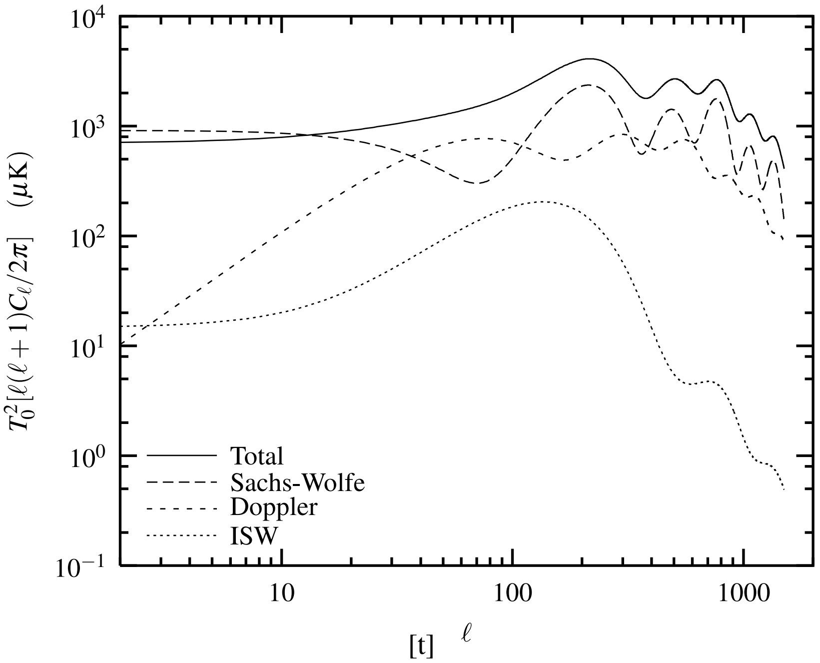
5 Numerical analysis

The present section will be devoted to the predictions of temperature anisotropies, as well as large scale structure power spectrum, for primordial correlated hybrid adiabatic and isocurvature perturbations. We will keep fixed a certain number of parameters: $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_0 = 1$, $h_{100} = 0.5$, $\Omega_{\rm b} = 0.05$, three species of massless non-degenerate neutrinos (leading to $\Omega_\gamma^{\rm RD} = 1/[1+(21/8)(4/11)^{4/3}] \simeq 0.595$ and $\Omega_\nu^{\rm RD} = 1-\Omega_\gamma^{\rm RD} \simeq 0.405$), and standard recombination. The primordial perturbations will be assumed to be scale-invariant.

5.1 Temperature anisotropies

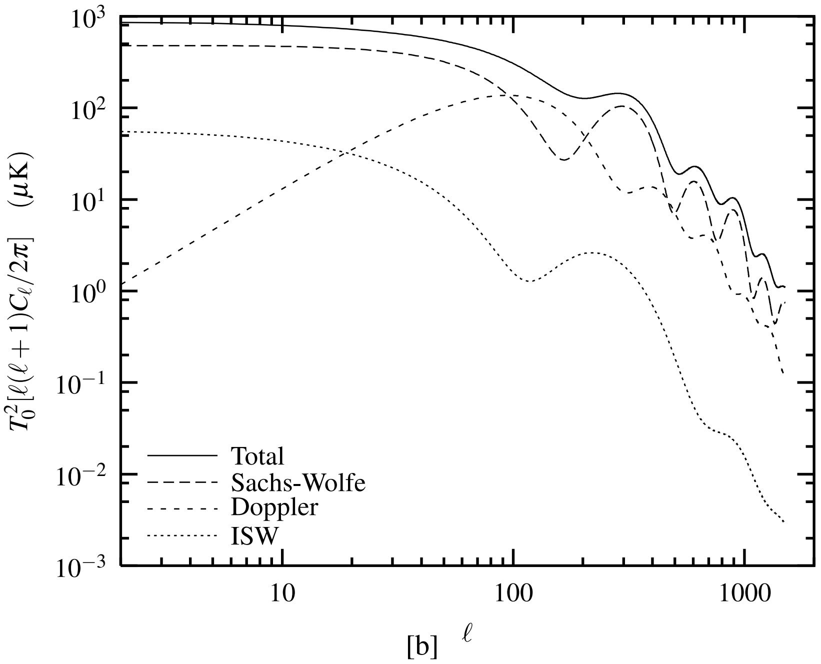
As far as temperature anisotropies are concerned, isocurvature perturbations can be distinguished from pure isocurvature perturbations by a much larger plateau, as explained in the previous section, with the consequence that the all the acoustic peaks will appear smaller than this plateau. To show these two extreme behaviors we have plotted on Fig. 13.1 the case of pure adiabatic initial conditions, and on Fig. 13.2, the case of pure CDM-type isocurvature initial conditions. We have also plotted, in each case, the SW, Doppler and ISW contributions. We have used, as usual, the angular power spectrum for the temperature anisotropies, defined by

$$C_\ell^{TT} = \left\langle |a_{\ell m}^T|^2 \right\rangle\,, \qquad \textbf{(13.5.1)}$$



[t]

FIGURE 13.1 – CMB anisotropies in the pure adiabatic model ($\lambda = 0$). The solid line represents the total (scalar) contribution. The Sachs-Wolfe, Doppler and Integrated Sachs-Wolfe contributions are respectively represented in long-dashed, short-dashed, and dotted lines. At large angular scales (low ℓ), the total amplitude is essentially due to the Sachs-Wolfe contribution.



[b]

FIGURE 13.2 – CMB anisotropies in the pure isocurvature CDM model ($\lambda = \pm\infty$). The solid line represent the total scalar contribution. The Sachs-Wolfe, Doppler and Integrated Sachs-Wolfe contributions are respectively represented in long-dashed, short-dashed, and dotted lines. Note that the power at large scales (low ℓ) is higher than at the degree-scale.

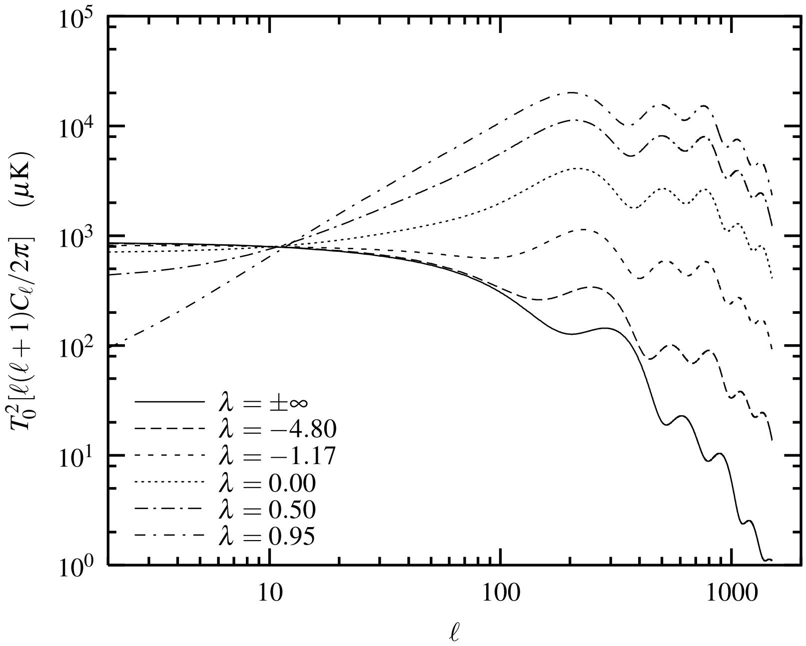


FIGURE 13.3 – CMB anisotropies in CDM-type correlated hybrid models for various values of the parameter λ. The highest curve is studied in more details in Fig. 13.8, the dotted curve represents the (standard) adiabatic case, and the lowest represents the pure isocurvature case shown in Fig. 13.2. Note that the height of the acoustic peaks with respect to the Sachs-Wolfe plateau varies with λ, according to Eq. (**13.5.11**).

where the $a^T_{\ell m}$ are the multipole coefficients that appear in the decomposition into spherical harmonics of the temperature fluctuations, *i.e.*

$$\frac{\delta T}{T} = \sum_{\ell,m} a^T_{\ell m} Y_{\ell m} \,. \tag{13.5.2}$$

In the case of hybrid perturbations, we will be somehow between these two extreme situations. For convenience, let us parameterize the hybrid perturbations by λ, which is defined in the relation

$$S = \lambda \hat{\Phi} \,, \tag{13.5.3}$$

which will quantify how far we are from a purely adiabatic model. The case $\lambda = 0$ corresponds to pure adiabatic initial conditions, whereas the limit where λ goes to infinity corresponds to pure isocurvature perturbations. λ can be positive or negative. To be more specific, one can call the hybrid perturbations we are studying *correlated* when $\lambda > 0$ and *anti-correlated* when $\lambda < 0$. In Figs. 13.3–13.5, we have plotted the total temperature anisotropy as a function of the multipole index ℓ, for various values of the parameter λ (for CDM-type hybrid perturbations), and keeping the same normalization at large angular scales.

To emphasize the difference between correlated hybrid perturbations and independent hybrid perturbations, which have been considered in the literature, we have plotted , in Fig. 13.6, the total temperature anisotropy for independent hybrid initial conditions. The curves are parameterized by the number $\mathcal{R}$, which is defined by

$$\mathcal{P}_S^{1/2} = \mathcal{R}\mathcal{P}_\Phi^{1/2} \,. \tag{13.5.4}$$

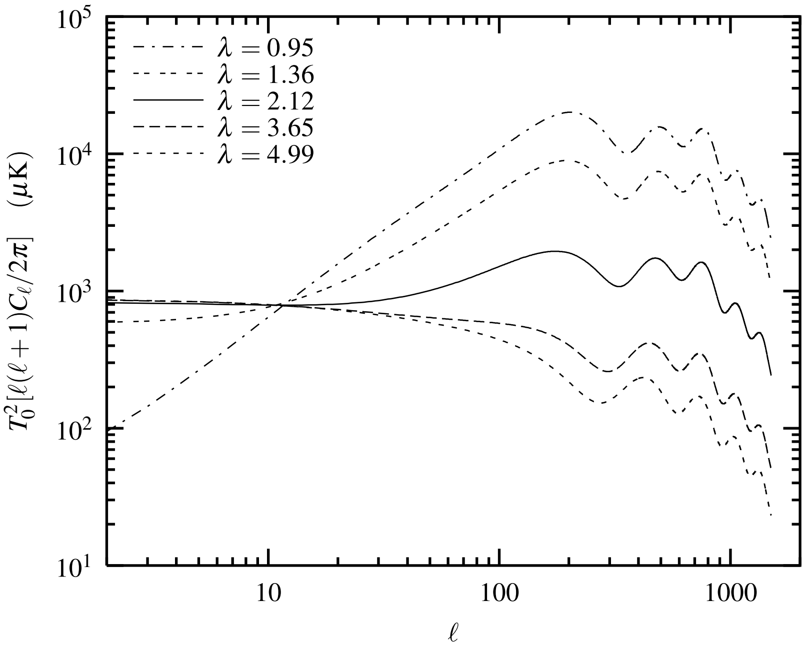


FIGURE 13.4 – CMB anisotropies in CDM-type correlated hybrid models for various values of the parameter λ. The two highest curves are studied in more details in Figs. 13.7 and 13.8.

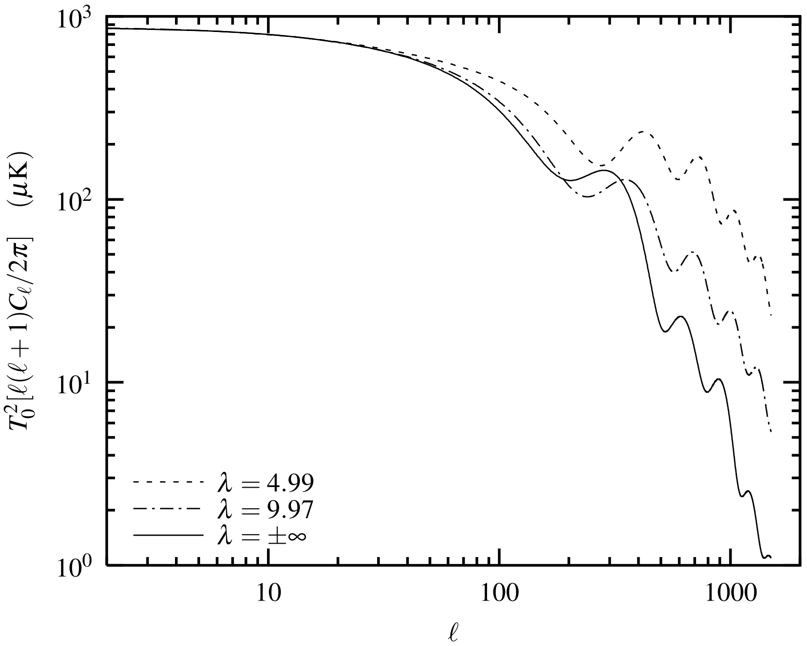


FIGURE 13.5 – CMB anisotropies in CDM-type correlated hybrid models for large (positive) values of the parameter λ. The solid curve represents the pure isocurvature case of Fig. 13.2. Note that the height of the acoustic peaks with respect to the Sachs-Wolfe plateau varies slowly in this range of values for λ.

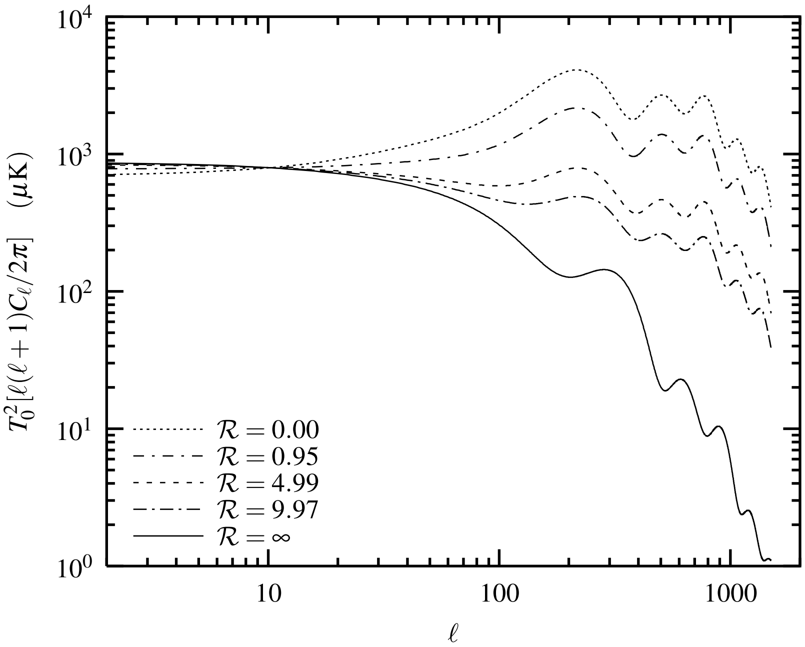


FIGURE 13.6 – CMB anisotropies in independent (uncorrelated) hybrid CDM-type models for various values of the parameter $\mathcal{R}$. The lowest, solid curve represents the pure isocurvature case of Fig. 13.2 ($\mathcal{R}=\infty$), and the highest, dotted curve represents the adiabatic case ($\mathcal{R}=0$). We have chosen for $\mathcal{R}$ the same numerical values as for λ in Figs. 13.3–13.5. Note the significant difference between the correlated and the independent cases especially in the region where $\mathcal{R},\lambda\simeq 1$.

In some sense $\mathcal{R}$ is the analogous, in the independent case, of λ since the square of both quantities corresponds to the ratio of the power spectra. But, of course $\mathcal{R}$ can be only positive. The way these curves are obtained is also different. Whereas for the correlated mixtures, one implements hybrid initial conditions from the beginning and one runs the Boltzmann code once (per model), in the case of independent mixtures, one runs the code first with purely adiabatic initial conditions, then a second time with purely isocurvature initial conditions, and the final C_ℓ are obtained by a weighted sum of the C_ℓ obtained from each run. As a consequence, the first acoustic peak, as well as the subsequent ones, will always appear lower, relatively to the plateau in the hybrid case than in the purely adiabatic case.

The behavior of the C_ℓ for the correlated hybrid models is quite different when one increases the isocurvature proportion. For anti-correlated perturbations, *i.e.*, $\lambda<0$, the behavior is what is expected naively: the amplitude of the peaks decreases, relatively to the plateau, with higher proportion of isocurvature perturbations, as illustrated in Fig. 13.3 with the curves lower than the adiabatic case. But the evolution is more complicated when one considers correlated models, *i.e.*, with $\lambda>0$. Starting from the adiabatic case ($\lambda=0$) and increasing slowly λ, one begins with a phase where the amplitude of the peaks will increase with respect to the plateau, as illustrated by the curves above the adiabatic one in Fig. 13.3. If one goes on increasing λ, one reaches a critical value, beyond which the peaks will now diminish with increasing λ, as illustrated by the curves of Fig. 13.4.

One can understand this surprising behavior if one goes back to the results of the previous section. In the case of CDM hybrid perturbations, one can evaluate the SW plateau, using

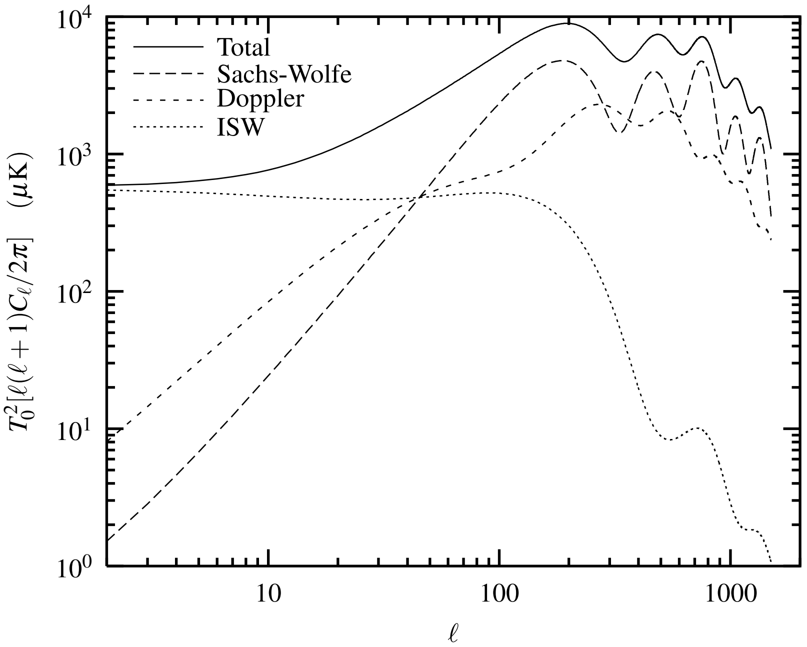


FIGURE 13.7 – CMB anisotropies in a CDM-type correlated hybrid model (with $\lambda = 1.36$). The solid line represents the total (scalar) contribution. The Sachs-Wolfe, Doppler and Integrated Sachs-Wolfe contributions are respectively represented in long-dashed, short-dashed, and dotted lines. The parameter λ has been chosen so that the SW contribution cancels at lowest order. In this case, the low multipole power is no longer dominated by the SW contribution, but rather by the ISW contribution.

Eqns (**13.4.17**) and (**13.4.18**):

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm SW} = \left[\frac{1}{10}\left(3+\frac{4}{5}\Omega_\nu^{\rm RD}\right) - \frac{2}{5}\Omega_{\rm c}^{\rm MD}\lambda\right]\hat{\Phi}\,, \qquad (\mathbf{13.5.5})$$

and therefore, there is indeed a critical value for λ for which the SW plateau is suppressed, which explains the relative height of the peaks. In fact, things are slightly more complicated, because when the SW term is suppressed, because this special choice of initial conditions, the other terms which contribute to the anisotropies cannot be neglected any longer. Figure 13.7 shows in particular that the plateau can be due essentially to the ISW effect. Note that the value $\lambda = 1.36$ for which this effect was numerically obtained is slightly different from the value one would deduce from (**13.5.5**). This is because (**13.5.5**) was obtained by supposing that the last scattering surface is completely in the matter-dominated era, which is not the case since the radiation-to-matter transition occurs no very long before recombination. One can also adjust the initial conditions so that the large scale anisotropies will be dominated by the Doppler term, in which case there is no longer a plateau on large scales, but an increasing slope as can be seen on Fig. 13.8.

Although at this stage we have discussed and illustrated only the CDM correlated hybrid case, a similar behavior appears for the three other types of correlated hybrid perturbations, but with noticeable differences. We have systematically explored the parameter space for the four types of correlated hybrid initial conditions and measured the predicted height of the first acoustic peak with respect to the plateau. The results are given in Fig. 13.9. Here, we have adopted a different parameterization of the hybrid correlated perturbations so that one can represent easily all cases. We have defined an angular variable θ_X so that our initial conditions for the density contrasts are

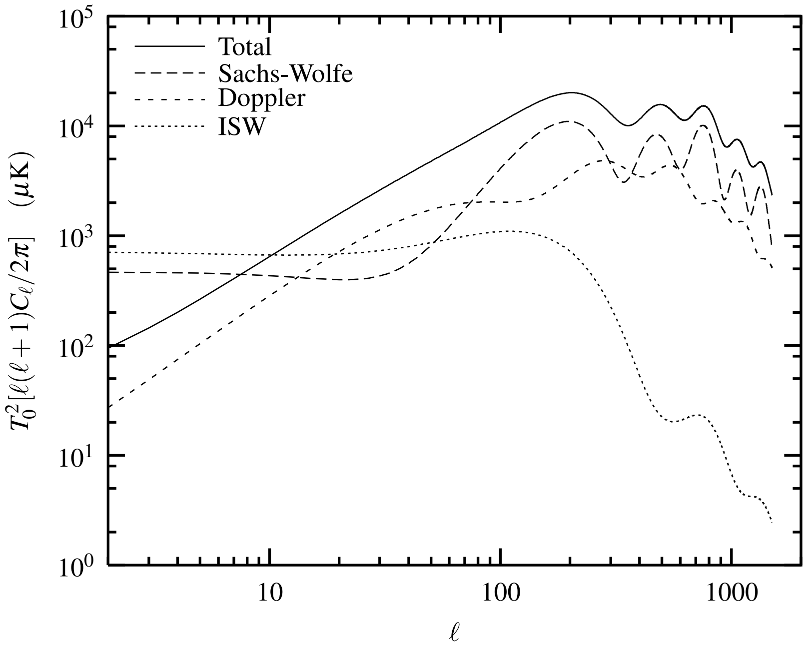


FIGURE 13.8 – CMB anisotropies in a CDM-type correlated hybrid model (with $\lambda = 0.95$). The solid line represent the total contribution. The Sachs-Wolfe, Doppler and Integrated Sachs-Wolfe (ISW) contributions are respectively represented in long-dashed, short-dashed, and dotted lines. The parameter λ has been chosen so that the SW and ISW contribution almost cancel each other at lowest order. In this case, the low multipole power is dominated by the Doppler contribution, which is not flat at low multipoles.

of the form

$$\frac{\delta_X}{1+w_X} = \cos\theta_X \ , \quad \frac{\delta_A}{1+w_A} = \sin\theta_X \ , \quad A \neq X \ . \tag{13.5.6}$$

which implies

$$S_X = (\cot\theta_X - 1)\delta^\flat_{(a)} \ . \tag{13.5.7}$$

Of course, this parameter θ_X can be related to the parameter λ. Let us write

$$\delta^\flat_{(a)} = \alpha\hat{\Phi} + \beta_X S_X \ , \tag{13.5.8}$$

where the subscript X for the coefficient β_X refers to the type of hybrid mode we are considering. α is the same for all four types and is given by the coefficient in Eq. (**13.4.6**). β_X is zero for the CDM and baryon modes and is given by the second term on the right hand side in Eqns (**13.4.7**) and (**13.4.8**) for the photon and neutrino cases respectively. The relation between λ_X and θ_X is then

$$\lambda_X = \frac{(\cot\theta_X - 1)\alpha}{1 - (\cot\theta_X - 1)\beta_X} \ . \tag{13.5.9}$$

In the region near $\theta = \pi/4$ (corresponding to the pure adiabatic case and where all curves cross), it is easy to see that the relation between θ and λ is the same for the four types of perturbations and is given numerically by

$$\lambda \simeq 2\alpha(\theta - \pi/4) \simeq 9.97(\theta - \pi/4) \ . \tag{13.5.10}$$

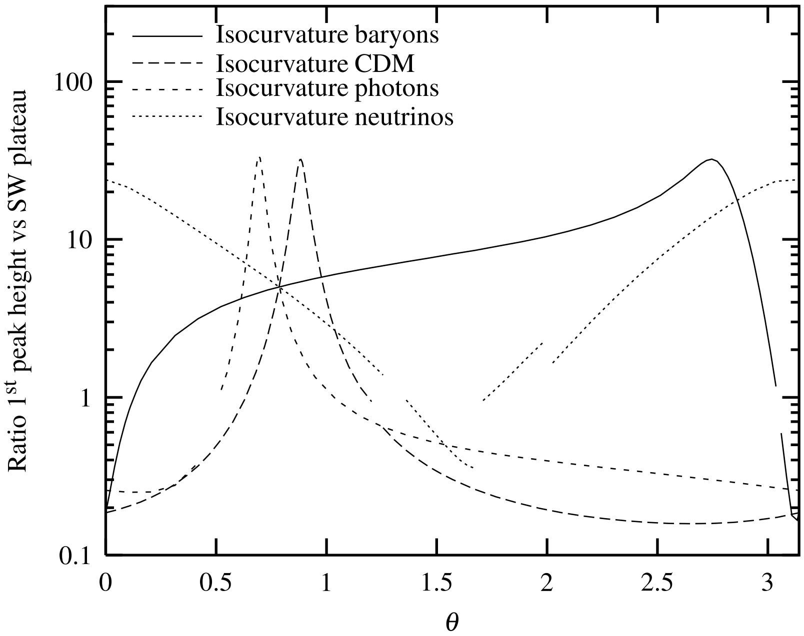


FIGURE 13.9 – Ratio of the height of the first acoustic peak to the height of the Sachs-Wolfe plateau for the four types of hybrid models. The height of the SW plateau is obtained by averaging the power between $\ell = 2$ and $\ell = 25$, which correspond to the angular scales explored by COBE. We have defined the "first acoustic peak"as the first maximum of the multipole anisotropy spectrum for $\ell \geq 100$. Each ratio peaks at a high value ($\simeq 30$) which roughly corresponds to the moment where the SW plateau disappears [see Eq. (**13.5.11**); in practice, this occurs when the SW and ISW contributions cancel at low multipoles]. The four curves intersect at $\theta = \pi/4$, as expected, since this value corresponds to the pure adiabatic case [see Eq. (**13.5.7**)]. As θ varies, the position on the ℓ-axis of the first acoustic peak slightly shifts to the left or to the right (see also Fig. 13.10). In some cases, the peak goes below $\ell = 100$. In this case the "new" first acoustic peak position is at $\ell \simeq 200 - 300$, and its height is different, hence the discontinuities in the curves.

Let us see what happens when one deviates from the pure adiabatic case. In the baryon case, the first peak will increase for correlated mixtures and decrease for anti-correlated mixtures, as in the CDM case, although in a much more moderate way. On the contrary, in the photon and neutrino cases, the first peak will start to increase for *anti-correlated* perturbations. Moreover, the evolution in the neutrino case is slower than in the photon case.

All these results can be understood rather easily with the analytical results of the previous section. Indeed, in all cases, the SW anisotropy term can be written in the form

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\rm SW} = (a + b_X \lambda_X)\,\hat{\Phi}\,, \qquad \textbf{(13.5.11)}$$

where the special case of CDM is given just above. The coefficient a is the same for all four cases, as was shown in the previous section. Therefore, the evolution of the SW plateau will be determined by the coefficient b_X which is different in each case. For baryon and CDM perturbations, the coefficient b is negative, which explains why the increase of the first peak (or equivalently the decrease of the plateau) corresponds to correlated ($\lambda > 0$) perturbations, when one deviates from the pure adiabatic case. Moreover, $|b_c| > |b_b|$ because $\Omega_{\rm c} > \Omega_{\rm b}$ and therefore the response to the increase of the isocurvature proportion is stronger in the CDM case. In the photon and neutrino

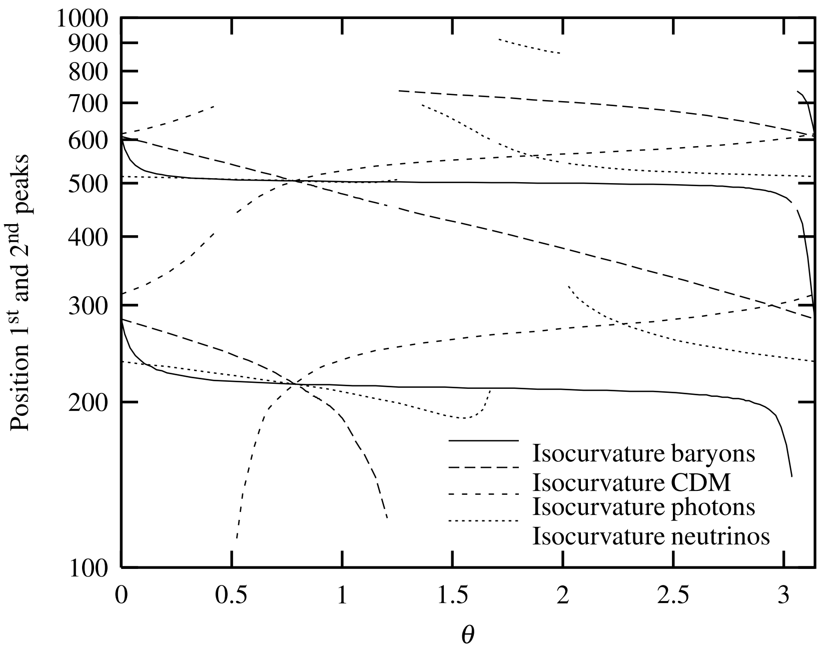


FIGURE 13.10 – Position of the two first acoustic peaks in the four types of hybrid models. As explained in Fig. 13.9, the first acoustic peak is defined as the the first maximum of the multipole anisotropy spectrum for $\ell \geq 100$. In some cases ($\theta \simeq 3$ for the isocurvature baryon model, $\theta \simeq 0.5$ for the isocurvature photon model and $\theta \simeq 1.2$ for the isocurvature CDM model), the first peak disappears in the low multipole region, and the "new" first peak becomes the "former" second one. In some other cases, the peaks is smeared in the power spectrum and disappears, as it is the case for the first acoustic peak in the isocurvature neutrino model at $\theta \simeq 1.2$, and at $\theta \simeq 1.7$ for the second one.

cases, the coefficient β is positive and therefore only anti-correlated perturbations can lead to an increase of the peak. Moreover, $b_\gamma > b_\nu$, and similarly to the heavy species, the response to the increase of λ is stronger in the photon case than in the neutrino case. A consequence of these results is that, potentially, the correlated hybrid perturbations in the CDM and photon cases will be more strongly constrained by the CMB measurements than the baryon and neutrino cases.

It is also important, in the spirit of putting constraints on this type of modes, to see the position of the two Doppler peaks on the ℓ-axis. We have plotted in Fig. 13.10, the positions of the first and second acoustic peaks. Near the pure adiabatic case, the behavior is once more strongly pronounced in the CDM and photon cases. In this region, in the CDM case, correlated hybrid perturbations tend to displace the peaks to smaller ℓ whereas anti-correlated perturbations push the peaks to higher ℓ. The same behavior, but very attenuated, seems to apply to the baryon and neutrino cases. In contrast, in the photon case, higher ℓ correspond to correlated perturbations and lower ℓ to anti-correlated perturbations.

Another important feature of the acoustic peaks is the impact of the isocurvature part on the amplitude of the second peak. Figure 13.11 gives the evolution of the relative amplitude of the second peak with respect to the first peak, when one varies the coefficient λ, for the four types of perturbations. As before, in the vicinity of the pure adiabatic point, the effects are more important in the CDM and photons cases than in the two other cases.

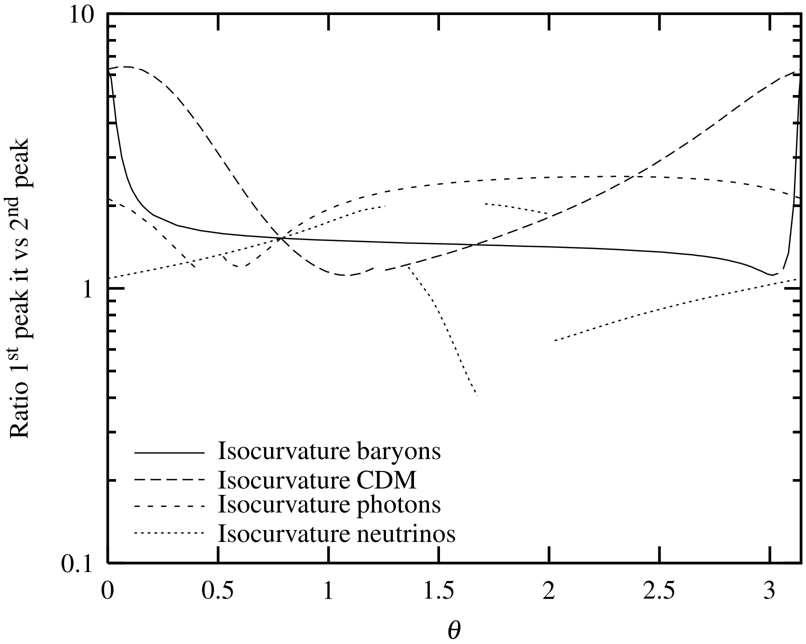


FIGURE 13.11 – Relative heights of the first two acoustic peaks for the four types of hybrid models. The various discontinuities of the four curves originate from the discontinuities in the peak positions, explained and illustrated in Fig. 13.10.

5.2 Power spectrum

In the previous subsection, we have analyzed the CMB fluctuations. Another important part of observational data comes from the large-scale structures. However, it is more difficult to infer as precise information from the LSS data as from the expected CMB measurements, because of additional complications such as the bias effect. Moreover, the signatures due to pure adiabatic perturbations and pure isocurvature perturbations respectively is easier to distinguish in the CMB anisotropies than in the matter power spectrum. But, nevertheless, the LSS power spectrum is a useful tool, at least to check the overall amplitude of the perturbations.

To illustrate the power spectra corresponding to correlated hybrid perturbations, we have plotted on Figs. 13.12–13.14, the power spectra (taking the gravitational potential perturbation as reference variable) in the case of CDM-type correlated hybrid perturbations, for various values of λ.

Some interesting behavior occurs for large values of λ. When $\lambda \geq \alpha$, it is easy to see using Eq. (**13.5.9**) that the CDM and the baryon density contrasts have initially opposite signs. The CDM density contrast evolves [see Eqns (**13.8.1**, **13.8.6**)] according to the equation

$$\ddot{\delta}_{\mathrm{c}}^{\flat} + \mathcal{H}\dot{\delta}_{\mathrm{c}}^{\flat} = -k^2\Phi\,, \qquad (\mathbf{13.5.12})$$

which can be solved to give

$$\delta_{\mathrm{c}}^{\flat} = \delta_{\mathrm{c}}^{\flat\,\mathrm{in}} - k^2 \int \left[\frac{1}{a}\int a\Phi\,\mathrm{d}\eta\right]\,\mathrm{d}\eta'\,, \qquad (\mathbf{13.5.13})$$

where $\delta_{\mathrm{c}}^{\flat\,\mathrm{in}}$ is the initial value for the CDM density contrast, so that it will evolve towards values with sign opposite to that of Φ, that is of same sign as $\delta_{(a)}^{\flat}$. Moreover shortest wavelengths will

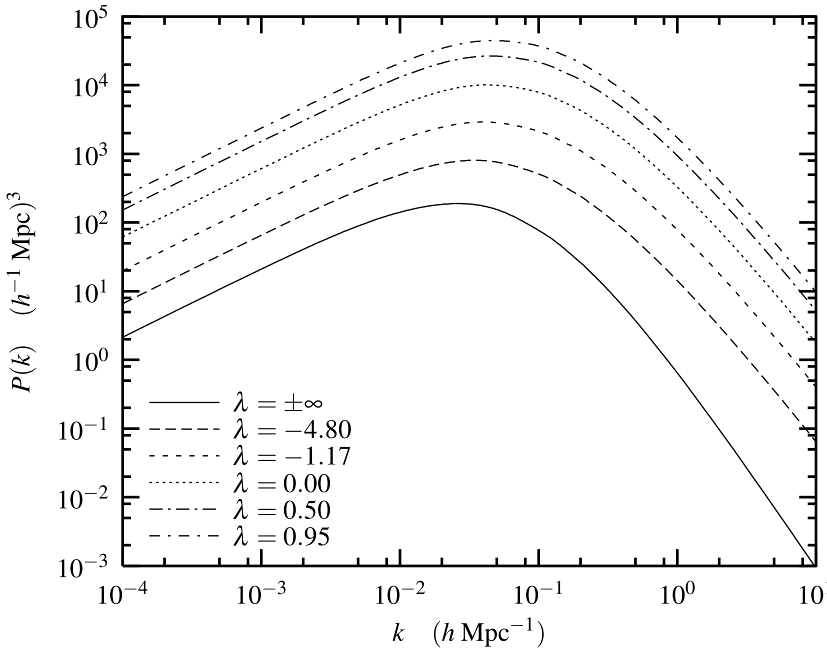


FIGURE 13.12 – Matter power spectra in the CDM-type hybrid models for various values of the parameter λ. All the curves have been normalized to COBE. Note that the overall amplitude, as well as the position of the maximum varies with λ.

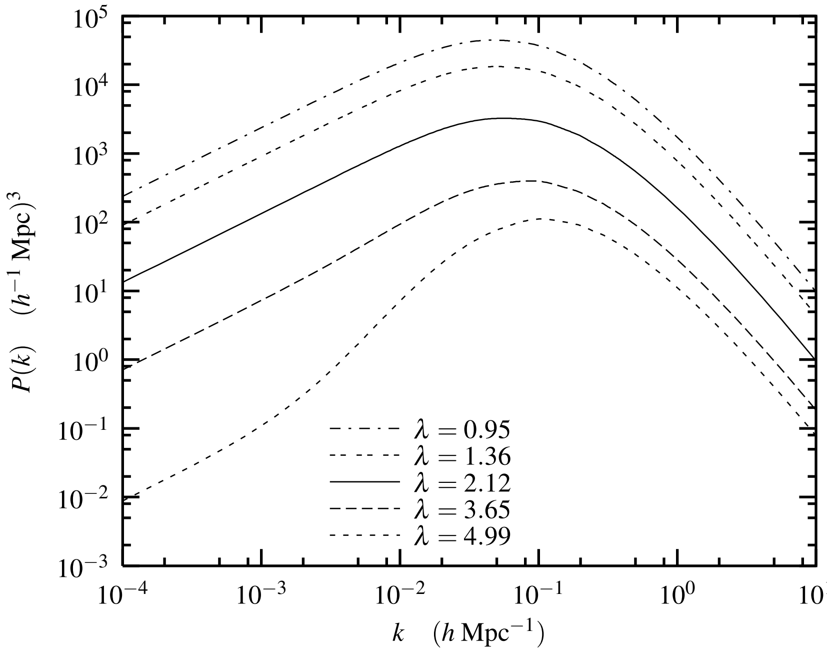


FIGURE 13.13 – Matter power spectra in the CDM-type hybrid models for various values of the parameter λ. All the curves have been normalized to COBE.

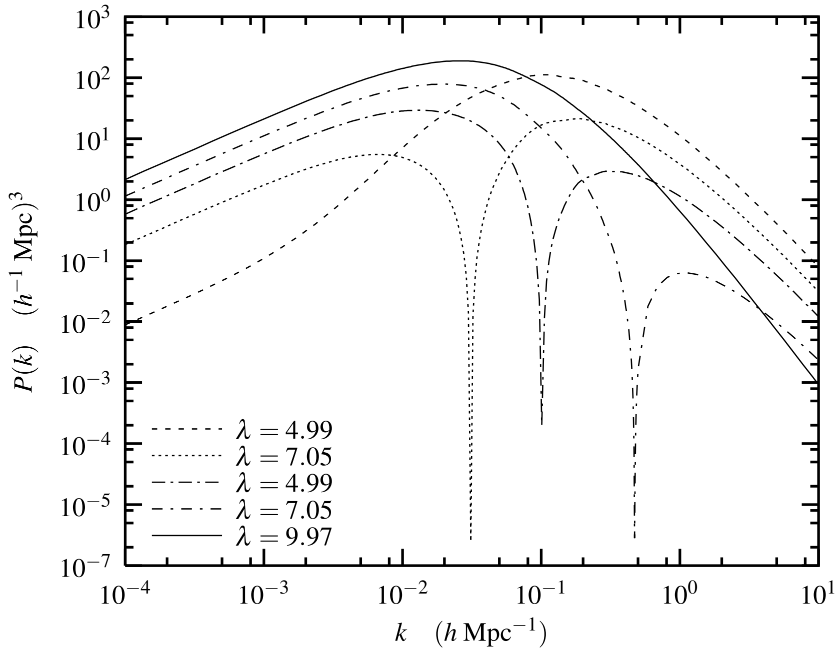


FIGURE 13.14 – Matter power spectra in the CDM-type hybrid models for high values of the parameter λ. All the curves have been normalized to COBE. Note that one the power spectrum goes to zero for a critical scale, which depends on the value of λ.

evolve rapidly enough and change sign whereas longest wavelengths will not, so that the CDM power spectrum should exhibit a sign change. For a given mode, this sign change occurs all the more rapidly as the initial CDM density contrast is small as compared to $\hat{\Phi}$, that is when λ is small. Plotting the matter power spectrum, it is therefore natural to expect that the wavenumber at which it is zero is all the more small as λ is small. This is what we can check on Fig. 13.14.

5.3 CMB polarization

Although CMB polarization has not yet been measured and is expected to be difficult to measure, it can provide a lot of additional information concerning the cosmological perturbations and the cosmological parameters [Seljak & Zaldarriaga, 1997]. This is why we will consider briefly the consequence of correlated hybrid perturbations on the CMB polarization. The polarization can be decomposed [Seljak & Zaldarriaga, 1997] into E-mode polarization and B-mode polarization, and we shall define, in addition to the temperature angular power spectrum, the E-mode angular power spectra,

$$C_\ell^{EE} \equiv \left\langle |a_{\ell m}^E|^2 \right\rangle \,, \qquad \textbf{(13.5.14)}$$

and the correlation spectrum

$$C_\ell^{ET} \equiv \left\langle a_{\ell m}^{T*} a_{\ell m}^E \right\rangle \,, \qquad \textbf{(13.5.15)}$$

where the $a_{\ell m}^T$ correspond here to the same coefficients as those defined in (**13.5.2**), which gives the correlation between the temperature and the E-mode polarization. Scalar-type perturbations do not contribute to the B-mode polarization. As an illustration, we have plotted the E-mode polarization anisotropy spectrum for various values of λ. Two features in these curves are obvious. First, the amplitude of the polarization varies, as well as the position of the first peak in the spectrum. This

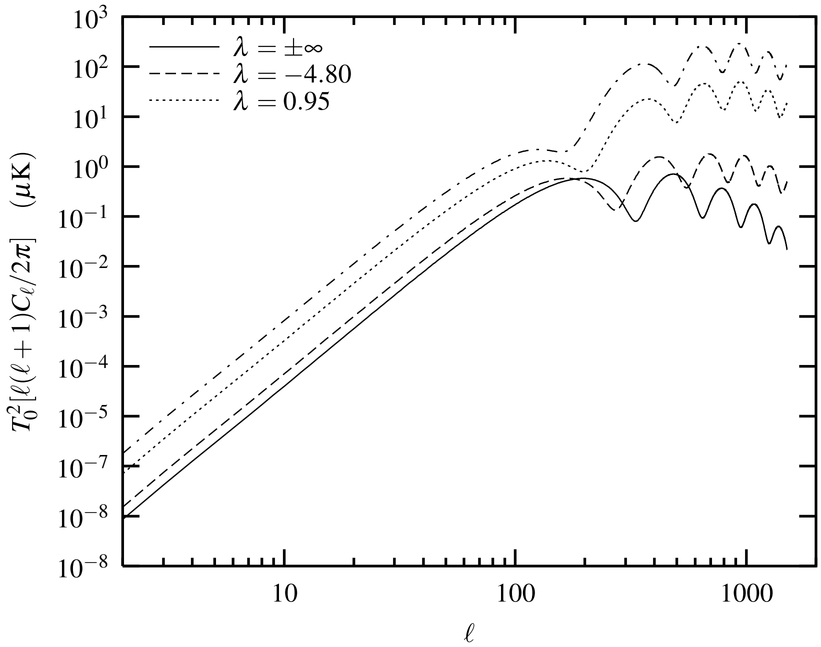


FIGURE 13.15 – CMB polarization anisotropies in the CDM-type hybrid models for various values of the parameter λ. We have represented the spectrum for the same values of λ as in Fig. 13.3 (but we have omitted two of them for clarity). The amplitude of the spectrum decreases and the peaks shift to the right as one goes from the adiabatic case ($\lambda = 0$, dotted line) to the pure isocurvature case ($\lambda = \pm\infty$, solid line), as the spectrum closely follows that of the Doppler contribution to the temperature anisotropy spectrum (see Figs. 13.1 and 13.2).

can be understood by looking at the Boltzmann equation for the photon fluid. Before the last scattering surface, Thomson diffusion in important, and the photons anisotropic stress approximatively obeys to the equation:

$$\sigma_\gamma \simeq -\frac{4}{15}\frac{k}{\dot{\tau}}V_{\mathrm{b}\gamma}\,, \qquad (\mathbf{13.5.16})$$

where $\dot{\tau}$ stands for the differential Thomson opacity, and $V_{\mathrm{b}\gamma}$ is the photon-baryon plasma velocity. Thus, the photons anisotropic stress (which is proportional to the E-type polarization, see Eqns (62,63,77) of [Hu & White, 1997b]) is proportional the photon dipole, and the C_ℓ^{EE} are proportional to the Doppler contribution of the CMB temperature anisotropy spectrum. Therefore, the position and height of the peaks vary for both spectra in the same way with λ. These results are represented in Fig. 13.15 and the cross-correlation spectrum between temperature and polarization can be found on Fig. 13.16.

6 Conclusion

In the present work, our goal has been to analyze the effects of correlated hybrid adiabatic and isocurvature perturbations on observational quantities, in particular the CMB anisotropies. We have isolated four "elementary" modes, corresponding to a deviation from adiabaticity of one of the four standard species (photons, neutrinos, baryons, CDM): each type of these elementary modes is characterized by only two parameters (S and $\delta^\flat_{(a)}$). One could, of course, generalize

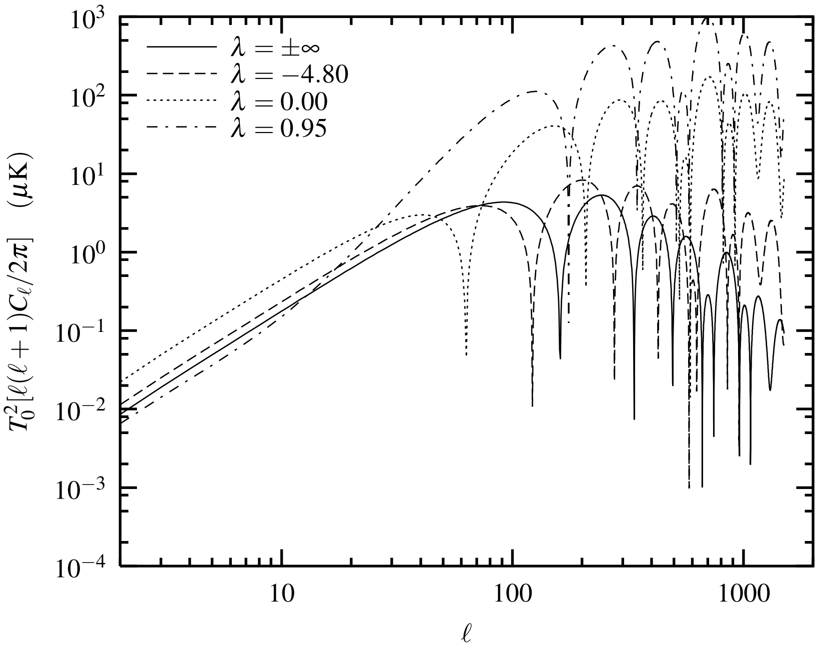


FIGURE 13.16 – CMB temperature-polarization cross-correlation spectrum in the CDM-type hybrid models for various values of the parameter λ. As in Fig. 13.15, we have represented the spectrum for the same values of λ as in Fig. 13.3 and have omitted two of them for clarity. The amplitude of the spectrum decreases and the peaks shift to the right as one goes from the adiabatic case ($\lambda = 0$, dotted line) to the pure isocurvature case ($\lambda = \pm\infty$, solid line).

our analysis by relaxing adiabatic ratios among the three remaining species, but at the price of requiring four parameters.

We have shown, in the case of these elementary modes, that correlation leads to very specific effects on the CMB anisotropies and on large scale structure which do not appear in the case of independent mixtures.

In this paper, our purpose was not to confront directly observations with this type of models, but rather to focus on some qualitative interesting consequences of correlated hybrid perturbations. This is why we have considered only a subclass of models, which are extreme in the sense that they are totally correlated and simple because they are described by only two parameters. If one wishes to compare hybrid models with observations, one should consider the *sum* of spectra of the type we have obtained (as explained in §3), which means that the adiabatic and isocurvature perturbations would then be only partially correlated (this is the case in the specific model of [Langlois, 1999]).

The present data are still too imprecise to be able to distinguish this kind of correlated hybrid perturbations, but it may be interesting to know how much precise data would constrain these modes. In practice, it might turn out to be a difficult task to disentangle the presence of such modes in the data, unless one assumes a specific early Universe model.

7 Acknowledgments

It is a pleasure to thank Nabila Aghanim, Francis Bernardeau, Martin Bucher, Kavilan Moodley and David Spergel for interesting discussions.

8 Appendix: Evolution of perturbations

In this Appendix, we derive the evolution of all quantities for long wavelengths, *i.e.*, *scales outside the Hubble radius*: $k \ll aH$. The whole system of equations, in a notation slightly different from the one adopted here, can be found for example in [Ma & Bertschinger, 1995].

Let us first introduce the system of equations governing the evolution of the matter perturbations, which related the density contrasts of the four species to the scalar component of their velocities (denoted by V_A). We first have four equations of conservation, for each of the four species, that read (in Fourier space):

$$\dot{\delta}^{\flat}_{\nu} = \frac{4}{3} k V_{\nu} \,, \tag{13.8.1}$$

$$\dot{\delta}^{\flat}_{\rm c} = k V_{\rm c} \,, \tag{13.8.2}$$

$$\dot{\delta}^{\flat}_{\gamma} = \frac{4}{3} k V_{{\rm b}\gamma} \,, \tag{13.8.3}$$

$$\dot{\delta}^{\flat}_{\rm b} = k V_{{\rm b}\gamma} \,, \tag{13.8.4}$$

where a prime denotes a derivative with respect to the conformal time and where $V_{{\rm b}\gamma}$ is the velocity common to the baryon and photon fluids, which are coupled until last scattering. We then have three Euler equations, two for the independent fluids of CDM and neutrinos, and one for the baryon-photon fluid:

$$\dot{V}_{\nu} = -k \left[\frac{\delta^{\flat}_{\nu}}{4} + \Psi + \Phi - \sigma_{\nu} \right] \,, \tag{13.8.5}$$

$$\dot{V}_{\rm c} = -\mathcal{H} V_{\rm c} - k\Phi \,, \tag{13.8.6}$$

$$\dot{V}_{{\rm b}\gamma} = -\frac{3\Omega_{\rm b}}{4\Omega_{\gamma} + 3\Omega_{\rm b}} \mathcal{H} V_{{\rm b}\gamma} - k \frac{4\Omega_{\gamma}}{4\Omega_{\gamma} + 3\Omega_{\rm b}} \left[\frac{\delta^{\flat}_{\gamma}}{4} + \Psi \right] - k\Phi \,, \tag{13.8.7}$$

where $\mathcal{H}$ is the comoving Hubble parameter defined by $\mathcal{H} \equiv a'/a$. In the last equation, the coefficients Ω_A are time dependent since the ratio of the energy density of a given species with respect to the critical energy density, will change with time.

To close the above system of equations, one needs the Einstein equations, which express the metric perturbations in terms of the matter perturbations. Only two components of the Einstein equations are useful, the other ones being redundant, and they are the Poisson equation

$$-\left[\frac{k^2}{\mathcal{H}^2} + \frac{9}{2}(1+w) \right] \Psi = \frac{3}{2} \sum_X \Omega_X \left[\delta_X - 3\frac{\mathcal{H}}{k}(1+w_X) V_X \right] \,, \tag{13.8.8}$$

and the anisotropic stress equation,

$$\frac{k^2}{\mathcal{H}^2} (\Psi - \Phi) = 6 \Omega_{\nu} \sigma_{\nu} \,, \tag{13.8.9}$$

where σ_{ν} represents the anisotropic stress due to the neutrinos (which thus require a description beyond the perfect fluid approximation). To get the evolution of σ_{ν}, one must use a higher moment of the Boltzmann equation (see [Ma & Bertschinger, 1995]),

$$\dot{\sigma}_{\nu} = -\frac{4}{15} k V_{\nu} \,, \tag{13.8.10}$$

where other terms on the right hand side have been neglected.

In order to solve the above equations for long wavelengths, it is convenient to consider an expansion of all quantities in terms of the small parameter $k\eta$, so that one will have

$$X = X^{(0)} + X^{(1)}k\eta + X^{(2)}(k\eta)^2 + \dots \qquad \textbf{(13.8.11)}$$

The Euler equations (**13.8.7**) then enable us to express the first order velocity term as a function of the zeroth order density and gravitational potentials,

$$V_\nu^{(1)} = -\frac{1}{4}\delta_\nu^{\flat\,(0)} - \Psi^{(0)} - \Phi^{(0)} \,, \qquad \textbf{(13.8.12)}$$

$$V_{\rm c}^{(1)} = -\frac{\Phi^{(0)}}{1+\mathcal{H}\eta} \,, \qquad \textbf{(13.8.13)}$$

$$V_{\rm b\gamma}^{(1)} = -\frac{\Omega_\gamma\delta_\gamma^{\flat\,(0)} + 4\Omega_\gamma\Psi^{(0)} + (4\Omega_\gamma + 3\Omega_{\rm b})\Phi^{(0)}}{4\Omega_\gamma + 3(1+\mathcal{H}\eta)\Omega_{\rm b}} \,. \qquad \textbf{(13.8.14)}$$

The zeroth order components of the velocities are as usual set to zero, otherwise one would get a divergence in the right hand side of (**13.8.8**) (unless there is a special cancellation of the type mentioned in [Bucher *et al.*, 1999]).

Using (**13.8.9**) and (**13.8.10**) at lowest order, one gets

$$\Psi^{(0)} - \Phi^{(0)} = -\frac{4}{5}\Omega_\nu\mathcal{H}^2\eta^2 V_\nu^{(1)} \,, \qquad \textbf{(13.8.15)}$$

and substituting the above expression for $V_\nu^{(1)}$, one finds the following relation between $\Phi^{(0)}$ and $\Psi^{(0)}$:

$$\left(1+\frac{4}{5}\Omega_\nu\mathcal{H}^2\eta^2\right)\Phi^{(0)} = \left(1-\frac{4}{5}\Omega_\nu\mathcal{H}^2\eta^2\right)\Psi^{(0)} - \frac{1}{5}\Omega_\nu\mathcal{H}^2\eta^2\delta_\nu^{\flat\,(0)} \,. \qquad \textbf{(13.8.16)}$$

Substituting in Poisson's equation (**13.8.8**), at lowest order, the expressions obtained above for the velocities, and using (**13.8.16**), one finally gets the following cumbersome equation, relating $\Phi^{(0)}$ to the four species densities,

$$\begin{aligned}
-\Bigg\{(3+\Omega_\gamma+\Omega_\nu)\left(1+\frac{4}{5}\Omega_\nu y^2\right) + \frac{(4\Omega_\gamma+3\Omega_{\rm b})y}{4\Omega_\gamma+3\Omega_{\rm b}(1+y)}\left[8\Omega_\gamma + 3\Omega_{\rm b}\left(1-\frac{4}{5}\Omega_\nu y^2\right)\right] \\
+\frac{3y}{1+y}\Omega_{\rm c}\left(1-\frac{4}{5}\Omega_\nu y^2\right) + 8y\Omega_\nu\Bigg\}\frac{\Phi^{(0)}}{1-\frac{4}{5}\Omega_\nu y^2} \\
= \Omega_{\rm b}\delta_{\rm b}^{\flat\,(0)} + \Omega_{\rm c}\delta_{\rm c}^{\flat\,(0)} + \frac{4\Omega_\gamma(1+y)+3\Omega_{\rm b}(1+2y)}{4\Omega_\gamma+3\Omega_{\rm b}(1+y)}\Omega_\gamma\delta_\gamma^{\flat\,(0)} \\
+\left[\frac{4}{5}\Omega_\gamma y^3\frac{4\Omega_\gamma+3\Omega_{\rm b}}{4\Omega_\gamma+3\Omega_{\rm b}(1+y)} + 1 + y + (3+\Omega_\gamma-3\Omega_\nu)\frac{y^2}{5}\right]\frac{\Omega_\nu\delta_\nu^{\flat\,(0)}}{1-\frac{4}{5}\Omega_\nu y^2} \,,
\end{aligned} \qquad \textbf{(13.8.17)}$$

where $y \equiv \mathcal{H}\eta$. While this expression yields the evolution of the gravitational potential perturbation during the whole evolution of the Universe from the deep radiation era till the last scattering, it will be sufficient for our present purpose to retain from this equation only its asymptotic forms in the radiation era and the matter era. In the radiation era , $y = 1$ and $\Omega_{\rm c}, \Omega_{\rm b} \ll \Omega_\gamma, \Omega_\nu$, so that the above expression simplifies to give

$$\Phi^{(0)} = -\frac{1}{4}\left(3+\frac{4}{5}\Omega_\nu\right)^{-1}\left[2\left(1-\frac{4}{5}\Omega_\nu\right)\Omega_\gamma\delta_\gamma^{\flat\,(0)} + \frac{2}{5}(9-4\Omega_\nu)\Omega_\nu\delta_\nu^{\flat\,(0)}\right] \,. \qquad \textbf{(13.8.18)}$$

In the matter era, $y = 2$ and $\Omega_\gamma, \Omega_\nu \ll \Omega_{\rm c}, \Omega_{\rm b}$, so that one finds

$$\Phi^{(0)} = -\frac{1}{5}\left(\Omega_{\rm b}\delta_{\rm b}^{\flat\,(0)} + \Omega_{\rm c}\delta_{\rm c}^{\flat\,(0)}\right) . \quad \textbf{(13.8.19)}$$

Chapitre 14

Spectre de fluctuations initiales et approximation du slow-roll (article)

Sommaire

L'article qui suit, paru dans *Astrophysical Journal Letters* [Martin *et al.*, 2000b], discute la façon dont sont incluses les hypothèses inflationnaires dans la plupart des travaux visant à extraire les paramètres cosmologiques des mesures d'anisotropies du rayonnement fossile.

Historiquement, les modèles d'inflation en loi de puissance sont devenus très populaires, car ils étaient parmi les seuls à donner des spectres de fluctuations analytiquement calculables. Ces modèles font trois prédictions sur les amplitudes et les indices spectraux des modes scalaires et tensoriels (*cf* équations **7.3.1** et **7.3.2** pour la définition de ces grandeurs) :

$$n_{\rm T} < 0 \,, \qquad \textbf{(14.0.1)}$$

$$n_{\rm S} - 1 = n_{\rm T} \,, \qquad \textbf{(14.0.2)}$$

$$A_{\rm T} = \frac{400}{9} \frac{|n_{\rm T}|}{2} A_{\rm S} \,, \qquad \textbf{(14.0.3)}$$

c'est-à-dire que seuls deux paramètres ($A_{\rm T}$ et $n_{\rm T}$ par exemple) sont indépendants. Pour des raisons historiques curieuses, le rapport $A_{\rm T}/A_{\rm S}$ est rarement utilisé, mais remplacé au profit d'une quantité sans doute considérée comme plus “observationnelle”, à savoir $C_2^{\rm T}/C_2^{\rm S}$. Cette quantité est malheureusement beaucoup plus difficile à calculer, car elle nécessite de calculer l'évolution des perturbations jusqu'à maintenant. En fait, seule la quantité $C_2^{\rm S}$ est calculable analytiquement, et ce uniquement dans un Univers dominé encore aujourd'hui par de la matière non relativiste. Un calcul *numérique* de C_2^{T} permet alors d'estimer le rapport

$$\frac{C_2^{\mathrm{T}}}{C_2^{\mathrm{S}}} \simeq 6.93 n_{\mathrm{T}} \,. \tag{14.0.4}$$

La "méthode" habituellement utilisée dans les travaux sur l'extraction de paramètres cosmologiques à partir d'observations du rayonnement fossile suit l'option par défaut de CMBFAST, qui consiste en fait à comparer les observations à des modèles obtenus en calculant les deux spectres d'anisotropies scalaires et tensorielles *indépendamment* de leur normalisation prédite par l'inflation, puis en les normalisant au quadrupole à l'aide de la formule (**14.0.4**) [CMBFAST, `http`]. Cette méthode, outre son côté très inesthétique, est dangereuse à plusieurs titres. Notamment, elle suppose qu'on estime correctement le quadrupole des modes tensoriels... ce qui n'est malheureusement pas le cas ![1] De plus, l'estimation (**14.0.4**) n'est plus valable en présence de constante cosmologique, mais demeure néanmoins utilisée même dans ce cas. Une autre erreur fréquente consiste à négliger purement et simplement les modes tensoriels [Lange *et al.*, 2001] [Balbi *et al.*, 2000]. Il n'est pas rare non plus de voir les quatre paramètres A_{S}, A_{T}, n_{S} et n_{T} traités comme autant de paramètres libres, avec des valeurs positives des $n_{\mathrm{S}} - 1$ et n_{T} autorisées. Cette dernière modélisation semble plus rare, probablement à cause du fait qu'elle augmente l'espace des paramètres [Tegmark & Zaldarriaga, 2000a]. Enfin, dans beaucoup de ces situations, l'indice spectral des modes scalaires est autorisé à prendre des valeurs supérieures à 1, alors que le modèle d'inflation en loi de puissance prédit qu'il doit être *strictement* inférieur à 1.

Outre les critiques sur la normalisation relative des modes scalaires et tensoriels, l'hypothèse de spectre en loi de puissance est tout aussi critiquable.

Un spectre en loi de puissance ne correspond *pas* aux prédictions d'un modèle inflationnaire réaliste. En effet, un tel spectre nécessite en premier lieu une forme très particulière du potentiel, qui assure que l'expansion soit en loi de puissance, $a \propto t^p$. Outre la forme extrêmement particulière de ce potentiel, ce modèle présente un autre défaut, beaucoup plus grave : une telle phase d'inflation dure indéfiniment. On pourrait arguer que l'inflation puisse rester un certain temps en loi de puissance (quand l'inflaton se trouve dans une plage de valeurs où le potentiel a la forme voulue) avant de s'arrêter après que l'inflaton soit passé dans une zone où le potentiel n'a plus la forme voulue, mais cette hypothèse n'est pas non plus acceptable : les plus grandes longueurs d'onde accessibles à l'observation (*i.e.* celles qui viennent de rerentrer dans le rayon de Hubble) ne sont sorties du rayon de Hubble que 60 e-folds avant la fin de l'inflation, c'est-à-dire *pendant* la fin de l'inflation, et il serait extrêmement surprenant que l'expansion soit encore à ce moment-là une pure loi de puissance.

La "bonne" façon de procéder est donc d'abandonner les prescriptions simples pour le potentiel, et de tenter de résoudre le plus exactement possible les équations du mouvement pour l'inflaton. Comme il n'existe pas de solution générale à ces équations, on fait l'hypothèse que l'inflation a lieu sous les hypothèses de slow-roll, à savoir inflaton en roulement lent ($|\phi''| \ll 3H|\phi'|$), et expansion quasi-de Sitter ($|H'| \ll H^2$). On est donc amené à définir les paramètres de slow-roll ε et δ, dont on suppose qu'ils varient lentement au cours du temps. On peut alors calculer les

[1] Il est d'ailleurs curieux qu'aucun auteur de code numérique n'ait pris la peine de comparer ses résultats avec les calculs faits quelques années plus tôt par Grishchuk [Grishchuk, 1993b]... D'un point de vue technique, l'erreur vient d'un mauvais échantillonnage en 0 des fonctions de Bessel. Pour les modes tensoriels, c'est la combinaison $j_\ell(x)/x^2$ qui intervient. Pour $\ell > 2$, cette fonction tend vers 0 en 0. Par contre, elle tend vers une valeur finie en 0 pour $\ell = 2$, et un échantillonnage insuffisant dans cette région s'avère alors dangereux.

quantités z définies précédemment :

$$\frac{\ddot{z}_\mathrm{S}}{z_\mathrm{S}} = \frac{1}{\eta^2}(2+6\varepsilon-3\delta)\,, \tag{14.0.5}$$

$$\frac{\ddot{z}_\mathrm{T}}{z_\mathrm{T}} = \frac{1}{\eta^2}(2+3\varepsilon)\,. \tag{14.0.6}$$

Les solutions des équations d'évolution des modes s'écrivent alors en terme de fonctions de Bessel d'indices

$$\nu_\mathrm{S} = -\frac{3}{2}-2\varepsilon+\delta\,, \tag{14.0.7}$$

$$\nu_\mathrm{T} = -\frac{3}{2}-\varepsilon\,. \tag{14.0.8}$$

Après quelques manipulations, on obtient la forme des spectres de puissance des perturbations scalaires (dans l'ère de matière) et tensorielles :

$$k^3 P_\Phi(k) = L_\mathrm{Pl}^2 H_*^2 \frac{16}{\pi}\frac{9}{400\varepsilon}\left(1-2\varepsilon-2(2\varepsilon-\delta)[C+\ln(k\eta_*)]\right)\,, \tag{14.0.9}$$

$$k^3 P_h(k) = L_\mathrm{Pl}^2 H_*^2 \frac{16}{\pi}\left(1-2\varepsilon[C+1+\ln(k\eta_*)]\right)\,, \tag{14.0.10}$$

où on a posé $C \equiv \gamma_E + \ln 2 - 2 \simeq -0.7296$, γ_E étant la constante d'Euler ($\gamma_E \simeq 0.5772$), et on a introduit le temps η_* auquel on a évalué les paramètres du slow-roll et le paramètre de Hubble H_*.

Les spectres (**14.0.9**, **14.0.10**) ne sont pas en loi de puissance, mais on peut évaluer un indice spectral "effectif" en prenant leur dérivée logarithmique en $k = \eta_*^{-1}$. À l'ordre le plus bas, on trouve

$$n_\mathrm{S} - 1 = -4\varepsilon + 2\delta\,, \tag{14.0.11}$$

$$n_\mathrm{T} = -2\varepsilon\,, \tag{14.0.12}$$

$$A_\mathrm{T} = \frac{400}{9}\varepsilon A_\mathrm{S}\,. \tag{14.0.13}$$

La condition "habituelle" de l'inflation en loi de puissance, $n_\mathrm{S} - 1 = n_\mathrm{T}$ n'est d'ailleurs plus vérifiée en général (elle ne l'est que si $\varepsilon = \delta$), alors que la normalisation relative des amplitudes des perturbations scalaires et tensorielles reste à peu près valable.

Dans la suite de ce chapitre, nous évaluons l'impact des différentes erreurs fréquemment faites dans la littérature.

Slow-roll inflation and CMB anisotropy data

Jérôme Martin[1*], Alain Riazuelo[1†] and Dominik J. Schwarz[2‡]

[1] *Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, UMR 8629 du Centre National de la Recherche Scientifique, Observatoire de Paris, F-92195 Meudon Cedex (France)*

[2] *Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien (Austria)*

Abstract : We emphasize that the estimation of cosmological parameters from CMB anisotropy data, such as the recent high resolution maps from BOOMERanG and MAXIMA-1, requires assumptions on the primordial spectra. The latter are predicted from inflation. The physically best motivated scenario is slow-roll inflation. However, very often the unphysical power-law inflation scenario is (implicitly) assumed in the CMB data analysis. We show that the predicted multipole moments differ significantly in both cases. We identify several misconceptions present in the literature (and in the way inflationary relations are often combined in popular numerical codes), among others, generically inflation does neither predict $n_{\mathrm{S}} - 1 = n_{\mathrm{T}}$ nor that gravitational waves are negligible. We calculate the CMB multipole moments for various values of the slow-roll parameters and demonstrate that an important part of the space of parameters $(n_{\mathrm{S}}, n_{\mathrm{T}})$ has been overlooked in the CMB data analysis so far.

Keywords : cosmic microwave background — early Universe

1 Introduction

Accurate measurements of the Cosmic Microwave Background (CMB) anisotropies provide an excellent way to probe the physics of the early Universe, in particular the hypothesis of inflation. Recently BOOMERanG [de Bernardis *et al.*, 2000] and MAXIMA-1 [Hanany *et al.*, 2000] announced the clear detection of the first acoustic peak at an angular scale $\simeq 1^\circ$, which confirms the most important prediction of inflation: the Universe seems to be spatially flat [Lange *et al.*, 2001] [Balbi *et al.*, 2000].

In the framework of inflation CMB anisotropies follow from the basic principles of General Relativity and Quantum Field Theory. To predict the multipole moments of these CMB anisotropies two ingredients are necessary: the initial spectra of scalar and tensor perturbations and the "transfer functions", which describe the evolution of the spectra since the end of inflation. The transfer functions depend on cosmological parameters such as the Hubble constant (h), the total amount of matter and energy in the Universe (Ω_0), the density of baryons (Ω_{b}), the density of cold dark matter (Ω_{c}) and the cosmological constant (Ω_Λ).

*Email addres: `martin@edelweiss.obspm.fr`
†Email addres: `Alain.Riazuelo@obspm.fr`
‡Email addres: `dschwarz@hep.itp.tuwien.ac.at`

For the analysis of CMB maps it is reasonable, as a first step, to test the most simple and physical model of the early Universe: slow-roll inflation with a single scalar field. Slow-roll inflation predicts a logarithmic dependence of the power spectra on the wave number k [Starobinsky, 1979] [Mukhanov & Chibisov, 1981] [Guth & Pi, 1982] [Starobinsky, 1982] [Hawking, 1982]. However, in most studies of the CMB anisotropy the spectral shape of power-law inflation [Abbott & Wise, 1984b], corresponding to an exponential potential for the inflaton field, has been considered. This case is unphysical, since power-law inflation never stops. Two of us [Martin & Schwarz, 2000] have shown, using analytical techniques, that the predictions of power-law and slow-roll inflation can differ significantly. Here, we confirm these results and calculate the CMB anisotropies in both situations with a full Boltzmann code developed by one of us (A. R.). The numerical accuracy of this code has been tested by comparison to analytic results (low ℓ) and to CMBFAST v3.2 [Seljak & Zaldarriaga, 1996] [CMBFAST, `http`]. In general both codes agree within 2%.

We use the new CMB data to test slow-roll inflation, assuming the two most popular versions of Cold Dark Matter (CDM) models (our "priors"): the standard CDM model (SCDM: $h = 0.60$, $\Omega_0 = 1$, $\Omega_b h^2 = 0.019$, $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_c = 1 - \Omega_b$) and the cosmic concordance model (ΛCDM: $h = 0.60$, $\Omega_0 = 1$, $\Omega_b h^2 = 0.019$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_c = 1 - \Omega_b - \Omega_\Lambda$), which is motivated by the results of the high-z supernovae searches [Perlmutter *et al.*, 1998] [Riess *et al.*, 1998]. In particular, we take $\Omega_0 = 1$ in agreement with the most important prediction of inflation, $h = 0.60$, which is consistent with supernovae type Ia measurements ($h = 0.585 \pm 0.063$ at 90% C.L. [Parodi *et al.*, 2000]), and $\Omega_b h^2 = 0.019$, as inferred from the observed abundance of D and primordial nucleosynthesis ($\Omega_b h^2 = 0.019 \pm 0.002$ [Tytler *et al.*, 2000] [Nolleth & Burles, 2000]).

In this letter we recall the basic predictions of slow-roll inflation (§2) and correct errors and misconceptions that have been recently made in the literature on this issue (§3). In §4 we compare for the first time the predictions of slow-roll inflation with the recent data of BOOMERanG and MAXIMA-1 (without any elaborated statistical technique; we remind that only 5% of the BOOMERanG data have been analyzed so far).

2 Predictions of inflation

The power spectra from power-law inflation, for which the scale factor behaves as $a(\eta) \propto |\eta|^{1+\beta}$ with $\beta \leq -2$, change with a fixed power of the wavenumber k. For the Bardeen potential and for gravitational waves the power spectra in the matter-dominated era are respectively given by [Abbott & Wise, 1984b] [Martin & Schwarz, 1998]

$$k^3 P_\Phi = A \frac{3 - n_S}{1 - n_S} \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_S - 1} , \tag{14.2.1}$$

$$k^3 P_h = A \frac{400}{9} \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_T} , \tag{14.2.2}$$

where k_0 is a pivot scale and where $n_S - 1 \equiv \mathrm{d}\ln(k^3 P_\Phi)/\mathrm{d}\ln k = n_T = \mathrm{d}\ln(k^3 P_h)/\mathrm{d}\ln k = 2\beta + 4$. The factor A is predicted from inflation, its expression is given in [Martin & Schwarz, 2000]. Here, A is *a priori* free and must be tuned such that the angular spectrum is COBE-normalized. The choice of β fixes n_S and n_T and we always have $n_S < 1$. The predictions of power-law inflation are the same for any value of the pivot scale, since k_0 can be included into the definition of A.

Let us now turn to slow-roll inflation which is certainly physically more relevant, since it covers a wide class of inflationary models. Slow-roll is essentially controlled by two parameters: $\epsilon \equiv -\dot{H}/H^2$ and $\delta \equiv -\dot{\epsilon}/(2H\epsilon) + \epsilon$, where H is the Hubble constant. These two parameters can be related to the shape of the inflaton potential [Lidsey *et al.*, 1997]. All derivatives of ε and δ have to be negligible, *e.g.*, $\dot{\delta}/H = \mathcal{O}(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2)$, only then the slow-roll approximation is valid. Slow-roll inflation corresponds to a regime where ε and δ are constant and small in comparison with unity. The power spectra of the Bardeen potential and gravitational waves can be written as [Stewart & Lyth, 1993] [Martin & Schwarz, 2000]

$$k^3 P_\Phi = \frac{A}{\varepsilon}\left[1 - 2\varepsilon - 2(2\varepsilon - \delta)\left(C + \ln\frac{k}{k_0}\right)\right] , \tag{14.2.3}$$

$$k^3 P_h = \frac{400A}{9}\left[1 - 2\varepsilon\left(C + 1 + \ln\frac{k}{k_0}\right)\right] , \tag{14.2.4}$$

where $C \equiv \gamma_{\rm E} + \ln 2 - 2 \simeq -0.7296$, $\gamma_{\rm E} \simeq 0.5772$ being the Euler constant. Slow-roll inflation predicts the value of A, which is given in [Martin & Schwarz, 2000] and has not necessarily the same numerical value as for power-law inflation. One important difference to power-law inflation is that the choice of the pivot scale k_0 now matters. It has been shown in [Martin & Schwarz, 2000] that the slow-roll error in the scalar multipoles is minimized at the multipole index $\ell = \ell_{\rm opt}$ if $D_{\ell_{\rm opt}} = \ln(k_0 r_{\rm LSS})$, where $r_{\rm LSS}$ is the comoving distance to the last scattering surface and $D_\ell \equiv 1 - \ln 2 + \Psi(\ell) + (\ell + 1/2)/[\ell(\ell+1)]$ with $\Psi(x) \equiv {\rm d}\ln\Gamma(x)/{\rm d}x$. For $\ell \gg \ell_{\rm opt}$ this gives $k_0 \simeq (e\ell_{\rm opt})/(2r_{\rm LSS})$, where $r_{\rm LSS} = 2/(aH)_0$ for SCDM and $r_{\rm LSS} \simeq 3.3/(aH)_0$ for ΛCDM. Usually the choice $k_0 = (aH)_0$ is made, which corresponds to $\ell_{\rm opt} \simeq 2$. In this letter we also consider the case $\ell_{\rm opt} = 200$, which roughly corresponds to the location of the first acoustic peak. Finally, from Eqns (**14.2.3–14.2.4**) the spectral indices are inferred

$$n_{\rm S} = 1 - 4\varepsilon + 2\delta\ , \quad n_{\rm T} = -2\varepsilon\ . \tag{14.2.5}$$

An important consequence of these formulas is that the relation $n_{\rm S} = n_{\rm T} + 1$ does not hold for slow-roll inflation, except in the particular case $\varepsilon = \delta$.

3 CMB data analysis

We found five misconceptions in the literature, which do have an important impact on the extraction of cosmological parameters from the measured CMB multipole moments:

1. From Eqns (**14.2.1**, **14.2.2**) and (**14.2.3–14.2.4**) we see that the shapes of the spectra are not the same in power-law inflation and in slow-roll inflation (even if $\varepsilon = \delta$). Unfortunately, the unphysical power-law shape (**14.2.1**, **14.2.2**) is assumed frequently, although the relevance of deviations from the power-law shape has been discussed earlier (see, *e.g.*, [Kosowsky & Turner, 1995] [Lidsey *et al.*, 1997]). This difference in the shape affects the estimates of cosmological parameters in [Lange *et al.*, 2001] and [Balbi *et al.*, 2000], since this misconception is built in into the most commonly used numerical codes: CMBFAST and CAMB [Lewis *et al.*, 2000] [CAMB, `http`]. In [Martin & Schwarz, 2000] it has been demonstrated that the difference is important and increases with $|n_{\rm S} - 1|$. For instance, typically, the usual choice $\ell_{\rm opt} = 2$ leads to an error of 15% at $\ell \simeq 200$ for $n_{\rm S} = 0.9$, see Fig. 14.1. It has been suggested [Martin & Schwarz, 2000] to shift the pivot scale to $\ell_{\rm opt} \simeq 200$ to decrease the difference, which is due to the different shapes of the spectra. For the case considered before, the difference reduces to $\simeq$2% with $\ell_{\rm opt} \simeq 200$, as can be seen in Fig. 14.1. For cases $\varepsilon \neq \delta$, the error from the wrong shape increases (for the primordial spectra, this has been studied by [Grivell & Liddle, 1996]). Thus, for the accurate estimation of the cosmological parameters, one

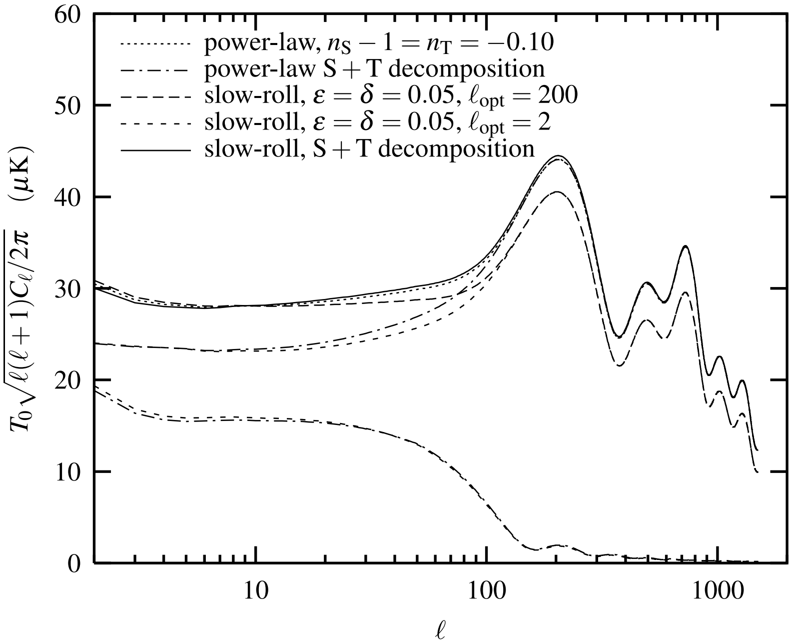


FIGURE 14.1 – Comparison of CMB band powers from power-law and slow-roll inflation in the SCDM scenario. The slow-roll model has $\varepsilon = \delta = 0.05$ such that the scalar and tensor spectral indices agree in both cases ($n_S = 0.9$, $n_T = -0.1$). For $\ell_{opt} = 2$, the usual pivot, the difference between the power-law and slow-roll spectra is large, which improves for a pivot $\ell_{opt} = 200$. The contribution of gravitational waves is displayed for power-law and slow-roll inflation ($\ell_{opt} = 2$).

must not mistake power-law inflation for slow-roll inflation. We suggest placing the scale for which the slow-roll parameters ε and δ are determined in the region of the acoustic peaks, rather than in the COBE region; this decreases the error from the slow-roll approximation, and one can get rid of the limitations from cosmic variance for the normalization.

2. In various publications [Lange *et al.*, 2001] [Balbi *et al.*, 2000] and codes (CMBFAST and CAMB) $n_S \geq 1$ and $n_S - 1 \neq n_T$ are allowed in the data analysis, while working with power-law spectra (the prediction of power-law inflation). This is meaningless in the context of inflationary perturbations. For the case $n_S = 1$ the scalar amplitude is divergent and the linear approximation breaks down [see Eqns (**14.2.1**, **14.2.2**)]. If, nevertheless, the power–law shape is assumed, $n_S = n_T + 1 < 1$ should be fulfilled. On the contrary, in slow-roll inflation, as can be checked on Eqns (**14.2.5**), one can have $n_S = 1$ or $n_S > 1$, only $n_T < 0$ is compulsory.

3. A third misconception is that gravitational waves are not taken into account properly. This is an important issue since a non-vanishing contribution of gravitational waves modifies the normalization and changes the height of the first acoustic peak. In [Lange *et al.*, 2001] (see the footnote [13]), it was assumed that if $n_S > 1$, there are no gravitational waves at all, a supposition in complete contradiction with the predictions of slow-roll inflation. Also, in that article, the relation $k^3 P_h / k^3 P_\Phi = -(200/9) n_T / (1 - n_T/2)$ was used. It is valid for power-law inflation only. In [Bridle *et al.*, 2001] gravitational waves have been neglected, which restricts the analysis for their choice of $n_S = 1$ to the case $\delta = 2\varepsilon \ll \mathcal{O}(0.01)$, such that tensors contribute less than about 10% of the power.

4. By default in the CMBFAST and CAMB codes the contribution of gravitational waves is calculated according to the relation $C_2^{\mathrm{T}}/C_2^{\mathrm{S}} \simeq 7(1-n_{\mathrm{S}})$. [Tegmark & Zaldarriaga, 2000b] argued, based on this relation, that power-law models with large tilt cannot explain the observed anisotropies. However, this relation is only valid for power-law inflation and the SCDM model. In particular this is no longer true when $\Lambda \neq 0$ (ΛCDM model). The reason is the so-called "late integrated Sachs-Wolfe effect", which has been (?) well known for a long time [Kofman & Starobinsky, 1985] [Górski *et al.*, 1992] [Knox, 1995]. The normalization must be performed utilizing the power spectra themselves and not the quadrupoles in order not to include an effect of the transfer function. In Fig. 14.2, we display the ΛCDM multipole moments (for $n_{\mathrm{S}} = 0.9$) in the case where the wrong normalization is used together with the case where the normalization is correctly calculated with the help of Eqns (**14.2.3–14.2.4**). The error is

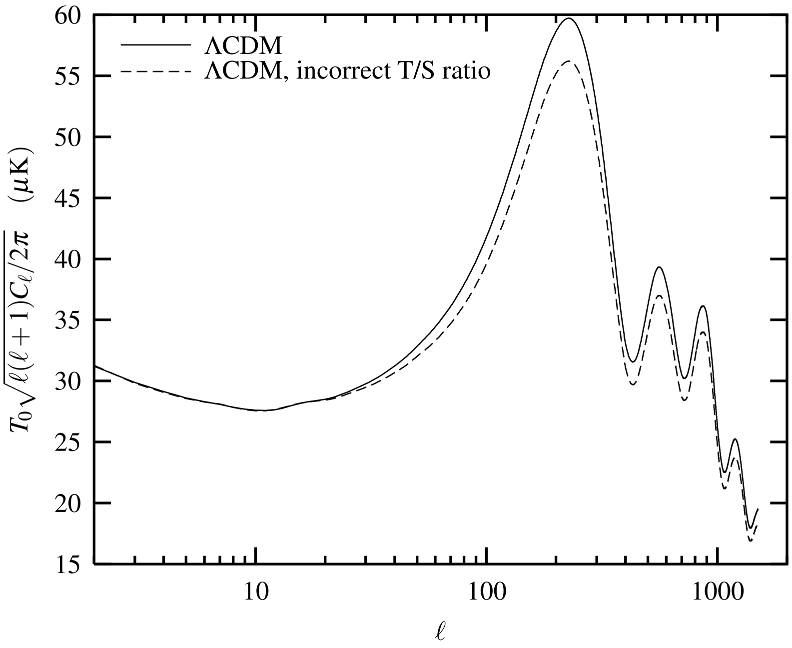


FIGURE 14.2 – CMB band powers for a power-law spectrum ($n_{\mathrm{S}} = 0.9$) in the ΛCDM scenario with correct (solid line) and incorrect (dashed line) contribution of gravitational waves.

$\simeq$15% at $\ell \simeq 200$. This weakens the mentioned argument of [Tegmark & Zaldarriaga, 2000b] and in fact questions any analysis that uses the CMBFAST default scalar-tensor ratio together with a non-vanishing cosmological constant.

5. Finally, the CMBFAST code and the pre-July 2000 versions of the CAMB code calculate the low-ℓ multipoles in the tensorial sector inaccurately. In the case of power-law inflation and the SCDM model they can be well approximated by

$$C_\ell^{\mathrm{T}} = \frac{9\pi}{4}(\ell-1)\ell(\ell+1)(\ell+2)A_\ell(n_{\mathrm{T}}) \,, \tag{14.3.1}$$

with,

$$A_\ell(n_{\mathrm{T}}) \equiv \frac{400A}{9}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^{1-n_{\mathrm{T}}}}\left|\int_0^y \frac{j_2(x)j_\ell(y-x)}{x(y-x)^2}\,\mathrm{d}x\right|^2 \,, \tag{14.3.2}$$

where j_ℓ is a spherical Bessel function. For $n_{\rm T} = 0$, this gives in agreement with [Grishchuk, 1993b]: $C_3^{\rm T}/C_2^{\rm T} \simeq 0.393$. The code developed by one of us (A.R.) reproduces this value with a precision better than 1%, whereas CMBFAST gives $C_3^{\rm T}/C_2^{\rm T} \simeq 0.361$, *i.e.*, an error of $\simeq$8%. Above $\ell = 4$ both codes agree reasonably well. Since the July 2000 version of CAMB this problem is fixed.

4 Test of slow-roll inflation

We now consider the most simple and physical model for inflation (*i.e.*, slow-roll inflation optimized with $\ell_{\rm opt} = 200$) for the SCDM and ΛCDM scenarios and compare its predictions with the observational data of COBE/DMR [Bennett *et al.*, 1996], BOOMERanG and MAXIMA-1. We demonstrate that a large region of the parameter space $(n_{\rm S}, n_{\rm T})$ [or equivalently (ε, δ)], forbidden in the case of power-law inflation but allowed in the case of slow-roll inflation, contains models which fit the data as good as the models usually considered in the data analysis.

The data are very often presented in terms of band-power $\delta T_\ell^2 \equiv T_0^2 \ell(\ell+1)C_\ell/(2\pi)$, with $T_0 \simeq 2.7\,{\rm K}$. For any value of ε and δ, δT_ℓ^2 can be approximatively expressed in terms of the band-power for ε, $\delta \ll 1$

$$\delta T_\ell^2(\varepsilon, \delta) \simeq \frac{\delta T_\ell^2(\varepsilon, \delta \ll 1)}{1 + R_{10}} \left[1 - 2(2\varepsilon - \delta)\ln\frac{\ell}{10}\right] . \qquad (\mathbf{14.4.1})$$

A corresponding formula for power-law inflation has been presented in [Turner *et al.*, 1993] [see remark before Eq. (33)]. For the SCDM and ΛCDM scenarios considered here (see the introduction), we have, respectively, $\delta T_{207}^2(\varepsilon, \delta \ll 1) \simeq 3705\,\mu{\rm K}^2$, $\delta T_{222}^2(\varepsilon, \delta \ll 1) \simeq 6422\,\mu{\rm K}^2$ for the first peak and $\delta T_{497}^2(\varepsilon, \delta \ll 1) \simeq 1952\,\mu{\rm K}^2$, $\delta T_{565}^2(\varepsilon, \delta \ll 1) \simeq 3102\,\mu{\rm K}^2$ for the second peak. In the previous equation, we have assumed $\delta T_\ell^2(\varepsilon, \delta) \simeq \delta T_\ell^{{\rm S}\,2}(\varepsilon, \delta)$ which is valid only if $\ell \gg 1$ in order for the tensorial modes to be negligible. The quantity R_{10} is defined by $R_{10} \equiv \delta T_{10}^{{\rm T}\,2}/\delta T_{10}^{{\rm S}\,2}$ and appears because the spectrum is normalized to the multipole C_{10}. At the leading order, it can be expressed as $R_{10} \simeq -5.31 n_{\rm T}$ and at the next-to-leading order, it is given by

$$R_{10} = 10.62\varepsilon[1 + 3.96\varepsilon - 3.85\delta - 2(\varepsilon - \delta)\ln(100e)] . \qquad (\mathbf{14.4.2})$$

With Eq. (**14.4.1**) we can roughly understand how the spectrum is modified when the slow-roll parameters are changed. For fixed $2\varepsilon - \delta$, *i.e.*, for a fixed scalar spectral index $n_{\rm S}$, increasing ε, *i.e.*, increasing the value of $n_{\rm T}$, lowers δT_ℓ^2. Increasing $2\varepsilon - \delta$ (*i.e.*, decreasing $n_{\rm S}$) while ε (*i.e.*, $n_{\rm T}$) remains constant has the same effect.

In Figs. 14.3 (SCDM scenario) and 14.4 (ΛCDM scenario), we display the theoretical predictions of slow-roll inflation for some values of the slow-roll parameters. Without performing a χ^2 analysis, our main conclusion is that models exist that reasonably fit available CMB data, which were not included in the estimates of cosmological parameters before, in particular in the data analysis of the recent CMB maps [Lange *et al.*, 2001] [Balbi *et al.*, 2000]. This includes models with $n_{\rm S} - 1 \neq n_{\rm T}$ and non-negligible gravitational wave contributions. For instance, the model $\varepsilon = 0.02$, $\delta = 0.04$ (*i.e.*, $n_{\rm S} = 1$ and $n_{\rm T} = -0.04$) in the ΛCDM scenario, see Fig. 14.4 goes through all the MAXIMA-1 data points (at 1σ) but one. In this particular case, gravitational waves represent 33% of the power at $\ell = 2$, *i.e.*, $R_2 = 0.33$. This provides a good example which violates common (unjustified) beliefs about inflation. Let us stress that for both figures, we did not optimize the fits by exploring the 10% and 4% uncertainties in the calibration of the BOOMERanG and MAXIMA-1 results, nor did we optimize the fits by varying h and $\Omega_{\rm b}h^2$ or any other parameters.

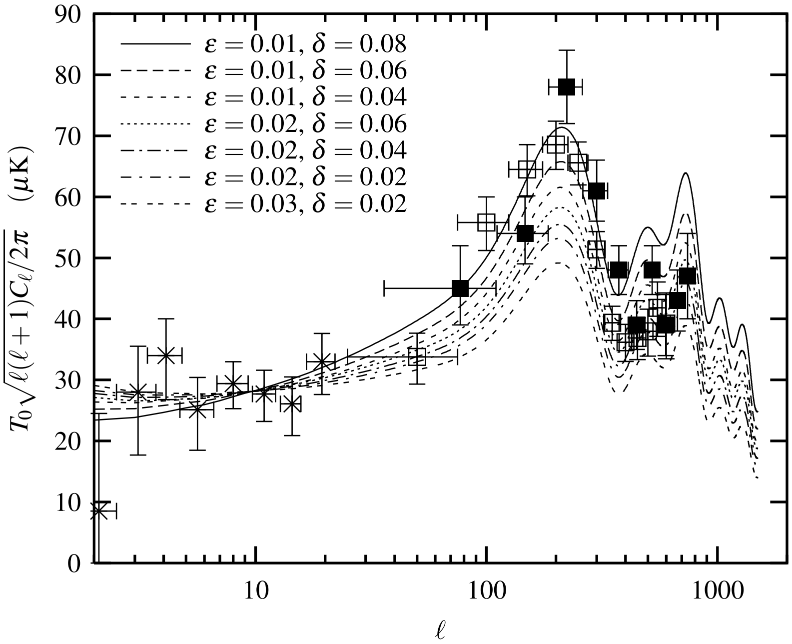


FIGURE 14.3 – CMB band powers for slow-roll inflation in the SCDM scenario for different values of the slow-roll parameters together with the data points of the COBE/DMR (crosses), BOOMERanG (open boxes) and MAXIMA-1 (filled boxes) experiments.

5 Conclusion

It is impossible to extract the values of cosmological parameters from the CMB anisotropy data without having assumptions on the initial spectra. For this purpose, slow-roll inflation is the best model presently known and is consistent with presently available data. Unfortunately, very often, only power-law inflation is considered. The difference between both models is in general significant, which implies that only a limited part of the space of parameters has been correctly studied so far. Data analysis has been based on unjustified prejudices that $n_{\rm S}$ may be greater than one in power-law inflation, that the relation $n_{\rm S} - 1 = n_{\rm T}$ must hold in general and that, gravitational waves are negligible in general. We want to stress that a subdominant effect (as the contribution of gravitational waves in many inflation models) is not necessarily negligible. Although very important on the conceptual side, the previous misconceptions were not crucial for the COBE/DMR experiment. For the next generation of measurements, which aim to extract cosmological parameters with a precision of a few percent, distinguishing power-law inflation from slow-roll inflation becomes mandatory. We think that a correct analysis of the CMB data should start from the spectra given in Eqns (**14.2.3–14.2.4**) and should be performed in the whole space of parameters ($0 < \varepsilon \ll 1, |\delta| \ll 1$). This should result in the determination of the best ε and δ. The present letter hopefully motivates more detailed tests of the most simple inflationary scenario: slow-roll inflation.

6 Acknowledgments

We wish to thank A. Lewis, M. Tegmark, and U. Seljak for helpful comments. D. J. S. thanks the Austrian Academy of Sciences for financial support.

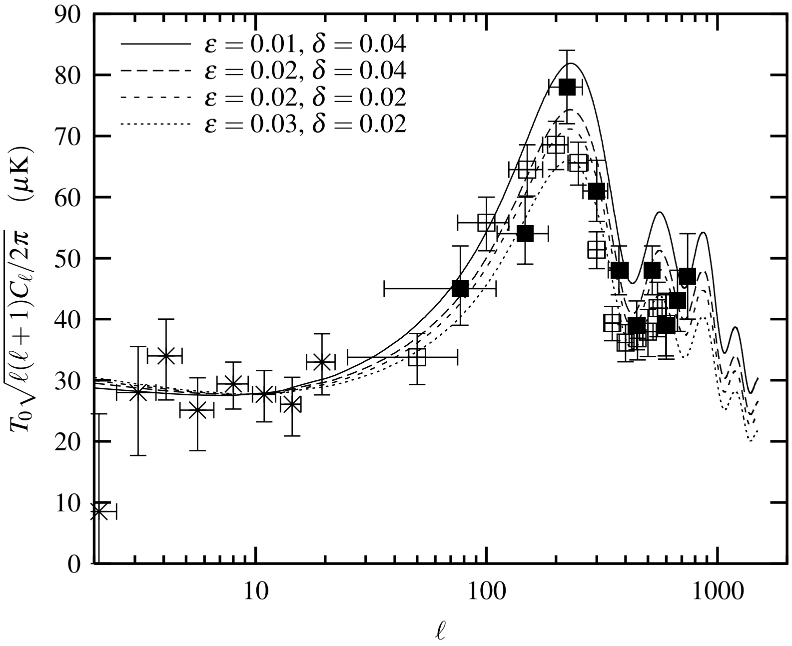


FIGURE 14.4 – As Fig. 14.3 but for the ΛCDM scenario.

Quatrième partie

Quintessence

Chapitre 15

Généralités sur les scénarios de quintessence

Sommaire

1 Le problème de la constante cosmologique en théorie des champs et en cosmologie

Depuis son introduction par Einstein en 1917, la constante cosmologique a eu un statut pour le moins fluctuant.

Elle a été initialement introduite pour avoir un Univers statique solution des équations d'Einstein, mais a peu après été abandonnée suite à la découverte de la récession des galaxies. Le paramètre de Hubble a été initialement surévalué d'un facteur ~ 10, ce qui donnait un Univers extrêmement jeune (moins de 2 milliard d'années), qui s'est avéré plus jeune que la Terre dont l'âge a été correctement évalué à partir des années 40 par diverses méthodes de géophysique ou de physique nucléaire. On a alors réintroduit l'hypothèse de la constante cosmologique pour résoudre de problème de l'âge de l'Univers à l'aide d'une phase récente d'accélération. Une fois le paramètre de Hubble mieux évalué, la constante cosmologique est à nouveau retombée dans l'oubli. Elle a été remise au goût du jour dans les années 60 suite aux premières statistiques sur les quasars qui semblaient indiquer un excès de quasars à un redshift d'environ 2. Ceci pouvait à nouveau s'expliquer à l'aide d'une constante cosmologique dans le cadre d'un "loitering Universe", dans lequel on a un Univers fermé qui connaît initialement une phase d'expansion en décélération, suivi d'une période arbitrairement longue pendant laquelle l'expansion est presque arrêtée, avant que celle-ci ne reprenne à cause de la constante cosmologique (*cf* annexe B). Ce modèle a été abandonné quand l'excès des quasars s'est avéré être dû à une série d'effets de sélection. Enfin, plus récemment, les mesures de luminosité des supernovae ont indiqué que celles-ci étaient moins lumineuses que prévu à haut redshift. Il existe plusieurs explications possibles à ce résultat, la plupart étant basées sur divers effets astrophysiques (absorption, rougissement, dépendance de la luminosité avec la métallicité, qui évolue avec le redshift, *etc*), mais l'interprétation la plus populaire à l'heure actuelle (en accord avec d'autres mesures, *cf* chapitre 1, §6) semble à nouveau être celle de la présence d'une constante cosmologique. Nous nous placerons donc dans l'hypothèse hardie qu'il s'agit là du dernier épisode de ce feuilleton, et nous allons nous intéresser à quelques une de ses conséquences cosmologiques...

D'un point de vue théorique, la constante cosmologique était initialement vue comme faisant partie "du membre de gauche" des équations d'Einstein : le lagrangien gravitationnel était de la forme

$$L \propto \int (R + \Lambda) \sqrt{|g|} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \,. \qquad \textbf{(15.1.1)}$$

Depuis, la tendance est plutôt à mettre la constante cosmologique dans le membre de droite des équations d'Einstein, *i.e.* considérer qu'il existe une forme de matière dont le tenseur énergie impulsion est de la forme

$$T_{\alpha\beta} \propto \Lambda \eta_{\alpha\beta} \,, \qquad \textbf{(15.1.2)}$$

correspondant à une équation d'état $P = -\rho$. La constante cosmologique est parfois appelée "énergie du vide", d'une part parce qu'on a $\rho \propto \Lambda$, et d'autre part parce que le tenseur énergie-impulsion (**15.1.2**) est invariant sous transformation de Lorentz.

Reste à trouver une forme de matière possédant un tel tenseur énergie-impulsion. Une telle forme de matière apparaît naturellement en théorie quantique des champs quand on s'intéresse à la contribution à la densité d'énergie due aux corrections radiatives des fluctuations quantiques du vide. Intuitivement, on s'attend à ce que chaque mode apporte une contribution du type $\frac{1}{2}\hbar\omega$ à l'énergie du vide, soit une contribution totale de l'ordre de $k_{\rm max}^4$, $k_{\rm max}$ représentant une coupure ultraviolette donnée en principe par la théorie. Il est *a priori* naturel de prendre l'échelle de Planck comme limite du spectre, ce qui implique que l'énergie du vide soit de l'ordre de l'énergie de Planck.

Observationnellement, l'énergie du vide est au plus égale à la densité critique, soit quelques 122 ordres de grandeur inférieure à l'énergie de Planck. Il faut donc trouver un mécanisme qui annule efficacement ces corrections radiatives. Un des candidats possibles est la supersymétrie dont on pourrait espérer que la présence de nouvelles symétries mette cette énergie du vide à zéro (c'est d'ailleurs une des motivations de la supersymétrie). Malheureusement, aucune particule supersymétrique n'a été détecté à ce jour, ce qui signifie que la supersymétrie est brisée à basse température. Du fait des mesures effectuées en accélérateur, la température de brisure de supersymétrie est probablement supérieure à $k_{\rm max}^{\rm SUSY} \gtrsim 1$ TeV, soit une contribution à l'énergie du vide encore 60 ordres de grandeurs trop élevée...

Il n'existe pas à l'heure actuelle d'explication naturelle à ce problème. Il est en général supposé que par l'intermédiaire d'un mécanisme inconnu, il y a annulation totale entre tous les termes qui pourraient contribuer à l'énergie de vide. Nous ne proposons pas ici de donner un tel mécanisme, et nous supposerons qu'il en existe effectivement un. Au lieu de cela, nous allons nous intéresser à une autre forme de matière dont le tenseur énergie-impulsion pourrait ressembler à celui d'une constante cosmologique. Nous avons vu dans la partie III qu'un champ scalaire pouvait posséder une équation d'état $P = -\rho$. C'est donc un scénario basé sur un champ scalaire, appelé *quintessence* que nous allons étudier[1].

[1] Un peu d'Histoire... Le terme de quintessence a été introduit il y a plus de 2000 ans par les philosophes grecs, qui

2 Quelques solutions particulières à l'équation de Klein-Gordon

Historiquement, l'idée de la quintessence est venue d'une tentative de trouver une forme de matière dont le paramètre de l'équation d'état ω pouvait être négatif et constant au cours du temps. Le candidat naturel était un champ scalaire, dont le paramètre de l'équation d'état pouvait varier entre -1 et 1. Un champ scalaire ϕ dérive d'un lagrangien du type

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi - V(\phi) \ . \tag{15.2.1}$$

On en déduit son tenseur énergie-impulsion par la formule habituelle

$$T_{\alpha\beta} = D_\alpha \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D^\beta \phi} - g_{\alpha\beta} \mathcal{L} \ . \tag{15.2.2}$$

Par analogie à un fluide parfait dont le tenseur énergie-impulsion s'écrit

$$T_{\alpha\beta} = (P + \rho) u_\alpha u_\beta - P g_{\alpha\beta} \ , \tag{15.2.3}$$

on peut définir une densité d'énergie ρ , une pression P et une quadri-impulsion u_α par :

$$\rho = \frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi + V, \tag{15.2.4}$$

$$P = \frac{1}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi - V, \tag{15.2.5}$$

$$u_\alpha = -\frac{D_\alpha \phi}{\sqrt{D_\mu \phi D^\mu \phi}} \ . \tag{15.2.6}$$

Dans un espace homogène et isotrope, ces trois quantités se réécrivent

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + V \ , \tag{15.2.7}$$

$$P = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - V \ , \tag{15.2.8}$$

$$u_\alpha = (a, \mathbf{0}) \ . \tag{15.2.9}$$

Le champ scalaire obéit à l'équation de Klein-Gordon, obtenue en faisant $D_\mu T^{\mu 0} = 0$, ou en variant directement le lagrangien par rapport au champ. On trouve

$$\Box \phi + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} = 0 \ , \tag{15.2.10}$$

ont été parmi les premiers du monde occidental à tenter de classifier les différentes formes de matière. C'est ainsi qu'est né le concept des quatre éléments : le feu, la terre, l'air et l'eau. Fins amateurs de géométrie, les grecs ont ensuite eu l'idée d'associer ces quatre éléments à des objets géométriques. Pour diverses raisons esthétiques, ce sont les solides de Platon qui ont été pressentis pour décrire les quatre éléments. En effet, on ne connaissait à cette époque-là que quatre des cinq solides de Platon. Le tétraèdre fut associé au feu, le cube à la terre, l'octaèdre à l'air et l'icosaèdre à l'eau. Quand plus tard fut découvert le cinquième solide de Platon (le dodécaèdre), les savants de l'époque eurent l'idée géniale d'en déduire qu'il *devait* exister un cinquième élément, qui avait jusqu'ici échappé à l'observation. Cet élément a naturellement été appelé quintessence. Le raisonnement pourrait prêter à sourire, mais il s'agit en fait d'un moment très important dans l'histoire des sciences : on a pour la première fois un réel échange entre théorie et expérience, l'expérience suggérant dans un premier temps une théorie (*i.e.* une *représentation* d'objets concrets à l'aide d'objets mathématiques *a priori* plus abstraits), et les développements ultérieurs de la théorie faisant ensuite des prédictions observationnelles insoupçonnées jusqu'alors [Lochak, 1994]. En cosmologie moderne, les quatre éléments sont bien sûr les photons, les baryons, les neutrinos et la matière noire.

qui se réécrit en un espace FLRW,

$$\ddot{\phi} + 2\mathcal{H}\dot{\phi} + a^2 V'(\phi) = 0\,, \qquad \textbf{(15.2.11)}$$

où on a posé $V' \equiv \mathrm{d}V/\mathrm{d}\phi$.

Revenons au problème de trouver s'il est possible d'avoir ω_ϕ constant. On suppose pour cela que le champ est sous dominant (*i.e.* $\rho_\phi \ll \rho_\mathrm{B}$). Après quelques manipulations, on trouve que la condition nécessaire et suffisante est alors

$$\Gamma \equiv \frac{VV''}{V'^2} = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}\,, \qquad \textbf{(15.2.12)}$$

auquel cas on a

$$\omega_\phi = -1 + \frac{1+\omega_\mathrm{B}}{2\Gamma - 1}\,. \qquad \textbf{(15.2.13)}$$

La solution de l'équation (**15.2.12**) est simple dans le cas où $\Gamma = 1$. On a alors

$$V(\phi) \propto \exp(\lambda\phi)\,, \qquad \textbf{(15.2.14)}$$

et on a

$$\omega_\phi = \omega_\mathrm{B}\,, \qquad \textbf{(15.2.15)}$$

c'est-à-dire que la densité d'énergie du champ décroît à la même vitesse que celle du reste de l'Univers. Le cas où Γ est différent de 1 est plus intéressant. La solution à (**15.2.12**) est alors

$$V(\phi) \propto \phi^{-\alpha}\,, \qquad \textbf{(15.2.16)}$$

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{\alpha}\,, \qquad \textbf{(15.2.17)}$$

$$\omega_\phi = \frac{\alpha\omega_\mathrm{B} - 2}{\alpha+2} = -1 + \frac{\alpha(1+\omega_\mathrm{B})}{\alpha+2} = \omega_\mathrm{B} - \frac{2(1+\omega_\mathrm{B})}{\alpha+2}\,. \qquad \textbf{(15.2.18)}$$

La dernière équation nous assure que quand α est supérieur à -1, le paramètre de l'équation d'état du champ est comprise entre -1 et ω_B. Nous allons voir maintenant que cette solution particulière est stable. Cela justifie le terme de “tracking solution” pour la désigner.

3 Stabilité des “tracking solutions”

La solution que nous venons de trouver implique que le rapport de l'énergie cinétique à l'énergie potentielle est fixé :

$$\frac{K}{V} = \frac{1+\omega_\phi}{1-\omega_\phi}\,. \qquad \textbf{(15.3.1)}$$

Dans le cas où les conditions initiales du champ n'obéissent pas à cette contrainte, il convient de vérifier s'il peut rejoindre cette solution particulière ou pas. De même, il est intéressant de voir comment va évoluer le champ si l'équation d'état de la matière change au cours du temps. Considérons donc que le champ suit l'équation

$$\phi(\eta) = (u+1)\phi_0(\eta)\,, \qquad \textbf{(15.3.2)}$$

où $\phi_0(\eta)$ est la solution particulière telle que $\omega_\phi = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$. La quantité u suit alors l'équation

$$\ddot{u}+2\left(\frac{\dot{\phi}_0}{\phi_0}+\mathcal{H}\right)\dot{u}+a^2\left(V''(\phi_0)-\frac{V'(\phi_0)}{\phi_0}\right)u=0\,, \tag{15.3.3}$$

qu'on peut réécrire

$$\ddot{u}+2\left(\frac{\dot{\phi}_0}{\phi_0}+\mathcal{H}\right)\dot{u}+(\alpha+2)\left(\frac{\ddot{\phi}_0}{\phi_0}+2\mathcal{H}\frac{\dot{\phi}_0}{\phi_0}\right)u=0\,, \tag{15.3.4}$$

Cette équation admet des solutions décroissantes dès que

$$\omega_{\mathrm{B}} > -\frac{1}{3}\,, \tag{15.3.5}$$

$$\alpha > -2\,. \tag{15.3.6}$$

c'est-à-dire que la solution est stable dès que $\omega_\phi < \omega_{\mathrm{B}}$ et que l'Univers est dominé par de la matière ordinaire. Comme le champ rejoint son attracteur et que sa densité d'énergie décroît moins vite que le reste de l'Univers, cela nous assure que le champ finit par dominer l'Univers au bout d'un certain temps. L'interprétation des mesures de supernovae est alors que nous vivons précisément à l'époque où un tel champ se met à dominer.

4 Motivation et contrainte supplémentaire sur le potentiel

De façon phénoménologique, on peut cependant mettre une contrainte supplémentaire sur les potentiels. Remarquons d'abord que si le champ de quintessence commence à dominer aujourd'hui, on a d'une part

$$\rho_{\mathrm{Q}} \sim V \sim \frac{\dot{\phi}^2}{a^2} \sim \rho_{\mathrm{crit}}\,. \tag{15.4.1}$$

D'autre part, d'après l'équation de Klein-Gordon, on a également

$$\frac{\mathcal{H}}{a}\frac{\dot{\phi}}{a} \sim V' \sim \frac{V}{\phi}\,, \tag{15.4.2}$$

soit, d'après la définition de la densité critique,

$$\sqrt{\kappa\rho_{\mathrm{Q}}\rho_{\mathrm{crit}}} \sim \frac{V}{\phi}\,. \tag{15.4.3}$$

D'après (**15.4.1**), ceci peut se réécrire

$$\phi \sim \kappa^{-\frac{1}{2}} \sim M_{\mathrm{Pl}}\,, \tag{15.4.4}$$

c'est-à-dire que le champ commence à dominer quand il atteint la masse de Planck. Quand le potentiel est en loi de puissance inverse, notons

$$V(\phi) = \frac{\Lambda^{4+\alpha}}{\phi^\alpha}\,. \tag{15.4.5}$$

On a alors

$$\left(\frac{\Lambda}{M_{\rm Pl}}\right)^{4+\alpha} \sim \frac{\rho_{\rm crit}}{\rho_{\rm Pl}} , \qquad \textbf{(15.4.6)}$$

soit

$$\Lambda[\mathrm{GeV}] \sim 10^{19-\frac{122}{4+\alpha}} . \qquad \textbf{(15.4.7)}$$

L'échelle d'énergie Λ doit être supérieure à celles testées en accélérateur. Cela implique que $\alpha \gtrsim 4$. Si on veut retrouver l'échelle de Grand Unification, il faut prendre $\alpha \sim 26$.

Il semble assez difficile d'un point de vue de physique des hautes énergies de s'accomoder naturellement d'un tel potentiel, bien que divers modèles aient déjà été proposé. Un moyen de trancher la question est tout simplement de regarder les conséquences cosmologiques de ces potentiels, et de voir si elles sont distinguables des modèles avec constante cosmologique. Dans un premier temps, nous allons regarder l'évolution des ondes gravitationnelles en présence de ce champ scalaire (chapitre 16), puis nous étudierons l'évolution des perturbations de densité (chapitre 17), problème qui sera légèrement plus compliqué puisque nous devrons entre autres étudier les perturbations du champ scalaire lui-même.

Chapitre 16

Quintessence et ondes gravitationnelles (article)

Sommaire

L'évolution des perturbations cosmologiques dans un scénario de quintessence est compliquée par le fait que le champ de quintessence lui-même possède des fluctuations. Les fluctuations du champ sont uniquement de type scalaire, et on pourrait penser que les modes tensoriels ne sont pas affectés par la présence de ce champ. Cependant les ondes gravitationnelles peuvent avoir un comportement non trivial en présence de quintessence. Nous en avons étudié quelques aspects dans un article paru dans *Physical Review D* [Riazuelo & Uzan, 2000] reproduit dans la suite de ce chapitre.

La simplicité des équations des modes tensoriels permet de regarder facilement leur évolution dans des scénarios où le champ de quintessence est non minimalement couplé à la métrique (équation **16.2.2**). L'évolution n'est en fait pas beaucoup affectée par la présence de ce couplage (équation **16.2.20**), mais les prédictions observationnelles sont différentes car la dynamique de l'expansion est profondément affectée par la présence de ce couplage, qui d'ailleurs fait varier la "constante" de Newton $\mathcal{G}$, ce qui permet de mettre des contraintes sur ces modèles, *cf* équations (**16.5.1**, **16.5.2**). Ce changement dans la dynamique de l'expansion a pour principale conséquence de modifier la relation taille angulaire-redshift, ce qui se traduit par un décalage de la série de pics Doppler dans le spectre d'anisotropies du rayonnement fossile vers les petites échelles (figure 16.8). La raison principale à cela est que le paramètre de l'équation d'état du champ de quintessence peut prendre des valeurs beaucoup plus basses qu'habituellement (jusqu'à ~ -3, *cf* figure 16.6).

Indépendamment du couplage avec la gravité, les scénarios de quintessence permettent quelques modifications dans la chronologie de l'Univers primordial. En effet, le paramètre de l'équation d'état du champ peut aller jusqu'à 1, contre $\frac{1}{3}$ pour la radiation. Il est donc possible qu'à une époque reculée le champ de quintessence domine l'Univers en régime de "roulement rapide", la densité d'énergie totale pouvant alors décroître comme a^{-6}. Ceci a des effets sur le spectre d'ondes gravitationnelles. En effet, contrairement aux ondes électromagnétiques, les ondes gravitationnelles ne sont pas toujours amorties par l'expansion. Elles ne le sont que quand la longueur d'onde est plus petite que le rayon de Hubble (*cf* équation **4.4.7**). Cela a pour conséquence que le spectre d'ondes gravitationnelles se déforme au cours du temps, contrairement à un spectre de corps noir, dont seule la température change, comme nous l'avions remarqué au chapitre 5, §2.4. Notamment, plus les modes entrent "lentement" dans le rayon de Hubble, plus ils sont amortis. La raison à cela est que le temps que le mode a passé à l'intérieur du rayon de Hubble est d'autant plus important que les modes entrent lentement dans le rayon de Hubble, c'est-à-dire que l'expansion décélère peu. Ainsi, les ondes gravitationnelles sont plus amorties dans l'ère de matière que dans l'ère de radiation, et plus dans l'ère de radiation que dans une ère dominée par un champ scalaire en roulement rapide. Une telle ère peut donc donner lieu à un spectre d'ondes gravitationnelles présentant plus de puissance aux petites échelles (figure 16.9), rendant sa détection éventuellement moins difficile.

Quelques autres aspects sur la dynamique des ondes gravitationnelles sont abordés, notamment l'amortissement qu'elles subissent par le (faible) couplage à la matière relativiste (équation **16.4.8** et figure 16.1). Des contraintes sur les modèles où le champ de quintessence domine initialement sont dérivées pour rester compatibles avec les résultats de la nucléosynthèse (figure 16.10), qui impliquent que le champ de quintessence ne domine pas à ce moment-là et que la densité d'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles soit faible devant celle des photons.

Quintessence and Gravitational Waves

Alain Riazuelo[1*] and Jean-Philippe Uzan[2,3†]

[1] *Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, UMR 8629 du Centre National de la Recherche Scientifique, Observatoire de Paris, F-92195 Meudon Cedex (France)*

[2] *Laboratoire de Physique Théorique, UMR 8627 du Centre National de la Recherche Scientifique, Université Paris XI, Bât. 210, F-91405 Orsay Cedex (France)*

[3] *Département de Physique Théorique, Université de Genève, 24 quai E. Ansermet, CH-1211 Genève 4 (Switzerland)*

Abstract : We investigate some aspects of quintessence models with a non-minimally coupled scalar field and in particular we show that it can behave as a component of matter with $-3 \lesssim P/\rho \lesssim 0$. We study the properties of gravitational waves in this class of models and discuss their energy spectrum and the cosmic microwave background anisotropies they induce. We also show that gravitational waves are damped by the anisotropic stress of the radiation and that their energy spectrum may help to distinguish between the inverse power law potential and supergravity motivated potential. We finish with a discussion on the constraints arising from their density parameter $\Omega_{\rm GW}$.

PACS numbers : 98.80.Cq

1 Introduction

Recent astrophysical and cosmological observations such as the luminosity distance-redshift relation for supernovae type Ia [Riess *et al.*, 1998] [Garnavich *et al.*, 1998a] [Perlmutter *et al.*, 1998], the recent observations of the cosmic microwave background temperature anisotropies [Melchiorri *et al.*, 2000], gravitational lensing [Mellier, 1999] and velocity fields [Juszkiewicz *et al.*, 2000] tend to indicate that a large fraction of the matter of the Universe today is composed of matter with negative pressure (see, *e.g.*, [Efstathiou, 2000] for a comparison of the different observations). Recent analyzes [Efstathiou, 2000] [Perlmutter *et al.*, 1999b] seem to indicate that the energy density ρ and the pressure P of this fluid satisfies

$$-1 \leq P/\rho \leq -0.6\,, \tag{16.1.1}$$

which is compatible with a cosmological constant Λ for which $P/\rho = -1$ (see also [Caldwell, 2002] for arguments in favor of $P/\rho < -1$). A typical value of $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ for its energy density in units

*Email addres: `Alain.Riazuelo@obspm.fr`
†Email addres: `Jean-Philippe.Uzan@th.u-psud.fr`

of the critical density of the Universe corresponds to an energy scale of order 5×10^{-47} GeV^4 which is very far from what is expected from high energy physics; this is the well known cosmological constant problem [Weinberg, 1972]. To circumvent this problem different solutions have been proposed starting from the idea of a dynamical cosmological constant [Coble *et al.*, 1997] and leading to the class of models known as *quintessence* [Caldwell *et al.*, 1998], where a spatially homogeneous scalar field ϕ is rolling down a potential decreasing when ϕ tends to infinity. An example of such a potential which has been widely studied is the inverse power law potential. It can be obtained from some high energy physics models, *e.g.*, where supersymmetry is broken through fermion condensates [Binétruy, 1999]. Recently, it has been argued [Brax & Martin, 1999] that supergravity has to be taken into account since today one expects the scalar field to be of order of the Planck mass $M_{\rm Pl}$ and corrections to the potential appear at this energy. This leads to a better agreement with observations [Brax & Martin, 2000].

An important point about this family of models is the existence of scaling solutions [Wetterich, 1988] [Ratra & Peebles, 1988] (referred to as *tracking solutions*), *i.e.*, such that ϕ evolves as the scale factor of the Universe at a given power. These solutions are attractors of the dynamical system describing the evolution of the scale factor and of the scalar field. This implies that the present time behavior of the field is almost independent of its initial conditions [Steinhard *et al.*, 1999] [Huey *et al.*, 1999]. This property allows to address [Zlatev *et al.*, 1999] (i) the *coincidence problem*, *i.e.*, the fact that ϕ starts to dominate today and (ii) the *fine tuning problem*, *i.e.*, the fact that one does not have to fine tune the initial condition of the field ϕ.

One of us extended these models to include a non-minimal coupling $\xi \bar{R} f(\phi)$ between the scalar field and the scalar curvature $\bar{R}$ [Uzan, 1999]. Such a coupling term appears, *e.g.*, when quantizing fields in curved spacetime [Birrell & Davies, 1982] [Ford, 1987] and in multidimensional theories [Maeda, 1986] [Accetta *et al.*, 1985] [Lucchin *et al.*, 1986]. It was shown that when $f(\phi) = \phi^2/2$ tracking solutions still exist [Uzan, 1999] and this result was generalized [Amendola, 1999] to any coupling function f and potential V satisfying $V(\phi) \propto f^n(\phi)$. However, such a coupling is constrained by the variations of the constants of nature [Carroll, 1998] which fix bounds on ξ [Chiba, 1999]. A way to circumvent this problem is to consider quintessence models in the framework of scalar-tensor theories [Bartolo & Pietroni, 2000] [Bertolami & Martins, 2000] where a double attractor mechanism can occur, *i.e.*, of the scalar-tensor theory towards general relativity and of the scalar field ϕ towards its tracking solution.

Among all the possible observations of cosmology, gravitational waves give an insight on epochs where there was a variation of the background dynamics since every such variation affects the shape of the stochastic graviton background spectrum [Grishchuk, 1974] [Grishchuk, 1988]. We can then view our Universe as containing a sea of stochastic gravitational waves from primordial origin, as predicted by most models of structure formations such as inflation [Grishchuk, 1974] [Grishchuk, 1988] (see also [Allen, 1997] for a review) and topological defects scenarios [Vilenkin & Shellard, 1994]. Their spectrum extends typically from 10^{-18} Hz (for wavelengths of order of the size of the Hubble radius today) to $\simeq 10^{10}$ Hz (the smallest mode that has been inflated out of the Hubble radius) and they could be detected or constrained by coming experiments such as the Laser Interferometric Gravitational Wave Observatory (LIGO) [Abramovici *et al.*, 1992], VIRGO [Bradaschia *et al.*, 1990] (at $\simeq 10^2$ Hz), and the Laser Interferometer Space Antenna (LISA) [Jafry *et al.*, 1994] (at $\simeq 10^{-4}$ Hz). Gravitational waves, which are perturbations in the metric of the Universe have also an effect on the cosmic microwave (CMB) temperature anisotropy [Rubakov *et al.*, 1982] [Starobinsky, 1983] [Abbott & Wise, 1984a] [White, 1992] [Turner *et al.*, 1993] and polarization [Hu & White, 1997c] allowing to extract information on their amplitude from the measure of the CMB anisotropies. For instance, bounds on the energy density spectrum of these cosmological gravitational waves in units of the critical density, $\Omega_{\rm GW}$, have been obtained from the CMB [Rubakov *et al.*, 1982] [Starobinsky, 1983] [Abbott & Wise, 1984a]

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}\ln\omega}\right|_{10^{-18}\,\mathrm{Hz}} \lesssim 10^{-10}\,.$$

Gravitational waves are also a very good probe of the conditions in the early Universe since they decouple early in its history and can help, *e.g.*, testing the initial conditions of ϕ. An example was put forward by Giovannini [Giovannini, 1999a] [Giovannini, 1999c] who showed that in a class of quintessential inflation models [Peebles & Vilenkin, 1999] there was an era dominated by the scalar field ϕ before the radiation dominated era which implies that a large part of the gravitational wave energy of order $\Omega_{\mathrm{GW}} \simeq 10^{-6}$ (about eight orders of magnitude higher than for standard inflation) was in the GHz region. This may happen in any scenario where the inflation ends with a kinetic phase [Ford, 1987] [Spokoiny, 1993] or when the dominant energy condition is violated [Giovannini, 1999b]. On the other hand, the CMB temperature fluctuations give information on the history of the gravitational waves in between the last scattering surface and today through the integrated Sachs-Wolfe effect, whereas the polarization of the CMB radiation gives mainly information on the gravitational waves at decoupling. These three observables (energy spectrum, CMB temperature and polarization anisotropies) are thus complementary and we aim to present here a global study of the cosmological properties of the gravitational waves.

The goals of this article are (i) to study in more details the cosmology with a non-minimal quintessence field and (ii) to study gravitational waves in this class of models. In §2 we set up the general framework and describe the two potentials we shall consider. In §3 we introduce and define the observable quantities associated with the gravitational waves: their energy density spectrum and their imprint on the CMB radiation anisotropies and its polarization. In §4, we point out the general mechanism of damping by the anisotropic stress of the radiation. In §5 we discuss the parameters of the problem and investigate the tuning of the potential parameters; we also describe the evolution of the background spacetime and show that a non-minimally coupled quintessence field is a candidate for a ($\omega < -1$)-matter. In §7 we describe the main properties of the gravitational waves. We finish in §8 by presenting numerical results and we underline the complementarity of the different observational quantities.

This work gives a detailed study of the observational effects of gravitational waves in the framework of quintessence, including some recent developments, and allowing for non-minimal coupling. This extends the work on quintessential inflation [Giovannini, 1999a] by including the effects on the CMB. It also extends the studies on the cold dark matter model with a cosmological constant (ΛCDM) [Melchiorri *et al.*, 1999] to quintessence and is, as far as we know, a more complete study of the effect of gravitational waves on the CMB polarization. We hope to show that a joint study of the gravitational wave detection experiments [Abramovici *et al.*, 1992] [Bradaschia *et al.*, 1990] [Jafry *et al.*, 1994] of the CMB experiments [Melchiorri *et al.*, 2000] [MAP, `http`] [PLANCK, `http`] and of the polarization experiments [PLANCK, `http`] can lead to a better determination of their properties.

2 General framework

2.1 Background spacetime

We consider a Universe described by a Friedmann-Lemaître model with Euclidean spatial sections so that the metric takes the form

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left[-\mathrm{d}\eta^2 + \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right] \equiv \bar{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu\,, \qquad \mathbf{(16.2.1)}$$

where a is the scale factor and η the conformal time. Greek indices run from 0 to 3 and Latin indices from 1 to 3.

We assume that the matter content of the Universe can be described by a mixture of matter and radiation (mainly baryons, CDM, photons and three families of massless, nondegenerate neutrinos) and a scalar field ϕ non-minimally coupled to gravity evolving in a potential $V(\phi)$ that will be described later. The action for this system is

$$S = \int \left[\frac{\bar{R}}{2\kappa} - \xi \bar{R} f(\phi) - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) + \mathcal{L}_{\rm mat} \right] \sqrt{-\bar{g}}\, \mathrm{d}^4x\,, \tag{16.2.2}$$

with $\kappa \equiv 8\pi\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ being the Newton constant, and where $\mathcal{L}_{\rm mat}$ is the Lagrangian of the ordinary matter which is uncoupled to the scalar field and $f(\phi)$ is an arbitrary function of the scalar field that will be specified later. The action (**16.2.2**) can be rewritten under the interesting form

$$S = \int \left[\frac{\bar{R}}{2\kappa_{\rm eff}[\phi]} - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) + \mathcal{L}_{\rm mat} \right] \sqrt{-\bar{g}}\, \mathrm{d}^4x\,, \tag{16.2.3}$$

with

$$\kappa_{\rm eff}[\phi] \equiv \frac{\kappa}{1 - 2\xi\kappa f(\phi)}\,. \tag{16.2.4}$$

The stress-energy tensor of the scalar field is obtained by varying its Lagrangian $[-\xi\bar{R}f(\phi) - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)]$ to get

$$\begin{aligned} T^{(\phi)}_{\mu\nu} = {} & \bar{\nabla}_\mu\phi\bar{\nabla}_\nu\phi - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\nabla}_\lambda\phi\bar{\nabla}^\lambda\phi - V(\phi)\bar{g}_{\mu\nu} \\ & + 2\xi\left[\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\nabla}_\lambda\phi\bar{\nabla}^\lambda\phi - \bar{\nabla}_\mu\phi\bar{\nabla}_\nu\phi - \phi\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\phi + \phi\Box\phi\bar{g}_{\mu\nu} + \bar{G}_{\mu\nu}f(\phi)\right]\,, \end{aligned} \tag{16.2.5}$$

where $\bar{G}_{\mu\nu}$ is the Einstein tensor of the metric $\bar{g}_{\mu\nu}$, $\bar{\nabla}$ its covariant derivative and $\Box \equiv \bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}^\mu$.

The equations governing the evolution of the background spacetime are then obtained by varying Eq. (**16.2.2**) with respect to $\bar{g}_{\mu\nu}$, ϕ and the ordinary matter fields to get, respectively, the Friedmann equations, the Klein-Gordon equation, and the fluid conservation equation

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa a^2}{3}(\rho + \rho_\phi)\,, \tag{16.2.6}$$

$$\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}^2 = -\frac{\kappa a^2}{2}(\rho + P + \rho_\phi + P_\phi)\,, \tag{16.2.7}$$

$$\ddot{\phi} = -2\mathcal{H}\dot{\phi} - a^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} - 6\xi(2\mathcal{H}^2 + \dot{\mathcal{H}})\,, \tag{16.2.8}$$

$$\dot{\rho} = -3\mathcal{H}(\rho + P)\,. \tag{16.2.9}$$

An overdot denotes a derivative with respect to the conformal time and $\mathcal{H} \equiv \dot{a}/a$ is the comoving Hubble parameter. The matter fluid energy density ρ and pressure P are assumed to satisfy the equation of state $P = \omega\rho$. The factor ω varies from $1/3$ deep in the radiation era to 0 in the matter era. The scalar field energy density ρ_ϕ and pressure P_ϕ are obtained from its stress-energy tensor (**16.2.5**) and are then explicitely given by

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + V(\phi) + \frac{2\xi}{a^2}\left[3\mathcal{H}^2 f(\phi) + 3\mathcal{H}\dot{f}(\phi)\right]\,, \tag{16.2.10}$$

$$P_\phi = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} - V(\phi) - \frac{2\xi}{a^2}\left[(2\dot{\mathcal{H}} + 3\mathcal{H}^2)f(\phi) + \mathcal{H}\dot{f}(\phi) + \ddot{f}(\phi)\right]\,. \tag{16.2.11}$$

We stress that the conservation equation derived from (**16.2.5**) reduces to the Klein-Gordon equation (**16.2.8**). For each matter component, X say, we introduce the density parameter Ω_X defined as

$$\Omega_X \equiv \frac{\kappa a^2 \rho_X}{3\mathcal{H}^2} . \tag{16.2.12}$$

To completely specify the model, we have to fix the potential $V(\phi)$. Following our previous work [Uzan, 1999] and as discussed in the introduction we choose it to behave as

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\Lambda}{\phi}\right)^\alpha , \quad \alpha > 0 . \tag{16.2.13}$$

where Λ is an energy scale. As shown in [Uzan, 1999], such a potential leads to the existence of tracking solutions whatever the value of ξ and for which the scalar field behaves as a barotropic fluid of equation of state (as long as the background fluid dominates)

$$P_\phi = \omega_\phi \rho_\phi \quad \text{with} \quad \omega_\phi = -1 + \frac{\alpha(1+\omega)}{\alpha+2} . \tag{16.2.14}$$

We also consider another class of potentials arising when one takes supergravity into account [Brax & Martin, 1999] [Brax & Martin, 2000] and given by

$$\widetilde{V}(\phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\Lambda}{\phi}\right)^\alpha \exp(\kappa\phi^2/2) , \quad \alpha > 0 . \tag{16.2.15}$$

The effect of the exponential term is important only at late time so that the scaling properties of the tracking solution are not affected during the matter and radiation era. However when the field starts to dominate it leads to its stabilization [Brax & Martin, 2000] which has an effect on the effective equation of state of the scalar fluid.

2.2 Gravitational waves

In this article, we want to focus on the properties of the gravitational waves which are tensorial perturbations. At linear order, the metric is expanded as

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + f_{\mu\nu} , \tag{16.2.16}$$

where $f_{\mu\nu}$ is a transverse traceless (TT) perturbation, *i.e.*, satisfying

$$f_{00} = f_{0i} = 0 , \quad f_{\mu\nu}\bar{g}^{\mu\nu} = 0 , \quad \bar{\nabla}_\mu f^{\mu\nu} = 0 . \tag{16.2.17}$$

It is also useful to define the perturbation $h_{\mu\nu}$ by

$$f_{\mu\nu} \equiv a^2 h_{\mu\nu} , \tag{16.2.18}$$

which, from Eq. (**16.2.17**), satisfies

$$h_{00} = h_{0i} = 0 , \quad h_{kl}\delta^{kl} = 0 , \quad \partial_k h^{kl} = 0 . \tag{16.2.19}$$

The equation of evolution of h_{kl} is obtained by considering the TT part of the perturbed Einstein equation (see, *e.g.*, [Kodama & Sasaki, 1984]) which leads to

$$\ddot{h}_{kl} + 2\left[\mathcal{H} - \kappa_{\text{eff}}\xi \dot{f}(\phi)\right]\dot{h}_{kl} - \Delta h_{kl} = 2\kappa P a^2 \bar{\pi}_{kl} , \tag{16.2.20}$$

where $\Delta \equiv \partial_i \partial^i$ is the Laplacian and where the anisotropic stress tensor of the matter $\bar{\pi}_{kl}$ is defined as the tensor component of the matter stress-energy tensor

$$\delta T^i_j \equiv P \bar{\pi}^i_j \,, \quad \bar{\pi}^k_k = \partial_i \bar{\pi}^i_k = 0 \,. \qquad \textbf{(16.2.21)}$$

The anisotropic stress of the matter fluid is dominated by the contribution of the neutrinos and of the photons and its form can be obtained by describing these relativistic fluids by a Boltzmann equation [Uzan, 1998a] (see §3.2 below).

3 Observational quantities

The goal of this section is to define the observable quantities related to the gravitational waves. We start by reviewing the computation of the energy density ρ_{GW} of a stochastic background of gravitational waves and finish by describing their effect on the CMB radiation, namely we present the computation of the coefficients C_ℓ of the development of the angular correlation function of the CMB temperature anisotropy and polarization.

3.1 Gravitational waves energy density

The definition of the gravitational waves stress-energy tensor $t_{\mu\nu}$ can be found in, *e.g.*, [Weinberg, 1972] in the case of a Minkowski background spacetime, in, *e.g.*, [Ford & Parker, 1977] in the case of a Friedmann-Lemaître spacetime and a general discussion can be found in, *e.g.*, [Misner *et al.*, 1973].

To define the gravitational waves stress-energy tensor, we have to expand the Einstein-Hilbert action (**16.2.3**) to second order in the perturbation $f_{\mu\nu}$, which implies to develop the curvature scalar R at second order in the perturbations (see [Weinberg, 1972] [Ford & Parker, 1977] [Misner *et al.*, 1973]) to get (up to divergence terms and forgetting the contribution arising from $\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}$)

$$\delta^{(2)} S = - \int \frac{1}{4\kappa_{\mathrm{eff}}[\phi]} \bar{\nabla}_\mu f_{\alpha\beta} \bar{\nabla}^\mu f^{\alpha\beta} \sqrt{-\bar{g}}\, \mathrm{d}^4 x \,. \qquad \textbf{(16.3.1)}$$

This expression is valid whatever the background metric as long as $f_{\mu\nu}$ is a transverse traceless perturbation. Note that contrarily to the "standard" situation, κ now depends on ϕ because of the non-minimal coupling with the scalar field. Using the fact that $\bar{\nabla}_\mu f_{\alpha\beta} = a^2 \partial_\mu h_{\alpha\beta}$ we can rewrite the previous expression as

$$\delta^{(2)} S = - \int \frac{1}{4\kappa_{\mathrm{eff}}[\phi]} \partial_\mu h_{kl} \partial^\mu h^{kl} \sqrt{-\bar{g}}\, \mathrm{d}^4 x \,, \qquad \textbf{(16.3.2)}$$

which assumes a Friedmann-Lemaître background and the decomposition (**16.2.19**). Now, we decompose h_{kl} on its two polarizations as

$$h_{kl} = \sum_{\lambda=+,\times} h^{(\lambda)}(\eta, \boldsymbol{x}) \varepsilon^{(\lambda)}_{kl}(\boldsymbol{x}) \,, \qquad \textbf{(16.3.3)}$$

where $\varepsilon^{(\lambda)}_{kl}(\boldsymbol{x})$ is the polarization tensor defined as

$$\varepsilon^{(\lambda)}_{kl}(\boldsymbol{x}) \equiv \left(e^1_k e^1_l - e^2_k e^2_l\right) \delta^\lambda_\times + \left(e^1_k e^2_l + e^1_l e^2_k\right) \delta^\lambda_+ \qquad \textbf{(16.3.4)}$$

for a wave propagating along the direction $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ and where $(\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3)$ is a local orthonormal basis. Since this basis and the polarization tensor satisfy

$$e_i^a e_b^i = \delta_b^a \,, \quad \varepsilon_{kl}^{(\lambda)} \varepsilon_{(\lambda')}^{kl} = 2\delta_{\lambda'}^{\lambda} \,, \tag{16.3.5}$$

we can rewrite the action (**16.3.2**) of the graviton as

$$\delta^{(2)} S = -\sum_{\lambda} \int \frac{1}{2\kappa_{\rm eff}[\phi]} \partial_\mu h^{(\lambda)} \partial^\mu h^{(\lambda)} \sqrt{-\bar{g}}\, \mathrm{d}^4 x \,, \tag{16.3.6}$$

which is the action for two massless scalar fields h_λ evolving in the background spacetime, as first noticed by Grishchuk [Grishchuk, 1974] [Grishchuk, 1988]. By varying this action with respect to the background metric, we then deduce the stress-energy tensor of the gravitational waves

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\kappa_{\rm eff}[\phi]} \sum_{\lambda} \left(\partial_\mu h^{(\lambda)} \partial_\nu h^{(\lambda)} - \bar{g}_{\mu\nu} \partial_\alpha h^{(\lambda)} \partial_\alpha h^{(\lambda)} \right) \,. \tag{16.3.7}$$

If we decompose $h^{(\lambda)}$ in Fourier modes as

$$h^{(\lambda)}(\eta, \boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 \boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \widehat{h}^{(\lambda)}(\eta, \boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \,, \tag{16.3.8}$$

we can relate $\hat{h}^{(\lambda)}(eta, \boldsymbol{k})$ to its initial value $\hat{h}^{(\lambda)}(\eta_{\rm in}, \boldsymbol{k})$, *i.e.*, its value deep in the radiation era (*e.g.*, at the end of the inflationary phase) through the transfer function $T(\eta, k)$ by solving Eq. (**16.2.20**) to get

$$\widehat{h}^{(\lambda)}(\eta, \boldsymbol{k}) = T(\eta, k) \widehat{h}^{(\lambda)}(\eta_{\rm in}, \boldsymbol{k}) \,. \tag{16.3.9}$$

Defining the initial power spectrum of the tensor modes as

$$\left\langle \widehat{h}^{(\lambda)}(\eta_{\rm in}, \boldsymbol{k}) \widehat{h}^{*}_{(\lambda')}(\eta_{\rm in}, \boldsymbol{k}') \right\rangle \equiv k^{-3} P_h(k) \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \delta_{\lambda'}^{\lambda} \tag{16.3.10}$$

(δ is the Dirac distribution), we can express the space average of $t_0^0(\eta, \boldsymbol{x})$ as

$$-\left\langle t_0^0(\eta, \boldsymbol{x}) \right\rangle = \frac{1}{2\kappa_{\rm eff}[\phi] a^2} \sum_{\lambda} \left\langle \partial_i h^{(\lambda)} \partial_j h^{(\lambda)} \delta^{ij} \right\rangle = \frac{1}{\kappa_{\rm eff}[\phi]} \int \frac{k^2}{2\pi a^2} P_h(k) T^2(\eta, k)\, \mathrm{d}\ln(k) \,, \tag{16.3.11}$$

where we used an ergodic hypothesis to replace the space average by an ensemble average. Now, since $\left\langle t_0^0(\eta, \boldsymbol{x}) \right\rangle$ oscillates, we define the energy density of the gravitational waves by taking the average of Eq. (**16.3.11**) over n periods. It follows that

$$\rho_{\rm GW}(\eta) = \frac{1}{\kappa_{\rm eff}[\phi]} \int \frac{k^2}{2\pi a^2} P_h(k) \bar{T}^2(\eta, k)\, \mathrm{d}\ln(k) \,, \tag{16.3.12}$$

where $\bar{T}(\eta, k)$ is the root mean square of $T(\eta, k)$ over n periods which is well defined as long as the amplitude of the wave varies slowly with respect to its period.

The energy density $\rho_{\rm GW}$ and energy density parameter $\Omega_{\rm GW}$ by frequency band are then obtained (after averaging on several periods of the wave) by

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\rm GW}(\eta, k)}{\mathrm{d}\ln(k)} = \frac{1}{2\pi^2 \kappa_{\rm eff}[\phi]} \left(\frac{k}{a}\right)^2 P_h(k) \bar{T}^2(\eta, k) \,, \tag{16.3.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_{\rm GW}(\eta, k)}{\mathrm{d}\ln(k)} = \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{\kappa}{\kappa_{\rm eff}[\phi]}\right) \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 P_h(k) \bar{T}^2(\eta, k) \,. \tag{16.3.14}$$

Let us stress some important points. Since we have to average on several periods, these expressions are valid only in a "shortwave limit" (see [Misner *et al.*, 1973] for discussion) where (i) the amplitude of the perturbation is small and (ii) the wavelength of the wave is small compared to the typical radius of the background spacetime. In our case this can be rephrased as $k/\mathcal{H} > 1$ which implies that the expressions Eqns (**16.3.13**) and (**16.3.14**) are valid only for modes which are "sub-horizon" today, *i.e.*, whose wavelength is smaller than the Hubble radius today. For such modes the ergodic hypothesis is well justified. In fact, because of the averaging procedure of the transfer function, we have to restrict to modes such that $k/\mathcal{H}_0 \gtrsim 60$ if we want to average on about ten periods. Again, we emphasize that there is an explicit dependence of $\Omega_{\rm GW}$ and $\rho_{\rm GW}$ on the scalar field ϕ because of the non-minimal coupling and our expressions reduce to the standard ones [Weinberg, 1972] [Allen, 1997] [White, 1992] [Turner *et al.*, 1993] [Giovannini, 1999a] [Misner *et al.*, 1973] when $\xi = 0$. We have described the gravitational waves by two stochastic variables $\widehat{h}^{(\lambda)}$ which can be understood as being the classical limit of a complete quantum description of the gravitational waves (see, *e.g.*, [Grishchuk, 1974] [Grishchuk, 1988] [Ford & Parker, 1977] for details).

Before turning to the effects of the gravitational waves on the CMB, let us make a comment that will lead us to introduce some new notations. In the previous analysis we decomposed the metric perturbation h_{ij} on the basis $\widetilde{Q}^{\lambda}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k}) \equiv \varepsilon^{\lambda}_{ij}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ of TT eigenfunctions of the Laplacian, *i.e.*, such that

$$\Delta\widetilde{Q}^{\lambda}_{ij} = -k^2\widetilde{Q}^{\lambda}_{ij} \quad \text{with} \quad \partial^i\widetilde{Q}^{\lambda}_{ij} = \delta^{ij}\widetilde{Q}^{\lambda}_{ij} = 0\,. \tag{16.3.15}$$

Such a decomposition is indeed not unique and we could have chosen any other such basis. In the CMB literature, one often prefers [Hu & White, 1997b] to use the basis $Q^{(\pm 2)}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})$ defined by

$$Q^{(\pm 2)}_{ij} \equiv -\sqrt{\frac{3}{8}}(e_1 \pm ie_2)_i(e_1 \pm ie_2)_j e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,, \tag{16.3.16}$$

the vectors e_1 and e_2 being defined above in Eq. (**16.3.4**). If we decompose h_{ij} on the latter basis as

$$h_{ij} = \sum_{m=\pm 2}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}2H^{(m)}Q^{(m)}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k})\,, \tag{16.3.17}$$

then the two decompositions are related by

$$\widehat{h}^{(\times)} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\left[H^{(+2)} + H^{(-2)}\right]\,, \quad \widehat{h}^{(+)} = -\sqrt{\frac{3}{2}}i\left[H^{(+2)} - H^{(-2)}\right]\,. \tag{16.3.18}$$

The two polarizations $H^{(\pm 2)}$ are then solution of Eq. (**16.2.20**) which reads

$$\ddot{H}^{(m)} + 2\left[\mathcal{H} - \kappa_{\rm eff}\xi\dot{f}(\phi)\right]\dot{H}^{(m)} + k^2H^{(m)} = \kappa P a^2\pi^{(m)}\,, \tag{16.3.19}$$

where $\pi^{(m)}$ is the coefficient of the development of δT_{ij} as in Eq. (**16.3.17**) so that the transfer functions for $H^{(m)}$ and $\widehat{h}^{(\lambda)}$ are the same. If we now define the power spectrum of $H^{(m)}(\eta_{\rm in},\boldsymbol{k})$ as

$$\left\langle H^{m_1}(\eta_{\rm in},\boldsymbol{k})H^{m_2*}(\eta_{\rm in},\boldsymbol{k}')\right\rangle = (2\pi)^3k^{-3}P_{\rm T}(k)\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta_{m_1,m_2}\,, \tag{16.3.20}$$

one can easily check that

$$P_{\rm T}(k) = \frac{1}{3}P_h(k)\,, \tag{16.3.21}$$

and that if the two polarizations $+$ and $\times$ are independent then $H^{(+2)}$ and $H^{(-2)}$ are also independent. With these notations, the energy density spectra are given as

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}\ln(k)} = \frac{3}{2\pi^2\kappa}\left(\frac{k}{a}\right)^2 P_{\mathrm{T}}(k)\bar{T}^2(\eta,k)\,, \tag{16.3.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}\ln(k)} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\kappa}{\kappa_{\mathrm{eff}}}\right)\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 P_{\mathrm{T}}(k)\bar{T}^2(\eta,k)\,. \tag{16.3.23}$$

Indeed, this does not change the result but we found interesting to make the link between the notations used in the gravitational waves literature [Weinberg, 1972] [Allen, 1997] [White, 1992] [Turner *et al.*, 1993] [Giovannini, 1999a] [Misner *et al.*, 1973] and in the CMB literature [Hu & White, 1997c] [Hu & White, 1997b], specially because we want to present both in a unified framework and language. From now on, we use the second decomposition and its interest will be enlightened by the study of the CMB anisotropies.

3.2 CMB temperature and polarization anisotropies

Gravitational waves, being metric perturbations, have an effect on the temperature and polarization of the CMB photons. Any metric perturbation induces a fluctuation on the CMB temperature Θ through the Sachs-Wolfe effect [Sachs & Wolfe, 1967] and any anisotropic distribution of photons scattered by electrons will become polarized and vice versa. Since Thomson scattering generates linear polarization, we only need to consider the Stokes parameters Q and U and more conveniently their two combinations $Q \pm iU$ which are invariant under rotation.

Following Hu and White [Hu & White, 1997b], we decompose the tensorial part of the temperature anisotropies according to

$$\Theta(\eta,\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{n}}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\sum_\ell \sum_{m=\pm 2} \Theta_\ell^{(m)}(\eta,k) G_\ell^m(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{n}})\,, \tag{16.3.24}$$

$$(Q\pm iU)(\eta,\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{n}}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\sum_\ell \sum_{m=\pm 2} (E_\ell^{(m)} \pm iB_\ell^{(m)})(\eta,k)\,{}_{\pm 2}G_\ell^m(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{n}})\,. \tag{16.3.25}$$

The coefficients $E_\ell^{(m)}$ and $B_\ell^{(m)}$ transform as $E_\ell \to (-)^\ell E_\ell$ and $B_\ell \to -(-)^\ell B_\ell$ under parity and are called the "electric" and "magnetic" part of the polarization. The functions G_ℓ^m, ${}_{\pm 2}G_\ell^m$ form three independent sets of orthonormal functions and depend both on the position $\boldsymbol{x}$ and on the direction of propagation of the photons $\hat{\boldsymbol{n}}$ and are defined as

$$G_\ell^m(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{n}}) \equiv (-)^\ell\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}})\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\,, \tag{16.3.26}$$

$${}_{\pm 2}G_\ell^m(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{n}}) \equiv (-)^\ell\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,{}_{\pm 2}Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}})\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\,, \tag{16.3.27}$$

where the functions $Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}})$ are the standard spherical harmonics and the functions ${}_{\pm 2}Y_\ell^m(\hat{\boldsymbol{n}})$ are the spin-weighted spherical harmonics [Newman & Penrose, 1966] [Goldberg *et al.*, 1967] [Thorne, 1980]. Note that the decomposition on the basis $Q_{ij}^{(\pm 2)}$ in the previous section is enlightened by the fact that $Q_{ij}^{(m)} n^i n^j = G_2^m$ [Hu & White, 1997c] [Hu & White, 1997b].

The angular correlation function of these temperature/polarization anisotropies are observed on a two-sphere around us and can be decomposed in Legendre polynomials P_ℓ as

$$\left\langle \frac{\delta U}{T}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1)\frac{\delta V}{T}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\right\rangle = \frac{1}{4\pi}\sum_\ell (2\ell+1)C_\ell^{UV}P_\ell(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2)\,, \tag{16.3.28}$$

where U, V stand for Θ, E, or B. Now the brackets stand for an average on the sky, *i.e.*, on all pairs ($\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_2$ such that $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}}_2 = \cos\theta_{12}$. Using the orthonormality properties of the eigenfunctions G, equations (**16.3.24**, **16.3.25**) can be inverted to extract the angular power spectra C_ℓ^{UV} of the temperature and polarization anisotropies as

$$T_0^2(2\ell+1)^2 C_\ell^{UV}(\eta_0) = \frac{2}{\pi}\int \frac{\mathrm{d}k}{k} \sum_{m=\pm 2} k^3 U_\ell^{(m)}(\eta_0,k) B_\ell^{(m\,*)}(\eta_0,k) \,. \tag{16.3.29}$$

The equations of evolution of the temperature and polarization multipoles $\Theta_\ell^{(m)}$, $E_\ell^{(m)}$ and $B_\ell^{(m)}$ can be obtained by decomposing the Boltzmann equation satisfied by the photon (or neutrino) distribution function on the eigenfunctions G to get

$$\dot{\Theta}_\ell^{(m)} = k\left[\frac{{}_0\kappa_\ell^m}{2\ell-1}\Theta_{\ell-1}^{(m)} - \frac{{}_0\kappa_{\ell+1}^m}{2\ell+3}\Theta_{\ell+1}^{(m)}\right] - \dot{\tau}\Theta_\ell^{(m)} + \delta_{\ell,2}S^{(m)} \,, \tag{16.3.30}$$

$$\dot{E}_\ell^{(m)} = k\left[\frac{{}_2\kappa_\ell^m}{2\ell-1}E_{\ell-1}^{(m)} - \frac{2m}{\ell(\ell+1)}B_\ell^{(m)} - \frac{{}_2\kappa_{\ell+1}^m}{2\ell+3}E_{\ell+1}^{(m)}\right] - \dot{\tau}\left(E_\ell^{(m)} + \delta_{\ell,2}\sqrt{6}P^{(m)}\right) \,, \tag{16.3.31}$$

$$\dot{B}_\ell^{(m)} = k\left[\frac{{}_2\kappa_\ell^m}{2\ell-1}B_{\ell-1}^{(m)} + \frac{2m}{\ell(\ell+1)}E_\ell^{(m)} - \frac{{}_2\kappa_{\ell+1}^m}{2\ell+3}B_{\ell+1}^{(m)}\right] - \dot{\tau}B_\ell^{(m)} \,, \tag{16.3.32}$$

where

$$S^{(m)} \equiv \dot{\tau}P^{(m)} - \dot{H}^{(m)} \,, \tag{16.3.33}$$

$$P^{(m)} \equiv \frac{1}{10}\left(\Theta_2^{(m)} - \sqrt{6}E_2^{(m)}\right) \,, \tag{16.3.34}$$

$${}_s\kappa_\ell^m \equiv \ell\sqrt{\left(1-\frac{m^2}{\ell^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{\ell^2}\right)} \,. \tag{16.3.35}$$

The differential optical depth $\dot{\tau}$ vanishes for neutrinos (except in the very early Universe, but the observable wavelengths in the CMB are not affected by this) and is proportional to the free electron density in the case of photons. It has to be calculated by solving the relevant kinetic recombination equations for hydrogen and helium [Peebles, 1968] [Seager *et al.*, 1999] [Ma & Bertschinger, 1995].

The quantity $P^{(m)}$ represents the coupling between temperature and polarization. Due to our choice of decomposition, only the electric part of the polarization is affected by temperature anisotropies. However, electric and magnetic part of polarization couple themselves as photons propagate. The Clebsch-Gordan coefficients ${}_s\kappa_\ell^m$ arise from product properties of spherical harmonics. They are obtained in the same way as for the scalar modes [Ma & Bertschinger, 1995].

$$\frac{\Theta_\ell^{(m)}(\eta_0,k)}{2\ell+1} = \int_0^{\eta_0} e^{-\tau} S^{(m)} j_\ell^{(m)}(k(\eta_0-\eta))\,\mathrm{d}\eta \,, \tag{16.3.36}$$

$$\frac{E_\ell^{(m)}(\eta_0,k)}{2\ell+1} = -\sqrt{6}\int_0^{\eta_0} \dot{\tau}e^{-\tau} P^{(m)} \varepsilon_\ell^{(m)}(k(\eta_0-\eta))\,\mathrm{d}\eta \,, \tag{16.3.37}$$

$$\frac{B_\ell^{(m)}(\eta_0,k)}{2\ell+1} = -\sqrt{6}\int_0^{\eta_0} \dot{\tau}e^{-\tau} P^{(m)} \beta_\ell^{(m)}(k(\eta_0-\eta))\,\mathrm{d}\eta \,. \tag{16.3.38}$$

The functions $j_\ell^{(m)}$, $\varepsilon_\ell^{(m)}$ and $\beta_\ell^{(m)}$ are defined in terms of the spherical Bessel functions, $j_\ell(x)$ as

$$j_\ell^{(\pm 2)}(x) \equiv \sqrt{\frac{3}{8}\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}}\frac{j_\ell(x)}{x^2} , \qquad (\mathbf{16.3.39})$$

$$\varepsilon_\ell^{(\pm 2)}(x) \equiv \frac{1}{4}\left[-j_\ell(x)+j_\ell''(x)+2\frac{j_\ell(x)}{x^2}+4\frac{j_\ell'(x)}{x}\right] , \qquad (\mathbf{16.3.40})$$

$$\beta_\ell^{(\pm 2)}(x) \equiv \pm\frac{1}{2}\left[j_\ell'(x)+2\frac{j_\ell(x)}{x}\right] . \qquad (\mathbf{16.3.41})$$

where a prime denotes a derivative with respect to the argument x.

Beside the small contribution due to the polarization in Eq. (**16.3.36**), the temperature fluctuation in the direction $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ reduce to the well known result by Sachs and Wolfe [Sachs & Wolfe, 1967]

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) = -\frac{1}{2}\int_{\eta_{\rm LSS}}^{\eta_0} \dot{h}_{ij}\hat{\gamma}^i\hat{\gamma}^j\,{\rm d}\eta , \qquad (\mathbf{16.3.42})$$

where the subscript LSS stands for last scattering surface. The "visibility function" $\dot{\tau}e^{-\tau}$ appearing in Eqns (**16.3.37**),(**16.3.38**) takes a nonzero value only at the time of decoupling so that, contrarily to temperature anisotropies which are constantly generated by gravitational interactions with photons, polarization is generated only at the last scattering surface.

4 Damping of the gravitational waves

We first study the effect of the damping of the gravitational waves due to the anisotropic stress of the photons. Such a damping of the amplitude of gravitational waves in various viscous cosmic media has been already discussed in [Dimitropoulos, 1999]; we give a description of this damping in the formalism we use here in order to quantify precisely its effect on CMB anisotropies. On sub-horizon scales larger than the diffusion length $\lambda_{\rm D} \equiv \dot{\tau}^{-1}$ of the photons, *i.e.*, such that

$$\mathcal{H}_{\rm eff} \equiv \tau_{\mathcal{H}}^{-1} \ll k \ll \dot{\tau} , \qquad (\mathbf{16.4.1})$$

the set of equations (**16.3.30**, **16.3.35**) implies that

$$\Theta_2^{(\pm 2)} = -\frac{4}{3}\frac{\dot{H}}{\dot{\tau}} \quad \text{and} \quad E_2^{(\pm 2)} = -\frac{\sqrt{6}}{4}\Theta_2^{(\pm 2)} . \qquad (\mathbf{16.4.2})$$

Since $\pi^{(\pm 2)}$ is proportional to $\Theta_2^{(\pm 2)}$, we can insert the former expressions in the gravitational waves evolution equation (**16.3.19**) to get the back reaction of the anisotropic stress

$$\ddot{H}+2\mathcal{H}_{\rm eff}\dot{H}+k^2H = -\frac{32}{15}\kappa P a^2\frac{\dot{H}}{\dot{\tau}} . \qquad (\mathbf{16.4.3})$$

Setting

$$H \equiv \bar{H}h , \qquad (\mathbf{16.4.4})$$

with $\bar{H}$ solution of the homogeneous equation of evolution (*i.e.*, with $\pi^{(m)}=0$), we get

$$\bar{H}\ddot{h}+\left(2\dot{\bar{H}}+2\mathcal{H}_{\rm eff}\bar{H}+\frac{32}{15}\kappa P a^2\frac{\bar{H}}{\dot{\tau}}\right)\dot{h}+\frac{32}{15}\kappa P a^2\frac{\dot{\bar{H}}}{\dot{\tau}}h = 0 . \qquad (\mathbf{16.4.5})$$

Now, (i) since $\dot{\bar{H}} \simeq k\bar{H}$, we deduce that $\dot{\bar{H}} \gg \mathcal{H}_{\rm eff}\bar{H}$, (ii) since $\kappa P a^2 \simeq \mathcal{H}_{\rm eff}$, it follows that $(32/15)\kappa P a^2 \bar{H}/\dot{\tau} \simeq \mathcal{H}_{\rm eff}^2/\dot{\tau} \ll k\bar{H} \simeq \dot{\bar{H}}$ and (iii) since $\ddot{h} \simeq \dot{h}/\tau_{\rm D}$, $\bar{H}\ddot{h} \ll \dot{\bar{H}}\dot{h}$ and in conclusion in the limit (**16.4.1**) the equation of evolution of the gravitational waves in presence of the anisotropic stress (**16.4.5**) reduces to

$$\dot{h} = -\frac{16}{15}\kappa P a^2 \dot{\tau} h \,. \qquad (\mathbf{16.4.6})$$

We deduce that a mode k is damped from the time it enters the Hubble radius, *i.e.*, $\eta \simeq k^{-1}$ since it happens during the radiation era, to roughly the time when the anisotropic stress becomes negligible, *i.e.*, approximately at the time of last scattering $\eta_{\rm LSS}$. It follows that

$$h(\eta_{\rm LSS}, k) \simeq \exp\left(-\frac{16}{15}\int_{1/k}^{\eta_{\rm LSS}} \frac{\kappa P a^2}{\dot{\tau}}\,{\rm d}\eta\right) h(1/k, k) \,. \qquad (\mathbf{16.4.7})$$

This damping of the gravitational waves by the anisotropic stress of the photon fluid is analogous to the damping of the scalar modes (density fluctuations) known as the Silk damping [Silk, 1968] a description of which, in the formalism used here, can be found in [Hu & White, 1997b]. Note however that the origin of the damping is different.

This effect is small but, apart from [Dimitropoulos, 1999], was not much emphasized in the literature before. Assuming that the Universe is completely ionized until the last scattering surface, the integral of Eq. (**16.4.7**) is of order [Hu, 1995]

$$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{Y_{\rm He}}{2}\right)\frac{\Omega_\gamma^0}{\Omega_b^0}\frac{m_{\rm p}\kappa}{\sigma_{\rm Th}} a_0(\eta_{\rm LSS} - 1/k) \simeq 10^{-3}(1 - 1/k\eta_{\rm LSS}) \,, \qquad (\mathbf{16.4.8})$$

where $m_{\rm p}$ is the proton mass, $\sigma_{\rm Th}$ is Thomson scattering cross section. The real damping factor is greater than the estimate (**16.4.8**) because the Universe becomes neutral at the last scattering surface (so that the term $\dot{\tau}$ is smaller). In Fig. 16.1 [left], we plot this damping factor for the modes that entered into the Hubble radius long before the last scattering surface (*i.e.*, such that $k \gg \eta_{\rm LSS}^{-1}$). As a consequence, the comparison between the damped case to the undamped case, shown on Fig. 16.1 [right] does not show significant differences. The amplitude of the high-ℓ tail of the CMB anisotropy spectrum is lowered by roughly 10% when one includes this effect. The same occurs of course for polarization. We emphasize that this result does not depend on any particular model, and is not included in the most recent (3.2) version of CMBFAST.

5 Specification of the model

5.1 Model parameters

At this stage, the model we are discussing depends on five parameters:

1. $f(\phi)$ which is an arbitrary function of the scalar field ϕ,
2. ξ the coupling of the scalar field with the background spacetime,
3. α the slope of the potential (**16.2.13**) or (**16.2.15**),
4. Ω_ϕ^0 the energy density in the scalar field today,
5. $P_{\rm T}(k)$ the spectrum of the gravitational waves.

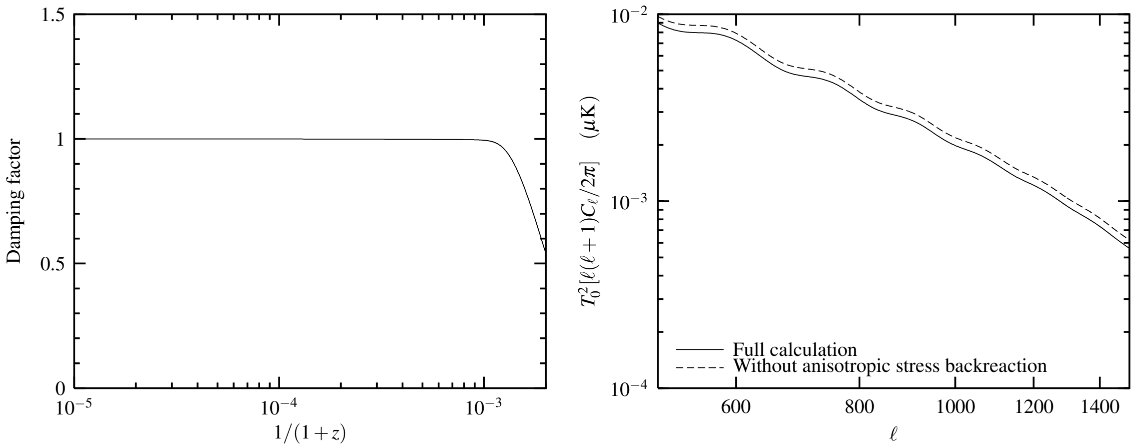


FIGURE 16.1 – Damping of the gravitational waves due to its coupling to the photons anisotropic stress. The damping [left] is generated only when the Universe becomes neutral, *i.e.*, soon before the last scattering surface. As a consequence, all the mode which have already entered into the Hubble radius at recombination are equally damped, regardless of their wavelength. The influence of this damping on the CMB anisotropies is shown on the right. Since all the modes are equally damped, this translates into a constant ratio of amplitude between the damped and the undamped cases. Note however that our derivation is valid only when Eq. (**16.4.1**) applies, which is not true at the end of decoupling, when $\dot{\tau}$ becomes small. This is why the actual damping (10%) is smaller than what is expected from the left plot.

Indeed there exist some constraints on these functions and parameters and we make the following assumptions and choices:

1. We assume that $f(\phi) = \phi^2/2$; this is the only choice for which the coupling constant ξ is dimensionless. Moreover such a choice can be seen as the lowest term in an expansion of f in powers of ϕ. As shown in [Uzan, 1999] there exists tracking solutions for the field ϕ evolving in the potential (**16.2.13**) with such a coupling.

2. If the scalar field ϕ is coupled to the spacetime metric, this coupling must be weak enough so that it does not generate a significant time variation of the constants of nature [Carroll, 1998]. Taking into account the bound on the variation $|\dot{\mathcal{G}}/\mathcal{G}|$ of the Newton constant [Gillies, 1997] and on the variation $|\dot{\alpha}/\alpha|$ of the fine structure constant [Damour & Dyson, 1996], it was shown [Chiba, 1999] that

$$-10^{-2} \lesssim \xi \lesssim 10^{-2} - -10^{-1}\,. \qquad (\mathbf{16.5.1})$$

This bound is, however, sensitive to the shape of the potential. On the other hand the experimental constraints (from the Shapiro effect and the light deflection in the Solar system) on the post-Newtonian parameters [Misner *et al.*, 1973] [Damour & Esposito-Farese, 1992] imply [Chiba, 1999]

$$|\xi| \lesssim \frac{3.9\times 10^{-2}}{\sqrt{\alpha(\alpha+2)}}\,. \qquad (\mathbf{16.5.2})$$

However, in this class of models one does not try to have a theory converging towards general relativity at late time and the coupling ξ is constant which is the main reasons of the severe bounds on its value. This can be improved by generalizing this kind of models by considering them in the framework of scalar-tensor theories [Bartolo & Pietroni, 2000] [Bertolami & Martins, 2000].

3. In most models α is not constrained theoretically. If the matter content of the Universe today is dominated by the matter-radiation fluid then the fact that the observations [Perlmutter *et al.*, 1999b] favor $-1 < \omega_\phi < -0.6$ gives a bound on α, which is indeed not the case anymore if the scalar field starts to dominate. In Fig. 16.2 [left], we compare this analytic estimate and the numerical determination of the energy scale Λ as a function of the slope α. We see that if $\alpha > 4$ then Λ is at least larger than 1 TeV (when $\Omega_\phi^0 = 0.7$).

4. The density parameter Ω_ϕ^0 is not severely constrained theoretically, but observations seem to indicate $\Omega_\phi^0 \simeq 0.7$. One has to check that if the scalar field was dominating the matter content of the Universe at some early stage then it has to be subdominant at the time of nucleosynthesis (see, *e.g.*, [Ferreira & Joyce, 1998]). The choice of Ω_ϕ^0 fixes the value of the energy scale Λ in Eq. (**16.2.13**) or (**16.2.15**); this is the *coincidence problem*. On Fig. 16.2 [right], we depict the variation of the energy scale Λ with Ω_ϕ^0 and α. It is not very sensitive to Ω_ϕ^0 as long as $0.1 < \Omega_\phi^0 < 0.9$. In fact, when the quintessence field starts to dominate the matter content and if we have reached the attractor then $\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}\phi^2 \propto H^2$ (see [Ratra & Peebles, 1988]), and $H^2 \simeq V/M_{\mathrm{Pl}}^2$ so that we can estimate that the variation of Λ with α follows
$$\Lambda = (\rho_{\mathrm{crit}} M_{\mathrm{Pl}}^\alpha)^{\frac{1}{4+\alpha}} \ . \tag{16.5.3}$$
We conclude that
$$\frac{\delta\Lambda}{\Lambda} \sim \frac{1}{4+\alpha}\frac{\delta\Omega_\phi^0}{\Omega_\phi^0} \ ,$$
and thus a precision of 10% on Ω_ϕ^0 requires to tune Λ at a 1% level if, *e.g.*, $\alpha = 6$, which is a less drastic tuning than the usual cosmological constant fine tuning problem.

5. P_{T} has to be determined by a specific model, such as, *e.g.*, inflation, and we parameterize it as
$$P_{\mathrm{T}}(k) \equiv A_{\mathrm{T}} k^{n_{\mathrm{T}}} \ , \tag{16.5.4}$$
where A_{T} is a constant and n_{T} is the tensor mode spectral index. A_{T} is obtained by normalizing the CMB temperature anisotropies to the Cosmic Background Explorer (COBE) data at $\ell = 10$ for which
$$T_0 \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_\ell^{\Theta\Theta}} \simeq 30\ \mu\mathrm{K} \ . \tag{16.5.5}$$
Since some measurements tend to show that there is a peak at the degree scale [Melchiorri *et al.*, 2000], we conclude that a significant part of the anisotropies may be generated by the scalar modes. In the "standard" slow-roll inflation picture, this is compatible with an almost scale-invariant spectrum with a low tensor contribution, in which case the COBE results would put only an upper limit on the amplitude of the gravitational waves spectrum. Nevertheless, we point out that it is also possible that most of the large scale anisotropies can be generated by gravitational waves. This assumes a strong deviation from scale invariance ($n_{\mathrm{S}} = 1.69$ and $n_{\mathrm{T}} = 0.0$), but is in good agreement with observational data [Tegmark & Zaldarriaga, 2000a].

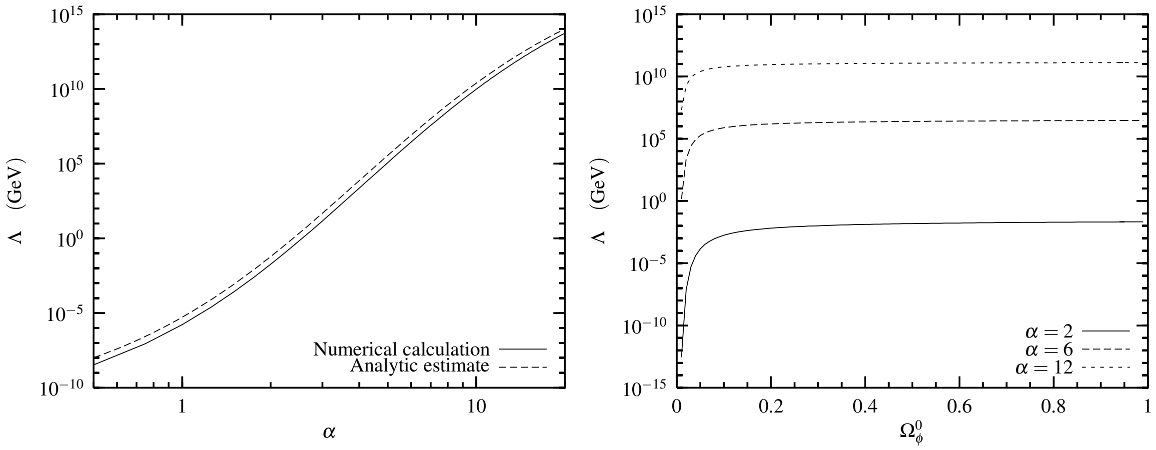


FIGURE 16.2 – Variation of the energy scale Λ of the potential (**16.2.13**) with the energy density of the scalar field Ω^0_ϕ and the slope of the potential α. We first show [left] the variation of Λ with α when $\Omega^0_\phi = 0.7$ and the comparison with the analytic estimate (**16.5.3**) and [right] the variation of Λ with Ω^0_ϕ for $\alpha = 2, 6, 12$.

5.2 Initial conditions and behavior of the background spacetime

Concerning the initial conditions for the scalar field ϕ, we will consider the two extreme cases:

- (IC1) where we assume that the scalar field is at equipartition with the matter (*i.e.*, mainly with the radiation) deep in the radiation era,
- (IC2) where it dominates the matter content of the Universe at a very early stage.

Situation (IC1) implies that at the end of reheating,

$$\rho_\phi \lesssim 10^{-4} \rho_\gamma \,, \qquad \textbf{(16.5.6)}$$

where the factor 10^{-4} is roughly the inverse of the number of degrees of freedom at that time. Since the quintessence field is already subdominant at this epoch, one does not need to care about its effect on nucleosynthesis since it remains subdominant until recently. In the second situation (IC2), the field starts by dominating and inflation ends by a kinetic phase rapidly than ρ_γ and will thus become subdominant. One has to check that this happens before nucleosynthesis [Giovannini, 1999a] [Peebles & Vilenkin, 1999]. A realization of such initial conditions can be obtained in quintessential inflation [Peebles & Vilenkin, 1999].

In Fig. 16.3, we depict the evolution of the energy density of the quintessence field, matter and radiation for the initial conditions (IC1) [left] and (IC2) [right]. We see that for a very large range of initial conditions (roughly for 10^{-47} GeV$^4 \lesssim \rho_\phi \lesssim 10^{113}$ GeV^4 at a redshift of $z \simeq 10^{30}$) we end up with a quintessence field which starts to dominate today. This explains briefly how the fine tuning problem is solved [Zlatev *et al.*, 1999]. We can also check that with these values the scalar field does not dominate the matter content of the Universe at nucleosynthesis, *i.e.*, at a redshift of order $z \simeq 10^{10}$.

An interesting point concerns the evolution of the scalar field equation of state in the case (IC2) when $\xi = 0$. The field rolls down very rapidly so that we are first in a regime where

$$\rho \simeq P \simeq \frac{1}{2}\frac{\dot\phi^2}{a^2} \,, \qquad \textbf{(16.5.7)}$$

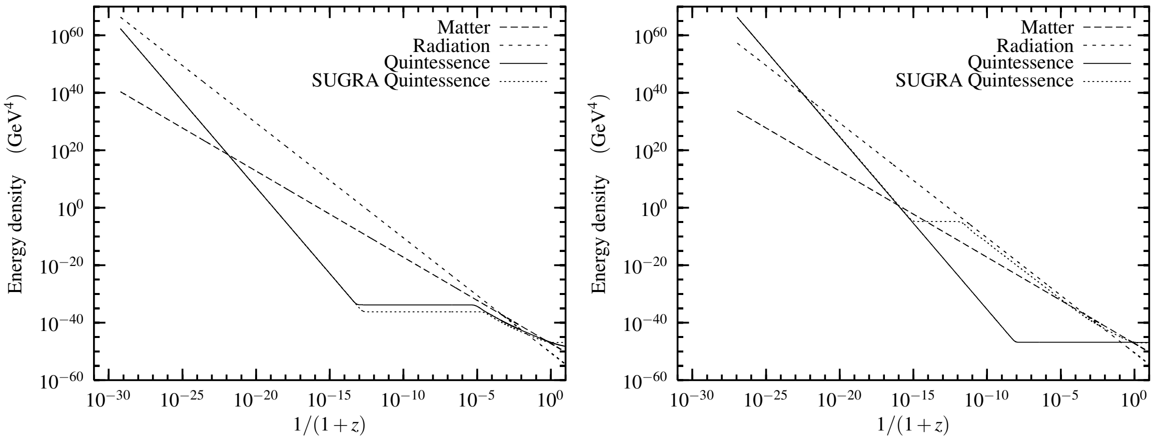


FIGURE 16.3 – The behavior of the energy density of the matter (long-dashed line), radiation (short-dashed line) and scalar field (solid and dotted lines), as a function of the redshift for the two class of initial conditions: (IC1), when the field is at equipartition with the radiation [left], and (IC2), when the field initially dominates the matter content of the Universe [right]. The solid line represents the case when the field evolves in an inverse power-law potential, and the dotted line represents the case when the field evolves in the supergravity (SUGRA) potential. Note that when the field dominates at early times, the SUGRA potential stabilizes the field, which reaches the tracking solution earlier.

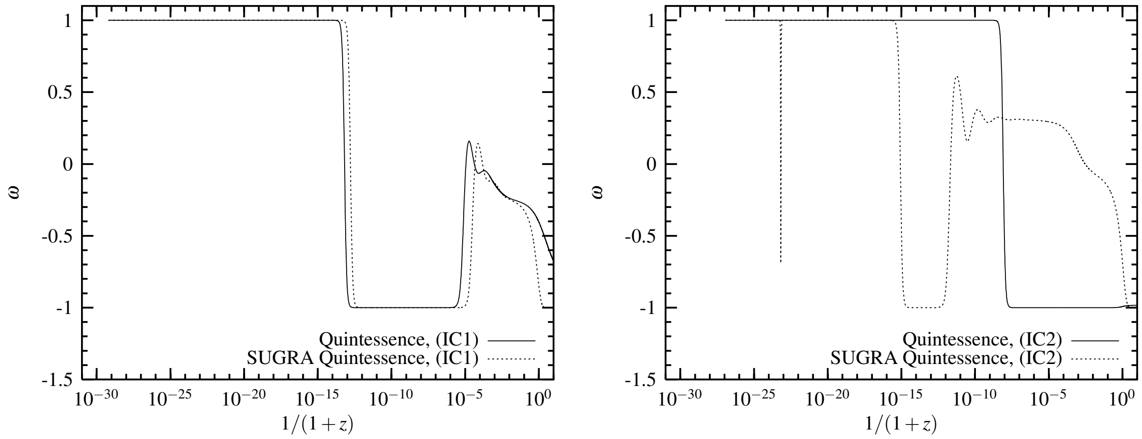


FIGURE 16.4 – The behavior of the equation of state parameter as a function of the redshift for the two class of initial conditions: (IC1), when the field is at equipartition with the radiation [left], and (IC2), when the field initially dominates the matter content of the Universe [right]. The solid line represents the case when the field evolves in an inverse power-law potential, and the dotted line represents the case when the field evolves in the SUGRA potential. In the case of (IC2), the field reaches the tracking solution only when SUGRA corrections to the potential are considered. Note also the spikes in the SUGRA case [right], which illustrate the fact that the field bounces around the Planck scale (see Fig. 16.5 below).

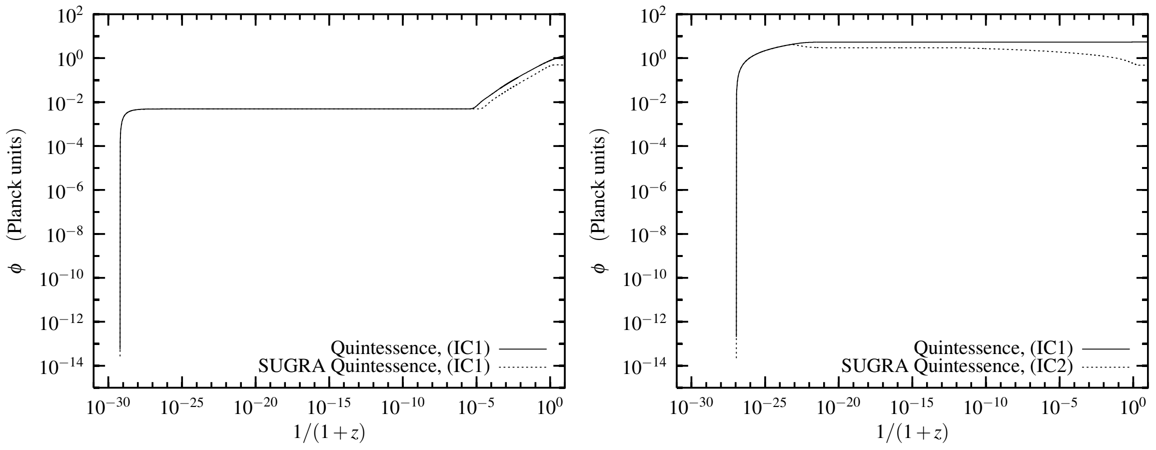


FIGURE 16.5 – The behavior of the quintessence field as a function of the redshift for the two class of initial conditions: (IC1), when the field is at equipartition with the radiation [left], and (IC2), when the field initially dominates the matter content of the Universe [right]. The solid line represents the case when the field evolves in an inverse power-law potential, and the dotted line represents the case when the field evolves in the SUGRA potential. In the case of (IC1), the field always reaches the tracking solution before today, whereas for (IC2), the field reaches the tracking solution only when it evolves in the SUGRA potential.

from which we conclude that its equation of state is $\omega_\phi \simeq 1$ (see Fig. 16.4). But, because of the exponential behavior contribution of the potential, the field is stopped when $\phi \gtrsim M_{\rm Pl}$ and then rolls back to smaller values (see Fig. 16.5) so that the field undergoes a series of damped oscillations (because of the friction term coming from the expansion in the Klein-Gordon equation). This implies that there exist times such that $\dot\phi \simeq 0$ and thus small period around them where the equation of state varies rapidly to $\omega_\phi \simeq -1$ (see Fig. 16.4). This sudden change in the equation of state of ϕ happen while it is dominating the matter content of the Universe (see Fig. 16.3) so that it implies variations in the evolution of the scale factor of the Universe which, in principle, should let a signature in the gravitational waves energy spectrum. Indeed, this does not happen in standard quintessence and is a specific feature of the SUGRA-quintessence.

When $\xi \neq 0$, there are no significant modifications to the background dynamics as long as the field has not reached the Planck mass [because $2\xi\kappa f(\phi)$ is small compared to unity, see Eq. (**16.2.4**)]. Then, the main difference appears at late times when the field starts to dominate and comes from the fact that the bound $-1 < \omega_\phi < 1$ no longer applies, and one can get lower values of ω_ϕ. Equivalently, the equation of state parameter $\omega \equiv (P_{\rm fluid} + P_\phi)/(\rho_{\rm fluid} + \rho_\phi)$ for the whole background fluids can reach values smaller than -1 (see Fig. 16.6 where we plot the variation of ω_ϕ as a function of redshift). As pointed out by Caldwell [Caldwell, 2002], such a matter fits the current observational data. Different candidates such as a decaying dark matter component [Ziaeepour, 2000] and a kinetic quintessence field [Chiba *et al.*, 2000] were proposed. Here, we show that any non-minimally coupled scalar field may be a good candidate for a component of matter with $\omega < -1$. The constraints (**16.5.1**) on ξ implies that for our class of models

$$-3 \leq \omega_\phi < 0\,,$$

if the scalar field dominates. We emphasize that ω_ϕ is not uniquely defined according to the way one splits $T^{\mu\nu}_{(\phi)}$ in Eq. (**16.2.5**). In Fig. 16.6, we used the Friedmann equations (**16.2.6**, **16.2.7**) to

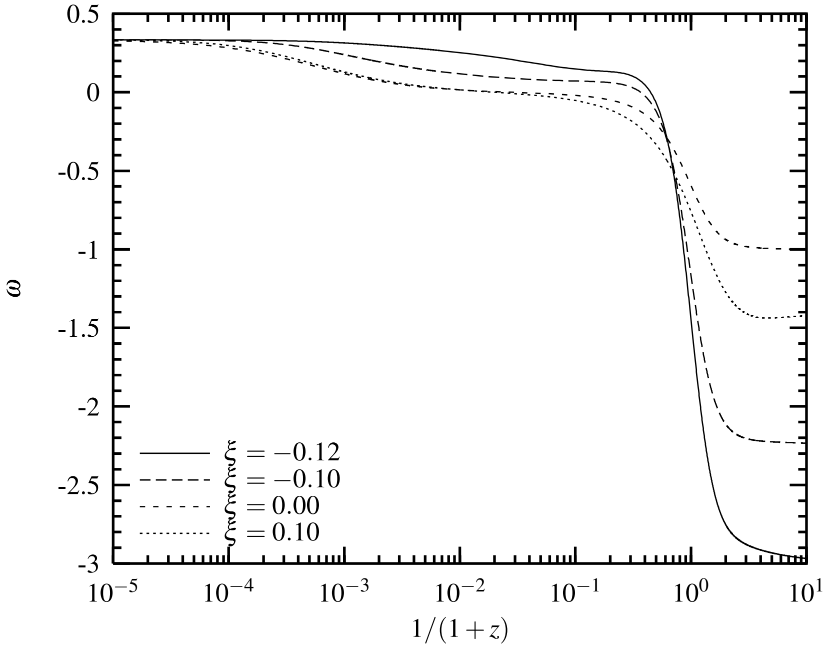


FIGURE 16.6 – Evolution of the equation of state parameter ω as a function of the redshift for different values of the coupling ξ. As soon as the coupling is not minimal, ω can reach values smaller than -1. The parameters of the model considered here are: $\alpha = 6$, potential (**16.2.15**) including SUGRA corrections, $\Omega_\phi^0 = 0.7$ and (IC1) initial conditions.

extract ω from

$$\frac{\dot{\mathcal{H}}}{\mathcal{H}^2} - 1 = -\frac{3}{2}(1+\omega)\Omega \, ,$$

and then ω_ϕ from

$$\omega\Omega = \sum_i \omega_i \Omega_i \, ,$$

where i runs on all the matter species. This corresponds to the value of ω as it may be reconstructed from observational data such as, *e.g.*, the supernovae type Ia.

6 Qualitative discussion

6.1 Gravitational waves spectrum

Equation (**16.3.19**) describes the evolution of a damped oscillator. Injecting the ansatz

$$H^{(m)} \equiv A^{(m)} \exp(ik\eta) \qquad (\mathbf{16.6.1})$$

in Eq. (**16.3.19**) and performing a WKB approximation leads to the equation

$$\dot{A}^{(m)} + \mathcal{H}_{\rm eff} A^{(m)} = 0 \qquad (\mathbf{16.6.2})$$

for the evolution of the amplitude $A^{(m)}$ where $\mathcal{H}_{\rm eff} \equiv \dot{\tilde{a}}/\tilde{a}$, with

$$\tilde{a} \equiv a\sqrt{1 - 2\kappa\xi f(\phi)} \, . \qquad (\mathbf{16.6.3})$$

This WKB approximation holds only for "sub-horizon" modes. Before a mode has a wavelength smaller than the Hubble radius, its amplitude evolves according to

$$\ddot{A}^{(m)} + 2\mathcal{H}_{\text{eff}}\dot{A}^{(m)} = 0 \,, \qquad (\mathbf{16.6.4})$$

the solutions of which are a constant mode and a decaying mode. Neglecting the decaying mode, we see that the wave is "frozen" as long as its wavelength is larger than the Hubble radius, and that it undergoes damped oscillations once its wavelength is shorter than the Hubble radius. The damping of a mode of wavenumber k between the time it enters the Hubble radius and today is then proportional to

$$\frac{\widetilde{a}_k}{\widetilde{a}_0} \,, \qquad (\mathbf{16.6.5})$$

where $\widetilde{a}_k$ is the scale factor evaluated at the time η_k when the mode k enters the Hubble radius (*i.e.*, when $\mathcal{H} = k$) and $\widetilde{a}_0$ is scale factor today. Injecting this behavior in Eq. (**16.3.14**), we obtain that the energy density spectrum of gravitational waves scales as

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_{\text{GW}}}{\mathrm{d}\ln(k)} \propto k^2 \widetilde{a}_k^2 P_{\text{T}}(k) \,. \qquad (\mathbf{16.6.6})$$

First let us assume that $\xi = 0$. For wavelengths corresponding to modes that have entered the Hubble radius in the matter dominated era (for which $a \propto \eta^2$ and thus $\eta_k \simeq k^{-1}$), one can easily sort out that

$$\widetilde{a}_k \simeq k^{-2} \,, \qquad (\mathbf{16.6.7})$$

and the gravitational waves spectrum behaves as

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_{\text{GW}}}{\mathrm{d}\ln(k)} \propto k^{-2} P_{\text{T}}(k) \,. \qquad (\mathbf{16.6.8})$$

Equivalently, for wavelengths corresponding to modes entering the Hubble radius in the radiation dominated era (for which $a \propto \eta$) one can show that the gravitational waves energy spectrum behaves as

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_{\text{GW}}}{\mathrm{d}\ln(k)} \propto k^{0} P_{\text{T}}(k) \,. \qquad (\mathbf{16.6.9})$$

To finish, if it happens that there exist wavelengths corresponding to modes that have entered the Hubble radius while the scalar field was dominating (for which $a \propto \sqrt{\eta}$ since $\rho_\phi \propto 1/a^6$) one obtains that

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_{\text{GW}}}{\mathrm{d}\ln(k)} \propto k^{1} P_{\text{T}}(k) \,. \qquad (\mathbf{16.6.10})$$

In conclusion, we have found three behaviors for the gravitational waves spectrum according to the wavelength. In Fig. 16.9, we give an example of such a spectrum in a case where one has a scalar field dominating at early stage [initial condition (IC2)]. These results hold also when $\xi \neq 0$ but the slopes of the spectrum are slightly changed since the time behavior of a has to be replaced by the one of $\widetilde{a}$.

6.2 CMB anisotropies

For scales smaller than the Hubble radius at decoupling, one can follow the same lines to predict the tensor part of the CMB temperature anisotropies. The main difference is that the expression for $\ell(\ell+1)C_\ell$ does not involve any factor k^2 as in Eqns (**16.3.23**), the reason being that Eq. (**16.3.36**) can be integrated by parts to drop the time derivative of $H^{(m)}$, which shows that anisotropies are mostly generated on the last scattering surface with an amplitude of $|H^{(m)}|^2$. Therefore, the spectrum behaves as

$$\ell(\ell+1)C_\ell \propto \ell^{n_{\mathrm{T}}-4}, \ell^{n_{\mathrm{T}}-2}, \ell^{n_{\mathrm{T}}-1} , \qquad (\mathbf{16.6.11})$$

for modes which have entered the Hubble radius is the matter dominated, radiation dominated and kinetic scalar field dominated eras respectively. With standard cosmological parameters, the radiation to matter transition occurs soon before the decoupling, and the scalar field dominates only at very early times. As a consequence, one sees almost only the regime $\ell(\ell+1)C_\ell \propto \ell^{n_{\mathrm{T}}-2}$. For modes which enter into the Hubble radius after the last scattering surface, one can show [Turner *et al.*, 1993] that the produced spectrum scales as

$$\ell(\ell+1)C_\ell \propto \ell^{n_{\mathrm{T}}} . \qquad (\mathbf{16.6.12})$$

Note that this expression is indeed an approximation and that it is not easy to calculate an accurate analytical solution [Grishchuk, 1993b]. These results are illustrated in Fig. 16.7. As already stressed, the result of Eq. (**16.6.12**) applies at large angular scales which have not entered into the Hubble radius at recombination. For standard cosmologies, this occurs for multipoles smaller than $\ell \simeq 100$ (in addition, there are also some corrections to this rough estimate which occur at the very smallest multipoles and slightly boost the spectrum, as can also be seen on Fig. 16.7). Then, at higher multipoles the result of Eq. (**16.6.11**) is valid. The matter dominated regime before recombination is rather short, and occurs only between $\ell \simeq 100$ and $\ell \simeq 200$ (less than one oscillation in the spectrum). For $\ell \gtrsim 200$, one sees the regime $\ell(\ell+1)C_\ell \propto \ell^{n_{\mathrm{T}}-2}$ (see also Fig. 1 of [Turner *et al.*, 1993]).

6.3 Results of the ΛCDM model

Before turning to a more general numerical study of the class of models we consider in this article, we recall in Fig. 16.7 the general results for the temperature and polarization angular power spectra and the gravitational waves density spectrum for a ΛCDM model. This spectrum has two branches: a soft branch at lower frequencies (corresponding to the matter dominated era) and a hard branch at higher frequencies (corresponding to modes that entered the horizon in the radiation era). Following [Grishchuk, 1988], we set the cutoff on this spectrum to the last mode that has been inflated out of the Hubble radius.

7 Numerical results

7.1 Field ϕ initially at equipartition

Since the scalar field only starts to dominate at very recent time, we expect no effect on the gravitational waves energy spectrum (since at earlier time the Universe is always radiation dominated). However, the change in today's Universe equation of state yield a specific signature in the angular diameter-distance relation. Hence, one expects to see the quintessence field behavior in the positions of the peaks in the CMB anisotropy spectra.

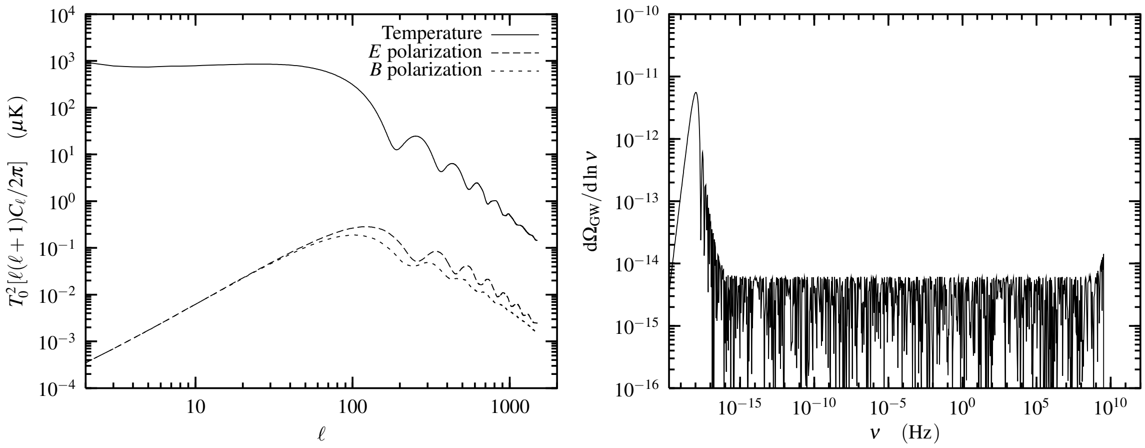


FIGURE 16.7 – The temperature et polarization of the CMB induced by gravitational waves [left] and their energy density spectrum [right] in a standard ΛCDM model with $n_T = 0$.

The temperature anisotropies plots of Fig. 16.8 are therefore identical at high multipoles except for their overall position which are different. At low redshift, the scalar field dominates and the dynamics of the expansion depends explicitely of the value of the coupling ξ, which cause some slight differences in the CMB anisotropies at the very first multipoles ($\ell \leq 5$). We have also seen that the polarization is generated by gravity and therefore different gravitational constants lead to different normalization between the polarization and the temperature spectra. Since we normalize the “bare” Einstein constant κ so that the effective Einstein constant corresponds to what we measure (in, *e.g.*, a Cavendish experiment), models with a different ξ have different κ. At decoupling, the scalar field does not dominate and therefore $\kappa^{\rm LSS} = \kappa^{\rm LSS}_{\rm eff}$. This induces different amplitudes for the polarization anisotropy spectra. For the lowest values of ξ there is a factor 2−−4 in amplitude as compared with the $\xi = 0$ case, which roughly corresponds to the square of the variation of $\kappa_{\rm eff}$ (and, hence $\mathcal{G}$) between the last scattering surface and now. Note that the effect of ξ depends on its sign. This is the reason why the constraint derived by Chiba [Chiba, 1999] are stronger for negative values of ξ. The same can be seen in Fig. 16.6.

We conclude that the temperature anisotropies and polarization give mainly information on the spectral index n_T, the energy density of the scalar field today Ω^0_ϕ and its coupling ξ.

7.2 Field ϕ dominates at early stage

We now turn to the more unusual case where the scalar field dominates at the end of inflation and where the Universe undergoes a kinetic phase before the radiation era [Ford, 1987] [Spokoiny, 1993] as in, *e.g.*, quintessential inflation [Peebles & Vilenkin, 1999]. The wavelengths corresponding to the observable CMB multipoles ($\ell \lesssim 2000$) are much larger than the Hubble radius at nucleosynthesis, epoch at which we have to be radiation dominated. As a consequence, we expect no signature from this early phase on the CMB anisotropies and polarization.

As first pointed out in [Giovannini, 1999a] [Peebles & Vilenkin, 1999], if the scalar field dominates at early stage, there is an excess of gravitational waves at high frequency [see equation (**16.6.10**)]. On Fig. 16.9, we present such a spectrum and we will discuss the implication of this excess later.

An interesting effect concerns the difference between the spectra obtained from an inverse power law potential and a SUGRA-like potential. As shown on Fig. 16.9 [right], the amplitude of the spectrum at high frequency in roughly 30% higher for inverse power law potentials. The

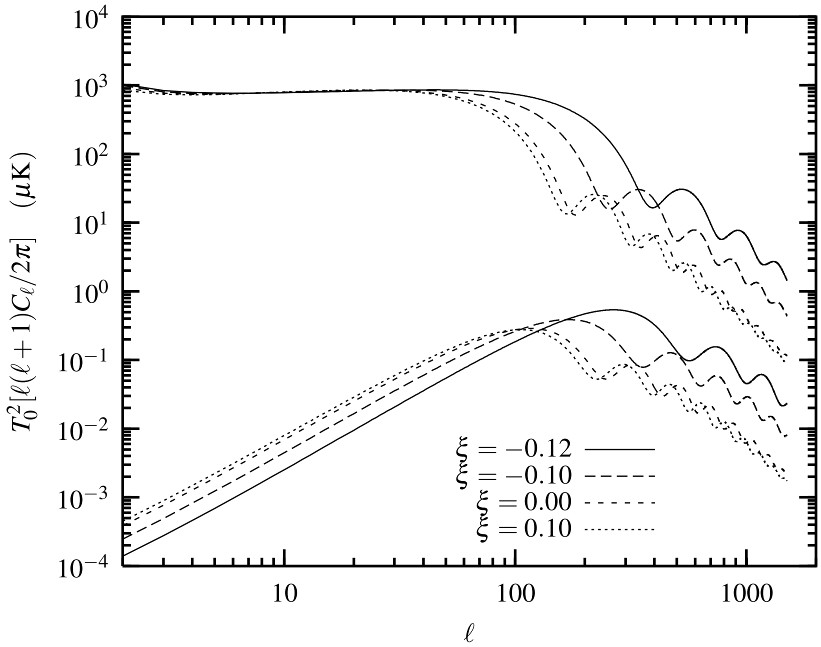


FIGURE 16.8 – Influence of the coupling ξ on the CMB temperature and polarization anisotropies. The value of ξ influences the angular diameter-distance relation and therefore affects the overall position of the spectrum. The parameters of the model considered here are the same as in Fig. 16.6: $\alpha = 6$, potential (**16.2.15**) including SUGRA corrections, $\Omega^0_\phi = 0.7$ and $n_\mathrm{T} = 0$.

relative decrease in amplitude at these frequencies for SUGRA-like potentials depends on the dynamics of the scalar field in the bounce (see Figs. 16.4 and 16.5) during which the equation of state varies from $+1$ to -1 and to $+1$ again. Thus, during this time, the modes that had just entered into the Hubble radius (and thus which had just started to undergo damped oscillations) went out of it (during the $\omega < 0$ epoch) and their amplitude was frozen before re-entering the Hubble radius again. Hence, the modes of larger wavelengths are less damped which explains this decrease in amplitude. Now, if the slope of the potential is less steep, the bounce lasts longer (note that we always reach $\omega = -1$ at the point where $\dot\phi = 0$) and thus the damping is stronger. This signature, even if not detectable by coming experiment is nevertheless a clear feature of supergravity.

To finish, let us discuss the total energy density of gravitational waves Ω^0_GW today. As pointed out in [Giovannini, 1999a], it has also to be negligible at nucleosynthesis; this constraint is more drastic than the only requirement that Ω^0_ϕ be negligible at that time. Let us emphasize that the constraint on Ω^0_ϕ cannot be avoided (since it involves background dynamics) whereas the one on Ω^0_GW depends on A_T and n_T and thus leads to a combined constraint on the initial conditions of the scalar field and on the initial power spectrum of the gravitational waves. In addition to A_T and n_T, Ω^0_GW mainly depends on the initial values of ρ_ϕ and ρ_rad which can be parameterized by the reheating temperature T_R (related roughly to ρ_rad at that time) and the redshift z_* of equality between the kinetic scalar field era and the radiation era (related roughly to $\rho_\phi/\rho_\mathrm{rad}$ at the end of reheating). Ω^0_GW can be estimated by the surface of the spectrum below the part with a positive slope (*i.e.*, the high frequency part; see Fig. 16.9) and thus of order

$$\Omega^0_\mathrm{GW} \sim \frac{k_\mathrm{R}}{k_*}\left.\frac{\mathrm{d}\Omega_\mathrm{GW}}{\mathrm{d}\ln k}\right|_{k_*}, \tag{16.7.1}$$

where $k_{\rm R}$ and k_* are respectively the modes entering the Hubble radius at the reheating and at z_*. Thus the "bump" at short wavelength cannot be too high. Moreover, the energy density at the end of reheating cannot be higher that Planck scale, so that it fixes a limit on the shortest mode in which gravitational waves are produced. On Fig. 16.10, we first plot [left] the variation of the gravitational wave spectrum with the parameters $(T_{\rm R}, z_*)$ and we then give [right] the "safe" zone of parameters for nucleosynthesis [for $n_{\rm T} = 0$] and defined [Giovannini, 1999a] [Peebles & Vilenkin, 1999] by $\Omega^0_{\rm GW} \lesssim 10^{-6}$. Let us briefly explain how this bounds are obtained.

1. We first rephrase in terms of $T_{\rm R}$ the fact that the field is dominating at the end of the inflation phase, *i.e.*,
$$z_* < z_{\rm R} \Longleftrightarrow z_* < \alpha_1 T_{\rm R}\ , \tag{16.7.2}$$
where α_1 is some numerical coefficient. This corresponds to the solid line on Fig. 16.10.
2. We then impose that the scalar field is subdominant at nucleosynthesis, *i.e.*, that
$$z_* > 10^{10}\ . \tag{16.7.3}$$
This corresponds to the horizontal dash-dot line on Fig. 16.10.
3. At the end of the inflation phase, we want the energy density to be smaller that the Planck energy density. If the scalar field is dominating if gives
$$\rho^0_\phi \frac{(1+z_{\rm R})^6}{(1+z_*)^2}(1+z_{\rm eq}) < \rho_{\rm Pl} \Longleftrightarrow z_* > \alpha_2 T^3_{\rm R}\ , \tag{16.7.4}$$
where α_2 is another numerical coefficient. This corresponds to the dot line on Fig. 16.10. Note that since we are in a field dominated era $H^2 \propto a^2$ and thus on this "Planck limit" we have $k_{\rm R} \propto z^2_{\rm R}/z_*$ and $k_* \propto z_*$ (and thus $k_{\rm R} \propto 1/z_{\rm R}$ and $k_* \propto z^3_{\rm R}$) from which we conclude that the maximum of the power spectrum is roughly located on a curve $(1/z_{\rm R}, 1/z^4_{\rm R})$ [see Fig. 16.10].
4. To finish, we want that the gravitational waves energy density does not alter nucleosynthesis, *i.e.*, that
$$\Omega^0_{\rm GW} \lesssim 10^{-6} \Longleftrightarrow T_{\rm R} < \alpha_3 z_*\ , \tag{16.7.5}$$
where α_3 is a third numerical coefficient. This corresponds to the dot-dash line on Fig. 16.10.

For all the points $(T_{\rm R}, z_*)$ above the dotted and dot-dashed lines of Fig. 16.10 [right], there is no excess of gravitational waves. The solid line separates the two sets of initial conditions we have considered. We must emphasize that this result was obtained for $n_{\rm T} = 0$ and that the spectrum can be tilted, which modifies the bounds on the parameter set $(T_{\rm R}, z_*)$ (more precisely, taking smaller $A_{\rm T}$ or negative $n_{\rm T}$ lowers the diagonal dot-dashed line). Such constraints may be important for instance while considering models where a scalar field dominates at baryogenesis [Joyce, 1997].

In the case of a "blue" initial power spectrum (*i.e.*, with $n_{\rm T} > 0$ in our notations, or $\beta > -2$ in the notations of [Grishchuk, 2000]), as advocated for example in [Grishchuk, 2000], the flat branch of Fig. 16.9 (corresponding to the "semi-hard" branch of [Giovannini, 1999c]) is already tilted, giving as stronger constraint on our model. For instance, if $n_{\rm T} = 0.2$, the amplitude at $\nu = 10$ GHz is boosted by a factor $\simeq 3\times 10^5$. As a consequence, the quantity of gravitational waves at high frequency cannot be boosted as much as in the case of a scale invariant spectrum, and the allowed range of parameters for our model (see Fig. 16.10) is narrowed.

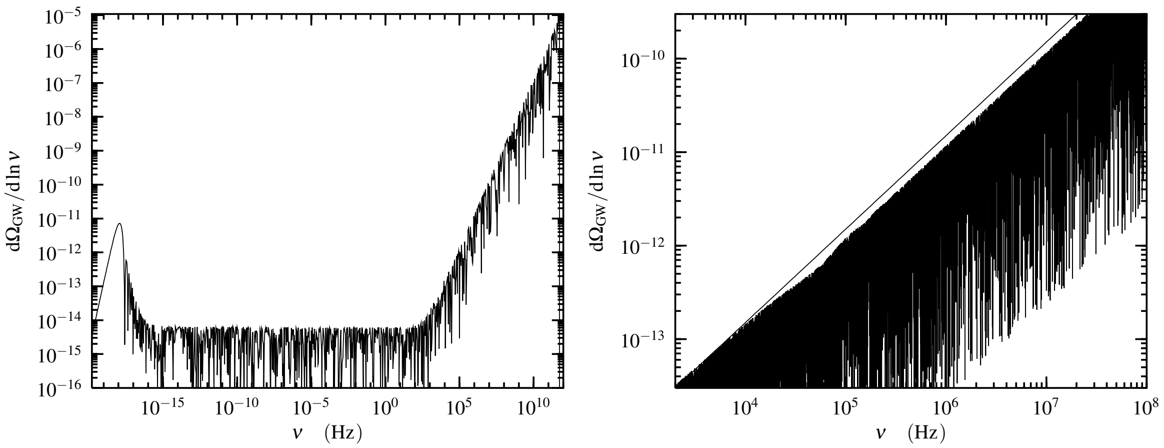


FIGURE 16.9 – Gravitational waves spectrum in a quintessence model with (IC2) initial conditions with a SUGRA-like potential. The spectrum has been normalized to be compatible with COBE at large scales. The spike in the evolution of the equation of state of the scalar field (see Fig. 16.4) yields to a loss [right] of about 20% in the amplitude of the spectrum at high frequency (*i.e.*, $> 10^4$ Hz).

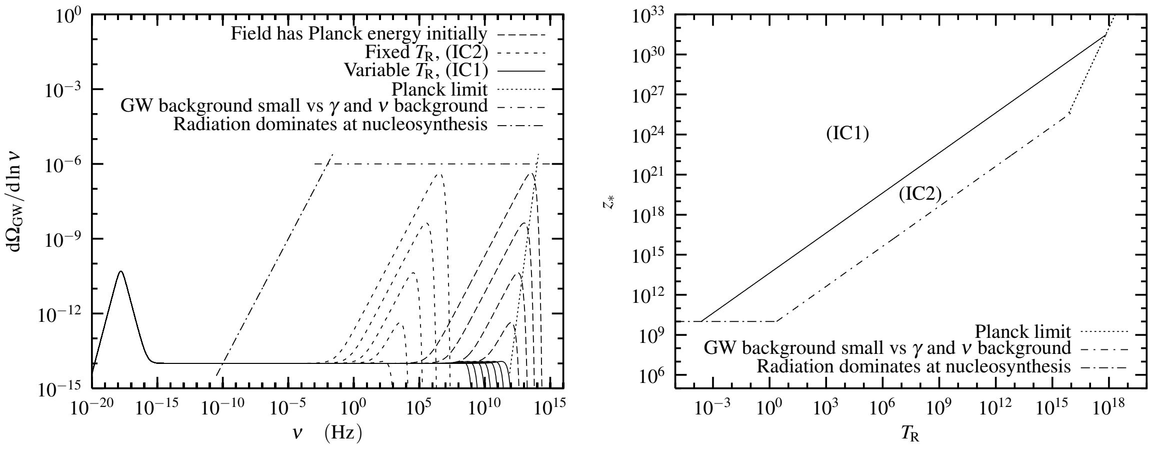


FIGURE 16.10 – Variation of the gravitational waves spectrum with the cutoff and with the epoch of transition between scalar field in kinetic regime and radiation [left] and contour plot [right] of the safe zone for nucleosynthesis for the parameter set (T_R, z_*) (above the dotted and dot-dashed lines). Both plots are for a spectral index $n_\mathrm{T} = 0$ and for maximum A_T allowed by COBE measurements. The solid line is obtained by imposing that the scalar field dominates at the end of inflation: points lying on or above this line have a corresponding solid power spectrum on the left plot. The horizontal dot-dash line is obtained by imposing that we are radiation dominated at nucleosynthesis (*i.e.*, $z_* > 10^{10}$). The diagonal dotted line is obtained by imposing that the energy density at the end of inflation is smaller than the Planck density. The diagonal dot-dashed line ("GW background … ") is obtained by imposing that $\Omega^0_\mathrm{GW} < 10^{-6}$.

8 Conclusion

In this article, we have studied some properties of quintessence models with a non-minimally coupled scalar field among which the spectrum of gravitational waves.

We have shown that such a quintessence field can behave as a fluid with $\omega < -1$ and our models lead to $-3 \lesssim \omega \lesssim 0$ when the field dominates. We related the energy scale Λ of the potential to its slope α and to the scalar field energy density today Ω_ϕ^0. In particular, we showed that Λ is almost independent of Ω_ϕ^0. The *coincidence problem*, *i.e.*, the fact that $\Omega_\phi^0 \sim 1$ implies a tuning of Λ (roughly the precision on Λ has to one order of magnitude higher than the one on Ω_ϕ^0) which is however less severe than the fine tuning needed for a cosmological constant. This being fixed, the tracking mechanism allows to span a very wide range of initial conditions for the scalar field and there is no fine tuning in that respect.

We then showed that the combined study of the gravitational waves energy spectrum and of their imprint on the CMB radiation temperature and polarization enables to extract many complementary informations on the models:

- the CMB mainly gives results on ξ, Ω_ϕ^0 and n_T,
- the energy spectrum gives results on the initial conditions of the scalar field.

As pointed out in [Giovannini, 1999a] [Peebles & Vilenkin, 1999], there is an excess of gravitational waves today if inflation ends by a kinetic phase. In that case, one has to check that both Ω_ϕ and Ω_GW are negligible at the time of nucleosynthesis and we relate the amount of gravitational waves today to the reheating temperature and the time of equality between the kinetic scalar era and the radiation era.

We also pointed out that gravitational waves are damped by the anisotropic stress of radiation, which implies that the CMB anisotropy and polarization spectra are lowered roughly by 10% for high multipoles. It was also shown that the amplitude of the gravitational waves spectrum for inverse power law potentials is $\sim$30% higher than for SUGRA-like potentials at high frequency. Indeed this is probably not detectable by coming experiments but it could ultimately lead to a signature of supergravity.

9 Acknowledgments

It is a pleasure to thank Pierre Binétruy, Nathalie Deruelle, Thibault Damour, David Langlois, Patrick Peter, and Filippo Vernizzi for fruitful discussions.

Chapitre 17

Quintessence et perturbations de densité (article)

Sommaire

Après les ondes gravitationnelles, nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution des perturbations de densité en présence d'un champ de quintessence. Comme nous l'avons vu, on peut formellement définir une densité d'énergie, une pression et une quadri-vitesse pour la quintessence. Le calcul de leur partie perturbée ne pose alors pas de problème.

D'abord, on peut définir la perturbation du champ en jauge de feuilletage plat :

$$\delta\phi^\flat = \delta\phi - \dot{\phi}\frac{C}{\mathcal{H}} . \qquad \textbf{(17.0.1)}$$

On peut également calculer les perturbations de densité en jauge de feuilletage plat[1] :

$$\delta\rho_\phi^\flat = \delta\rho_\phi - \dot{\rho}_\phi\frac{C}{\mathcal{H}} . \qquad \textbf{(17.0.4)}$$

[1]Il faut cependant prendre garde d'utiliser la "bonne" définition (covariante) de ρ_ϕ, à savoir

$$\rho_\phi \equiv \frac{1}{2}D_\mu\phi D^\mu\phi + V(\phi) , \qquad \textbf{(17.0.2)}$$

et non

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} + V(\phi) . \qquad \textbf{(17.0.3)}$$

On déduit alors (*cf* équation **4.2.28** pour la définition de X)

$$\delta\rho_\phi^\flat = \frac{\dot\phi\,\dot{\delta\phi}^\flat}{a^2} + V'\delta\phi^\flat + \frac{\dot\phi^2}{a^2}\mathrm{X}\,. \qquad \textbf{(17.0.5)}$$

De même, la perturbation de pression est définie par

$$\delta P_\phi^\flat = \frac{\dot\phi\,\dot{\delta\phi}^\flat}{a^2} - V'\delta\phi^\flat + \frac{\dot\phi^2}{a^2}\mathrm{X}\,. \qquad \textbf{(17.0.6)}$$

La perturbation de vitesse en jauge de feuilletage plat est définie par

$$v_\phi^\flat = -\frac{\delta\phi^\flat}{\dot\phi} + \frac{\Phi}{\mathcal{H}}\,. \qquad \textbf{(17.0.7)}$$

Il est en général assez peu commode de travailler avec cette variable, car quand le champ est en roulement lent, la quantité $\dot\phi$ tend vers 0. Il est donc préférable d'utiliser la variable $w^\flat$, définie par

$$w_\phi^\flat \equiv (1+\omega_\phi)v_\phi^\flat\,. \qquad \textbf{(17.0.8)}$$

Enfin, il n'existe pas de perturbation de pression anisotrope. Une différence importante avec les fluides habituels est que la perturbation d'entropie $(1+\omega_\phi)\Gamma_\phi$ n'est pas nulle en général, mais vaut

$$(1+\omega_\phi)\Gamma_\phi = (1-u_{\mathrm{s}\,\phi}^2)\left[\delta_\phi^\flat + \frac{\dot\rho_\phi}{\rho_\phi}\left(v_\phi^\flat - \frac{\Phi}{\mathcal{H}}\right)\right]\,. \qquad \textbf{(17.0.9)}$$

L'évolution des perturbations de quintessence n'est donc pas “adiabatique” au sens où nous l'avions défini auparavant. Cela s'explique par le fait que la dynamique du champ est stable vis-à-vis des perturbations. Or, si son évolution était adiabatique, les perturbations auraient dans certains cas une “vitesse du son” $u_{\mathrm{s}\,\phi}$ imaginaire pure, ce qui correspondrait à une instabilité.

En fait, on peut même montrer que les perturbations du champ suivent le même type d'attracteur que sa partie homogène : dès que la partie homogène rejoint l'attracteur, les perturbations font de même, ce qu'on montre rigoureusement pour les grandes longueurs d'onde (équations **17.3.16**, **17.3.17**). On pourrait se demander si ce résultat ne dépend pas explicitement de la jauge choisie. La forme exacte de l'attracteur (*i.e.* les valeurs vers lesquelles tendent les perturbations) dépend explicitement de la jauge, mais pas l'existence même de l'attracteur. En effet, passer d'une jauge à l'autre revient à ajouter aux différentes perturbations des quantités du type $\dot\rho\Phi/(\rho\mathcal{H})$, qui ici sont composées pour moitié d'un terme qui rejoint un attracteur au même moment ($\dot\rho_\phi/\rho_\phi$), et pour moitié d'un terme qui ne dépend pas du champ ϕ ($\Phi/\mathcal{H}$), car on se place dans l'hypothèse où le champ est sous-dominant. En définitive, le terme $\dot\rho\Phi/(\rho\mathcal{H})$ suit lui aussi un attracteur. L'importance de ce résultat vient du fait que dans ces conditions, toutes les perturbations d'intérêt cosmologique ont le temps de rejoindre l'attracteur avant la surface de dernière diffusion, ce qui rend le modèle complètement indépendant des conditions initiales sur les perturbations du champ.

Une autre question intéressante est de savoir à quel point ces scénarios font des prédictions semblables aux modèles avec constante cosmologique. La comparaison entre deux modèles, l'un (1) avec quintessence, et l'autre (2) avec constante cosmologique et tels que $\Omega_\phi^{(1)} = \Omega_\Lambda^{(2)}$ donne lieu à trois différences majeures :

– La relation taille angulaire-redshift est modifiée à bas redshift du fait que l'expansion n'est pas la même selon que c'est le champ scalaire ou la constante cosmologique qui commence à dominer (l'équation d'état n'est pas la même). Cela se traduit par un décalage dans la position des pics Doppler (*cf* figure 17.20). De plus, dans les scénarios de quintessence, la position des pics dépend explicitement de la forme du potentiel (en fait de l'équation d'état “moyenne” du champ quand il domine, *cf* figures 17.4 et 17.5).

- L'effet Sachs-Wolfe intégré tardif est modifié. Son amplitude varie en fonction du modèle. Cela a pour effet de modifier la hauteur des pics Doppler par rapport au plateau Sachs-Wolfe (*cf* figure 17.20). Il existe aussi des différences dans le spectre à petits multipoles, mais elles sont faibles et probablement inobservables en raison de la variance cosmique.
- La normalisation des perturbations à COBE affecte la normalisation du spectre de puissance de la matière, car la relation $\delta T/T \sim \frac{1}{3}\Phi$ n'est plus valable (*cf* figures 17.6 et 17.7).

La suite de ce chapitre est tirée d'un article paru dans *Physical Review D* [Brax *et al.*, 2000]. On travaille en jauge synchrone et non en jauge de feuilletage plat[2].

[2]Il faut parfois savoir se plier aux habitudes de ses collaborateurs...

An exhaustive study of cosmic microwave background anisotropies in quintessential scenarios

Philippe Brax[1*], Jérôme Martin[2†] and Alain Riazuelo[2‡]

[1] *Theory Division,*
CERN,
CH-1211 Geneva 23 (Switzerland)

[2] *Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie,*
UMR 8629 du Centre National de la Recherche Scientifique,
Observatoire de Paris, F-92195 Meudon Cedex (France)

Abstract : Recent high precision measurements of the CMB anisotropies performed by the BOOMERanG and MAXIMA-1 experiments provide an unmatched set of data allowing to probe different cosmological models. Among these scenarios, motivated by the recent measurements of the luminosity distance versus redshift relation for type Ia supernovae, is the quintessence hypothesis. It consists in assuming that the acceleration of the Universe is due to a scalar field whose final evolution is insensitive to the initial conditions. Within this framework we investigate the cosmological perturbations for two well-motivated potentials: the Ratra-Peebles and the SUGRA tracking potentials. We show that the solutions of the perturbed equations possess an attractor and that, as a consequence, the insensitivity to the initial conditions is preserved at the perturbed level. Then, we study the predictions of these two models for structure formation and CMB anisotropies and investigate the general features of the multipole moments in the presence of quintessence. We also compare the CMB multipoles calculated with the help of a full Boltzmann code with the BOOMERanG and MAXIMA-1 data. We pay special attention to the location of the second peak and demonstrate that it significantly differs from the location obtained in the cosmological constant case. Finally, we argue that the SUGRA potential is compatible with all the recent data with a standard values of the cosmological parameters. In particular, it fits the MAXIMA-1 data better than a cosmological constant or the Ratra-Peebles potential.

1 Introduction

Recent measurements of the luminosity distance versus redshift relation for type Ia supernovae [Perlmutter *et al.*, 1998] [Perlmutter *et al.*, 1999a] [Garnavich *et al.*, 1998b] [Riess *et al.*, 1998], if confirmed, are compatible with an expanding (accelerating) Universe driven by a new type of matter whose equation of state $p = \omega\rho$ is characterized by a negative ω. One of the possible explanations is the existence of a non-zero vacuum energy, *i.e.*, a "cosmological constant". Another pragmatic possibility which has been proposed is to assume the existence of a yet unknown mechanism guaranteeing that the

*Email addres: `Philippe.Brax@cern.ch`
†Email addres: `martin@edelweiss.obspm.fr`
‡Email addres: `Alain.Riazuelo@obspm.fr`

true cosmological constant vanishes, the remaining energy density being then due to the presence of a scalar field, the quintessence field, almost decoupled from ordinary matter [Ratra & Peebles, 1988] [Ferreira & Joyce, 1998] [Zlatev *et al.*, 1999] [Steinhard *et al.*, 1999]. The main difference between a quintessence fluid and a cosmological constant comes from their equation of state where $\omega_\Lambda = -1$ for a cosmological constant and $-1 \leq \omega_Q \leq 0$ for the quintessence fluid.

One of the puzzles in the interpretation of these data is the extremely small value of the energy density due to the new form of matter. From the point of view of particle physics a vanishing value for the cosmological constant is one of the major challenges [Weinberg, 1989]. At present there is no known mechanism which prevents the vacuum energy from picking large values due to radiative corrections and one expects typically a contribution equal to $(\hbar c/2) \int k \, \mathrm{d}\boldsymbol{k}/(2\pi)^3 \simeq \hbar c k_{\max}^4/(16\pi^2)$, where $k_{\max}$ is a cut-off which can naturally be taken as the Planck wavenumber. This gives a contribution which is 120 orders of magnitude above the observed one. One possibility which is often advocated is the presence of some global supersymmetry (SUSY) which would guarantee that the energy of the vacuum is zero. Unfortunately SUSY has to be broken to take into account the absence of experimental evidence in favor of particle superpartners leading to a natural contribution to the vacuum energy of order $M_{\rm SUSY}^4$ where $M_{\rm SUSY}$ is the SUSY breaking scale estimated around 1 TeV [Witten, 2000]. The measurement of a vacuum energy some 60 orders of magnitude below this expected value indicates that some new physics must be at play here.

In the quintessence hypothesis, the small vacuum energy density is due to the rolling down of the quintessence field Q along a decreasing potential. A typical potential is the Ratra-Peebles potential $V(Q) = \Lambda^{4+\alpha}/Q^\alpha$ [Ratra & Peebles, 1988]. From the particle physics point of view one would like to justify the existence of the quintessence field. Several natural candidates have been ruled out such as the axion-dilaton field [Binétruy, 1999], the moduli fields of toroidal compactifications in string theory [de la Macorra, 2002] and finally the meson fields of supersymmetric gauge theories [Brax & Martin, 2000]. Nevertheless, it seems reasonable to expect that SUSY will play a role in the solution. Within this framework it is a matter of fact that the quintessence field must be part of supergravity (SUGRA) models [Brax & Martin, 1999] [Brax & Martin, 2000]. This comes from the large value $Q \simeq m_{\rm Pl}$ of the field at small redshift which implies that SUGRA corrections cannot be neglected. In [Brax & Martin, 1999] an effective theory approach has been used to deduce the general form of quintessence SUGRA potentials, they are of the type

$$V(Q) = \frac{\Lambda^{4+\alpha}}{Q^\alpha} e^{\frac{1}{2}\kappa Q^2} , \tag{17.1.1}$$

where $\kappa \equiv 8\pi\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ being the Newton constant, and where the exponential factor comprises the SUGRA corrections. Λ and α are free parameters. The fine-tuning is not too severe as for typical values $\alpha = 6$ the scale $\Lambda \simeq 10^6$ GeV is compatible with high energy scales. Notice that the SUGRA corrections become relevant towards the end of the evolution and decouple at small $Q \ll m_{\rm Pl}$. Different types of potentials can be distinguished because they lead to different values of the equation of state parameter. For example, for $\alpha = 11$, the Ratra-Peebles potential is such that $\omega_Q \simeq -0.29$ whereas the SUGRA potential gives $\omega_Q \simeq -0.82$ [Brax & Martin, 1999] (for $\Omega_Q = 0.7$).

It is also worth noticing that there exists quintessence models where the field is non-minimally coupled with the metric. Such models induce time-variation of the Newton constant and are therefore already constrained, for example by observations in the solar system or by pulsar timing measurements [Carroll, 1998] [Chiba, 1999]. They lead to the same tracking behavior, as stressed in Refs. [Uzan, 1999, Amendola, 1999], as soon as the coupling term is proportional to a power of the potential. However, some important differences occur when the field starts dominating; for example its effective equation of state can reach extreme values such that $\omega \simeq -3$ [Riazuelo & Uzan, 2000]. Also, these models can lead (especially in the context of quintessential inflation [Peebles & Vilenkin, 1999]) to clear observable features in the gravitational waves spectrum [Giovannini, 1999a] [Giovannini, 1999c].

In view of the numerous phenomenological successes of quintessence, it is relevant to deduce its consequences for Cosmic Microwave Background (CMB) anisotropies and structure formation. The aim is two-fold. First, we have to study whether quintessence leads to acceptable scenarios and, second, we have to learn how we could use high-precision measurements recently obtained by the BOOMERanG [BOOMERanG, `http`] [de Bernardis *et al.*, 2000] [Lange *et al.*, 2001] and MAXIMA-1 [Hanany *et al.*, 2000] [Balbi *et al.*, 2000] experiments or to be performed in the near future by NASA's Microwave Anisotropy Probe (MAP) satellite [MAP, `http`], ESA's Planck satellite [PLANCK, `http`] or the Sloan Digital Sky Survey (SDSS) [Sloan, `http`] to put constraints on the quantities characterizing quintessence like $\Omega_{\rm Q}$ or $\omega_{\rm Q}$. The second possibility has of course already been investigated for the cosmological constant case. For example, the fraction Ω_Λ of the critical density is not determined entirely from the supernovae data. Indeed, the data from the supernovae observations are degenerate in the plane $(\Omega_{\rm mat}, \Omega_\Lambda)$, where $\Omega_{\rm mat}$ is the matter (*i.e.*, cold dark matter plus baryons) component preventing a clear cut determination of the fraction Ω_Λ. The situation changes drastically if one includes the measurements of the CMB anisotropies [Tegmark, 2000] (even without the BOOMERanG or MAXIMA-1 data). In that case, the degeneracy is removed leading to a probable 70% of the total energy density of the Universe carried by the negative pressure fluid while the remaining 30% are the matter components ensuring that $\Omega_0 = 1$ in agreement with a spatially flat Universe. This conclusion can be drawn from the measurements of the location of the first Doppler peak. This result has been confirmed by other measurements [Zehavi & Dekel, 1999] [Wang *et al.*, 2000] [Waga & Frieman, 2000]. Another use of combined data has been to put constraints on the equation of state parameter. However, this has been done only for constant or for very simple time-dependent $\omega_{\rm Q}$ [Perlmutter *et al.*, 1999b] [Cooray & Huterer, 1999] [Efstathiou, 2000].

CMB anisotropies and the power spectrum are calculated with the help of the theory of cosmological perturbations. Cosmological perturbations in the presence of quintessence have been studied by Ratra and Peebles but only in the tracking regime [Ratra & Peebles, 1988]. CMB multipoles moments and/or the power spectrum have already been calculated for the Ratra-Peebles potential in Ref. [Caldwell *et al.*, 1998] and for other models of quintessence in Refs. [Ferreira & Joyce, 1997] [Baccigalupi & Perrota, 1998] [Perrota *et al.*, 2000] [Ma *et al.*, 1999] [Dodelson *et al.*, 2000]. One important issue is to understand whether the final evolution of the various perturbed quantities depend on the initial conditions imposed at reheating (of the inflationary type or not). Another way to put the same problem is the following: do the multipole moments depend on the value of $\delta Q(\eta_{\rm in})$ and $\delta \dot{Q}(\eta_{\rm in})$ at initial time? In Ref. [Caldwell *et al.*, 1998], it was noticed that the answer to this question is no but no explanations were provided. Here, we confirm the remark of Ref. [Caldwell *et al.*, 1998] and show that this is due to the fact that the perturbed Einstein equations also possess an attractor which renders the multipole moments insensitive to the initial conditions.

One of the main purpose of this article is the study of the general properties of the multipoles moments of the CMB anisotropies in presence of the quintessence field. We present the CMB multipole moments for the Ratra-Peebles potential and, for the first time, for the SUGRA tracking potential. In addition, we also display the matter power spectrum for these two models. Recently, it has been shown by Kamionkowski and Buchalter [Kamionkowski & Buchalter, 2000] that the location of the second peak in the CMB power spectrum is an efficient way of revealing some features of the dark energy sector. Therefore, we pay special attention to this question. In particular, in Ref. [Kamionkowski & Buchalter, 2000], only the cosmological constant case was studied and it was argued that the quintessence case (the authors refer to the Ratra-Peebles potential) must not differ significantly from the cosmological constant case. In the present article, we demonstrate that this is not the case and that, as a matter of fact, quintessence leads to a different location (denoted, in the following, ℓ_2) of the second peak. In addition, we show that the location of the second peak in the quintessence case and in the cosmological constant case can be easily distinguished. Following Ref. [Kamionkowski & Buchalter, 2000], we display the contour plots of ℓ_2 in the plane $(\Omega_{\rm mat}, h)$ for the Ratra-Peebles and SUGRA tracking potentials.

The article is organized as follows. In §2, we give a description of the background evolution in terms of two physical quantities: the equation of state parameter $\omega_{\rm Q}$ and the sound velocity $u^2_{\rm sQ}$. In §3, we study the cosmological perturbations for the quintessence field. In §4, we present the results of full numerical calculations with the help of a Boltzmann code developed by one of us (A.R.)[3] for the CMB anisotropies and power spectra in the case of the Ratra-Peebles and SUGRA potentials. Then, detailed comparisons with the recent BOOMERanG [de Bernardis *et al.*, 2000] [Lange *et al.*, 2001] and MAXIMA-1 [Hanany *et al.*, 2000] [Balbi *et al.*, 2000] data are performed. We end with our main conclusions in 5.

2 The background evolution

We suppose that the Universe can be described by a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric the spacelike sections of which are flat

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)(-\mathrm{d}\eta^2 + \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j) \, . \tag{17.2.1}$$

In this equation, η is the conformal time related to the cosmic time by $a(\eta)\mathrm{d}\eta \equiv c\mathrm{d}t$. The matter content is as follows. The Universe is filled with a mixture of five fluids: photons (γ), neutrinos (ν), baryons (b), cold dark matter (*CDM*) and a scalar field Q named quintessence. The stress energy tensor of each of these species is the one of a perfect fluid, $T_{\alpha\beta} = (p+\rho)u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}$, where u_α is the 4-velocity of the fluid. The energy density and the pressure of the scalar field are given by $\rho_{\rm Q} = \frac{1}{2}(\dot{Q}/a)^2 + V(Q)$ and $p_{\rm Q} = \frac{1}{2}(\dot{Q}/a)^2 - V(Q)$, where $V(Q)$ is the potential of quintessence whose shape will be very important in what follows. Each fluid is also characterized by its equation of state $p_i \equiv \omega_i \rho_i$ where $i = \gamma, \nu, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ or Q. We have $\omega_\gamma = \omega_\nu = \frac{1}{3}$ and $\omega_{\rm b} = \omega_{\rm c} = 0$. The case of $\omega_{\rm Q}$ is more complicated since this is a time-dependent function such that $-1 \leq \omega_{\rm Q} \leq +1$. Its expression reads $\omega_{\rm Q} = 1 - 2V(Q)/\rho_{\rm Q}$. The fact that $\omega_{\rm Q}$ is a time-dependent function directly comes from the fact that, for a scalar field, the sound velocity defined as [Martin & Schwarz, 1998]

$$u^2_{\rm sQ} \equiv \frac{\dot{p}_{\rm Q}}{\dot{\rho}_{\rm Q}} = 1 + \frac{4a^2}{3\mathcal{H}\dot{Q}}\frac{\mathrm{d}V(Q)}{\mathrm{d}Q} = -\frac{1}{3}\left(2\frac{\ddot{Q}}{\mathcal{H}\dot{Q}} + 1\right) \, , \tag{17.2.2}$$

is not equal to the equation of state parameter $\omega_{\rm Q}$. As a consequence $\omega_{\rm Q}$ has to change in time as revealed by the following equation

$$\dot{\omega}_{\rm Q} = -3\mathcal{H}(1+\omega_{\rm Q})(u^2_{\rm sQ} - \omega_{\rm Q}) \, , \tag{17.2.3}$$

unless $\omega_{\rm Q} = -1$.

The evolution of the Universe can be calculated with the help of the Friedmann and conservation equations

$$\frac{1}{a^2}\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi}{m^2_{\rm Pl}}\sum_i \rho_i \, , \tag{17.2.4}$$

$$\dot{\rho}_i = -3\mathcal{H}(1+\omega_i)\rho_i \, , \quad i = \gamma, \nu, \mathrm{b}, \mathrm{c} \quad \text{or} \quad \mathrm{Q} \, , \tag{17.2.5}$$

[3] The code used in this paper is written in C language. It solves the system of equations of [Hu & White, 1997b] using a standard explicit 6$^{\rm th}$ order Runge-Kutta scheme. The Boltzmann hierarchy is truncated following the method of [Ma & Bertschinger, 1995].

Potential	References
$\Lambda^{4+\alpha}/Q^{\alpha}$	[Ratra & Peebles, 1988]
$\Lambda^4 e^{-\lambda Q}$	[Ratra & Peebles, 1988] [Ferreira & Joyce, 1998]
$(\Lambda^{4+\alpha}/Q^{\alpha})e^{\frac{\kappa}{2}Q^2}$	[Brax & Martin, 1999] [Brax & Martin, 2000]
$\Lambda^4(\cosh\lambda Q-1)^p$	[Sahni & Wang, 2000]
$\Lambda^4(e^{\alpha\kappa Q}+e^{\beta\kappa Q})$	[Barreiro *et al.*, 2000]
$\Lambda^4 e^{-\lambda Q}(1+A\sin\nu Q)$	[Dodelson *et al.*, 2000]
$\Lambda^4[(Q-B)^{\alpha}+A]e^{-\lambda Q}$	[Albrecht & Skordis, 2000]
$\Lambda^4[1+\cos(Q/f)]$	[Kim, 1999]

TABLE 17.1 – Quintessence potentials that have been used in the literature.

where $m_{\rm Pl}$ is the Planck mass and $\mathcal{H}\equiv \dot{a}/a$ is related to the Hubble constant by the equation $H=\mathcal{H}/a$. The equations of conservation simply express the fact that the energy is conserved for each species which do not interact. The equation of conservation of the quintessence field can also be written as the Klein-Gordon equation

$$\ddot{Q}+2\mathcal{H}\dot{Q}+a^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}Q}=0\,. \qquad \textbf{(17.2.6)}$$

We now need to give the last piece of information necessary to have a complete description of the system, *i.e.*, the shape of the potential $V(Q)$. In order to be an interesting theory and to represent an improvement over the current situation, quintessence has to address the following four problems: the fine-tuning problem, the coincidence problem, the equation of state problem and the model building problem. The fine-tuning problem amounts to understanding whether one can have $\Omega_{\rm Q}\simeq 0.7$ with the free parameters of the potential taking "natural" values, *i.e.*, close to the energy scale of the theory under consideration. The coincidence problem is the question of the initial conditions: does the final value of $\rho_{\rm Q}$ strongly depend on the chosen initial values of Q and $\dot{Q}$? The equation of state problem is the question of the value of $\omega_{\rm Q}$. In order to be compatible with observational data, it should be such that $-1<\omega_{\rm Q}<0$. According to recent papers, even more stringent restrictions can be put, namely $-1<\omega_{\rm Q}<-0.6$ [Wang *et al.*, 2000] or even $-1<\omega_{\rm Q}<-0.8$ [Efstathiou, 2000]. In particular, this already rules out a network of cosmic strings since the corresponding fluid has an equation of state parameter equal to $-\frac{1}{3}$. Finally, the model building problem consists in justifying the shape of the potential from the high energy physics point of view. Many different shapes of potential which allow, at least partially, to solve these problems have been investigated in the literature and Table 17.1 summarizes these proposals. In particular, the first possibility has been studied thoroughly in the past years. In this article, we will mainly concentrate on the Ratra-Peebles potential [Ratra & Peebles, 1988] and the SUGRA tracking potential [Brax & Martin, 1999] [Brax & Martin, 2000].

Let us briefly see how the four questions evoked previously can be addressed with these potentials.

2.1 The fine-tuning problem

Let us start with the fine-tuning problem which is clearly a delicate question. This problem is crucial [Weinberg, 1989] for the cosmological constant. Indeed, from very simple high energy physics considerations, one typically expects $\rho_\Lambda\simeq m_{\rm Pl}^4\simeq 10^{76}$ GeV^4 whereas one measures $\rho_\Lambda\simeq\Omega_\Lambda\rho_{\rm crit}\simeq$

10^{-47} GeV^4 since the critical energy density is $\rho_{\rm crit} \simeq 8.1h^2 \times 10^{-47}$ GeV^4. Do we gain something in the case of quintessence? This question is controversial. For example in Ref. [Battye *et al.*, 1999a], the authors clearly answer no and write "Two proposals to explain these observations are a non-vanishing cosmological constant or a very slowly rolling scalar field, often dubbed *quintessence*. Both proposals, however, are plagued with formidable fine tuning problems". However, one should look more carefully at this point. To illustrate this issue, let us consider the general argument given against quintessence. If we consider the potential $V(Q) = \frac{1}{2}m^2Q^2$ then the mass of such a field, which is also the only free parameter of the potential, should be $m = \sqrt{2\Omega_{\rm Q}\rho_{\rm crit}}/m_{\rm Pl} \simeq 10^{-33}$ eV, a very tiny mass indeed. Justifying such a value for the free parameter m is probably the same problem as justifying a very low value for ρ_Λ. However, such a model has never been advocated for the quintessence field. As already mentioned above, one typically considers models such that $V(Q) = \Lambda^{4+\alpha}/Q^\alpha$. This changes the argument. Now, the free parameter of the theory is Λ. In order to have $\rho_{\rm Q} = \Omega_{\rm Q}\rho_{\rm crit}$ today, one has $\Lambda \simeq 10^{11}$ GeV, for $\alpha = 11$. This time, the free parameter of the theory has a value comparable to the natural scales of high energy physics. Therefore, something has been gained and it seems unfair not to emphasize this point. On the other hand the mass of the field is given by $m = \alpha(\alpha+1)\Omega_{\rm Q}\rho_{\rm crit}/m_{\rm Pl}^2 \simeq 10^{-33}$ eV but this number should be interpreted completely differently. Here the mass m is just a "by-product" and its value is naturally very small without any artificial fine-tuning of Λ. Of course the very small value of the mass implies that the quintessence field is almost completely decoupled from the other matter fields. This renders the model building issue even more acute.

2.2 The coincidence problem

The coincidence problem as formulated in the introduction, *i.e.*, the dependence upon the initial conditions, is solved because the Klein-Gordon equation possesses an attractor. In order to prove this property, we have to rely either on numerical calculations or on approximate methods. All the plots and numerical estimates displayed in this article will be made with the help of numerical calculations. However, it is always useful to understand the tracking property by means of analytical methods and we now turn to this question. It is convenient, for analytical calculations, to consider that there is in fact only one "background" fluid with a time dependent equation of state such that $\omega_{\rm B} = \frac{1}{3}$ during the radiation dominated epoch and $\omega_{\rm B} = 0$ during the matter dominated era. In addition to the background fluid, we assume that there also exists the quintessence scalar field field. Following the treatment of Ratra and Peebles [Ratra & Peebles, 1988], it will be considered that this scalar field is a test field. This is a good approximation since this field must be sub-dominant in particular during Big Bang Nucleosynthesis (BBN) in order not to modify the behavior of the scale factor and, as a consequence, not to spoil the success of BBN. This means that the behavior of the scale factor is essentially determined by the background fluid and that $\sum_i \rho_i \simeq \rho_{\rm B}$. This hypothesis breaks down at very small redshift when quintessence starts dominating the matter content of the Universe. Since quintessence is only a test field which does not interact with the background fluid, the scale factor and the quantity $\mathcal{H}$ can be written as

$$a(\eta) \propto \eta^{\frac{2}{1+3\omega_{\rm B}}} , \quad \mathcal{H}(\eta) = \frac{2}{(1+3\omega_{\rm B})\eta} . \qquad \textbf{(17.2.7)}$$

For the sake of illustration, let us now consider the radiation dominated era where $\omega_{\rm B} = \frac{1}{3}$. Under the previous assumptions, the Klein-Gordon equation has a particular solution given by

$$Q_{\rm part} = Q_0 \eta^{\frac{4}{\alpha+2}} , \qquad \textbf{(17.2.8)}$$

where Q_0 is a constant which depends on the free parameters of the potential, *i.e.*, Λ and α. The tracking behavior is revealed by the behavior of small perturbations around $Q_{\rm part}$. Let us introduce the new time τ defined by $\eta \equiv e^\tau$ and define u and p by $Q = Q_{\rm part}u$ and $p = {\rm d}u/{\rm d}\tau$. The Klein-Gordon equation, viewed as a dynamical system in the plane (p,u), possesses a critical point $(0,1)$ and small perturbations around this point $\delta u, \delta p$ obey the following equation

$$\frac{\rm d}{{\rm d}\tau}\begin{pmatrix}\delta p\\ \delta u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\alpha+10}{\alpha+2} & -\frac{4(\alpha+6)}{\alpha+2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta p\\ \delta u\end{pmatrix} . \tag{17.2.9}$$

Solutions to the equation $\det(M-\lambda I)=0$, where M is the matrix defined above, are given by

$$\lambda_\pm = -\frac{\alpha+10}{2(\alpha+2)} \pm \frac{i}{2(\alpha+2)}\sqrt{15\alpha^2+108\alpha+92}\,. \tag{17.2.10}$$

The real part of $\lambda_\pm$ is always negative and the critical point is a spiral point. Therefore, every solution will tend to $Q = Q_{\rm part}$ after an intermediate regime: $Q = Q_{\rm part}$ is an attractor and no fine-tuning of the initial conditions is required.

Before reaching the attractor, the quintessence field undergoes different regimes that we are now going to describe. These regimes are in fact characterized by two physical quantities already introduced previously: the equation of state parameter $\omega_{\rm Q}$ and the sound velocity $u_{\rm sQ}^2$. We study the case of an "overshoot", in the terminology of Ref. [Steinhard *et al.*, 1999], since this corresponds to initial conditions that are physically more relevant (in particular this includes the case of equipartition, *i.e.*, $\rho_{\rm Q} \simeq 10^{-4}\rho_{\rm B}$ initially). We also assume that the background is radiation dominated $\omega_{\rm B} = \frac{1}{3}$.

Initially, the kinetic energy dominates the potential energy, *i.e.*, $\dot{Q}^2/(2a^2) \gg V(Q)$. This means that the energy density redshifts as $\rho_{\rm Q} \propto a^{-6}$ and that the equation of state parameter is $\omega_{\rm Q} = 1$. As a consequence, due to the constancy of $\omega_{\rm Q}$ and Eq. (**17.2.3**) (and also $\omega_{\rm Q} \neq -1$), we have $u_{\rm sQ}^2 = 1$ as well. The scalar field itself evolves like

$$Q = Q_{\rm f} - \frac{A}{a}\,, \tag{17.2.11}$$

where $Q_{\rm f}$ and A are constant. These constants are such that the term A/a becomes rapidly small in comparison with the frozen value $Q_{\rm f}$ and we have the amusing situation that the field can be (almost) considered as frozen even if the kinetic energy still dominates. This is illustrated in Fig. 17.1.

As a consequence, during this regime the potential energy is also almost constant except at the very beginning. Using the definition of $\omega_{\rm Q}$ and $u_{\rm sQ}^2$, see Eq. (**17.2.2**), we deduce that, during the kinetic regime, we have

$$\omega_{\rm Q} - 1 \propto a^6\,, \quad u_{\rm sQ}^2 - 1 \propto a^5\,. \tag{17.2.12}$$

The fact that, in the parameterization adopted here, the scale factor is very small during the kinetic regime explains that there is no contradiction between these equations and the values of $\omega_{\rm Q}$ and $u_{\rm sQ}^2$ deduced above.

Since the kinetic energy decreases while the potential energy is almost constant, the kinetic regime cannot last forever. When the potential energy becomes larger than the kinetic one, the equation of state parameter suddenly jumps from $+1$ to -1 while the sound velocity still remains equal to $+1$ since Eq. (**17.2.3**) does not imply a change of this quantity in the case $\omega_{\rm Q} = -1$. The fact that the equation of state parameter changes before the sound velocity is explained by

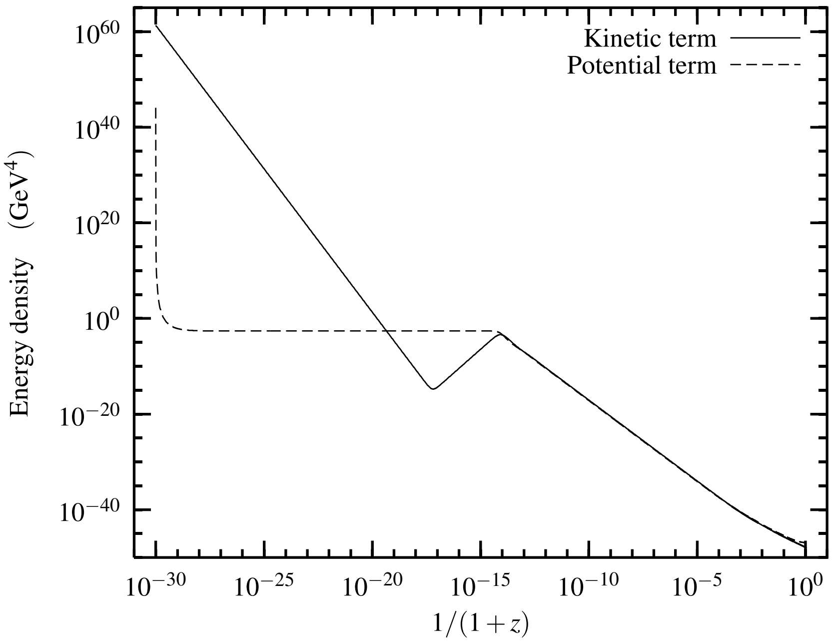


FIGURE 17.1 – Evolution of the kinetic energy (solid line) and of the potential energy $V(Q)$ (dashed line) from $z_{\rm in} = 10^{30}$ to $z = 0$.

Eq. (**17.2.12**). We call this regime the transition regime. During this regime, the kinetic energy still redshifts as a^{-6} and $V(Q)$ is approximately constant but of course now $\rho_{\rm Q} \simeq V(Q)$.

Due to the second of Eq. (**17.2.12**), the sound velocity has also to change at some later time. This implies that the quintessence field can no longer behave according to Eq. (**17.2.11**). This is the starting point of the potential regime. In order to study the behavior of the system in this regime, we need to find an expression for the second derivative of the potential. Differentiating once the definition of the sound velocity, Eq. (**17.2.2**), we arrive at

$$\frac{\mathrm{d}^2V(Q)}{\mathrm{d}Q^2} = \frac{3}{2}H^2\left(\frac{1}{\mathcal{H}}\dot{u}^2_{\rm sQ} + (u^2_{\rm sQ}-1)\left[\frac{\dot{\mathcal{H}}}{\mathcal{H}^2} - \frac{1}{2}(3u^2_{\rm sQ}+5)\right]\right) . \qquad (\mathbf{17.2.13})$$

No approximation has been made in the derivation of this relation. This formula generalizes Eq. (3) of Ref. [Zlatev *et al.*, 1999]. This formula will turn out to be very useful when we study the perturbations in the next section. With the scale factor given by Eqns (**17.2.7**), this relation can be re-written as

$$\frac{2}{3H^2}\frac{\mathrm{d}^2V(Q)}{\mathrm{d}Q^2} = \frac{1}{\mathcal{H}}\dot{u}^2_{\rm sQ} - 3(u^2_{\rm sQ}-1)(\omega_{\rm B}+u^2_{\rm sQ}+2) . \qquad (\mathbf{17.2.14})$$

In the regime we are interested in, the r.h.s of the previous formula is small. The only way to satisfy this relation is to ensure that the sound velocity changes to the constant $u^2_{\rm sQ} = -2-\omega_{\rm B}$. This gives $u^2_{\rm sQ} = -\frac{7}{3}$ for the radiation dominated era. This evolution is displayed in Fig. 17.2.

The fact that the sound velocity is a constant implies that the factor $(4a^2)/(3\mathcal{H}\dot{Q})\mathrm{d}V(Q)/\mathrm{d}Q$ is also a constant. Therefore, the behavior of the quintessence field is now given by

$$Q = Q_{\rm f} + Ba^4 , \qquad (\mathbf{17.2.15})$$

which implies that the kinetic energy redshifts as a^4.

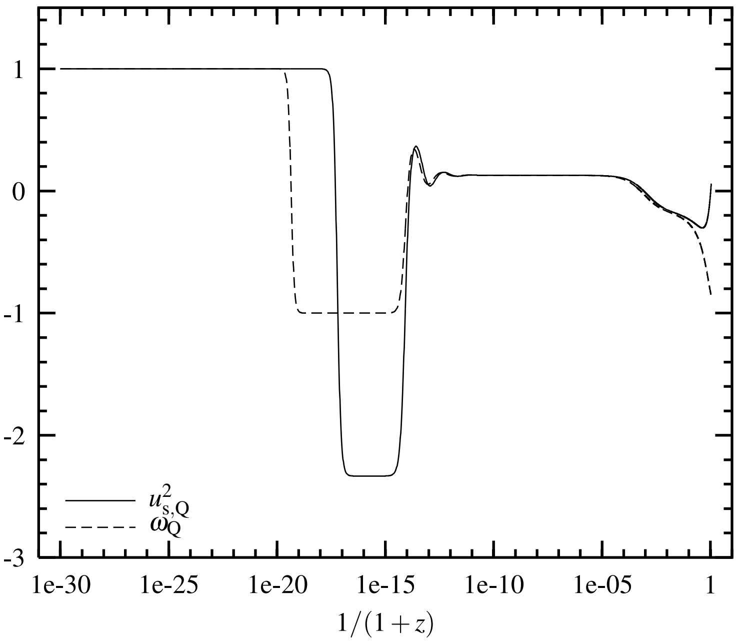


FIGURE 17.2 – Evolution of the equation of state parameter ω_Q (dashed line) and of the sound velocity u^2_{sQ} (solid line) from $z_{in} = 10^{30}$ to $z = 0$.

Regime	$\dot{Q}^2/(2a^2)$	$V(Q)$	Q	ω_Q	u^2_{sQ}
Kinetic	a^{-6}	a^0	$Q_f - A/a$	1	1
Transition	a^{-6}	a^0	$Q_f - A/a$	-1	1
Potential	a^4	a^0	$Q_f + Ba^4$	-1	$-\frac{7}{3}$
Tracking	$a^{-3(1+\omega_Q)}$	$a^{-3(1+\omega_Q)}$	$a^{\frac{4}{\alpha+2}}$	$\frac{\alpha\omega_B-2}{\alpha+2}$	ω_Q

TABLE 17.2 – Summary of the different regimes described in the text.

Again this regime cannot last forever since the kinetic energy increases while the potential energy still remains constant. At some later time, both contributions become equal and ω_Q and u^2_{sQ} have to change once more. This is the end of the potential regime and the beginning of the tracking regime which has already been described above. The quantities p_Q, ρ_Q, V and the kinetic energy reach a fixed ratio such that

$$\omega_Q = u^2_{sQ} = -\frac{2-\alpha\omega_B}{2+\alpha} . \qquad \textbf{(17.2.16)}$$

The definitions of the different regimes and the corresponding evolutions of the physically relevant quantities are summed up in Table 17.2.

2.3 The equation of state parameter problem

The third question evoked previously was the question of the value of the parameter ω_Q today. As already mentioned, this is an important issue since constraints on this quantity are already available. This problem is also solved by quintessence in the sense that we always have $-1 < \omega_Q < 0$. Here, however, it is relevant to distinguish between the Ratra-Peebles potential and the

SUGRA potential. With the first potential, it seems difficult to reach sufficiently small value of ω_Q. On the other hand, this is automatically achieved in the second case. The reason for this is the presence of the factor $\exp(\frac{1}{2}\kappa Q^2)$ in the potential, a generic feature of SUGRA-based potentials, which drives ω_Q towards -1. For $\alpha = 11$ and $\Omega_c \simeq 0.3$, the prediction is $\omega_Q \simeq -0.82$ a value in agreement with the current data [Brax & Martin, 1999] [Brax & Martin, 2000].

2.4 The model building problem

From the particle physics point of view, one would like to justify the existence of the quintessence field and the shapes of the (so far) phenomenological potentials. Several attempts have already been made in the framework of supersymmetric field theory. In particular, it was shown by Binétruy [Binétruy, 1999] that the Ratra-Peebles potential can be recovered in the context of global SUSY. However, as already mentioned, SUGRA corrections must be taken into account and this implies that the corresponding potential can be of the type of the SUGRA tracking potential displayed in Eq. (**17.1.1**) which leads to a better agreement with the available data.

Nevertheless, it should be clear that considerable problems remain to be addressed in order to reach a satisfactory situation [Carroll, 1998] [Kolda & Lyth, 1999]. Maybe the most crucial question is the problem of SUSY breaking. SUSY must certainly be broken but the models evoked previously do not take into account this basic fact. This could have dramatic consequences and modify the shape of the potential which is so important in order to solve the three previous problems.

3 The cosmological perturbations

We now turn to the study of the cosmological perturbations. A detailed study has already been performed by Ratra and Peebles in Ref. [Ratra & Peebles, 1988] but only for the tracking regime. Cosmological perturbations in a fluid with a constant negative equation of state parameter have been investigated in Ref. [Fabris & Martin, 1997]. In this article, we study the cosmological perturbations (in the long wavelength approximation) in all the regimes previously described and point out some additional properties. The evolution of the cosmological perturbations mainly depends on the equation of state parameter and the sound velocity. We have shown in the previous section that they can be considered as constant in each regime. This will simplify the analysis a lot.

The fate of the perturbations depends on the initial conditions. It has been noticed for the first time in Ref. [Caldwell *et al.*, 1998] that "the observable fluctuation spectrum is insensitive to a broad range of initial conditions, including the case in which the amplitudes of δQ, $\delta\dot{Q}$ are set by inflation". In that paper, the authors choose $\delta Q = \delta\dot{Q} = 0$ initially (in the synchronous gauge). We demonstrate, in this section, that the insensitivity of the spectrum described in Ref. [Caldwell *et al.*, 1998] has an origin similar to the insensitivity of the background properties with respect to the initial conditions Q and $\dot{Q}$, namely the presence of an attractor for the perturbed quantities. We prove that during all the four regimes undergone by the quintessence field, the attractor is characterized by a "spiral fixed point" as it is the case for the background.

3.1 General framework

Without loss of generality, the perturbed line element can be written in the synchronous gauge. In this class of coordinates systems, scalar perturbations are completely described by two arbitrary functions. The spatial dependence of the perturbations is given by $X(x^i)$ which is the eigenfunction of the Laplace operator on the flat spacelike hypersurface. There exists two ways to construct a two rank tensor from a scalar function: either by multiplying it by the spatial background flat metric δ_{ij} or by differentiating it twice. The two arbitrary functions mentioned above are simply the coefficients of these two terms in a Fourier expansion. Therefore, the perturbed metric can be expressed as [Grishchuk, 1994]

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left(\mathrm{d}\eta^2 + \left[(1+h(\eta)X)\,\delta_{ij} + h_l(\eta)\frac{1}{k^2}X_{,i,j}\right]\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right) . \qquad \textbf{(17.3.1)}$$

In this equation, the dimensionless quantity $\boldsymbol{k}$ is the comoving wavevector related to the physical wavevector $\boldsymbol{k}^{\mathrm{phys}}$ through the relation $\boldsymbol{k}^{\mathrm{phys}} \equiv \boldsymbol{k}/a(\eta)$. As a consequence of Einstein equations, perturbations in the metric are coupled to perturbations in the different matter components. We choose to write the perturbed stress-energy tensor according to [Grishchuk, 1994]

$$T^0_0 = -\frac{\varepsilon_1}{a^2}X\ , \quad T^0_i = \frac{\dot{\xi}}{a^2}X_{,i}\ , \quad T^i_0 = -\frac{\dot{\xi}}{a^2}X^{,i}\ , \quad T^i_j = \frac{p_1}{a^2}X\delta^i_j\ , \qquad \textbf{(17.3.2)}$$

where we have assumed that the longitudinal pressure p_l vanishes for each component. As for the background, one considers that the Universe is filled with two fluids: the background fluid, an hydrodynamical perfect fluid which is either radiation or dust (again, the corresponding quantities will carry the index B) and a scalar field Q describing the quintessence field (in this case the corresponding quantities will carry the index Q). The perturbed Einstein equations which govern the evolution of the quantities h and h_l are given by:

$$3\mathcal{H}\dot{h} + k^2h - \mathcal{H}\dot{h}_l = \kappa\varepsilon_{1\mathrm{B}} + \kappa\varepsilon_{1\mathrm{Q}}\ , \qquad \textbf{(17.3.3)}$$

$$\dot{h} = \kappa\dot{\xi}_{\mathrm{B}} + \kappa\dot{\xi}_{\mathrm{Q}}\ , \qquad \textbf{(17.3.4)}$$

$$-\ddot{h} - 2\mathcal{H}\dot{h} = \kappa p_{1\mathrm{B}} + \kappa p_{1\mathrm{Q}}\ , \qquad \textbf{(17.3.5)}$$

$$\ddot{h}_l + 2\mathcal{H}\dot{h}_l - k^2h = 0\ . \qquad \textbf{(17.3.6)}$$

Finally, it turns out to be more convenient to work with the density contrast δ and the velocity divergence θ defined by the equations:

$$\delta \equiv \frac{\varepsilon_1}{a^2\varepsilon_0}\ , \quad \dot{\xi} \equiv -\frac{a^3\varepsilon_0}{k^2}(1+\omega)\theta\ . \qquad \textbf{(17.3.7)}$$

In the following, we study analytically the time evolution of the density contrast for the background fluid and for quintessence in the long wavelength limit.

3.2 The background fluid

The equation satisfied by the background density contrast has been established in the Appendix, see Eq. (**17.6.5**) and can be written as

$$\ddot{\delta}_{\mathrm{B}} + \mathcal{H}\dot{\delta}_{\mathrm{B}} - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+3\omega_{\mathrm{B}})(1+\omega_{\mathrm{B}})\delta_{\mathrm{B}} = -3\mathcal{H}\omega_{\mathrm{B}}(1+\omega_{\mathrm{B}})a\theta_{\mathrm{B}}\ , \qquad \textbf{(17.3.8)}$$

Its general solution can be easily found and reads

$$\delta_{\mathrm{B}}(\eta) = A_1\left(\frac{a}{a_0}\right)^{x_+} + A_2\left(\frac{a}{a_0}\right)^{x_-} + \frac{\omega_{\mathrm{B}}(1+\omega_{\mathrm{B}})(1+3\omega_{\mathrm{B}})a_0\theta_{\mathrm{B}0}\eta_0}{(1-\omega_{\mathrm{B}})(1+6\omega_{\mathrm{B}})}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}(9\omega_{\mathrm{B}}-1)}\ , \qquad \textbf{(17.3.9)}$$

ω_B	x_-	x_+	$\frac{1}{2}(9\omega_B - 1)$
$\frac{1}{3}$	-2	2	1
0	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

TABLE 17.3 – Time dependence of the background fluid density contrast during radiation and matter dominated era.

where we have defined

$$x_\pm \equiv -\frac{(1-3\omega_B)}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{(1-3\omega_B)^2 + 24(1+\omega_B)(1-3\omega_B)}\,. \qquad \textbf{(17.3.10)}$$

The results for the radiation dominated and matter dominated epochs are summarized in Table 17.3. These results are consistent with those obtained in Ref. [Peebles, 1980]. In particular, it can be shown that the branch $\delta_B \propto a^{x_-}$ corresponds in fact to a residual gauge mode, *i.e.*, there exists a synchronous system of coordinates such that this mode can be removed and therefore must not be considered as a physical mode.

3.3 Quintessential perturbations

We now describe how the long wavelength quintessential perturbations evolve with time. A similar study has already been performed by Ratra and Peebles but only on the tracking solution. We give here a complete description of the evolution of the quintessence density contrast in the four regimes defined in the previous section. In addition, we prove that there exists an attractor for the perturbations as it is the case for the background solution. As a consequence, the final value of the density contrast is always the same whatever the initial conditions are.

The Klein-Gordon equation satisfied by the perturbed quintessence field δQ has been established in the Appendix [see Eq. (**17.6.12**)] and reads

$$\ddot{\delta Q} + 2\mathcal{H}\dot{\delta Q} + \left[k^2 + a^2\frac{\mathrm{d}^2V(Q)}{\mathrm{d}Q^2}\right]\delta Q + \frac{\dot{Q}}{2}(3\dot{h} - \dot{h}_l) = 0\,. \qquad \textbf{(17.3.11)}$$

This is similar to Eq. (7.20) of Ref. [Ratra & Peebles, 1988]. One can check that Eq. (**17.6.8**) is automatically verified since it is equivalent to the unperturbed Klein-Gordon equation (times an unimportant factor). Using Eq. (**17.6.1**) to express the factor $3\dot{h} - \dot{h}_l$ and neglecting the k^2 term, we arrive at

$$\ddot{\delta Q} + 2\mathcal{H}\dot{\delta Q} + a^2\frac{\mathrm{d}^2V(Q)}{\mathrm{d}Q^2}\delta Q = \dot{Q}a\theta_B + \frac{\dot{Q}}{1+\omega_B}\dot{\delta}_B\,. \qquad \textbf{(17.3.12)}$$

We are now going to analyze this equation in detail. We now need to utilize the general expression for the second derivative of the potential, Eq. (**17.2.13**). On the tracking solution, we have $\omega_Q = u_{sQ}^2$ and $\omega_Q = (-2+\alpha\omega_B)/(2+\alpha)$ and this equation reduces to

$$\frac{\mathrm{d}^2V(Q)}{\mathrm{d}Q^2} = \frac{9}{2}H^2\frac{\alpha+1}{\alpha}(1-\omega_Q^2)\,. \qquad \textbf{(17.3.13)}$$

For our purpose, as proven in the previous section, it is sufficient to consider a regime where u_{sQ}^2 is constant and where the scalar field is a test field. Under these conditions, we obtain

$$\frac{\mathrm{d}^2V(Q)}{\mathrm{d}Q^2} = \frac{3}{4}H^2(1-u_{sQ}^2)(6+3\omega_B+3u_{sQ}^2)\,. \qquad \textbf{(17.3.14)}$$

Let us now concentrate on the homogeneous part of Eq. (**17.3.12**). Using the previous equation, it can be expressed as

$$\ddot{\delta Q}+\frac{4}{1+3\omega_{\rm B}}\frac{1}{\eta}\dot{\delta Q}+\frac{3}{(1+3\omega_{\rm B})^2}\frac{1}{\eta^2}(1-u_{\rm sQ}^2)(6+3\omega_{\rm B}+3u_{\rm sQ}^2)\delta Q=0\,. \qquad (\mathbf{17.3.15})$$

This linear equation can easily be solved: its solutions are just power law of the conformal time. However, in order to show explicitly the complete analogy with the background attractor, we choose to analyze it in a rather roundabout way. Let us proceed exactly as for the unperturbed Klein-Gordon equation [see the discussion around Eq. (**17.2.9**)]. We define the time τ by $\eta\equiv e^{\tau}$ and introduce the quantity δu and δp defined by $\delta u\equiv\delta Q$ and $\delta p\equiv {\rm d}(\delta Q)/{\rm d}\tau$. Then, Eq. (**17.3.15**) can re-expressed as

$$\frac{\rm d}{{\rm d}\tau}\begin{pmatrix}\delta p\\ \delta u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3(\omega_{\rm B}-1)}{1+3\omega_{\rm B}} & \frac{9(u_{\rm sQ}^2-1)}{(1+3\omega_{\rm B})^2}(2+\omega_{\rm B}+u_{\rm sQ}^2)\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta p\\ \delta u\end{pmatrix}\,. \qquad (\mathbf{17.3.16})$$

The form of this equation clearly shows the complete analogy with Eq. (**17.2.9**). The eigenvalues of the system are found by solving the equation $\det(M-\lambda I)=0$, where M is the matrix defined above and I the identity matrix. Straightforwards calculations show that the solutions are given by

$$\lambda_{\pm}=\frac{3}{2}\frac{\omega_{\rm B}-1}{1+3\omega_{\rm B}}\left[1\pm\sqrt{1+4\frac{u_{\rm sQ}^2-1}{(\omega_{\rm B}-1)^2}(2+\omega_{\rm B}+u_{\rm sQ}^2)}\right]\,. \qquad (\mathbf{17.3.17})$$

Of course, this is just a simple rephrasing of the fact that the solution of Eq. (**17.3.15**) is $\delta Q\propto A_+\eta^{\lambda_+}+A_-\eta^{\lambda_-}$. The presence of an attractor is linked to the negative sign of the real part of $\lambda_{\pm}$. It is easy to see that the real part is always negative in all four regimes, in particular this is true for any value of α. This is displayed in Fig. 17.3 in the plane $(\omega_{\rm B},u_{\rm sQ}^2)$. The light grey and dark grey regions are the regions where these real parts are negative. The light grey region is the region where the argument of the square root is negative, *i.e.*, where the square root is an imaginary number. The exact "trajectories" of the system for the usual tracking potential (short line) and for the SUGRA tracking potential (long line) are also shown for the case $\alpha=11$. They have been obtained by full numerical integration. The remarkable property is that these trajectories are always in the stable region. This means that, in each region, the system tends to an attractor which is given by the inhomogeneous part of the perturbed Klein-Gordon equation. The system starts at $\omega_{\rm B}=\frac{1}{3}$ and goes from $u_{\rm sQ}^2=1$ to $u_{\rm sQ}^2=-\frac{7}{3}$. Then, the system approaches the transition to the matter dominated era and leaves the vertical line. Finally, it stops when the redshift vanishes at $\omega_{\rm B}\simeq-0.29$ for the tracking potential and at $\omega_{\rm B}\simeq-0.82$ for the SUGRA tracking potential. The two lines separate when the exponential factor becomes important in the SUGRA tracking potential.

The conclusion is that the final value of the quintessence perturbations is insensitive to the initial conditions, a property completely similar to what has been shown in Ref. [Steinhard *et al.*, 1999] for the background. Strictly speaking, this property has been demonstrated for long wavelength modes only. However, we have checked by numerical calculations that this is also true for shorter wavelength modes. Having proven that the final result does not depend on the initial conditions of the quintessence perturbations, we can now proceed further and embark in a rather detailed study of the CMB anisotropies predictions in the presence of quintessence.

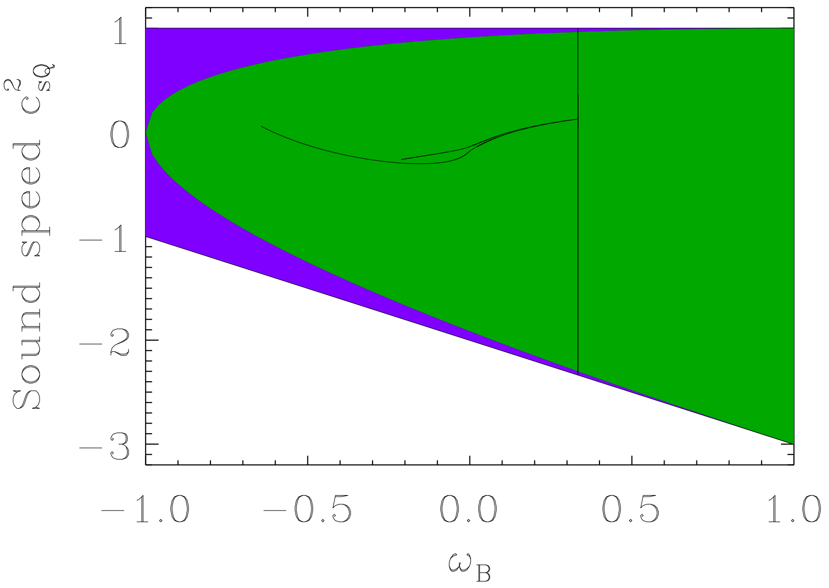


FIGURE 17.3 – Stability region for the quintessential perturbations. The light grey and the dark grey regions constitute the stable region. The light grey region is the region where the square root is an imaginary number. Two trajectories of the system for the tracking potential (shortest line) and the SUGRA tracking potential (longest line) are also displayed for the value $\alpha = 11$.

4 Predictions for the power spectrum and the multipole moments

The presence of cosmological perturbations induces directional variations in the CMB photon redshift. This is the so-called Sachs-Wolfe effect [Sachs & Wolfe, 1967]. Since these variations are the same regardless of the wavelength of the photons, they translate into variations in the temperature of the black body on the celestial sphere. Their amplitude has been measured by the COBE satellite and is of the order of magnitude $\delta T/T_0 \simeq 10^{-5}$ [Smoot *et al.*, 1992] [Bennett *et al.*, 1996]. The detailed angular structure of the CMB anisotropies is usually characterized by the two-point correlation function which can be expanded according to

$$\left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{e}}_1)\frac{\delta T}{T}(\hat{\boldsymbol{e}}_2)\right\rangle = \frac{1}{4\pi}\sum_{\ell}(2\ell+1)C_\ell P_\ell(\cos\gamma)\,, \qquad \textbf{(17.4.1)}$$

where γ is the angle between the directions $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ and $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ and P_ℓ is a Legendre polynomial. The coefficients C_ℓ are the multipole moments. In what follows, we will be mainly interested in the so-called band power δT_ℓ defined by the following expression

$$\delta T_\ell \equiv T_0\sqrt{\ell(\ell+1)\frac{C_\ell}{2\pi}}\,, \qquad \textbf{(17.4.2)}$$

where $T_0 \simeq 2.7\,\mathrm{K}$. The band power has now been measured on a wide range of angular scales from $10'$ to 90° corresponding roughly to $\ell \in [2, 700]$. Almost 80 data points have been measured. Recently new data obtained by the balloon-borne experiments BOOMERanG [de Bernardis *et al.*, 2000]

[Lange *et al.*, 2001] and MAXIMA-1 [Hanany *et al.*, 2000] [Balbi *et al.*, 2000] have been published. They clearly show a detection of the first Doppler peak at the expected angular scale $\simeq 1^\circ$ corresponding to the size of the Hubble radius at recombination.

On the theoretical side, the multipoles moments depend on the initial spectra for scalar and tensor modes and on how the perturbations evolve from the initial time (after inflation) until now. This evolution is determined by the values of the cosmological parameters, *i.e.*, by the value of the Hubble constant (h), of the total amount of matter present in our Universe (Ω_0), of the cosmological constant (Ω_Λ), of the baryons density parameter (Ω_b) and of the cold dark matter density parameter (Ω_c). Constraints already exist on some of these parameters. In particular, as already mentioned above, $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ according to the SN Ia measurements and $h^2\Omega_\mathrm{b} \simeq 0.019 \pm 0.002$ according to BBN [Olive *et al.*, 2000] [Nolleth & Burles, 2000]. We also assume $\Omega_0 = 1$ in agreement with the inflation paradigm which has been confirmed by the recent CMB anisotropy measurements. For the initial spectra, it is traditional to assume that they are of the power-law form

$$k^3 P_\Phi(k) = A_\mathrm{S} k^{n_\mathrm{S}-1} , \quad k^3 P_h(k) = A_\mathrm{T} k^{n_\mathrm{T}} , \tag{17.4.3}$$

where the scalar and tensor spectral indices n_S and n_T are related by $n_\mathrm{S} - 1 = n_\mathrm{T}$. This last equation is also valid for zeroth order slow-roll inflation. It should be noticed that, *a priori*, this choice is not the most relevant one since slow-roll inflation is certainly more physically motivated. For spectral indices close to $n_\mathrm{S} = 1$, we expect a small difference. This is no longer true for larger tilts. Inflation predicts the presence of gravitational perturbations and the tensor to scalar amplitude ratio is given by

$$\frac{A_\mathrm{T}}{A_\mathrm{S}} \simeq -\frac{200}{9} n_\mathrm{T} . \tag{17.4.4}$$

This equation is valid for power-law inflation with n_T not too large[4] or for zeroth order slow-roll inflation. A last remark is in order at this point. All the plots displayed in this article are COBE normalized in the following way: the position of the Sachs-Wolfe plateau is tuned such that it best fits the COBE data points. In practice, this almost amounts to normalize the spectrum to C_{10}.

In this section, we first study the general properties of the multipoles moments in the quintessence cold dark matter model (QCDM) and point out the main differences with the standard cold dark matter (SCDM) and the cosmic concordance model (ΛCDM). We also display the corresponding baryonic matter power spectra, given by

$$|\delta(k)|^2 \equiv \left| \frac{\delta\rho_\mathrm{b}}{\rho_\mathrm{b}} \right|^2 , \tag{17.4.5}$$

which is the square of the Fourier transform of the baryonic density contrast. Then, we compare the predictions of the QCDM model for the Ratra-Peebles and SUGRA tracking potentials with the COBE [Smoot *et al.*, 1992] [Bennett *et al.*, 1996], BOOMERanG [de Bernardis *et al.*, 2000] [Lange *et al.*, 2001], MAXIMA-1 [Hanany *et al.*, 2000] [Balbi *et al.*, 2000] and Saskatoon [Netterfield *et al.*, 1997] [Wollack *et al.*, 1997] data. We do not attempt to perform a detailed statistical analysis but we rather indicate roughly how the different models can fit the observational data.

We now turn to simple considerations about the shape of the CMB spectrum. The corresponding band power for the Ratra-Peebles and SUGRA potentials are displayed in Figs. 17.4 and 17.5 for $h = 0.5$, $\Omega_\mathrm{b} = 0.05$, $\Omega_\mathrm{Q} = 0.7$, $\Omega_\mathrm{c} = 1 - \Omega_\mathrm{b} - \Omega_\mathrm{Q}$, $n_\mathrm{S} = 0.99$ and the tensor contribution neglected. The former set of cosmological parameters has been chosen just for the sake of illustration and discussion. For simplicity, we start with a comparison of the quintessence multipole

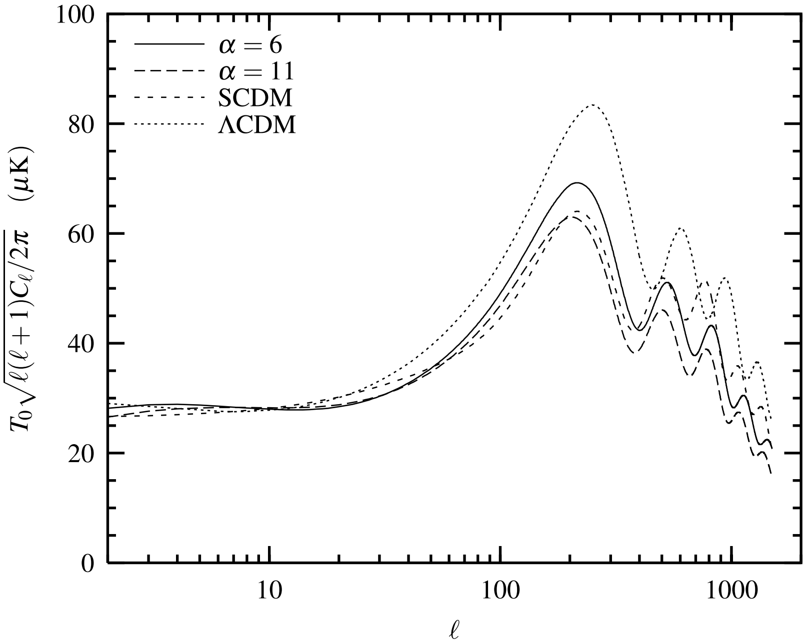


FIGURE 17.4 – Multipole moments for the Ratra-Peebles potential for two values of α, $\alpha = 6$ (solid line) and $\alpha = 11$ (long-dashed line) and with cosmological parameters equal to $h = 0.5$, $\Omega_b = 0.05$, $\Omega_Q = 0.7$, $\Omega_c = 1 - \Omega_b - \Omega_Q$, $n_S = 0.99$, $A_T = 0$. The curves are compared with those obtained in the SCDM model (short-dashed line) and in the ΛCDM model (dotted line).

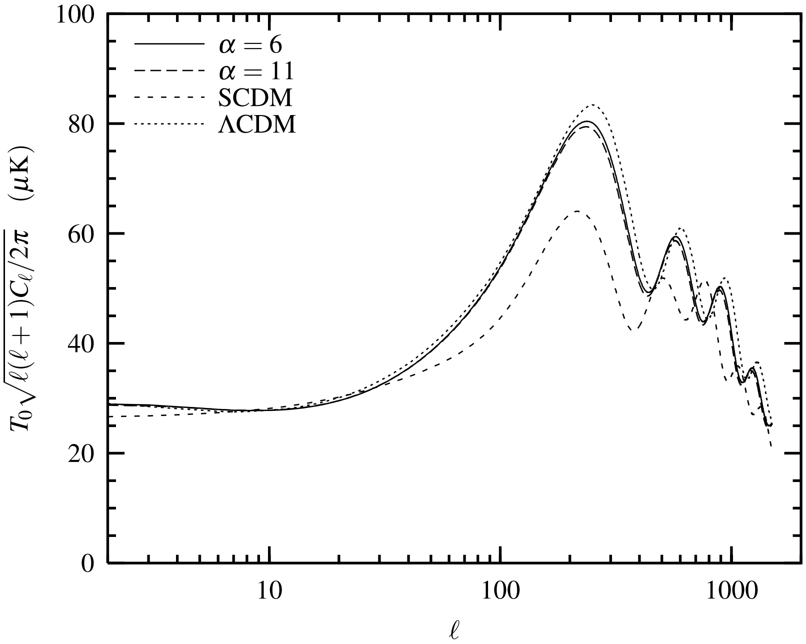


FIGURE 17.5 – Multipole moments for the SUGRA potential for two values of α, $\alpha = 6$ (solid line) and $\alpha = 11$ (long-dashed line) and with cosmological parameters equal to $h = 0.5$, $\Omega_b = 0.05$, $\Omega_Q = 0.7$, $\Omega_c = 1 - \Omega_b - \Omega_Q$, $n_S = 0.99$, $A_T = 0$. The curves are compared with those obtained in the SCDM model (short-dashed line) and in the ΛCDM model (dotted line).

moments with those obtained in the ΛCDM model with similar cosmological parameters. Firstly, since $\Omega_{\rm mat} \equiv \Omega_{\rm c} + \Omega_{\rm b}$ is the same in the two models, the redshift of equivalence between matter and radiation $z_{\rm eq} \equiv \Omega_{\rm mat}/\Omega_{\rm rad}$, where $\Omega_{\rm rad} \equiv \Omega_\gamma + \Omega_\nu$, is also the same in both cases. Therefore, the first peak is boosted in the same way by the early integrated Sachs-Wolfe effect (due to the time variation of the two Bardeen potentials during recombination, see [Hu, 1996]) and, *a priori*, one expects the same first peak height. Secondly, the dark energy component (cosmological constant or quintessence) has a negligible contribution before recombination and, as a consequence, the evolution of the perturbations before the last scattering surface is the same in the two models (see the previous section). Thus, one expects again identical acoustic peak patterns. However, despite the previous considerations, the position of the peaks differs because the angular distance-redshift relation is modified at small redshift since the equation of state of the cosmological constant and of quintessence is not the same. The closest to -1 the equation of state parameter is, the largest the shift of the peaks to small angular scales is. As a consequence, the peaks in the ΛCDM model are more shifted to the right than in the QCDM model. Another feature is that the height of the first peak is not the same in the two types of scenarios. Indeed, at small redshift, the gravitational potential does not behave exactly in the same way in the two models especially because there are scalar field perturbations in the QCDM scenario. This results in a different contribution of the late integrated Sachs-Wolfe effect [Hu, 1996] which affects the overall normalization of the spectrum. As a consequence, the height of the first peak is lower in the model which produces a strong late integrated Sachs-Wolfe effect, *i.e.*, in the QCDM model.

The exact shape of the quintessence potential also matters and different potentials lead to different CMB anisotropies. The SUGRA potential and the cosmological constant lead to very similar CMB anisotropy spectra, whereas the difference is stronger in the case of the Ratra-Peebles potential. This is mainly due to the fact that the equation of state parameter is generically closer to -1 in the first case than in the second one. Another difference is that the Ratra-Peebles potential produces a larger late integrated Sachs-Wolfe contribution than the SUGRA potential. This results in a different normalization for both models (note that the normalization depends on α) which has for consequence different height of the first Doppler peak. Of course, this difference is also visible in the power spectrum at large scales. Maybe the most interesting property is the following one. The cosmic equation of state (almost) does not depend on α in the case of the SUGRA potential. Then, in the same manner, the CMB anisotropies do not depend on α contrary to the case of the Ratra-Peebles potential. This means that the multipole moments displayed in Fig. 17.5 are a generic predictions of the SUGRA QCDM model.

For the sake of completeness, let us now describe the corresponding matter power spectra. They are displayed in Fig. 17.6 and 17.7. The matter power spectrum also depends on the nature of the dark energy component (cosmological constant or quintessence) but the difference between the cosmological constant scenario and a quintessence scenario is less important. The matter power spectrum shows a peak the location of which is given by the Hubble radius at equivalence. In the ΛCDM and QCDM scenarios, the peak is at the same location contrary to the SCDM case for which the peak is located at smaller scales. Also, in models with low matter content, the ratio $\Omega_{\rm b}/\Omega_{\rm c}$ is higher which results in the presence of smooth oscillations at small scales. As for the CMB anisotropy spectrum, the small scales are similar in the ΛCDM and QCDM scenarios and important differences only occur on larger scales which are more affected by the change in the cosmic equation of state.

Let us now study in more details and for more realistic values of the cosmological parameters, the position and the height of the first Doppler peak. We start with the location of the

[4]For power-law inflation, the exact expression is given by $A_{\rm T}/A_{\rm S} = -\frac{200}{9} n_{\rm T}/(1 - n_{\rm T}/2)$.

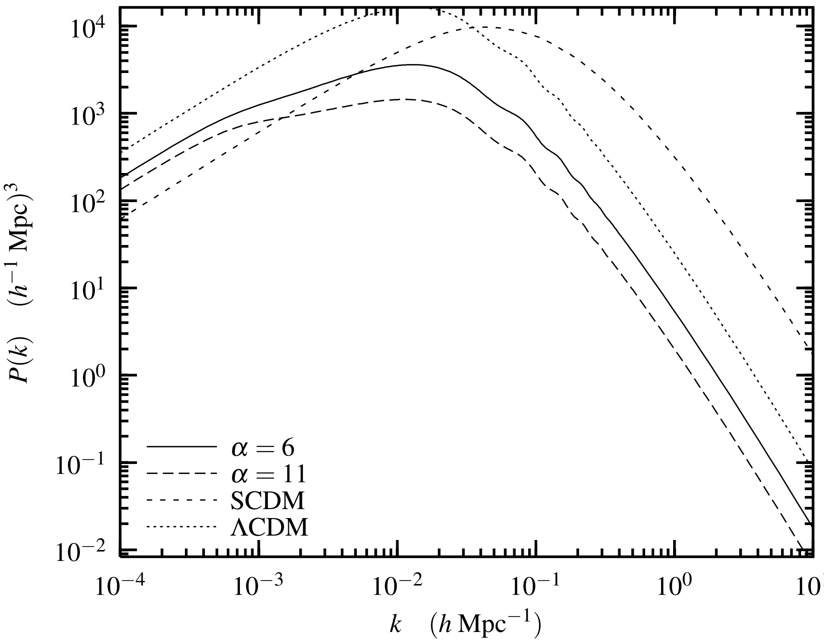


FIGURE 17.6 – Matter power spectrum for the Ratra-Peebles potential for two values of α, $\alpha = 6$ (solid line) and $\alpha = 11$ (long-dashed line) and with cosmological parameters equal to $h = 0.5$, $\Omega_b = 0.05$, $\Omega_Q = 0.7$, $\Omega_c = 1 - \Omega_b - \Omega_Q$, $n_S = 0.99$, $A_T = 0$. The curves are compared with those obtained in the SCDM model (short-dashed line) and in the ΛCDM model (dotted line).

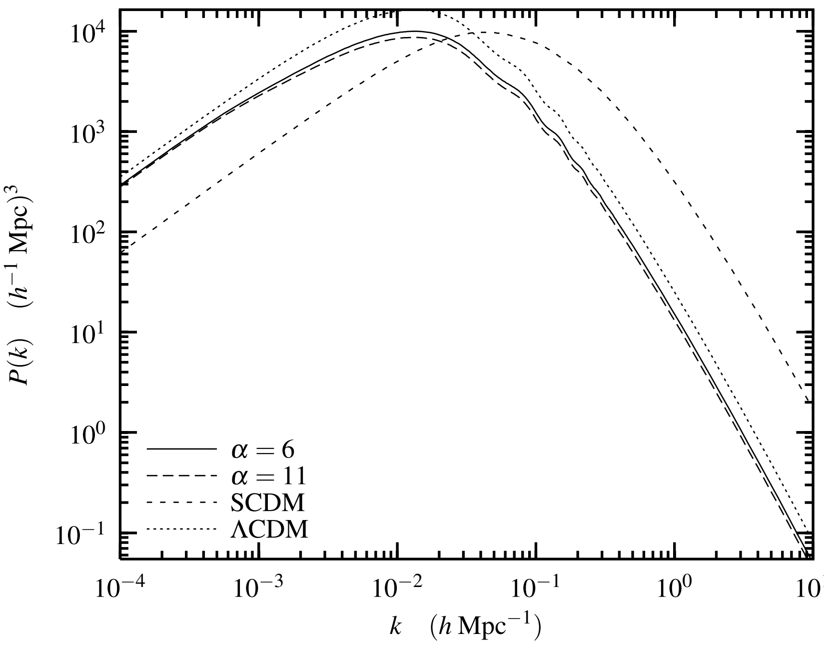


FIGURE 17.7 – Matter power spectrum for the SUGRA potential for two values of α, $\alpha = 6$ (solid line) and $\alpha = 11$ (long-dashed line) and with cosmological parameters equal to $h = 0.5$, $\Omega_b = 0.05$, $\Omega_Q = 0.7$, $\Omega_c = 1 - \Omega_b - \Omega_Q$, $n_S = 0.99$, $A_T = 0$. The curves are compared with those obtained in the SCDM model (short-dashed line) and in the ΛCDM model (dotted line).

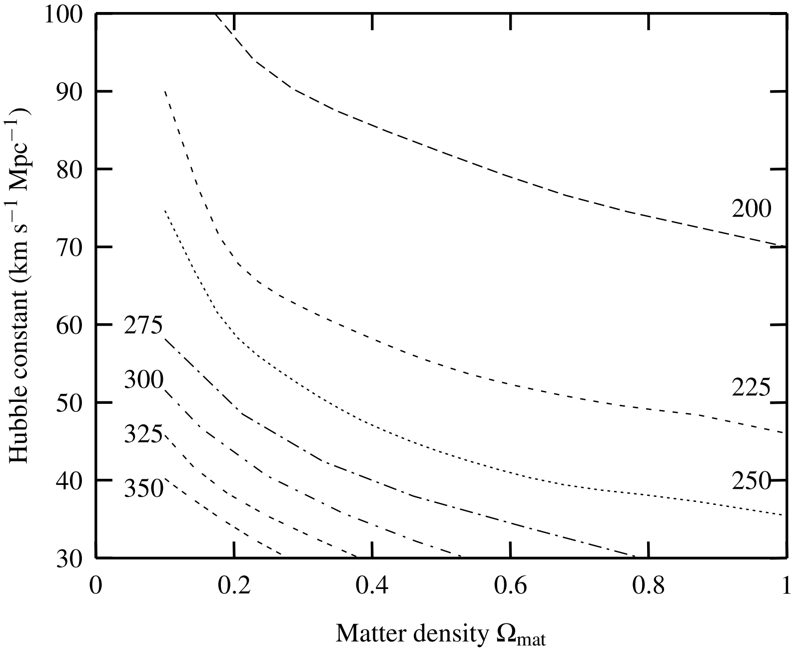


FIGURE 17.8 – Contour plots of the first Doppler peak location in the $(\Omega_{\rm mat}, h)$ plane for the cosmological constant case. The other cosmological parameters are $h^2\Omega_{\rm b} = 0.019$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $A_{\rm T} = 0$ and $n_{\rm S} = 0.99$.

first peak (denoted in what follows by ℓ_1) and we study it in the plane $(\Omega_{\rm mat}, h)$ with the following values of the other cosmological parameters: $h^2\Omega_{\rm b} = 0.019$ (the value predicted by standard BBN), $\Omega_{\Lambda,{\rm Q}} = 0.7$, $A_{\rm T} = 0$ and $n_{\rm S} = 0.99$. The case of the cosmological constant is displayed in Fig. 17.8, the case of the Ratra-Peebles QCDM model in Fig. 17.9 and the case of the SUGRA QCDM model in Fig. 17.10. These plots confirm the qualitative predictions made above and in particular the fact that, in general, $\ell_1^\Lambda > \ell_1^{\rm SUGRA} > \ell_1^{\rm RP}$. If one assumes that $\Omega_{\rm mat} \simeq 0.3$ (since we have assumed $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$) and $h \simeq 0.62$, this last value being consistent with the Hubble Space Telescope (HST) and SN Ia measurements, then we obtain $\ell_1^\Lambda \simeq 225$, $\ell_1^{\rm SUGRA} \simeq 220$ and $\ell_1^{\rm RP} \simeq 200$. It is interesting to compare these values with the recent measurements of the first peak performed by BOOMERanG and MAXIMA-1. The BOOMERanG data indicate that $\ell_1 = 197 \pm 6$ [de Bernardis *et al.*, 2000] [Lange *et al.*, 2001] which is compatible with the Ratra-Peebles potential and a spatially flat Universe. On the other hand, the MAXIMA-1 data are consistent with a first peak located at $\ell_1 \simeq 220$ [Hanany *et al.*, 2000] [Balbi *et al.*, 2000] which is, this time, in agreement with a cosmological constant or the SUGRA QCDM model.

Let us now study the height of the first Doppler peak. We study its variation in the plane $(\Omega_{\rm b}, n_{\rm S})$ for the following values of the cosmological parameters: $h = 0.62$, $\Omega_{\Lambda,{\rm Q}} = 0.7$. The case of the ΛCDM model is displayed in Fig. 17.11 whereas the cases of the Ratra-Peebles QCDM and SUGRA QCDM are presented in Figs. 17.12 and 17.13, respectively. We would like to emphasize that the importance of gravitational waves is crucial in this case. Indeed, as already mentioned, the presence of gravitational waves modifies the normalization and, as a consequence, the height of the peaks. The BOOMERanG data indicate that $\delta T_{200} \simeq 69 \pm 8\ \mu{\rm K}$ [de Bernardis *et al.*, 2000] [Lange *et al.*, 2001] whereas the MAXIMA-1 ones give $\delta T_{220} \simeq 78 \pm 6\ \mu{\rm K}$ [Hanany *et al.*, 2000] [Balbi *et al.*, 2000], this discrepancy being possibly explained by problems in the calibration of these experiments. If we adopt the value $\Omega_{\rm b} \simeq 0.0595$, compatible with BBN, we see that, in the Ratra-Peebles QCDM model, a height of the first peak compatible with the

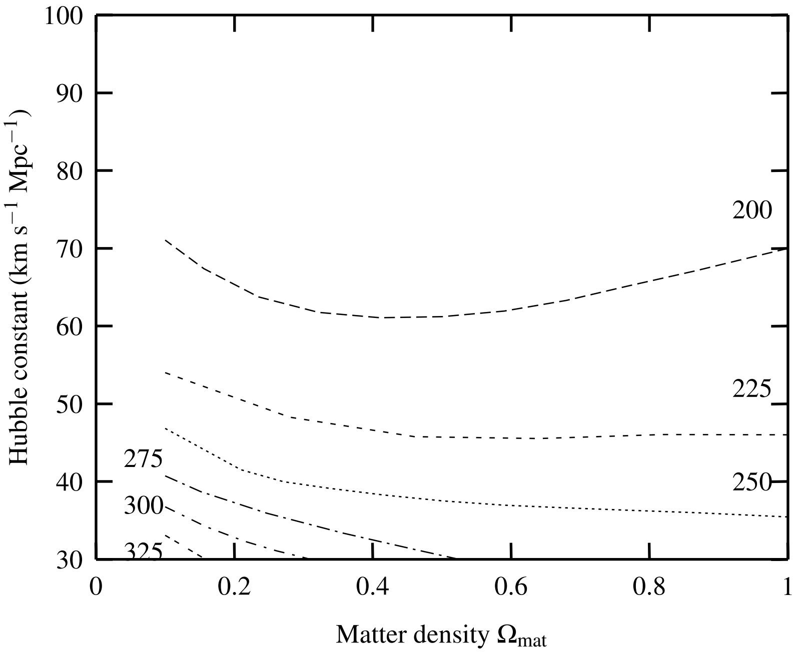


FIGURE 17.9 – Contour plots of the first Doppler peak location in the $(\Omega_{\rm mat}, h)$ plane for the Ratra-Peebles QCDM case. The other cosmological parameters are $h^2\Omega_{\rm b} = 0.019$, $\Omega_{\rm Q} = 0.7$, $A_{\rm T} = 0$ and $n_{\rm S} = 0.99$.

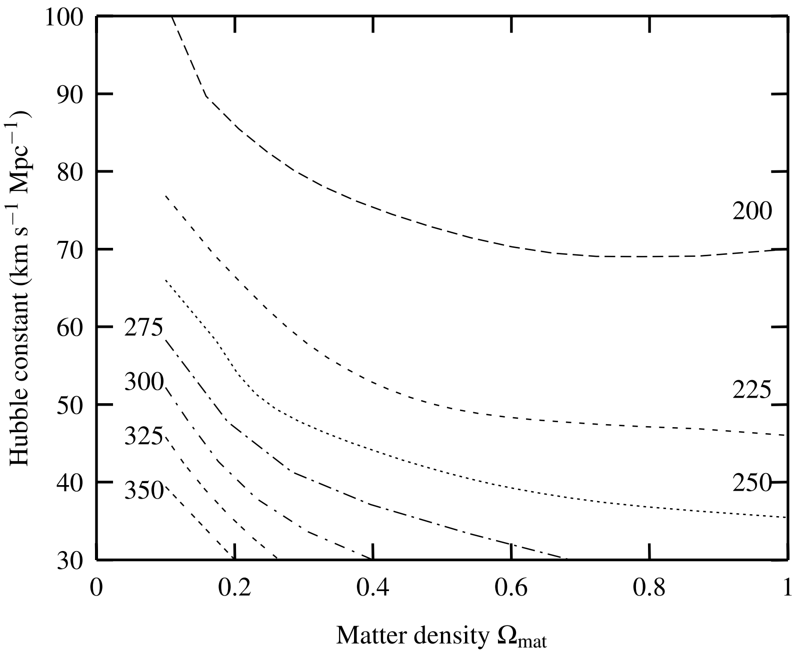


FIGURE 17.10 – Contour plots of the first Doppler peak location in the $(\Omega_{\rm mat}, h)$ plane for the SUGRA QCDM case. The other cosmological parameters are $h^2\Omega_{\rm b} = 0.019$, $\Omega_{\rm Q} = 0.7$, $A_{\rm T} = 0$ and $n_{\rm S} = 0.99$.

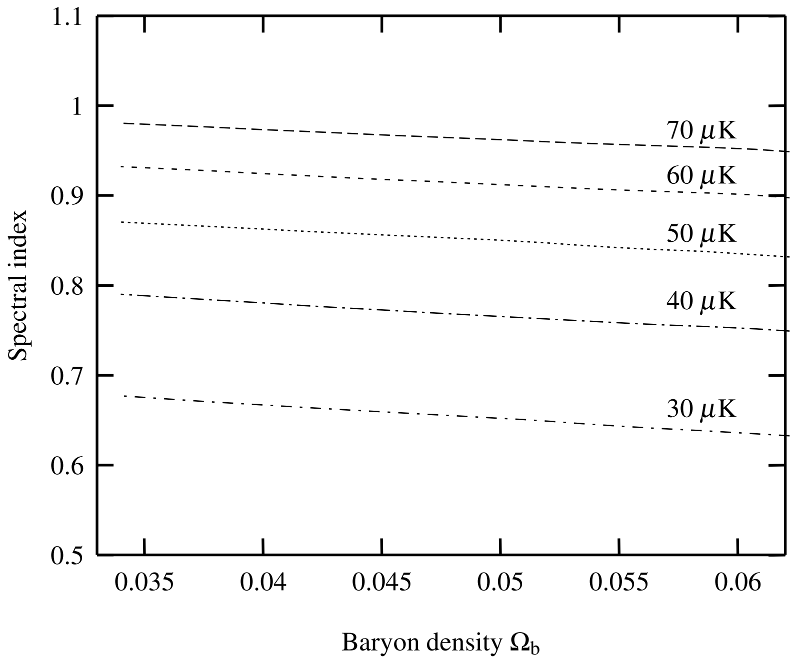


FIGURE 17.11 – Contour plots of the height of the first peak in the (Ω_b, n_S) plane with $h = 0.62$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ for the case of the ΛCDM model.

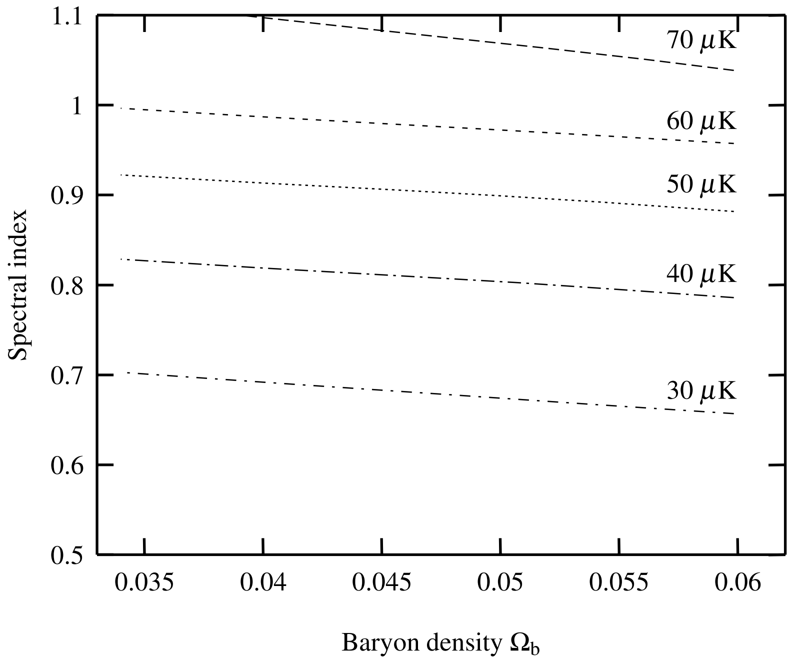


FIGURE 17.12 – Contour plots of the height of the first peak in the (Ω_b, n_S) plane with $h = 0.62$, $\Omega_Q = 0.7$ for the case of the Ratra-Peebles QCDM model.

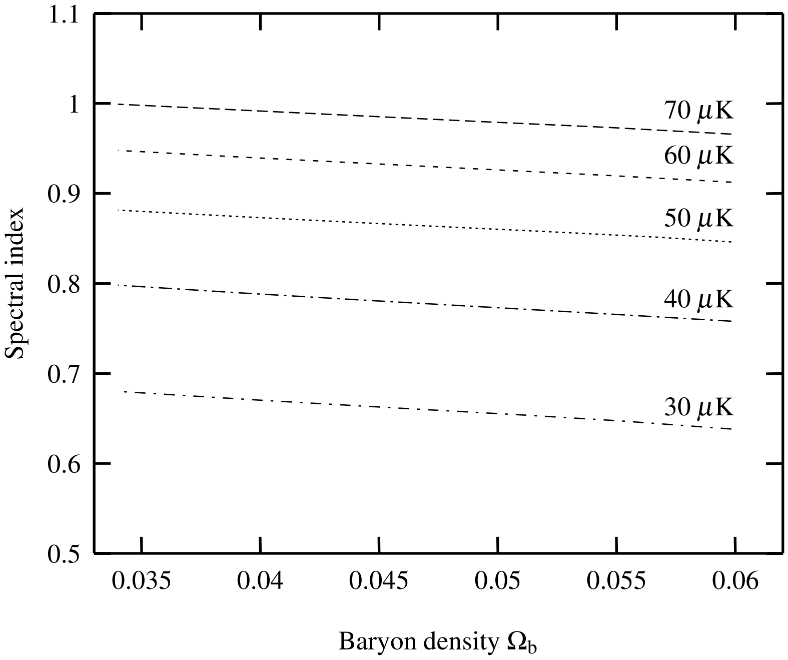


FIGURE 17.13 – Contour plots of the height of the first peak in the (Ω_b, n_S) plane with $h = 0.62$, $\Omega_Q = 0.7$ for the case of the SUGRA QCDM model.

BOOMERanG and MAXIMA-1 data leads to a value of the scalar spectral index such that $n_S > 1$. This is not compatible with standard inflation and cannot be realized with one scalar field. We interpret this as a new evidence that the Ratra-Peebles QCDM model (at least with this value of α) is excluded by the observations. For the cases of ΛCDM and SUGRA QCDM, we learn from the previous plots that the spectral index must be very close to one.

We now turn to the study of the second Doppler peak. First of all, we should say something about the observational situation. With regards to the detection of a second peak, it is difficult to deduce something from the BOOMERanG data. The error bars are still large and the data are, for the moment, compatible with a second peak (with a height maybe smaller than predicted by standard inflation) but also with no peak at all, even if one can see a small rise of the signal at $\ell_2 \simeq 550$ [de Bernardis *et al.*, 2000] [Lange *et al.*, 2001]. Only 5% of the data of this experiment have been analyzed so far and one should wait for the rest of the data analysis to be completed. On the other hand, the MAXIMA-1 show "a suggestion of a peak at $\ell_2 \simeq 525$" [Hanany *et al.*, 2000] the height of which would be $\delta T_{525} \simeq 48\,\mu$K. One could even argue that the beginning of a third peak has been observed. In fact, considering all the uncertainties in such measurements, we are of the opinion that a reasonable attitude is simply to wait for more data. On the theoretical side, it was argued by Kamionkowski and Buchalter [Kamionkowski & Buchalter, 2000] that the location of the second peak can probe the dark energy density. The main idea is to study the contour plots of ℓ_2 in the plane (Ω_{mat}, h). Then, a measurement of ℓ_2, knowing h by other means , immediately determines the value of Ω_{mat}. It was claimed in Ref. [Kamionkowski & Buchalter, 2000] that this strategy does not depend on whether the dark energy is a cosmological constant or a quintessence field. We show that this claim is not correct and that the nature of the dark energy matters. The contour plots of ℓ_2 in the case of a cosmological constant are displayed in Fig. 17.14 for the cosmological parameters given by $h = 0.62$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $h^2\Omega_b = 0.019$, $n_S = 0.99$. These plots are in agreement with the results found in Ref. [Kamionkowski & Buchalter, 2000]. The corresponding contour plots for the

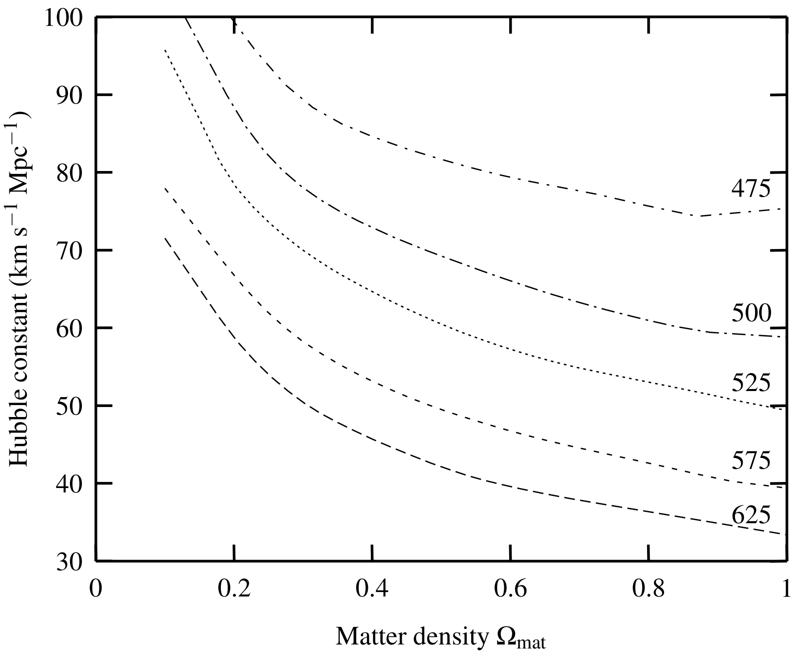


FIGURE 17.14 – Contour plots of the location of the second peak in the $(\Omega_{\rm mat}, h)$ plane with $h = 0.62$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $h^2\Omega_{\rm b} = 0.019$, $n_{\rm S} = 0.99$ for the cosmological constant case.

Ratra-Peebles and SUGRA QCDM models are presented in Figs. 17.15 and 17.16. In addition, in order to show that there is indeed an important difference, we also display the contour plots for a cosmological constant which, for a given value of ℓ_2, is always above the QCDM curve. The fact that there is a difference does not totally invalidate the idea of Ref. [Kamionkowski & Buchalter, 2000]. But it means that, in order to use it, we should first identify the physical nature of the dark energy, for example with a measurement of its equation of state parameter. As for the first peak, we have $\ell_2^\Lambda > \ell_2^{\rm SUGRA} > \ell_2^{\rm RP}$. Roughly speaking, for $h \simeq 0.62$, $\Omega_{\rm mat} \simeq 0.3$, we have $\ell_2^\Lambda \simeq 550$, $\ell_2^{\rm SUGRA} \simeq 525$ and $\ell_2^{\rm RP} \simeq 500$. Interestingly enough, the SUGRA QCDM model seems to predict the correct location of the "suggested second peak" [Hanany *et al.*, 2000], just in between the location predicted by the ΛCDM model and the Ratra-Peebles QCDM model. Of course, it is premature to conclude and only more data could allow to know whether this is indeed the case or whether this is just a coincidence.

Finally, we display the multipole moments for the ΛCDM model, the Ratra-Peebles QCDM model and the SUGRA QCDM model in Figs. 17.17, 17.18 and 17.19, respectively, for the following cosmological parameters (deduced from the previous considerations): $h = 0.62$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_{\rm b} = 0.0595$ and $n_{\rm S} = 0.99$. The data points of COBE, BOOMERanG, MAXIMA-1 and Saskatoon have been added to the plots for comparison. These curves represent the predictions of each model and special attention must be paid to third peak which is certainly one of the next important experimental challenge. In Fig. 17.20, we present the three curves together in order to make the comparison easier. It should be emphasized again that the multipole moments predicted by the SUGRA QCDM model are unique in the sense that they do not depend on the free parameter in the potential. From these plots, we see that the SUGRA QCDM model is, among the three models studied here, the best fit of the MAXIMA-1 data. It is the only model for which the theoretical curve δT versus ℓ goes through all the 1σ error bars of this experiment. However, we should be careful not to overestimate the relevance of this result since uncertainties are still large, for instance because the comparison of the calibrations of different experiments is always a difficult task. We

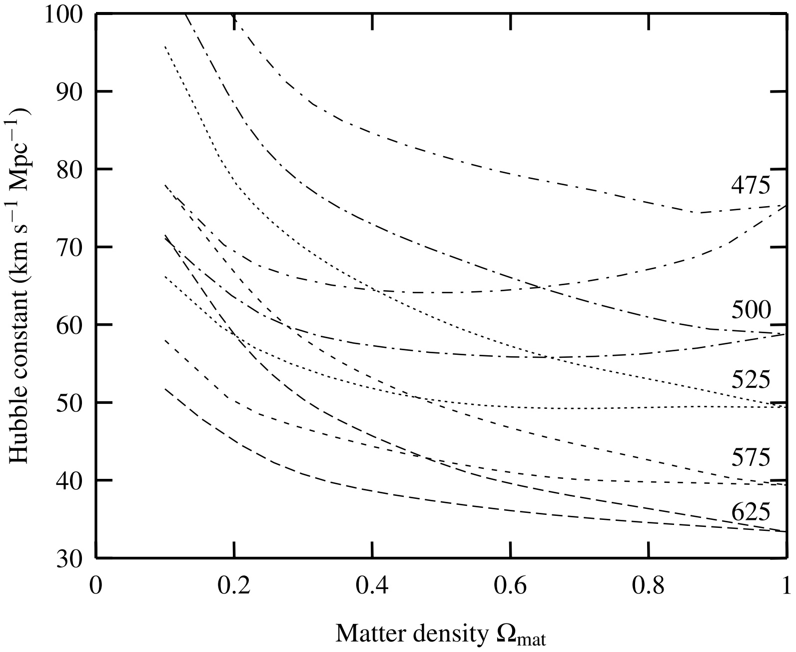


FIGURE 17.15 – Contour plots of the location of the second peak in the (Ω_{mat}, h) plane with $h = 0.62$, $\Omega_{\Lambda,Q} = 0.7$, $h^2\Omega_b = 0.019$, $n_S = 0.99$ for the Ratra-Peebles QCDM model. The corresponding contour plots for the cosmological constant (upper curves) are also displayed for comparison.

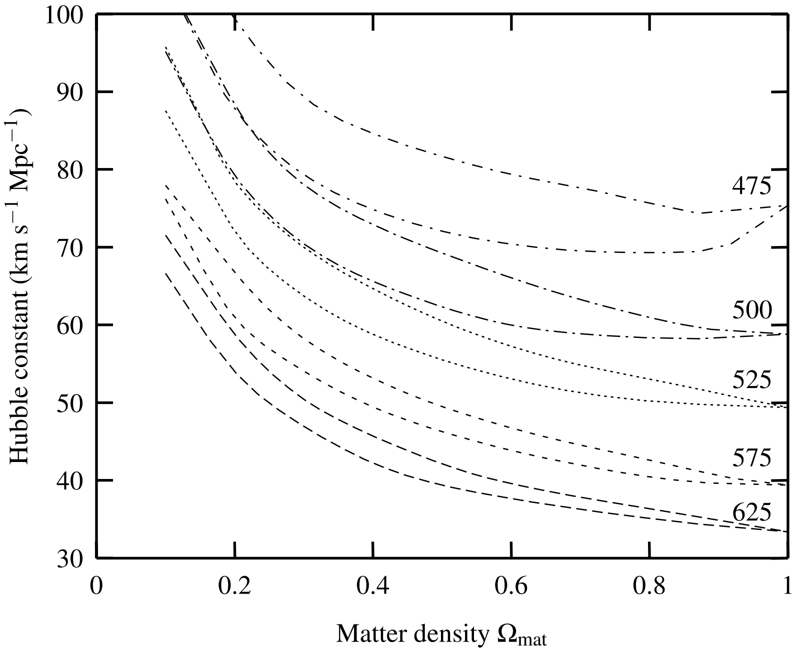


FIGURE 17.16 – Contour plots of the location of the second peak in the (Ω_{mat}, h) plane with $h = 0.62$, $\Omega_{\Lambda,Q} = 0.7$, $h^2\Omega_b = 0.019$, $n_S = 0.99$ for the SUGRA QCDM model. The corresponding contour plots for the cosmological constant (upper curves) are also displayed for comparison.

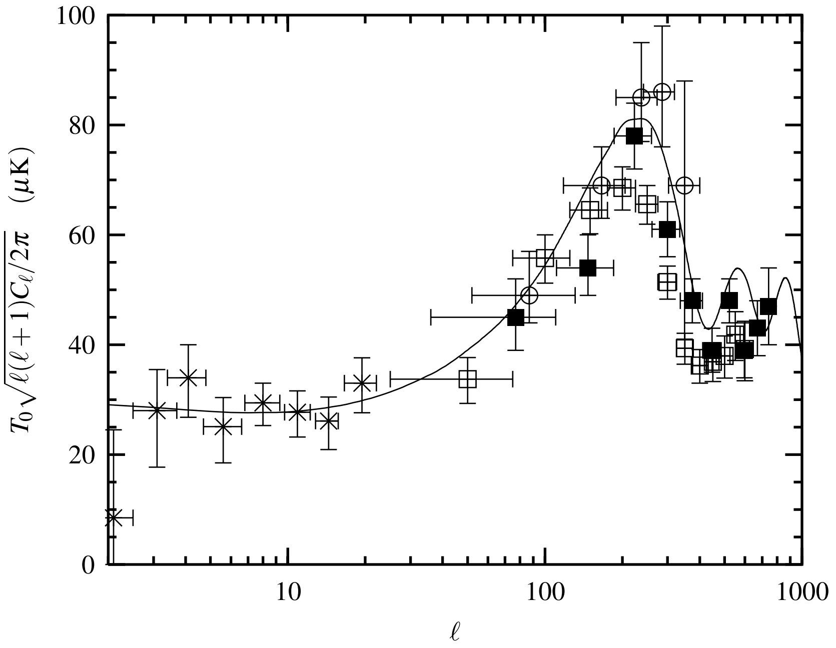


FIGURE 17.17 – Band power δT_ℓ for the ΛCDM model with $h = 0.62$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_b = 0.595$ and $n_S = 0.99$. The data point are those of the COBE, BOOMERanG, MAXIMA-1 and Saskatoon experiments.

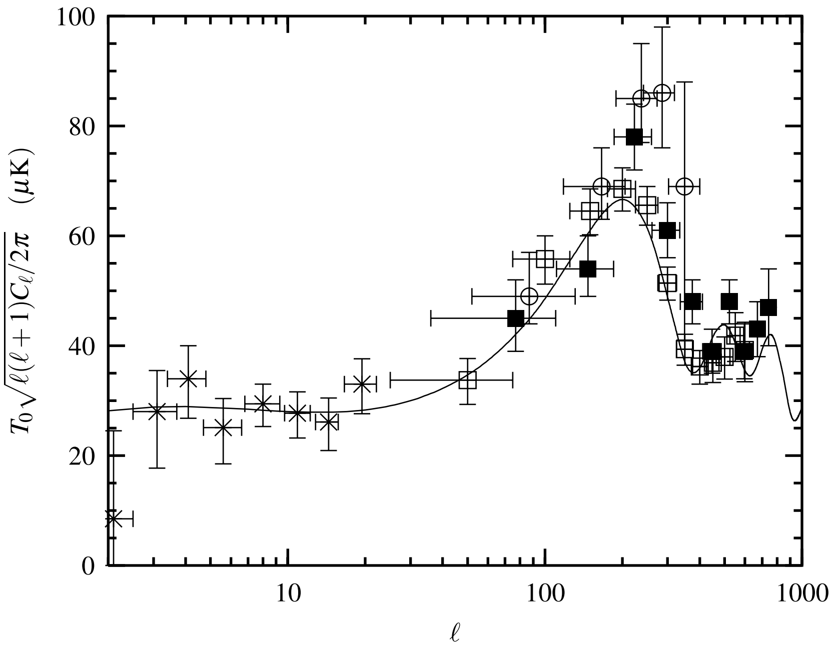


FIGURE 17.18 – Band power δT_ℓ for the Ratra-Peebles QCDM model with $h = 0.62$, $\Omega_Q = 0.7$, $\Omega_b = 0.0595$ and $n_S = 0.99$. The data point are those of the COBE, BOOMERanG, MAXIMA-1 and Saskatoon experiments.

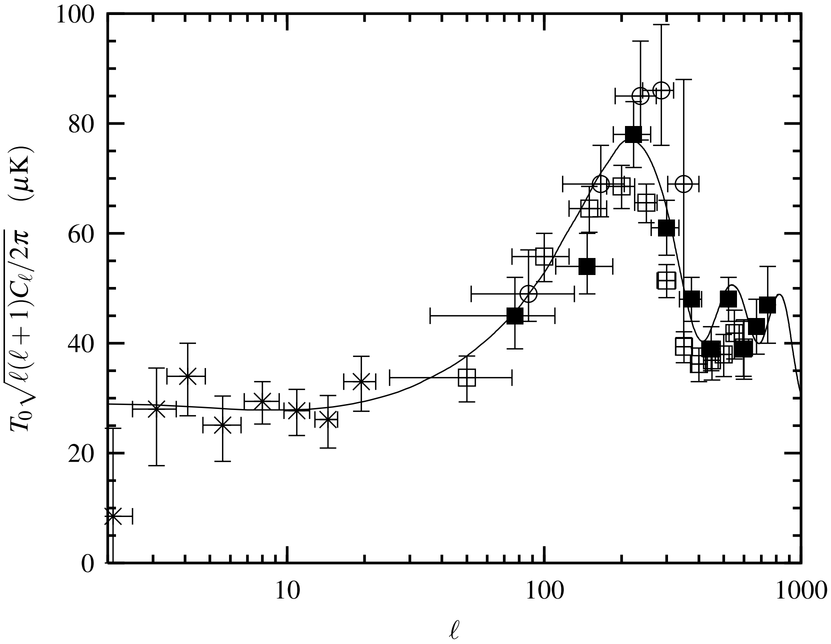


FIGURE 17.19 – Band power δT_ℓ for the SUGRA QCDM model with $h = 0.62$, $\Omega_Q = 0.7$, $\Omega_b = 0.0595$ and $n_S = 0.99$. The data point are those of the COBE, BOOMERanG, MAXIMA-1 and Saskatoon experiments.

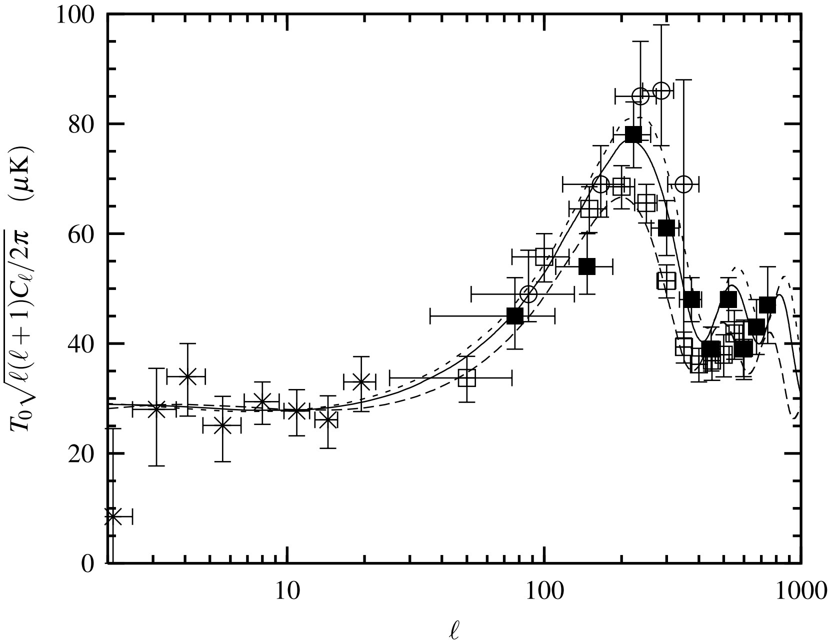


FIGURE 17.20 – Band power δT_ℓ for the ΛCDM model (short-dashed line), Ratra-Peebles QCDM model (long-dashed line) and the SUGRA QCDM model (solid line) with $h = 0.62$, $\Omega_{\Lambda,Q} = 0.7$, $\Omega_b = 0.0595$ and $n_S = 0.99$. The data point are those of the COBE, BOOMERanG, MAXIMA-1 and Saskatoon experiments.

should also keep in mind that 2σ deviations are always possible. Thus, we are waiting eagerly for the new data to see whether quintessence, and especially SUGRA quintessence, can confirm the hints of this article and fits the data better than the other QCDM models.

5 Conclusion

The quintessence scenario provides a general framework within which the issue of the energy density of the Universe can be tackled. In particular long-standing issues such as coincidence problem (and maybe the fine-tuning problem) receive reasonable answers for a class of models possessing the property of tracking fields, *i.e.*, the evolution of the quintessence field is driven at small redshift towards an attractor independently of the initial conditions. In the same spirit it seems very enticing to draw consequences of the quintessence hypothesis on other cosmological observables, the most prominent ones being the cosmological anisotropies. Recent measurement of the CMB anisotropies by the BOOMERanG and MAXIMA-1 experiments give a first indication on the location of the peaks in the CMB multipoles. It seems therefore topical to understand the consequence of the quintessence hypothesis on the CMB anisotropies.

In this paper we have confronted analytical methods with numerical results. Using the former we establish that the quintessence perturbation are independent of the initial conditions. This is confirmed by a full numerical computation. This allows us to study the CMB anisotropies. In particular we have paid particular attention to the comparison between three possible models: the cosmological constant model, the Ratra-Peebles and SUGRA quintessence models. We have also compared these three models with the existing data from the BOOMERanG and MAXIMA-1 experiments. As a rule the location of the first peak is shifted to the right for models having an equation of state ω closer to -1. This entails that the location of the first peak for the first peak of the MAXIMA-1 data is fitted by the SUGRA model. Similarly the location of the second peak around $\ell_2 \simeq 525$ as suggested by MAXIMA-1 seem to indicate that the SUGRA model comes closer to be the best of these three models. One of the foreseeable challenges will be to carry out a thorough analysis of the forthcoming data in order to distinguish these three models even more clearly.

From the particle physics point of view most of the quintessence models discussed so far have neglected the crucial effects of SUSY breaking. It may well be that the effects of SUSY breaking, on top of necessitating a severe fine-tuning of the cosmological constant, will induce drastic modifications in the functional form of the quintessence potential. It is certainly a tantalizing challenge to include the effects of SUSY breaking within the supergravity models of quintessence [Brax *et al.*, 2001]. On the other hand there exists the possibility that the cosmological constant problem will be resolved using ideas stemming from extra-dimension scenarios involving an effective supersymmetry in four dimensions [Witten, 2000]. The investigation of such models might well shed new light on the origin of the quintessence field.

As must be clear by now the issues raised by the cosmological constant problem, the quintessence scenario and its proper understanding within particle physics are many-fold. The experimental results which will be available in the near future might help in disentangling some of these very conspicuous matters.

6 Appendix: Perturbation equations

6.1 The background fluid

The equations satisfied by the background density contrast and divergence can be obtained either from combinations of the Einstein equations (**17.3.3–17.3.6**) or, more directly, from the conservation of the perturbed background fluid stress-energy tensor (since the background fluid and quintessence only interact gravitationally). They read:

$$\dot{\delta}_{\mathrm{B}}+a(1+\omega_{\mathrm{B}})\theta_{\mathrm{B}}+\frac{1+\omega_{\mathrm{B}}}{2}(3\dot{h}-\dot{h}_l)=0\,, \tag{17.6.1}$$

$$\dot{\theta}_{\mathrm{B}}+(2-3\omega_{\mathrm{B}})\mathcal{H}\theta_{\mathrm{B}}-\frac{k^2u_{\mathrm{sB}}^2}{(1+\omega_{\mathrm{B}})a}\delta_{\mathrm{B}}=0\,. \tag{17.6.2}$$

These two equations are equivalent to Eqns (7.15) and (7.16) of Ref. [Ratra & Peebles, 1988]. From them, we can derive the relation

$$3\ddot{h}-\ddot{h}_l=\frac{-2}{1+\omega_{\mathrm{B}}}\ddot{\delta}_{\mathrm{B}}+2(1-3\omega_{\mathrm{B}})\dot{a}\theta_{\mathrm{B}}-\frac{2k^2u_{\mathrm{sB}}^2}{1+\omega_{\mathrm{B}}}\delta_{\mathrm{B}}\,, \tag{17.6.3}$$

where we have assumed that ω_{B} is a constant. On the other hand, from the Einstein equations we get

$$-(3\ddot{h}-\ddot{h}_l)-\mathcal{H}(3\dot{h}-\dot{h}_l)=3\mathcal{H}^2\left[(1+3c_{\ell\mathrm{B}}^2)\Omega_{\mathrm{B}}\delta_{\mathrm{B}}+(1+3c_{\ell\mathrm{Q}}^2)\Omega_{\mathrm{Q}}\delta_{\mathrm{Q}}\right]\,, \tag{17.6.4}$$

where $u_{\ell\mathrm{Q}}^2\equiv p_{1\mathrm{Q}}/\varepsilon_{1\mathrm{Q}}$ which needs not to coincide with the definition of u_{sQ}^2. In order to derive the formula satisfied by the density contrast of the background fluid in the long wavelength limit, we neglect the term proportional to k^2 in Eq. (**17.6.3**) and we use the fact that $\Omega_{\mathrm{Q}}\ll\Omega_{\mathrm{B}}$. Then, straightforward manipulations lead to

$$\ddot{\delta}_{\mathrm{B}}+\mathcal{H}\dot{\delta}_{\mathrm{B}}-\frac{3}{2}\mathcal{H}^2(1+3\omega_{\mathrm{B}})(1+\omega_{\mathrm{B}})\delta_{\mathrm{B}}=-3\mathcal{H}\omega_{\mathrm{B}}(1+\omega_{\mathrm{B}})a\theta_{\mathrm{B}}\,, \tag{17.6.5}$$

where we used the fact that $u_{\ell\mathrm{B}}^2=\omega_{\mathrm{B}}$ for an hydrodynamical fluid. This equation shows that the evolution of the background density contrast is essentially unaffected by the presence of quintessence. This is of course an expected result since we have assumed $\Omega_{\mathrm{Q}}\ll\Omega_{\mathrm{B}}$.

6.2 Quintessential perturbations

In order to obtain the fundamental equation satisfied by the perturbed quintessence field, we can proceed as for the background fluid. However, it is important to notice that the link between the perturbed energy density and the perturbed pression, which is just a constant for the background fluid, is more complicated in the case of quintessence. In general, we can write $p_{1\mathrm{Q}}=u_{\mathrm{sQ}}^2\varepsilon_{1\mathrm{Q}}+a^2\tau\delta S$ where the second term represents entropy perturbations. In the synchronous gauge, we obtain

$$p_{1\mathrm{Q}}=u_{\mathrm{sQ}}^2\varepsilon_{1\mathrm{Q}}+(1-u_{\mathrm{sQ}}^2)\frac{1}{\kappa}(\ddot{h}_l+\mathcal{H}\dot{h}_l)\,. \tag{17.6.6}$$

We can now establish the equations satisfied by the quintessence density contrast and divergence. The conservation of the perturbed stress-energy tensor leads to

$$\dot{\delta}_{\mathrm{Q}} = -3\mathcal{H}(u_{\mathrm{sQ}}^2 - \omega_{\mathrm{Q}})\delta_{\mathrm{Q}} - a(1+\omega_{\mathrm{Q}})\theta_{\mathrm{Q}} - \frac{1}{2}(1+\omega_{\mathrm{Q}})(3\dot{h} - \dot{h}_l) + \frac{1}{\mathcal{H}\Omega_{\mathrm{Q}}}(u_{\mathrm{sQ}}^2 - 1)(\ddot{h}_l + \mathcal{H}\dot{h}_l)\,, \tag{17.6.7}$$

$$\dot{\theta}_{\mathrm{Q}} = -(2-3\omega_{\mathrm{Q}})\mathcal{H}\theta_{\mathrm{Q}} + \frac{k^2 u_{\mathrm{sQ}}^2}{(1+\omega_{\mathrm{Q}})a}\delta_{\mathrm{Q}} - \frac{\dot{\omega}_{\mathrm{Q}}}{1+\omega_{\mathrm{Q}}}\theta_{\mathrm{Q}} + \frac{(1-u_{\mathrm{sQ}}^2)k^2}{3a\mathcal{H}^2(1+\omega_{\mathrm{Q}})\Omega_{\mathrm{Q}}}(\ddot{h}_l + \mathcal{H}\dot{h}_l)\,. \tag{17.6.8}$$

In these two equations, no approximation have been made: they are valid for any wavenumber, any equation of state parameter and sound velocity. In practice, it turns out to be more convenient to use the perturbed Klein-Gordon equation to analyze the problem. This can be obtained directly from the first of the two previous equations if one notices that the quantities describing the perturbed scalar field stress-energy tensor can be expressed in terms of the perturbed scalar field $\delta Q(\eta, \boldsymbol{x})$ according to

$$\varepsilon_{1\mathrm{Q}} = \dot{Q}\dot{\delta Q} + a^2 \delta Q \frac{\mathrm{d}V(Q)}{\mathrm{d}Q}\,, \tag{17.6.9}$$

$$\dot{\xi}_{\mathrm{Q}} = -\dot{Q}\delta Q\,, \tag{17.6.10}$$

$$p_{1\mathrm{Q}} = \dot{Q}\dot{\delta Q} - a^2 \delta Q \frac{\mathrm{d}V(Q)}{\mathrm{d}Q}\,. \tag{17.6.11}$$

Inserting the corresponding expression for the density contrast and the divergence in Eq. (**17.6.7**), we get

$$\ddot{\delta Q} + 2\mathcal{H}\dot{\delta Q} + \left[k^2 + a^2 \frac{\mathrm{d}^2 V(Q)}{\mathrm{d}Q^2}\right]\delta Q + \frac{\dot{Q}}{2}(3\dot{h} - \dot{h}_l) = 0\,. \tag{17.6.12}$$

This equation is solved in §3.3, where it is demonstrated that its solutions possess an attractor as in the unperturbed case.

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Espace à symétrie maximale

Sommaire

1 Obtention

Un espace à symétrie maximale est un espace possédant un nombre maximal de vecteurs de Killing. On montre facilement que ce nombre s'élève à $\frac{1}{2}N(N+1)$ quand l'espace est de dimension N. Ces espaces ne se réduisent pas uniquement aux espaces euclidiens habituels. Par exemple, en dimension 2, le plan euclidien et la sphère $\mathbb{S}^2$ sont des espaces à symétrie maximale.

Un moyen simple de les obtenir tous est de supposer qu'ils sont plongés dans une variété de dimension plus grande. Soit donc une variété $\mathcal{M}'$ de dimension $N+1$, dans laquelle on définit un jeu de coordonnées $(x_1, \ldots, x_N, X)$ et dont l'élément de longueur s'écrit

$$\mathrm{d}l^2 = \eta_{uv}\mathrm{d}x^u\mathrm{d}x^v + \frac{1}{K}\mathrm{d}X^2 \, , \tag{A.1.1}$$

où η_{ij} représente le tenseur métrique euclidien[1] et le paramètre K est une constante qui peut être soit positive, soit négative. On définit dans cette variété la sous-variété $\mathcal{M}$ comme l'hypersurface d'équation

$$1 = X^2 + Kr^2 \, , \tag{A.1.2}$$

où on a défini $r^2 \equiv \eta_{uv}x^u x^v$, et dont la métrique est la métrique induite. En différenciant (**A.1.2**), et en remplaçant l'expression obtenue pour dX dans (**A.1.1**), on déduit l'élément de longueur sur la variété induite :

$$\mathrm{d}l^2 = \eta_{uv}\mathrm{d}x^u\mathrm{d}x^v + \frac{Kx^u x^v}{1-Kr^2}\mathrm{d}x^u\mathrm{d}x^v \, , \tag{A.1.3}$$

[1]Nous allons nous restreindre aux espaces à symétrie maximale de signature $(+\cdots+)$, car nous nous intéressons au cas où ces espaces peuvent décrire les sections spatiales d'un espace homogène et isotrope (*i.e.* dont toutes les coordonnées sont de genre espace). Pour cette raison, nous ne considérerons ici qu'une métrique η_{ij} euclidienne. Dans le cas plus général, η_{ij} a même signature que γ_{ij}.

d'où la forme de la métrique, que nous noterons γ_{ij} :

$$\gamma_{ij} = \eta_{ij} + \frac{Kx^i x^j}{1 - Kr^2} . \tag{A.1.4}$$

Quand le paramètre K est nul[2], la métrique se réduit à la métrique euclidienne habituelle et on retrouve l'espace euclidien $\mathbb{E}^N$ habituel. Quand K est positif, on a un espace compact, qu'on peut identifier à la sphère $\mathbb{S}^N$. Quand K est négatif, on a un espace hyperbolique $\mathbb{H}^N$, topologiquement équivalent à $\mathbb{E}^N$.

2 Coordonnées sphériques

On peut également définir un système de coordonnées sphériques à partir de ces coordonnées cartésiennes $x_1,...,x_N$. Outre la coordonnée r déjà définie, on peut introduire $N-1$ angles θ_i par :

$$x_1 = r\cos\theta_1 , \tag{A.2.1}$$

$$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 , \tag{A.2.2}$$

$$\vdots$$

$$x_{N-1} = r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{N-2}\cos\theta_{N-1} , \tag{A.2.3}$$

$$x_N = r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{N-2}\sin\theta_{N-1} . \tag{A.2.4}$$

L'angle θ_{N-1} varie de 0 à 2π, les autres varient de 0 à π, *i.e.* tous les sinus sont positifs (excepté éventuellement $\sin\theta_{N-1}$), et seuls les cosinus donnent le signe des x_i ($i = 1,\ldots,N-2$). Dans ce nouveau système de coordonnées[3], la métrique est diagonale s'écrit :

$$\gamma_{rr} = \frac{1}{1-Kr^2} , \tag{A.2.5}$$

$$\gamma_{\theta_1\theta_1} = r^2 , \tag{A.2.6}$$

$$\gamma_{\theta_2\theta_2} = r^2\sin^2\theta_1 , \tag{A.2.7}$$

$$\vdots$$

$$\gamma_{\theta_{N-1}\theta_{N-1}} = r^2\sin^2\theta_1\ldots\sin^2\theta_{N-2} . \tag{A.2.8}$$

Il peut également être utile de définir une nouvelle coordonnée radiale, χ, par

$$\frac{1}{1-Kr^2}\mathrm{d}r^2 \equiv \mathrm{d}\chi^2 , \tag{A.2.9}$$

c'est-à-dire

$$r = \mathrm{s}_K(\chi) , \tag{A.2.10}$$

[2] Quand K est nul, la métrique (**A.1.1**) n'est plus définie, mais la limite de (**A.1.4**) quand K tend vers 0 existe.

[3] Dans un espace tridimensionnel dont les coordonnés cartésiennes sont notées (x,y,z), et où on utilise les coordonnées angulaires θ (colatitude) et φ (longitude), ces quantités correspondent dans les notations de ce paragraphe à x_2, x_3, x_1, θ_1 et θ_2 respectivement.

où on a posé

$$\mathrm{s}_K(\chi) \equiv \chi \quad \text{si} \quad K = 0\,, \tag{A.2.11}$$

$$\mathrm{s}_K(\chi) \equiv \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}\chi) \quad \text{si} \quad K > 0\,, \tag{A.2.12}$$

$$\mathrm{s}_K(\chi) \equiv \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}\chi) \quad \text{si} \quad K < 0\,. \tag{A.2.13}$$

Avec ces deux coordonnées radiales, l'élément de longueur s'écrit :

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2\mathrm{d}^2\omega\,, \tag{A.2.14}$$

$$= \mathrm{d}\chi^2 + \mathrm{s}_K^2(\chi)\mathrm{d}^2\omega\,, \tag{A.2.15}$$

avec l'élément d'angle solide $\mathrm{d}^2\omega$ défini par :

$$\mathrm{d}^2\omega \equiv \sum_{i=1}^{N-1} \left[\mathrm{d}\theta_i^2 \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2\theta_j\right]\,. \tag{A.2.16}$$

3 Tenseurs de courbure

Les composantes des tenseurs de Riemann se calculent plus facilement dans le système de coordonnées cartésiennes x_i. L'inverse de la matrice γ_{ij} a pour composantes

$$\gamma^{ij} = \eta^{ij} - Kx^i x^j\,, \tag{A.3.1}$$

desquelles on déduit les symboles de Christoffel :

$$\Gamma^k{}_{ij} = Kx^k\left(\eta_{ij} + \frac{Kx^i x^j}{1-Kr^2}\right)\,, \tag{A.3.2}$$

$$= Kx^k\gamma_{ij}\,, \tag{A.3.3}$$

la dernière égalité n'étant bien sûr valable que dans ce système de coordonnées particulier. Le tenseur de Riemann s'écrit alors

$$R_{ijkl} = K\left(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}\right)\,, \tag{A.3.4}$$

dont on déduit les tenseurs de Ricci, d'Einstein ainsi que la courbure scalaire :

$$R_{ij} = \quad K(N-1)\gamma_{ij}\,, \tag{A.3.5}$$

$$G_{ij} = -K\frac{(N-1)(N-2)}{2}\gamma_{ij}\,, \tag{A.3.6}$$

$$R = \quad KN(N-1)\,. \tag{A.3.7}$$

4 Relations de commutation

Définissons par ∇_i la dérivée covariante par rapport à la coordonnée x_i. Soient E un scalaire, $\bar{E}_i$ un vecteur sans divergence (*i.e.* tel que $\nabla_u \bar{E}^u = 0$), et $\bar{\bar{E}}_{ij}$ un tenseur symétrique, sans divergence et sans trace (*i.e.* tel que $\nabla_u \bar{\bar{E}}^{uj} = 0$ et $\gamma_{uv}\bar{\bar{E}}^{uv} = 0$). Ces trois grandeurs satisfont aux relations de commutation suivantes :

$$\nabla_{ui}\bar{\bar{E}}^u{}_j = KN\bar{\bar{E}}_{ij} \ , \tag{A.4.1}$$

$$\nabla_{ui}\bar{E}^u = K(N-1)\bar{E}_i \ , \tag{A.4.2}$$

$$\nabla_{uij}\bar{E}^u = 2K(N-1)\nabla_{(i}\bar{E}_{j)} + K\nabla_i\bar{E}_j \ , \tag{A.4.3}$$

$$\nabla_{iuj}\bar{E}^u = K(N-1)\nabla_i\bar{E}_j \ , \tag{A.4.4}$$

$$\nabla^u{}_{iu}\bar{E}_j = \nabla_i\left[\Delta + K(N-1)\right]\bar{E}_j \tag{A.4.5}$$

$$= \Delta\nabla_i\bar{E}_j - K\nabla_j\bar{E}_i \ , \tag{A.4.6}$$

$$(\Delta\nabla_i - \nabla_i\Delta)\,\bar{E}_j = K(N-1)\nabla_i\bar{E}_j + K\nabla_j\bar{E}_i \ , \tag{A.4.7}$$

$$\nabla^u\nabla_{ij}\nabla_u E = \Delta\nabla_{ij}E + K\left[\gamma_{ij}\Delta - \nabla_{ij}\right]E \ , \tag{A.4.8}$$

$$\nabla_i\Delta\nabla_j E = \nabla_{ij}\left[\Delta + K(N-1)\right]E \ , \tag{A.4.9}$$

$$\Delta\nabla_{ij}E = \nabla_{ij}\Delta E + 2K\left[N\nabla_{ij} - \gamma_{ij}\Delta\right]E \ , \tag{A.4.10}$$

$$\nabla^u\Delta\nabla_u E = \Delta\left[\Delta + K(N-1)\right]E \ , \tag{A.4.11}$$

$$\Delta\nabla_i E = \nabla_i\left[\Delta + K(N-1)\right]E \ . \tag{A.4.12}$$

Annexe B

Quelques solutions aux équations de Friedmann

Sommaire

1 Espace de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

1.1 Métrique

Considérons un espace de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) non perturbé. On écrit sa métrique sous la forme

$$g_{00} = a^2 \,, \tag{B.1.1}$$
$$g_{0i} = 0 \,, \tag{B.1.2}$$
$$g_{ij} = -a^2 \gamma_{ij} \,, \tag{B.1.3}$$

où γ_{ij} est la métrique d'un espace à symétrie maximale non perturbé de dimension N (voir annexe A). L'inverse de $g_{\alpha\beta}$ a pour composantes

$$g^{00} = \frac{1}{a^2} \,, \tag{B.1.4}$$
$$g^{0i} = 0 \,, \tag{B.1.5}$$
$$g^{ij} = -\frac{1}{a^2} \gamma^{ij} \,, \tag{B.1.6}$$

1.2 Symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel s'écrivent

$$\Gamma^0{}_{00} = \mathcal{H} , \qquad \textbf{(B.1.7)}$$
$$\Gamma^i{}_{00} = 0 , \qquad \textbf{(B.1.8)}$$
$$\Gamma^0{}_{0i} = 0 , \qquad \textbf{(B.1.9)}$$
$$\Gamma^0{}_{ij} = \mathcal{H}\gamma_{ij} , \qquad \textbf{(B.1.10)}$$
$$\Gamma^i{}_{0j} = \mathcal{H}\delta^j_i , \qquad \textbf{(B.1.11)}$$
$$\Gamma^i{}_{jk} = {}^{(N)}\Gamma^i{}_{jk} , \qquad \textbf{(B.1.12)}$$

où un indice ${}^{(N)}$ devant une quantité représente son équivalent dans un espace à symétrie maximale de dimension N.

1.3 Tenseur de Riemann et courbure scalaire

Le tenseur de Riemann a pour composantes

$$R_{00} = -N\dot{\mathcal{H}} , \qquad \textbf{(B.1.13)}$$
$$R_{0i} = 0 , \qquad \textbf{(B.1.14)}$$
$$R_{ij} = {}^{(N)}R_{ij} + [\dot{\mathcal{H}} + (N-1)\mathcal{H}^2]\gamma_{ij} , \qquad \textbf{(B.1.15)}$$

et la courbure scalaire s'écrit

$$-a^2 R = 2N\dot{\mathcal{H}} + N(N-1)\mathcal{H}^2 + {}^{(N)}R . \qquad \textbf{(B.1.16)}$$

1.4 Tenseur d'Einstein

Les composantes du tenseur d'Einstein s'écrivent

$$G_{00} = \frac{N(N-1)}{2}[\mathcal{H}^2 + K] , \qquad \textbf{(B.1.17)}$$
$$G_{0i} = 0 , \qquad \textbf{(B.1.18)}$$
$$G_{ij} = -\frac{N-1}{2}[(N-2)(\mathcal{H}^2 + K) + 2\dot{\mathcal{H}}] . \qquad \textbf{(B.1.19)}$$

1.5 Tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide de densité ρ et de pression P a pour composantes

$$T_{00} = a^2\rho , \qquad \textbf{(B.1.20)}$$
$$T_{0i} = 0 , \qquad \textbf{(B.1.21)}$$
$$T_{ij} = a^2 P\gamma_{ij} , \qquad \textbf{(B.1.22)}$$
$$T^{00} = \frac{1}{a^2}\rho , \qquad \textbf{(B.1.23)}$$
$$T^{0i} = 0 , \qquad \textbf{(B.1.24)}$$
$$T^{ij} = \frac{1}{a^2}P\gamma^{ij} . \qquad \textbf{(B.1.25)}$$

2 Équations de Friedmann

2.1 Équations de conservation

Les identités de Bianchi nous assurent que pour l'ensemble des fluides composant l'Univers, le tenseur énergie-impulsion est conservé,

$$D_\mu \sum_f T^\mu_{\alpha,f} = 0 \,. \qquad \textbf{(B.2.1)}$$

Par contre, pour chaque fluide pris individuellement, le tenseur énergie impulsion peut ne pas être conservé,

$$D_\mu T^\mu_{\alpha,f} = Q_{\alpha,f} \,, \qquad \textbf{(B.2.2)}$$

Pourvu que le fluide total satisfasse à (**B.2.1**) :

$$\sum_f Q_{\alpha,f} = 0 \,. \qquad \textbf{(B.2.3)}$$

Dans le cas où au moins deux $Q_{\alpha,f}$ sont non nuls, les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie impliquent que

$$Q_{\alpha,f} = (Q_f(\eta), \mathbf{0}) \,. \qquad \textbf{(B.2.4)}$$

L'équation de conservation pour le fluide f s'écrit alors

$$\dot\rho_f = -N\mathcal{H}(1+\omega_f)P_f + Q_f \,. \qquad \textbf{(B.2.5)}$$

2.2 Équations d'Einstein

Les équations d'Einstein donnent alors

$$\frac{N(N-1)}{2}[\mathcal{H}^2 + K] = \kappa a^2 \rho_{\rm tot} \,, \qquad \textbf{(B.2.6)}$$

$$-\frac{N-1}{2}[2\dot{\mathcal{H}} + (N-2)(\mathcal{H}^2 + K)] = \kappa a^2 P_{\rm tot} \,. \qquad \textbf{(B.2.7)}$$

2.3 Formules utiles

Les formules suivantes seront nécessaires lors de l'étude des perturbations :

$$\kappa a^2 \dot\rho_{\rm tot} = -N(N-1)\mathcal{H}[-\dot{\mathcal{H}} + (\mathcal{H}^2+K)] \,, \qquad \textbf{(B.2.8)}$$

$$\kappa a^2 \dot P_{\rm tot} = -(N-1)\mathcal{H}\left[\frac{\ddot{\mathcal{H}}}{\mathcal{H}} + (N-4)\dot{\mathcal{H}} - (N-2)(\mathcal{H}^2+K)\right] \,, \qquad \textbf{(B.2.9)}$$

$$a^2 R = -\frac{2}{N-1}\kappa a^2(\rho_{\rm tot} - N P_{\rm tot}) \,. \qquad \textbf{(B.2.10)}$$

3 Âge et temps conforme

L'âge de l'Univers et le temps conforme qui s'est écoulé depuis le Big Bang peuvent être calculés en résolvant les équations de Friedmann. Pour le temps conforme et le temps cosmique, on trouve respectivement

$$\eta_0 = \frac{1}{\mathcal{H}_0} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\Omega^0_{\mathrm{rad}} + x\Omega^0_{\mathrm{mat}} + (1 - \Omega^0_{\mathrm{rad}} - \Omega^0_{\mathrm{mat}} - \Omega^0_\Lambda)x^2 + \Omega^0_\Lambda x^4}} , \qquad \textbf{(B.3.1)}$$

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\Omega^0_{\mathrm{rad}} + x\Omega^0_{\mathrm{mat}} + (1 - \Omega^0_{\mathrm{rad}} - \Omega^0_{\mathrm{mat}} - \Omega^0_\Lambda)x^2 + \Omega^0_\Lambda x^4}} , \qquad \textbf{(B.3.2)}$$

où l'indice 0 signifie qu'on a évalué les différents paramètres à un instant donné et où on a posé

$$x \equiv \frac{a}{a_0} . \qquad \textbf{(B.3.3)}$$

Posons enfin

$$u \equiv \mathcal{H}_0 \eta , \qquad \textbf{(B.3.4)}$$

$$v \equiv H_0 t , \qquad \textbf{(B.3.5)}$$

$$k \equiv 1 - \Omega^0_{\mathrm{mat}} - \Omega^0_{\mathrm{rad}} . \qquad \textbf{(B.3.6)}$$

En l'absence de constante cosmologique, la solution de (**B.3.1**) s'écrit

$$x = \Omega^0_{\mathrm{mat}}\, \mathrm{s}^2_k\left(\frac{u}{2}\right) + \sqrt{\Omega^0_{\mathrm{rad}}}\, \mathrm{s}_k(u) . \qquad \textbf{(B.3.7)}$$

On retrouve ainsi entre autres les comportements

$$\eta \mathcal{H}_0 = \frac{a}{a_0} , \qquad \textbf{(B.3.8)}$$

$$\eta \mathcal{H}_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 , \qquad \textbf{(B.3.9)}$$

dans des ères dominées par la radiation et la matière respectivement. La relation (**B.3.7**) peut s'inverser en

$$\mathrm{s}^2_k\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{x\Omega^0_{\mathrm{mat}} + 2\Omega^0_{\mathrm{rad}}}{[\Omega^0_{\mathrm{mat}}]^2 + 4k\Omega^0_{\mathrm{rad}}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2([\Omega^0_{\mathrm{mat}}]^2 + 4k\Omega^0_{\mathrm{rad}})}{(x\Omega^0_{\mathrm{mat}} + 2\Omega^0_{\mathrm{rad}})^2}}\right] . \qquad \textbf{(B.3.10)}$$

À l'aide de cette relation, on peut trouver la solution de l'équation (**B.3.2**). On obtient

$$v = \frac{1}{k}\left[\sqrt{kx^2 + \Omega^0_{\mathrm{mat}}x + \Omega^0_{\mathrm{rad}}} - \sqrt{\Omega^0_{\mathrm{rad}}} - \frac{\Omega^0_{\mathrm{mat}}}{2}u\right] . \qquad \textbf{(B.3.11)}$$

Dans la limite $k \to 0$, cette expression se ramène à

$$v = \frac{2}{[\Omega^0_{\mathrm{mat}}]^2}\left[\frac{1}{3}(\Omega^0_{\mathrm{mat}}x + \Omega^0_{\mathrm{rad}})^{\frac{3}{2}} - \Omega^0_{\mathrm{rad}}(\Omega^0_{\mathrm{mat}}x + \Omega^0_{\mathrm{rad}})^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}[\Omega^0_{\mathrm{rad}}]^{\frac{3}{2}}\right] . \qquad \textbf{(B.3.12)}$$

Dans des ères dominées par la radiation et la matière, on retrouve les résultats habituels

$$t = \frac{1}{2H_0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 , \quad \textbf{(B.3.13)}$$

$$t = \frac{2}{3H_0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} . \quad \textbf{(B.3.14)}$$

Quand la constante cosmologique n'est pas nulle, il n'existe pas de solution analytique aux équations (**B.3.1**) et (**B.3.2**), si ce n'est dans deux cas particuliers. D'abord, si $\Omega^0_{\rm mat} = 0$, on retrouve la solution (**B.3.7**) avec les substitutions

$$x \to x^2 , \quad u \to 2v , \quad k \to \Omega^0_\Lambda , \quad \Omega^0_{\rm mat} \to 1 - \Omega^0_\Lambda - \Omega^0_{\rm rad} , \quad \textbf{(B.3.15)}$$

et si $\Omega^0_{\rm rad} = K = 0$, on obtient

$$x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\Omega^0_{\rm mat}}\, {\rm s}_{\Omega^0_\Lambda}\left(\frac{3}{2}v\right) . \quad \textbf{(B.3.16)}$$

4 Expansion et contraction

Quand la densité d'énergie totale s'annule, on observe un changement de signe dans le taux d'expansion. Dans un Univers éventuellement non plat, avec constante cosmologique et empli de matière (non relativiste), il y a donc quatre cas de figure possibles :

- L'expansion dure indéfiniment depuis le Big Bang. C'est le cas classique d'un Univers plat ou ouvert sans constante cosmologique.
- L'expansion est suivie d'un effondrement (Big Crunch). C'est ce qu'il se passe pour un Univers fermé sans constante cosmologique. Ceci est dû au fait qu'un Univers fermé possède (formellement) une forme de densité d'énergie négative sous la forme du terme de courbure. Ce terme domine la contribution de matière au bout d'un certain temps.
- L'expansion durera indéfiniment mais a été précédée d'une phase de contraction (modèle “à rebond”). Ceci se produit quand la densité d'énergie qui peut dominer a grand redshift est négative. Outre le cas (académique) d'une densité de matière négative, ceci peut être réalisé dans un Univers fermé, sans (ou avec très peu de) matière, et avec une constante cosmologique positive.
- L'expansion actuelle fait partie d'une succession de phases d'expansion et de contraction (modèle oscillant). Pour cela, il faut que la densité d'énergie de la composante au plus grand paramètre d'équation d'état ω soit négative (comme dans les modèles à rebond), de même que celle de plus petit ω (comme dans les modèles à Big Crunch). De plus, pour que la densité d'énergie totale soit toujours positive, il faut aussi rajouter une composante intermédiaire de densité d'énergie positive. Cela peut donc en principe être réalisé dans un Univers ouvert à densité de matière et constante cosmologique négatives.

En pratique, ces différentes régions sont délimitées de la façon suivante :

- La séparation entre un Univers en expansion infinie et un Univers avec Big Crunch se fait quand

$$\Omega^0_\Lambda = 0 \quad \text{si} \quad \Omega^0_{\rm mat} \leq 1 , \quad \textbf{(B.4.1)}$$

$$\Omega^0_\Lambda = 1 - \Omega^0_{\rm mat} + \cos\left[-\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2\Omega^0_{\rm mat} - 1}}\right)\right] \quad \text{si} \quad \Omega^0_{\rm mat} \geq 1 . \quad \textbf{(B.4.2)}$$

– La séparation entre un Univers avec Big Bang et un Univers avec rebond se fait quand

$$\Omega^0_\Lambda \leq 1 \quad \text{si} \quad \Omega^0_{\text{mat}} = 0\,, \tag{B.4.3}$$

$$\Omega^0_\Lambda = 1 - \Omega^0_{\text{mat}} + \frac{3}{2}\Omega^0_{\text{mat}} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{\Omega^0_{\text{mat}}}\left(1 - \Omega^0_{\text{mat}} + \sqrt{1 - 2\Omega^0_{\text{mat}}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{\Omega^0_{\text{mat}}}\left(1 - \Omega^0_{\text{mat}} - \sqrt{1 - 2\Omega^0_{\text{mat}}}\right)} \right] \quad \text{si} \quad 0 \leq \Omega^0_{\text{mat}} \leq \frac{1}{2}\,, \tag{B.4.4}$$

$$\Omega^0_\Lambda = 1 - \Omega^0_{\text{mat}} + \cos\left[\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2\Omega^0_{\text{mat}} - 1}}\right)\right] \quad \text{si} \quad \Omega^0_{\text{mat}} \geq \frac{1}{2}\,. \tag{B.4.5}$$

La plupart des modèles cosmologiques réalistes indiquent donc que nous sommes dans un Univers issu d'un Big Bang et dont l'expansion se poursuivra indéfiniment[1].

[1]Sauf bien sûr s'il existe d'autres formes de matière dont la dynamique est moins triviale (inflaton...), si les équations de Friedmann cessent d'être valable sous certaines conditions, si l'Univers à très grande échelle n'est pas homogène et isotrope, *etc*, *etc*.

Annexe C

Quantités géométriques perturbées

Sommaire

1 Cas général

Soit un espace de dimension N de métrique g_{ij}. On note D_i la dérivée covariante par rapport à x^i et par D l'opérateur "laplacien", $D \equiv g^{uv} D_{uv}$. Soit $\delta g_{ij} \equiv h_{ij}$ la perturbation de la métrique sur cet espace. La partie perturbée de l'inverse, δg^{ij}, s'écrit

$$\delta g^{ij} = -g^{iu} g^{jv} \delta g_{uv} \equiv -h^{ij} , \qquad \textbf{(C.1.1)}$$

où les indices de h_{ij} sont montés et descendus à l'aide de la métrique non perturbée g_{ij}. Les symboles de Christoffel perturbés s'écrivent

$$\delta\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} \delta g^{iu} \left(\partial_j g_{uk} + \partial_k g_{ju} - \partial_u g_{jk} \right) + \frac{1}{2} g^{iu} \left(\partial_j \delta g_{uk} + \partial_k \delta g_{ju} - \partial_u \delta g_{jk} \right) , \qquad \textbf{(C.1.2)}$$

que l'on peut réécrire

$$\delta\Gamma^i{}_{jk} = D_{(j} h^i_{k)} - \frac{1}{2} D^i h_{jk} . \qquad \textbf{(C.1.3)}$$

Cette perturbation est la différence entre deux connexions affines et est donc un tenseur. On a notamment l'égalité

$$g^{uv} \delta\Gamma^i{}_{uv} + g^{iu} \delta\Gamma^v{}_{uv} = D_u h^{iu} . \qquad \textbf{(C.1.4)}$$

Le tenseur de Riemann se calcule facilement et s'exprime uniquement en terme des symboles de Christoffel perturbés :

$$\delta R^i{}_{jkl} = D_k \delta\Gamma^i{}_{jl} - D_l \delta\Gamma^i{}_{jk} . \qquad \textbf{(C.1.5)}$$

On en déduit l'expression du tenseur de Ricci perturbé,

$$\delta R_{ij} = D_u \delta\Gamma^u{}_{ij} - D_i \delta\Gamma^u{}_{uj} , \qquad \textbf{(C.1.6)}$$

qui se réécrit

$$\delta R_{ij} = D_u D_{(i} h^u_{j)} - \frac{1}{2}\left[D h_{ij} + D_{ij} h\right] , \qquad \textbf{(C.1.7)}$$

où $h \equiv g^{uv} h_{uv}$ est la trace de h_{ij}. La perturbation de la courbure scalaire vaut

$$\delta R = \delta g^{uv} R_{uv} + g^{uv} \delta R_{uv} , \qquad \textbf{(C.1.8)}$$

qui se réécrit

$$\delta R = D_{uv} h^{uv} - D h - R^{uv} h_{uv} . \qquad \textbf{(C.1.9)}$$

2 Perturbations dans un espace à symétrie maximale

On considère maintenant un espace à symétrie maximale de dimension N. On garde les mêmes notations que dans l'annexe A : la métrique est notée γ_{ij} et la dérivée covariante par ∇_i. Les quantités non perturbées liées au tenseur métrique ont déjà été étudiées dans l'annexe A. Les résultats des équations (**C.1.1**) à (**C.1.9**) restent bien sûr valables ici, en remplaçant g_{ij} par γ_{ij} et les dérivées covariantes D_i par ∇_i. Notons que dans le cas où on a décomposé la métrique perturbée en

$$\delta \gamma_{ij} = 2C\gamma_{ij} + 2\nabla_{ij} E + 2\nabla_{(i} \bar{E}_{j)} + 2\bar{\bar{E}}_{ij} , \qquad \textbf{(C.2.1)}$$

l'équation (**C.1.9**) se réécrit

$$\delta R = \nabla_{uv} h^{uv} - [\Delta + K(N-1)] h = -2(N-1)[\Delta + KN] C . \qquad \textbf{(C.2.2)}$$

Enfin, le tenseur d'Einstein a pour composantes

$$\begin{aligned} \delta G_{ij} = & -K(N-1)(N-2)[2\nabla_{ij} E + 2\nabla_{(i} \bar{E}_{j)} + 2\bar{\bar{E}}_{ij}] \\ & + (N-2)(\gamma_{ij}\Delta - \nabla_{ij}) C - (\Delta - 2K)\bar{\bar{E}}_{ij} . \end{aligned} \qquad \textbf{(C.2.3)}$$

3 Perturbations dans un espace FLRW

3.1 Métrique

On part de la métrique perturbée d'un espace de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, dont les sections spatiales forment un espace à symétrie maximale de dimension N :

$$\delta g_{00} = a^2 2A , \qquad \textbf{(C.3.1)}$$

$$\delta g_{0i} = a^2 \left(\bar{B}_i + \nabla_i B\right) , \qquad \textbf{(C.3.2)}$$

$$\delta g_{ij} = -a^2 \left(2C\gamma_{ij} + 2\nabla_{ij} E + \nabla_i \bar{E}_j + \nabla_j \bar{E}_i + 2\bar{\bar{E}}_{ij}\right) \equiv -a^2 h_{ij} . \qquad \textbf{(C.3.3)}$$

Les ∇_i représentent une dérivée covariante par rapport à la coordonnée spatiale x^i, et c'est la métrique non perturbée γ_{ij} qui est utilisée pour monter et descendre les indices des tenseurs $\bar{B}_i$, $\bar{E}_i$, $\bar{\bar{E}}_{ij}$ et h_{ij}. Les tenseurs à un indice $\bar{B}_i$ et $\bar{E}_i$ sont sans divergence, et $\bar{\bar{E}}_{ij}$ est sans divergence et sans trace. De façon à alléger les notations, les quantités précédées d'un indice $^{(N)}$ représenteront les quantités équivalentes dans une espace à symétrie maximale définies dans la section précédente. Les perturbations $\delta g^{\mu\nu}$ de l'inverse de $g_{\mu\nu}$ se déduisent de la formule (**C.1.1**). Elles s'écrivent

$$\delta g^{00} = -\frac{1}{a^2}2A\,, \tag{C.3.4}$$

$$\delta g^{0i} = \frac{1}{a^2}\left(\bar{B}^i + \nabla^i B\right)\,, \tag{C.3.5}$$

$$\delta g^{ij} = \frac{1}{a^2}\left(2C\gamma^{ij} + 2\nabla^{ij}E + \nabla^i\bar{E}^j + \nabla^j\bar{E}^i + 2\bar{\bar{E}}^{ij}\right)\,. \tag{C.3.6}$$

3.2 Symboles de Christoffel

On peut ensuite calculer les perturbations des symboles de Christoffel. Ici encore, ces objets sont la différence entre deux connexions affines et sont donc des tenseurs. Leur expression suit de (**C.1.3**). Les différentes composantes sont

$$\delta\Gamma^0{}_{00} = \dot{A}\,, \tag{C.3.7}$$

$$\delta\Gamma^i{}_{00} = \nabla^i A - \dot{B}^i - \mathcal{H}B^i\,, \tag{C.3.8}$$

$$\delta\Gamma^0{}_{0i} = \nabla^i A - \mathcal{H}B^i\,, \tag{C.3.9}$$

$$\delta\Gamma^0{}_{ij} = -2\mathcal{H}A\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\dot{h}_{ij} + \mathcal{H}h_{ij} + \nabla_{(i}B_{j)}\,, \tag{C.3.10}$$

$$\delta\Gamma^i{}_{0j} = \frac{1}{2}\dot{h}^i_j + \frac{1}{2}\nabla^i\bar{B}_j - \frac{1}{2}\nabla_j\bar{B}^i\,, \tag{C.3.11}$$

$$\delta\Gamma^i{}_{jk} = {}^{(N)}\delta\Gamma^i{}_{jk} + \mathcal{H}B^i\gamma_{jk}\,. \tag{C.3.12}$$

3.3 Tenseur de Ricci et courbure scalaire

On déduit ensuite les perturbations du tenseur de Ricci de (**C.1.7**). Ses composantes s'écrivent

$$\delta R_{00} = \Delta(A - \mathcal{H}B - \dot{B}) + N\mathcal{H}\dot{A} - \frac{1}{2}\mathcal{H}\dot{h} - \frac{1}{2}\ddot{h}\,, \tag{C.3.13}$$

$$\begin{aligned}\delta R_{0i} = \;& (N-1)\mathcal{H}\nabla_i A - (N-1)\mathcal{H}^2\nabla_i B - \dot{\mathcal{H}}\nabla_i B\\ &+ \left[\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}K(N-1) - (N-1)\mathcal{H}^2 - \dot{\mathcal{H}}\right]\bar{B}_i,\\ &- \frac{1}{2}\nabla_i\dot{h} + \frac{1}{2}\nabla_k\dot{h}^k_i\,,\end{aligned} \tag{C.3.14}$$

$$\begin{aligned}\delta R_{ij} = \;& {}^{(N)}\delta R_{ij}\\ &- \left[2(N-1)\mathcal{H}^2 A + 2\dot{\mathcal{H}}A + \mathcal{H}\dot{A}\right]\gamma_{ij} - \nabla_{ij}A\\ &+ \mathcal{H}\Delta B\gamma_{ij} + (N-1)\mathcal{H}\nabla_{ij}B + \nabla_{ij}\dot{B} + (N-1)\mathcal{H}\nabla_{(i}\bar{B}_{j)} + \nabla_{(i}\dot{\bar{B}}_{j)}\\ &+ \left[(N-1)\mathcal{H}^2 + \dot{\mathcal{H}}\right]h_{ij} + \frac{N-1}{2}\mathcal{H}\dot{h}_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{H}\dot{h}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}\,.\end{aligned} \tag{C.3.15}$$

La perturbation de la courbure scalaire δR est donnée par (**C.1.9**) et s'écrit ici

$$\begin{aligned}a^2\delta R = \;& 2\Delta A + 2N(N-1)\mathcal{H}^2 A + 4N\dot{\mathcal{H}}A + 2N\mathcal{H}\dot{A}\\ &- 2N\mathcal{H}\Delta B - 2\Delta\dot{B} - N\mathcal{H}\dot{h} - \ddot{h} - {}^{(N)}\delta R\,.\end{aligned} \tag{C.3.16}$$

3.4 Tenseur d'Einstein

On calcule enfin le tenseur d'Einstein, donné par

$$\delta G_{\alpha\beta} = \delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R \delta g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta R g_{\alpha\beta} \ . \tag{C.3.17}$$

En introduisant les quantités invariantes de jauge Φ, Ψ, X et $\bar{V}_i$, ses composantes s'écrivent

$$\begin{aligned} \delta G_{00} = & \quad (N-1)(\Delta\Phi - N\mathcal{H}^2 \mathrm{X}) \\ & + N(N-1)[\dot{\mathcal{H}} - (\mathcal{H}^2 + K)]C \\ & + \frac{N(N-1)}{2}(\mathcal{H}^2 + K)(2A) \ , \end{aligned} \tag{C.3.18}$$

$$\begin{aligned} \delta G_{0i} = & \quad (N-1)\nabla_i(\mathcal{H}\Psi + \dot{\Phi}) + \frac{1}{2}[\Delta + K(N-1)]\bar{V}_i \\ & + (N-1)(\mathcal{H}^2 + K - \dot{\mathcal{H}})\nabla_i(B + \dot{E}) \\ & + \frac{N-1}{2}[2\dot{\mathcal{H}} + (N-2)(\mathcal{H}^2 + K)]B_i \ , \end{aligned} \tag{C.3.19}$$

$$\begin{aligned} \delta G_{ij} = & \quad (N-1)\left[\mathcal{H}\dot{\mathrm{X}} + 2\dot{\mathcal{H}}\mathrm{X} + (N-2)\mathcal{H}^2\mathrm{X}\right]\gamma_{ij} \\ & + (\gamma_{ij}\Delta - \nabla_{ij})[\Psi - (N-2)\Phi] \\ & + \nabla_{(i}\dot{\bar{V}}_{j)} + (N-1)\mathcal{H}\nabla_{(i}\bar{V}_{j)} \\ & + \ddot{\bar{\bar{E}}}_{ij} + (N-1)\mathcal{H}\dot{\bar{\bar{E}}}_{ij} + (2K - \Delta)\bar{\bar{E}}_{ij} \\ & + (N-1)\left[-\frac{\ddot{\mathcal{H}}}{\mathcal{H}} - (N-4)\dot{\mathcal{H}} + (N-2)(\mathcal{H}^2 + K)\right]C \\ & - \frac{N-1}{2}\left[2\dot{\mathcal{H}} + (N-2)(\mathcal{H}^2 + K)\right]h_{ij} \ . \end{aligned} \tag{C.3.20}$$

3.5 Tenseur énergie-impulsion

Les composantes covariantes du tenseur énergie-impulsion d'un fluide perturbé sont de la forme

$$\delta T_{\alpha\beta} = (\delta P + \delta\rho)u_\alpha u_\beta - \delta P g_{\alpha\beta} + 2(P+\rho)u_{(\alpha}\delta u_{\beta)} - P\delta g_{\alpha\beta} + \delta\Pi_{\alpha\beta} \ , \tag{C.3.21}$$

ce qui, en terme des quantités invariantes de jauge de la jauge de feuilletage plat, se réécrit

$$\delta T_{00} = a^2\rho\left[\delta^\flat + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\frac{C}{\mathcal{H}} + 2A\right] \ , \tag{C.3.22}$$

$$\delta T_{0i} = a^2\rho\left[-(1+\omega)v_i^\flat + (1+\omega)\bar{V}_i + (1+\omega)\nabla_i(B+\dot{E}) - \omega B_i\right] \ , \tag{C.3.23}$$

$$\delta T_{ij} = a^2\rho\left[(1+\omega)\Gamma\gamma_{ij} + u_s^2\delta^\flat\gamma_{ij} + \omega\pi_{ij} + \frac{\dot{P}}{\rho}\frac{C}{\mathcal{H}}\gamma_{ij} + \omega h_{ij}\right] \ . \tag{C.3.24}$$

Pour évaluer les équations de conservation, nous aurons également besoin des composantes contravariantes du tenseur énergie-impulsion :

$$\delta T^{00} = \frac{\rho}{a^2}\left[\delta^\flat + \frac{\dot\rho}{\rho}\frac{C}{\mathcal{H}} - 2A\right] , \tag{C.3.25}$$

$$\delta T^{0i} = \frac{\rho}{a^2}\left[(1+\omega)v^{\flat,i} - (1+\omega)\dot{E}^i - \omega B^i\right] , \tag{C.3.26}$$

$$\delta T^{ij} = \frac{\rho}{a^2}\left[(1+\omega)\Gamma\gamma^{ij} + u_{\rm s}^2\delta^\flat\gamma^{ij} + \omega\pi^{ij} + \frac{\dot P}{\rho}\frac{C}{\mathcal{H}}\gamma^{ij} - \omega h^{ij}\right] . \tag{C.3.27}$$

Annexe D

Fonctions de Bessel

Sommaire

1 Introduction

Les fonctions de Bessel $J_\nu(z)$ forment une partie des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$J'' + \frac{1}{z}J' + \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) J = 0 \,. \tag{D.1.1}$$

Ces fonctions possèdent de très nombreuses propriétés, en grande partie dues au fait qu'elles interviennent dans les représentations du groupe des déplacements dans le plan [Wawrzyńczyk, 1984].

2 Fonctions de Bessel sphériques

Ces fonctions sont définies par la relation

$$j_\ell(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{\ell+1/2}(r) \,. \tag{D.2.1}$$

Considérant la fonction $r j_\ell(r)$, il est clair qu'elle décrit la fonction propre de l'équation de Schrödinger d'une particule d'énergie 1 évoluant dans un potentiel $V(r) = \ell(\ell+1)/r^2$. Pour $r \gtrsim \ell$, on s'attend donc à un comportement oscillatoire alors que pour $r \lesssim \ell$ on s'attend à une solution instable et un solution évanescente, respectivement en $r^{-\ell}$ et $r^{\ell+1}$.

3 Relations de récurrence

Nous allons maintenant donner quelques relations de récurrence utiles pour les fonctions de Bessel sphériques. Ces formules sont nécessaires entre autres pour dériver les expressions des fonctions ${}_s j_\ell^{(\ell' m)}$ (*cf* équation **5.4.23** et suivantes). Les deux seules relations qui sont nécessaires sont :

$$\frac{j_\ell}{x} = \frac{1}{2\ell+1}\left(j_{\ell-1} + j_{\ell+1}\right) , \tag{D.3.1}$$

$$j'_\ell = \frac{1}{2\ell+1}\left(\ell j_{\ell-1} - (\ell+1) j_{\ell+1}\right) . \tag{D.3.2}$$

À partir de là quelques manipulations élémentaires permettent de déduire les formules suivantes.

$j_\ell^{(p)}/x^{2-p}$ en fonction des $j_{\ell+i}$, $|i| \leq p$

$$\frac{j_\ell}{x^2} = \frac{1}{(2\ell-1)(2\ell+1)} j_{\ell-2} + \frac{2}{(2\ell-1)(2\ell+3)} j_\ell + \frac{1}{(2\ell+1)(2\ell+3)} j_{\ell+2} , \tag{D.3.3}$$

$$\frac{j'_\ell}{x} = \frac{\ell}{(2\ell-1)(2\ell+1)} j_{\ell-2} + \frac{1}{(2\ell-1)(2\ell+3)} j_\ell - \frac{\ell+1}{(2\ell+1)(2\ell+3)} j_{\ell+2} , \tag{D.3.4}$$

$$j''_\ell = \frac{\ell}{2\ell+1}\frac{\ell-1}{2\ell-1} j_{\ell-2} - \frac{2\ell^2+2\ell-1}{(2\ell-1)(2\ell+3)} j_\ell + \frac{\ell+1}{2\ell+1}\frac{\ell+2}{2\ell+3} j_{\ell+2} . \tag{D.3.5}$$

$j_\ell^{(p)}$ en fonction des $j_{\ell+i}$, $|i| \leq p$

$$j''_\ell = \frac{\ell}{2\ell+1}\frac{\ell-1}{2\ell-1} j_{\ell-2} - \frac{2\ell^2+2\ell-1}{(2\ell-1)(2\ell+3)} j_\ell + \frac{\ell+1}{2\ell+1}\frac{\ell+2}{2\ell+3} j_{\ell+2} , \tag{D.3.6}$$

$$j'_\ell = \frac{\ell}{2\ell+1} j_{\ell-1} - \frac{\ell+1}{2\ell+1} j_{\ell+1} , \tag{D.3.7}$$

$$j_\ell = j_\ell . \tag{D.3.8}$$

$j_{\ell+p}$ en fonction des $j_\ell^{(i)}/x^{|p|-i}$, $0 \leq i \leq |p|$

$$j_{\ell+2} = j''_\ell - (2\ell+1)\frac{j'_\ell}{x} + \ell(\ell+2)\frac{j_\ell}{x^2} , \tag{D.3.9}$$

$$j_{\ell+1} = -j'_\ell + \ell\frac{j_\ell}{x} , \tag{D.3.10}$$

$$j_\ell = j_\ell , \tag{D.3.11}$$

$$j_{\ell-1} = j'_\ell + (\ell+1)\frac{j_\ell}{x} , \tag{D.3.12}$$

$$j_{\ell-2} = j''_\ell + (2\ell+1)\frac{j'_\ell}{x} + (\ell-1)(\ell+1)\frac{j_\ell}{x^2} . \tag{D.3.13}$$

Annexe E

Harmoniques sphériques

Sommaire

Ce chapitre présente une compilation de quelques résultats importants relatifs à la théorie de la représentation des groupes et celle du groupe $\mathrm{SO}(3)$ en particulier. Pour plus de détails, on pourra par exemple consulter [Lyubarskii, 1960] [Vilenkin, 1969].

1 Introduction

Les harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ sont comme leur nom l'indique des fonctions définies sur la sphère $\mathbb{S}^2$ et qui sont fonctions propres de l'opérateur laplacien défini sur cette sphère :

$$\Delta Y_\ell^m \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] Y_\ell^m = -\ell(\ell+1)Y_\ell^m \,. \tag{E.1.1}$$

Ces fonctions jouissent d'une série de propriétés importante que nous nous proposons de résumer brièvement ici. La plupart de ces propriétés résultent du fait que ces fonctions interviennent dans l'écriture des coefficients matriciels de certaines représentations du groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$. Nous allons donc dans un premier temps faire un rappel nécessairement indigeste de la théorie de la représentation des groupes avant d'appliquer ces résultats généraux au groupe des rotations.

2 Quelques rappels de théorie des groupes

Pour un physicien, un groupe peut se résumer à un ensemble de transformations agissant sur un certain espace. Cet ensemble de transformation possède une *loi de composition interne* notée $\circ$ associative (la composée de deux transformations est encore un élément du groupe et pour trois éléments du groupe on a $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$), un *élément neutre* et chaque transformation admet une réciproque. D'un point de vue plus abstrait, un groupe est en fait donné par sa *table de multiplication*, c'est-à-dire la donnée de la composition de chaque paire d'éléments du groupe.

En pratique, nous ne pouvons mesurer que l'*action d'un groupe* sur des grandeurs physiques et non la table de multiplication (abstraite) susmentionnée. Le point crucial est que cette action va dépendre du type de grandeur physique étudiée. Par exemple, la température d'un point ne va pas dépendre du choix de l'orientation du système d'axe, alors que les composantes des vecteurs vont en dépendre explicitement : on dira que le groupe des rotations n'agit pas de la même façon sur des scalaires (la température) que sur des vecteurs. En d'autres termes, nous avons exhibé deux *représentations* distinctes du groupe des rotations.

En résumé, on appelle représentation d'un groupe G muni de la loi de composition $\circ$ une application T qui à tout élément g du groupe G associe un élément $T(g)$ appartenant à un certain espace, et possédant une *loi induite* que nous noterons $\centerdot$, à savoir que si $g_1 \circ g_2 = g_3$, alors $T(g_1) \centerdot T(g_2) = T(g_3)$.

3 Quelques aspects de la théorie de la représentation

Un groupe va en général dépendre d'un certain nombre de paramètres permettant de repérer chaque transformation. Pour une rotation de SO(3), on pourra prendre l'axe et l'angle de rotation ou les trois angles d'Euler de la rotation. Un groupe topologique (*i.e.* un groupe non discret tel que la composition et l'inversion sont des applications continues) est appelé groupe de Lie s'il a un nombre minimum de paramètres (*i.e.* aucun n'est fonction des autres), et si les fonctions qui décrivent comment se transforment les paramètre par inversion et composition sont analytiques. C'est ce qui se produit dans la majeure partie des groupes intéressants pour la physique.

Un groupe de Lie peut en fait être décrit à l'aide de ses *générateurs infinitésimaux* hermitiens J_i, qui représentent schématiquement une linéarisation des transformations au voisinage de l'élément neutre du groupe :

$$g \sim e + i\delta\alpha_n J_n \,, \tag{E.3.1}$$

quand g est “suffisamment proche” de e. On montre alors que :

– Un élément quelconque du groupe est de la forme[1]

$$g = e^{i\sum_n \alpha_n J_n} \,, \tag{E.3.2}$$

– L'espace des générateurs est stable par l'opération de commutation :

$$[J_a, J_b] = i f_{abc} J_c \,. \tag{E.3.3}$$

Les coefficients f_{abc} sont appelés *constantes de structure du groupe* et ces relations forment l'*algèbre de Lie du groupe*. Ainsi, un groupe est entièrement déterminé par la donnée de ses générateurs infinitésimaux et ses constantes de structure. Ce sont eux qui donnent la structure la plus fondamentale du groupe (mais il ne sont bien sûr pas unique, puisque le choix des générateurs infinitésimaux est arbitraire).

Pour l'instant, les générateurs infinitésimaux sont encore des objets abstraits. Une représentation consiste en fait à choisir (ou trouver) un jeu d'opérateurs qui obéissent aux mêmes loi d'anticommutations. L'espace sur lequel agissent ces opérateurs est alors appelé espace de représentation. Un des buts de la théorie des groupes est de trouver l'ensemble des représentations des groupes. Cette tâche s'avère sans surprise épouvantablement compliquée, c'est pourquoi on

[1]Ceci n'est valable que si le groupe est connexe ou pour la composante connexe du groupe comprenant l'identité.

se restreint à l'étude de certains types de représentations. Notamment on s'intéresse souvent aux représentations *linéaires* des groupes, auxquels cas les $T(g)$ sont des applications linéaires.

Dans le cas où la représentation est de dimension finie, les $T(g)$ sont alors simplement des matrices. On peut définir la notion de dimension d'une représentation par la dimension de la matrice associée, et une représentation est dite irréductible s'il n'existe pas de sous-espace invariant sous l'action de l'ensemble des $T(g)$ de la représentation. Pour les groupes de Lie compacts, on a alors les propriétés suivantes :

- Deux représentations sont dites équivalentes si les deux matrices associées le sont (*i.e.* peuvent être déduites l'une de l'autre par changement de base). Notamment, les représentations sont dans ce cas de même dimension.
- Dans chaque classe de représentations équivalente, il y a une représentation unitaire.
- Toute représentation unitaire est complètement réductible, c'est-à-dire qu'on peut en trouver une base où sa matrice est diagonale par blocs, chaque bloc étant lui-même une représentation irréductible.
- Toute représentation irréductible est de dimension finie.

Ces théorèmes nous indiquent que l'étude des représentations d'un groupe de Lie compact peut se restreindre à celle de ses représentations irréductibles. Venons-en maintenant aux propriétés spécifiques des coefficients matriciels de ces représentations :

- Si un groupe compact admet une représentation par des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, alors on peut introduire dans cet espace un produit scalaire invariant sous l'action du groupe.
- D'où l'on déduit que toute représentation d'un groupe compact par des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert est unitaire pour un certain produit scalaire de cet espace.
- Il existe une mesure appelée *mesure de Haar* invariante à gauche et à droite, c'est-à-dire que pour toute fonction F agissant sur le groupe et pour tout élément g_0,

$$\int F(g)\,\mathrm{d}g = \int F(g_0 \circ g)\,\mathrm{d}g = \int F(g \circ g_0)\,\mathrm{d}g\,. \qquad \textbf{(E.3.4)}$$

  Cette mesure prend des valeurs finies, non nulles sur tout ouvert du groupe dont la fermeture est compacte. Par exemple, pour le groupe SO(2), on peut prendre la mesure $\mathrm{d}\theta$, où θ est l'angle de rotation.
- Soient t_{ij}^{α} l'ensemble des éléments matriciels d'un système complet de représentations unitaires, irréductibles, non équivalentes deux à deux d'un groupe compact, et soit d^{α} la dimension de chaque représentation, alors les fonctions $\sqrt{d^{\alpha}}t_{ij}^{\alpha}$ forment un système orthogonal complet sur le groupe, relativement à la mesure invariante $\mathrm{d}g$ sur le groupe.
- Il existe un opérateur construit avec les générateurs infinitésimaux qui commute avec ceux-ci. Cela implique par l'intermédiaire d'un théorème appelé lemme de Schur, que cet opérateur (appelé opérateur de Casimir) est proportionnel à l'identité. La constante de proportionnalité dépend par contre de la représentation.

4 Représentations unitaires du groupe SO(3)

On peut montrer que les représentations unitaires, irréductibles et inéquivalentes du groupe $\mathrm{SU}(2)$ sont indexées par le nombre entier ou demi-entier j, appelé ici *spin* de la représentation. Lorsque j est entier, ces représentations forment également les représentation du groupe $\mathrm{SO}(3)$. Ce lien entre $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{SO}(3)$ vient du fait que ces deux groupes sont localement isomorphes (il ont même algèbre de Lie). Ils n'ont cependant pas la même topologie : $\mathrm{SU}(2)$ est simplement connexe (il est en fait isomorphe à la sphère $\mathbb{S}^3$), alors que $\mathrm{SO}(3)$ est multi-connexe (isomorphe à la boule $\mathbb{B}^3$ dont les points antipodaux sont identifiés deux à deux). Il existe un moyen simple de construire toutes les représentations[2] de $\mathrm{SU}(2)$: à un spineur de composantes (ξ, η), on associe la quantité à $v+1$ composantes

$$T^{(v+1)} = (\xi^v, \xi^{v-1}\eta, ..., \xi\eta^{v-1}, \eta^v) \ . \tag{E.4.1}$$

Les transformations linéaires de $\mathrm{SU}(2)$ induisent manifestement une transformation linéaire sur T^{v+1}, qui s'avère être irréductible. Pour construire une représentation unitaire associée, il suffit de considérer des quantités légèrement différentes de composantes de T^{v+1}, à savoir la quantité $Q^{(j)}$ de composantes

$$Q^{(j)}_m = \frac{\xi^{j+m}\eta^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \ , \tag{E.4.2}$$

avec $2j = v$, j étant le spin (entier ou demi-entier) de la représentation et m étant un entier ou un demi-entier tel que $j+m$ parcourre toutes les valeurs entières allant de 0 à v.

5 Harmoniques sphériques

Considérons les représentations unitaires, irréductibles, “vraies” (*i.e.* de spin ℓ entier) de $\mathrm{SO}(3)$. Nous noterons par t^ℓ_{sm} les coefficients matriciels associés. Ces coefficients dépendent de trois paramètres qui sont habituellement pris comme étant les trois angles d'Euler, notés (φ, θ, ψ). Une rotation exprimée à l'aide de ces trois angles est la composition d'une rotation d'angle φ autour de $\hat{\boldsymbol{e}}_z$, suivie d'une rotation d'angle θ autour du nouveau vecteur $\hat{\boldsymbol{e}}_y$, suivie d'une rotation d'angle ψ autour du nouveau vecteur $\hat{\boldsymbol{e}}_z$. Dans le cas important où $\psi = 0$, on passe ainsi de la base cartésienne $(\hat{\boldsymbol{e}}_x, \hat{\boldsymbol{e}}_y, \hat{\boldsymbol{e}}_z)$ à la base sphérique $(\hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi, \hat{\boldsymbol{e}}_r)$. Dans le cas où $\psi \neq 0$, on prend simplement les deux vecteurs $\hat{\boldsymbol{e}}_\psi, \hat{\boldsymbol{e}}_\chi$, obtenu par rotation de deux vecteurs $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ d'un angle ψ autour du vecteur $\hat{\boldsymbol{e}}_r$. Par définition, les harmoniques sphériques sont données par la relation

$$Y^m_\ell = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} t^\ell_{0m}(\varphi, \theta, \psi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} t^\ell_{0m}(\varphi, \theta, 0) \ . \tag{E.5.1}$$

Un calcul classique permet de trouver leur formule explicite en fonction de θ et de φ :

$$Y^m_\ell = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell+m)!(\ell-m)!}{\ell!^2}} e^{im\varphi} \sin^{2\ell}[\theta/2] \sum_r (-)^{\ell-r} \begin{pmatrix} \ell \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ r-m \end{pmatrix} \cot^{2r-m}[\theta/2] \ . \tag{E.5.2}$$

Les propriétés des harmoniques sphériques découlent des propriétés générales des coefficients des représentations unitaires irréductibles. Leur utilité pratique se trouve justifiée par le fait que quand on se restreint aux éléments de $\mathrm{SO}(3)$ tels que $\psi = 0$, il y a alors correspondance univoque entre ces éléments et les points de $\mathbb{S}^2$. Les harmoniques sphériques peuvent donc être vue comme une base pour les quantités définies sur la sphère $\mathbb{S}^2$. Le fait que ces fonctions ne dépendant pas de ψ nous dit que les grandeurs associées ne dépendent pas de l'orientation de la base $(\hat{\boldsymbol{e}}_\psi, \hat{\boldsymbol{e}}_\chi, \hat{\boldsymbol{e}}_r)$ autour de l'axe $\hat{\boldsymbol{e}}_r$. Les harmoniques sphériques permettent donc de décrire des champs de grandeurs *scalaires* sur la sphère.

[2]Mais il est plus difficile de montrer qu'on les obtient toutes ainsi !

Si maintenant on s'intéresse à des grandeurs vectorielles définies sur la sphère $\mathbb{S}^2$, leurs valeurs vont explicitement dépendre de l'orientation de la base $(\hat{\boldsymbol{e}}_\psi, \hat{\boldsymbol{e}}_\chi, \hat{\boldsymbol{e}}_r)$ autour de l'axe $\hat{\boldsymbol{e}}_r$. Dans une base du type $(\hat{\boldsymbol{e}}_\psi + i\hat{\boldsymbol{e}}_\chi, \hat{\boldsymbol{e}}_\psi - i\hat{\boldsymbol{e}}_\chi, \hat{\boldsymbol{e}}_r)$, les différentes composantes des vecteurs vont être multipliées par $e^{is\psi}$, où $s = \pm 1, 0$. C'est pourquoi ce sont ces quantités (avec $s = \pm 2$) qui ont été utilisées pour décrire la polarisation du rayonnement fossile, les deux combinaisons des paramètres de Stokes $Q \pm iU$ étant des quantités de spin ± 2. L'expression générale de ces *harmoniques sphériques spinorielles* est la suivante :

$$
{}_sY_\ell^m = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} t^\ell_{-sm}(\varphi, \theta, 0) \tag{E.5.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell+m)!(\ell-m)!}{(\ell+s)!(\ell-s)!}} e^{im\varphi} \sin^{2\ell}[\theta/2] \\
&\quad \times \sum_r (-)^{\ell-s-r} \begin{pmatrix} \ell-s \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell+s \\ r+s-m \end{pmatrix} \cot^{2r+s-m}[\theta/2] \ .
\end{aligned} \tag{E.5.4}
$$

Ces fonctions possèdent de très nombreuses propriétés. Entre autres, on peut montrer qu'on peut les déduire les unes des autres par l'action de différents opérateurs : par exemple, on peut changer l'indice m d'une unité par l'action des opérateurs $\hat{L}_+$ et $\hat{L}_-$ bien connus en mécanique quantique. Une opération similaire notée ð et $\bar{\eth}$ peut être effectuée pour changer l'indice s [Goldberg *et al.*, 1967]. Citons également :

– La relation de parité :

$$
{}_sY_\ell^m \to (-)^\ell {}_{-s}Y_\ell^m \ , \tag{E.5.5}
$$

(on change le spin en inversant le système d'axes, le facteur $(-)^\ell$ étant celui qu'on a habituellement pour les harmoniques sphériques),

– La relation de conjugaison :

$$
{}_sY_\ell^{m*} = (-)^{m+s} {}_{-s}Y_\ell^{-m} \ , \tag{E.5.6}
$$

– La relation d'orthogonalité :

$$
\int \left[{}_sY_\ell^m \right]^* \left[{}_sY_{\ell'}^{m'} \right] \sin\theta \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \ , \tag{E.5.7}
$$

– La relation de complétude :

$$
\sum_{\ell,m} \left[{}_sY_\ell^m(\theta, \varphi) \right] \left[{}_sY_\ell^m(\theta', \varphi') \right] = \delta(\varphi - \varphi')\delta(\cos\theta - \cos\theta') \ , \tag{E.5.8}
$$

– La relation de composition :

$$
\sum_m \left[{}_{s_1}Y_\ell^m(\theta', \varphi') \right]^* \left[{}_{s_2}Y_\ell^m(\theta, \varphi) \right] = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \left[{}_{s_2}Y_\ell^{-s_1}(\beta, \alpha) \right] e^{-is_2\gamma} \ , \tag{E.5.9}
$$

où les trois angles (α, β, γ) sont les trois angles d'Euler permettant de passer de la base $(\hat{\boldsymbol{e}}_{\varphi'}, \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta'}, \hat{\boldsymbol{e}}_{r'})$ à la base $(\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}_r)$ (*i.e.* on tourne de α autour de $\hat{\boldsymbol{e}}_{r'}$, puis de β autour du nouveau vecteur $\hat{\boldsymbol{e}}_{\varphi'}$, puis de γ autour du nouveau vecteur $\hat{\boldsymbol{e}}_{r'}$, qui est en fait le vecteur $\hat{\boldsymbol{e}}_r$). Cette dernière formule est notamment utile dans le calcul de l'effet de la polarisation sur la diffusion Thomson (que nous n'avons pas détaillé au chapitre 5).

6 Coefficients de Clebsch-Gordan

Dans de nombreux cas, on est amené à effectuer la multiplication de deux harmoniques sphériques de même argument. Le produit de deux harmoniques sphériques Y_ℓ^m et $Y_{\ell'}^{m'}$ peut être vu (à un facteur numérique près) comme un coefficient matriciel d'une représentation produit $D^\ell \otimes D^{\ell'}$, D^ℓ étant la représentation unitaire dont les coefficients matriciels sont les t_{sm}^ℓ. Une représentation produit de deux représentation irréductibles n'est en général pas irréductible, mais peut toujours s'exprimer sous la forme d'une somme de représentation irréductibles. Pour le groupe SO(3), on a la formule bien connue

$$D^{\ell_1} \otimes D^{\ell_2} = D^{|\ell_1-\ell_2|} \oplus \ldots \oplus D^{\ell_1+\ell_2} . \qquad \textbf{(E.6.1)}$$

Ceci nous dit que le produit ${}_{s_1}Y_{\ell_1}^{m_1}\,{}_{s_2}Y_{\ell_2}^{m_2}$ s'exprime sous la forme d'une somme d'harmoniques sphériques spinorielles[3] ${}_sY_\ell^m$, avec $|\ell_1-\ell_2| \le \ell \le \ell_1+\ell_2$. En général, on écrit ce genre de relation en faisant directement intervenir les coefficients matriciels t_{sm}^ℓ :

$$t_{s_1m_1}^{\ell_1}(\varphi,\theta,\psi) \times t_{s_2m_2}^{\ell_2}(\varphi,\theta,\psi) = \sum_{\ell sm} \left\langle \begin{matrix}\ell_1\ell_2 \\ s_1s_2\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\ell \\ s\end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix}\ell_1\ \ell_2 \\ m_1m_2\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\ell \\ m\end{matrix} \right\rangle^* t_{sm}^\ell(\varphi,\theta,\psi) . \qquad \textbf{(E.6.2)}$$

C'est la formule (**5.4.21**), écrite ici de façon légèrement différente. Cette dernière égalité peut donc être vue comme un changement de base, les deux bases étant unitaires. Les coefficients de la matrice de passage sont appelés *coefficients de Clebsch-Gordan*. Le calcul de ces coefficients s'avère hélas "assez considérable" *dixit* L. D. Landau *himself* [Landau & Lifchitz, 1988]. Une formule compacte (mais pas forcément commode) est la suivante :

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{matrix}\ell_1\ \ell_2 \\ m_1m_2\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\ell \\ m_1+m_2\end{matrix} \right\rangle &= \sqrt{2\ell+1} \\ &\times \sqrt{\frac{(\ell+m_1+m_2)!(\ell-m_1-m_2)!(\ell_1+\ell_2-\ell)!(\ell_2+\ell-\ell_1)!(\ell+\ell_1-\ell_2)!}{(\ell_1+\ell_2+\ell+1)!(\ell_1+m_1)!(\ell_1-m_1)!(\ell_2+m_2)!(\ell_2-m_2)!}} \\ \times \sum_{s=\max(-\ell+\ell_1-m_2,-\ell+\ell_2-m_1)}^{\max(\ell_1-m_1,\ell_2+m_2)} &\frac{(-)^s(\ell_1+\ell_2-m_1+m_2-s)!(\ell+m_1-m_2+s)!}{(\ell-\ell_1-m_2+s)!(\ell-\ell_2+m_1+s)!(\ell_1-m_1-s)!(\ell_2+m_2-s)!} ,\end{aligned} \qquad \textbf{(E.6.3)}$$

les autres coefficients étant nuls[4]. De très nombreuses autres formules fort utiles pourront être trouvées dans les références indiquées dans cette annexe. Notons entre autres que ces coefficients sont réels.

[3]Ce résultat était évident si on se souvient que les harmoniques sphériques forment une base des fonctions définies sur la sphère.

[4]Ce qui est évident, les coefficients t_{sm}^ℓ étant proportionnel à $e^{i(m\varphi+s\psi)}$.

Conclusion

There is a theory which states that if ever anyone discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable.
There is another theory which states that this has already happened.

Douglas ADAMS
The Restaurant at the End of the Universe

Cette thèse porte sur la signature de divers modèles d'Univers primordial dans les anisotropies du rayonnement fossile.

Dans la première partie, nous avons étudié les équations d'évolution des perturbations cosmologiques sans nous focaliser sur un modèle précis de formation des structures. Un effort a été fait pour offrir une vision synthétique et complète de ce problème. Dans les parties suivantes, nous avons mis l'accent sur la distinction entre la partie primordiale et la partie dite "cosmologique" des paramètres qui déterminent les anisotropies du rayonnement fossile. Il est important de noter que *le spectre d'anisotropies est principalement déterminé par le modèle d'Univers primordial qui génère les fluctuations, plus que par le contenu matériel actuel de l'Univers*. Ceci va quelque peu à l'encontre de la tendance actuelle qui est plutôt de considérer qu'on va arriver à estimer avec une très grande précision les "paramètres cosmologiques" (*i.e.* le contenu matériel de l'Univers), la physique de l'Univers primordial étant supposée suffisamment triviale pour ne dépendre que d'un très petit nombre de paramètres. Nous voudrions insister sur le fait qu'il s'agit là d'une approche très grossière et mal justifiée.

Par exemple, dans la troisième partie de ce mémoire, nous avons étudié quelques épicycles au scénario inflationnaire standard. Il en a résulté que la forme de l'état initial des perturbations, ainsi que leur nature (adiabatique, isocourbure, *etc*) donnait lieu à une immense variété de spectres observables. Dans le cadre de l'approche naïve mentionnée ci-dessus, un tel résultat est donc une mauvaise nouvelle car il illustre le fait que les modèles habituellement considérés ne sont absolument pas représentatifs de la richesse des modèles inflationnaires. Cependant, la détection récente dans le spectre des anisotropies du rayonnement fossile d'une série de pics Doppler avec un premier pic assez haut donne des contraintes très fortes sur ces modèles : le spectre d'anisotropies est très probablement dominé par une contribution de type inflationnaire, avec conditions initiales adiabatiques et un indice spectral proche de 1. De la même façon, les scénarios de sources actives que nous avons étudiés dans la seconde partie sont très fortement contraints par les observations, et sont très probablement sous-dominants si tant est qu'ils interviennent significativement dans la formation des grandes structures.

Ainsi, la plupart des modèles envisagés sont déjà partiellement exclus par les observations, et *le scénario inflationnaire standard en sort donc renforcé*. D'un autre côté, il serait peut-être encore plus gênant d'un point de vue de physique des hautes énergies que le scénario d'Univers primordial soit aussi simple que celui envisagé jusqu'ici (inflation à un champ scalaire, sans modes tensoriels), car cela ruinerait tout espoir d'apprendre quelque informations nouvelles sur la physique aux énergies de grande unification et au-delà. Ainsi, les souhaits des cosmologues observationnels sont-ils sans doute assez éloignés de ceux des physiciens théoriciens. La suite naturelle de ces travaux serait (sera ?) donc de tester plus quantitativement chacun des scénarios envisagés, et notamment de calculer dans quelle limite un petit écart au scénario d'inflation standard est observable.

Pour ce faire, il faudra entre autres modéliser le plus correctement possible les perturbations cosmologiques produites pendant l'inflation. Nous avons montré que la façon dont les perturbations sont modélisées à l'heure actuelle est incorrecte, et proposé (ou plutôt rappelé) une meilleure paramétrisation des perturbations produites par l'inflation.

Enfin, plus proche de la tendance actuelle, nous avons également étudié les différences entre les scénarios avec constante cosmologique et les scénarios de quintessence. Là encore, l'accent a été mis sur le fait que ces scénarios font des prédictions significativement différentes les uns des autres. L'étape suivante sera là aussi de faire un travail plus quantitatif sur la méthode à utiliser pour distinguer entre l'un et l'autre de ces modèles.

Bibliographie

[Abbott & Schaefer, 1986] L. F. ABBOTT & R. K. SCHAEFER, "A general, gauge-invariant analysis of the cosmic microwave background anisotropies". *Astrophysical Journal* **308** (1986) 546–562.

[Abbott & Wise, 1984a] L. F. ABBOTT & M. W. WISE, "Large-scale anisotropy of the microwave background and the amplitude of energy density fluctuations in the early Universe". *Astrophysical Journal Letters* **282** (1984) L47–L50.

[Abbott & Wise, 1984b] L. F. ABBOTT & M. W. WISE, "Constraints on generalized inflationary cosmologies". *Nuclear Physics* **B224** (1984) 541–548.

[Abramovici *et al.*, 1992] A. ABRAMOVICI, W. E. ALTHOUSE, R. W. P. DREVER, Y. GURSEL, S. KAWAMURA, F. J. RAAB, D. SHOEMAKER, L. SIEVERS, R. E. SPERO, K. S. THORNE, R. E. VOGT, R. WEISS, S. E. WHITCOMB, & M. E. ZUCKER, "LIGO : the laser interferometer gravitational wave observatory". *Science* **256** (1992) 325–333.

[Accetta *et al.*, 1985] F. S. ACCETTA, D. J. ZOLLER, & M. S. TURNER, "Induced gravity inflation". *Physical Review* **D31** (1985) 3046–3051.

[Achúcarro *et al.*, 1987] A. ACHÚCARRO, J. M. EVANS, P. K. TOWNSEND, & D. L. WILTSHIRE, "Super *p*-branes". *Physics Letters* **198B** (1987) 441–446.

[Adams *et al.*, 1997a] J. A. ADAMS, G. G. ROSS, & S. SARKAR, "Natural supergravity inflation". *Physics Letters* **391B** (1997) 271–280, `hep-ph/9608336`.

[Adams *et al.*, 1997b] J. A. ADAMS, G. G. ROSS, & S. SARKAR, "Multiple inflation". *Nuclear Physics* **B503** (1997) 405–425, `hep-ph/9704286`.

[Aharonian *et al.*, 1992] F. A. AHARONIAN, P. BHATTACHARJEE, & D. N. SCHRAMM, "Photon / proton ratio as a diagnostic tool for topological defects as the sources of extremely high-energy cosmic rays". *Physical Review* **D46** (1992) 4188–4192.

[Albrecht *et al.*, 1997] A. J. ALBRECHT, R. A. BATTYE, & J. ROBINSON, "The case against scaling defect models of cosmic structure formation". *Physical Review Letters* **79** (1997) 4736–4739, `astro-ph/9707129`.

[Albrecht *et al.*, 1999] A. J. ALBRECHT, R. A. BATTYE, & J. ROBINSON, "A detail study of defect models for cosmic structure formation". *Physical Review* **D59** (1999) 023508, `astro-ph/9711121`.

[Albrecht & Skordis, 2000] A. J. ALBRECHT & C. SKORDIS, "Phenomenology of a realistic accelerating Universe using only Planck-scale physics". *Physical Review Letters* **84** (2000) 2076–2079, `astro-ph/9908085`.

[Albrecht & Steinhard, 1982] A. J. ALBRECHT & P. J. STEINHARD, "Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking". *Physical Review Letters* **48** (1982) 1220–1223.

[Allen, 1997] B. ALLEN, "The stochastic gravity wave background : sources and detection". In [Marck & Lasota, 1997], pp 373–417, gr-qc/9604033.

[Allen *et al.*, 1997] B. ALLEN, R. R. CALDWELL, S. DODELSON, L. E. KNOX, E. P. S. SHELLARD, & A. J. STEBBINS, "CMB anisotropy induced by cosmic strings on angular scales $\gtrsim 15'$". *Physical Review Letters* **79** (1997) 2624–2627, astro-ph/9704160.

[Allen *et al.*, 1994] B. ALLEN, R. R. CALDWELL, E. P. S. SHELLARD, A. J. STEBBINS, & S. VEERARAGHAVAN, "Cosmic microwave background radiation anisotropy induced by cosmic strings". In [Krauss, 1994], pp 166–175, astro-ph/9407042.

[Allen *et al.*, 1996] B. ALLEN, R. R. CALDWELL, E. P. S. SHELLARD, A. J. STEBBINS, & S. VEERARAGHAVAN, "Large angular scale CMB anisotropy induced by cosmic strings". *Physical Review Letters* **77** (1996) 3061–3065, astro-ph/9609038.

[Allen & Shellard, 1990] B. ALLEN & E. P. S. SHELLARD, "Cosmic-string evolution : a numerical simulation". *Physical Review Letters* **64** (1990) 119–122.

[Alpher *et al.*, 1948] R. A. ALPHER, H. A. BETHE, & G. GAMOV, "The origin of chemical elements". *Physical Review* **73** (1948) 803–804.

[Alpher & Herman, 1948] R. A. ALPHER & R. C. HERMAN, "Evolution of the Universe". *Nature* **162** (1948) 774.

[Amendola, 1999] L. AMENDOLA, "Scaling solutions in general non-minimal coupling theories". *Physical Review* **D60** (1999) 043501, astro-ph/9904120.

[ARCHÉOPS, http] "Page ARCHÉOPS". http://www-crtbt.polycnrs-gre.fr/archeops/general.html.

[Asseo & Riazuelo, 2000a] E. ASSEO & A. RIAZUELO, "Relativistic anisotropic pair plasma". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **318** (2000) 983–1004.

[Asseo & Riazuelo, 2000b] E. ASSEO & A. RIAZUELO, "The pulsar pair plasma". In [Kramer *et al.*, 2000], pp 455–456.

[Atick *et al.*, 1987] J. J. ATICK, L. J. DIXON, & A. SEN, "String calculation of Fayet-Iliopoulos *D* terms in arbitrary supersymmetric compactifications". *Nuclear Physics* **B292** (1987) 109–149.

[Atrio-Barandela *et al.*, 1997] F. ATRIO-BARANDELA, J. EINASTO, S. GOTTLÖBER, V. MÜLLER, & A. A. STAROBINSKY, "A built-in scale in the initial spectrum of density perturbations : evidence from cluster and CMB data". *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **66** (1997) 397–403, astro-ph/9708128.

[Aubourg *et al.*, 2000] *XIXth Texas Symposium on relativistic astrophysics and cosmology*, édité par É. Aubourg, T. Montmerle, J. Paul, & P. Peter. *Nuclear Physics Proceedings Supplements* **80**, Elsevier Science, Amsterdam (2000), xiv+246 pages. Proceedings of the XIX$^{\rm th}$ Texas Syposium, held in Paris, France, December 14–18, 1998. CDROM édité par Tellig, Châtillon.

[Austin *et al.*, 1993] D. AUSTIN, E. J. COPELAND, & T. W. B. KIBBLE, "Evolution of cosmic string configuration". *Physical Review* **D48** (1993) 5594–5627, hep-ph/9307325.

[Avelino *et al.*, 1997] P. P. AVELINO, R. R. CALDWELL, & C. J. A. P. MARTINS, "Cosmic strings in an open Universe : quantitative evolution and observational consequences". *Physical Review* **D56** (1997) 4568–4577, astro-ph/9708057.

[Avelino *et al.*, 1998] P. P. AVELINO, E. P. S. SHELLARD, J.-H. P. WU, & B. ALLEN, "Cosmic-string-seeded structure formation". *Physical Review Letters* **81** (1998) 2008–2011, astro-ph/9712008.

[Avelino *et al.*, 1999] P. P. AVELINO, E. P. S. SHELLARD, J.-H. P. WU, & B. ALLEN, "Cosmic string loops and large-scale structure". *Physical Review* **D60** (1999) 023511, `astro-ph/9810439`.

[Baccigalupi & Perrota, 1998] C. BACCIGALUPI & F. PERROTA, "Perturbations in quintessential inflation". `astro-ph/9811385`.

[Bahcall, 2000] N. BAHCALL, "Cosmology with clusters of galaxies". *Physica Scripta* **T85** (2000) 32–36, `astro-ph/9901076`.

[Bahcall *et al.*, 1999] N. BAHCALL, J. P. OSTRIKER, S. PERLMUTTER, & P. J. STEINHARD, "The cosmic triangle : assessing the state of the Universe". *Science* **284** (1999) 1481–1488, `astro-ph/9906463`.

[Baker *et al.*, 1999] J. C. BAKER, K. GRAINGE, M. P. HOBSON, M. E. JONES, R. KNEISSL, A. N. LASENBY, C. M. M. O'SULLIVAN, G. POOLEY, G. ROCHA, R. SAUNDERS, P. F. SCOTT, & E. M. WALDRAM, "Detection of cosmic microwave background structure in a second field with the Cosmic Anisotropy Telescope". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **308** (1999) 1173–1178, `astro-ph/9904415`.

[Balbi *et al.*, 2000] A. BALBI, P. A. R. ADE, J. J. BOCK, J. BORRILL, A. BOSCALERI, P. DE BERNARDIS, P. G. FERREIRA, S. HANANY, V. V. HRISTOV, A. H. JAFFE, A. T. LEE, S. OH, E. PASCALE, B. RABII, P. L. RICHARDS, G. F. SMOOT, R. STOMPOR, C. L. WINANT, & J.-H. P. WU, "Constraints on cosmological parameters from MAXIMA-1". *Astrophysical Journal Letters* **545** (2000) L1–L4, `astro-ph/0005124`.

[Bardeen, 1980] J. M. BARDEEN, "Gauge invariant cosmological perturbations". *Physical Review* **D22** (1980) 1882–1905.

[Bardeen *et al.*, 1986] J. M. BARDEEN, J. R. BOND, N. KAISER, & A. S. SZALAY, "The statistics of peaks of Gaussian random fields". *Astrophysical Journal* **304** (1986) 15–61.

[Bardeen *et al.*, 1983] J. M. BARDEEN, P. J. STEINHARD, & M. S. TURNER, "Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary Universe". *Physical Review* **D28** (1983) 679–693.

[Barreiro *et al.*, 2000] T. BARREIRO, E. J. COPELAND, & N. J. NUÑES, "Quintessence arising from exponential potentials". *Physical Review* **D61** (2000) 127301, `astro-ph/9910214`.

[Bartolo & Pietroni, 2000] N. BARTOLO & M. PIETRONI, "Scalar tensor gravity and quintessence". *Physical Review* **D61** (2000) 023518, `hep-ph/9908521`.

[Battye *et al.*, 1999a] R. A. BATTYE, M. BUCHER, & D. N. SPERGEL, "Domain wall dominated Universes". `astro-ph/9908047`.

[Battye *et al.*, 1999b] R. A. BATTYE, J. C. R. MAGUEIJO, & J. WELLER, "Early structure formation with cold plus hot dark matter : a success of strings plus inflation model". `astro-ph/9906093`.

[Battye *et al.*, 1998] R. A. BATTYE, J. ROBINSON, & A. J. ALBRECHT, "Structure formation by cosmic strings with a cosmological constant". *Physical Review Letters* **80** (1998) 4847–4850, `astro-ph/9711336`.

[Battye & Weller, 2000] R. A. BATTYE & J. WELLER, "Cosmic structure formation in hybrid inflation models". *Physical Review* **D61** (2000) 043501, `astro-ph/9810203`.

[Baugh & Efstathiou, 1993] C. M. BAUGH & G. P. EFSTATHIOU, "Structure formation by cosmic strings with a cosmological constant". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **265** (1993) 145–156.

[Bennett *et al.*, 1996] C. H. BENNETT, A. J. BANDAY, K. M. GÓRSKI, G. HINSHAW, P. D. JACKSON, P. KEEGSTRA, A. J. KOGUT, G. F. SMOOT, D. T. WILKINSON, & E. L. WRIGHT, "Four year COBE DMR cosmic microwave background observations : maps and basic results". *Astrophysical Journal Letters* **464** (1996) L1–L4, `astro-ph/9601067`.

[Bennett & Bouchet, 1988] D. P. BENNETT & F. R. BOUCHET, "Evidence for a scaling solution in cosmic string evolution". *Physical Review Letters* **60** (1988) 257–260.

[Bennett & Bouchet, 1989] D. P. BENNETT & F. R. BOUCHET, "Cosmic string evolution". *Physical Review Letters* **63** (1989) 2776–2779.

[Bennett & Bouchet, 1990] D. P. BENNETT & F. R. BOUCHET, "High resolution simulations of cosmic string evolution. 1. Network evolution". *Physical Review* **D41** (1990) 2408–2433.

[Bernardeau & Uzan, 2001] F. BERNARDEAU & J.-P. UZAN, "Cosmic string lens phenomenology : model of Poisson energy distribution". *Physical Review* **D63** (2001) 023005, `astro-ph/0004102`.

[Bernstein, 1988] J. BERNSTEIN, *Kinetic theory in the expanding Universe*. Cambridge University Press, Cambridge (1988), viii+150 pages, ISBN 0-521-36050-1.

[Bertolami & Martins, 2000] O. BERTOLAMI & P. J. MARTINS, "Non-minimal coupling and quintessence". *Physical Review* **D61** (2000) 064007, `gr-qc/9910056`.

[Bhattacharjee *et al.*, 1992] P. BHATTACHARJEE, C. T. HILL, & D. N. SCHRAMM, "Grand unified theories, topological defects and ultrahigh-energy cosmic rays". *Physical Review Letters* **69** (1992) 567–570.

[Bhattacharjee & Rana, 1990] P. BHATTACHARJEE & N. C. RANA, "Ultrahigh-energy particle flux from cosmic strings". *Physics Letters* **246B** (1990) 365–370.

[Bhattacharjee & Sigl, 1995] P. BHATTACHARJEE & G. SIGL, "Monopole annihilation and highest energy cosmic rays". *Physical Review* **D51** (1995) 4079–4091, `astro-ph/9412053`.

[Binétruy, 1999] P. BINÉTRUY, "Models of dynamical supersymmetry breaking and quintessence". *Physical Review* **D60** (1999) 063502, `hep-ph/9810553`.

[Binétruy *et al.*, 1998] P. BINÉTRUY, C. DEFFAYET, & P. PETER, "Global vs. local cosmic strings from pseudo-anomalous $U(1)$". *Physics Letters* **441B** (1998) 52–59, `hep-ph/9807233`.

[Birrell & Davies, 1982] N. D. BIRRELL & P. C. W. DAVIES, *Quantum fields in curved space*. Cambridge University Press, Cambridge (1982), x+340 pages, ISBN 0-521-27858-9.

[Blanchet & Damour, 1980] L. BLANCHET & T. DAMOUR, "Radiative gravitational fields in general relativity — I. General structure of the field outside the source". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **A320** (1980) 379–430.

[Bond & Efstathiou, 1984] J. R. BOND & G. P. EFSTATHIOU, "Cosmic background radiation anisotropies in Universes dominated by nonbaryonic dark matter". *Astrophysical Journal Letters* **285** (1984) L45–L48.

[Bond & Efstathiou, 1986] J. R. BOND & G. P. EFSTATHIOU, "Isocurvature cold dark matter fluctuations". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **218** (1986) 103–121.

[Bondi & Gold, 1948] H. BONDI & T. GOLD, "The steady-state theory of the expanding Universe". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **108** (1948) 252–270.

[BOOMERanG, `http`] "BOOMERanG". `http://oberon.roma1.infn.it/boomerang/`.

[Bouchet *et al.*, 1988] F. R. BOUCHET, D. P. BENNETT, & A. J. STEBBINS, "Patterns of the cosmic microwave background from evolving string networks". *Nature* **335** (1988) 410–414.

[Bouchet & Gispert, 1999] F. R. BOUCHET & R. GISPERT, “Foregrounds and CMB experiments : I. semi-analytical estimates of contamination”. *New Astronomy* **4** (1999) 443–479, `astro-ph/9903176`.

[Bouchet *et al.*, 2002] F. R. BOUCHET, P. PETER, A. RIAZUELO, & M. SAKELLARIADOU, “Evidence against or for topological defects in the BOOMERanG data ?”. *Physical Review* **D65** (2002) 021301(R), `astro-ph/0005022`.

[Bradaschia *et al.*, 1990] C. BRADASCHIA, R. DEL FABBRO, A. DI VIRGILO, A. GIAZOTTO, H. KAUTZKY, V. MONTELATICI, D. PASSUELLO, A. BRILLET, O. CREGUT, P. HELLO, C. N. MAN, P. T. MAN, A. MARRAUD, D. SHOEMAKER, J.-Y. VINET, F. BARONE, L. DIFIORE, L. MILANO, G. RUSSO, J. M. AGUIRREGABIRIA, H. BEL, J.-P. DURUISSEAU, G. LE DENMAT, P. TOURRENC, M. CAPOZZI, M. LONGO, M. LOPS, I. M. PINTO, G. ROTOLI, T. DAMOUR, S. BONAZZOLA, J.-A. MARCK, É. GOURGOULHON, L. E. HOLLOWAY, F. FULIGNI, V. IAFOLLA, & G. NATALE, “The VIRGO project : a wide band antenna for gravitational wave detection”. *Nuclear Instrumental Methods* **A289** (1990) 518–525.

[Brandenberger, 1984] R. H. BRANDENBERGER, “Quantum fluctuations as the source of classical gravitational perturbations in inflationary Universe”. *Nuclear Physics* **B245** (1984) 328–342.

[Brandenberger, 1999] R. H. BRANDENBERGER (1999). Private communication.

[Brandenberger *et al.*, 1996] R. H. BRANDENBERGER, B. CARTER, A.-C. DAVIS, & M. TRODDEN, “Cosmic vortons and particle physics constraints”. *Physical Review* **D54** (1996) 6059–6071, `hep-ph/9605382`.

[Brandenberger & Hill, 1986] R. H. BRANDENBERGER & C. T. HILL, “Energy density fluctuations in de Sitter space”. *Physics Letters* **179B** (1986) 30–36.

[Brax & Martin, 1999] P. BRAX & J. MARTIN, “Quintessence and supergravity”. *Physics Letters* **468B** (1999) 40–45, `astro-ph/9905040`.

[Brax & Martin, 2000] P. BRAX & J. MARTIN, “The robustness of quintessence”. *Physical Review* **D61** (2000) 103502, `astro-ph/9912046`.

[Brax *et al.*, 2000] P. BRAX, J. MARTIN, & A. RIAZUELO, “Exhaustive study of cosmic microwave background anisotropies in quintessential scenarios”. *Physical Review* **D62** (2000) 103505, `astro-ph/0005428`.

[Brax *et al.*, 2001] P. BRAX, J. MARTIN, & A. RIAZUELO, “Quintessence with two energy scales”. *Physical Review* **D64** (2001) 083505, `hep-ph/0104240`.

[Brax *et al.*, 2002] P. BRAX, J. MARTIN, & A. RIAZUELO, “CMBR anisotropies in presence of SUGRA quintessence”. In [Nguyễn & Trần Thanh Vân, 2002], pp 495–498.

[Bray, 1990] A. J. BRAY, “Renormalization-group approach to domain-growth scaling”. *Physical Review* **B41** (1990) 6724–6732.

[Bridle *et al.*, 2001] S. L. BRIDLE, I. ZEHAVI, A. DEKEL, O. LAHAV, M. P. HOBSON, & A. N. LASENBY, “Cosmological parameters from velocities, CMB and supernovae”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **321** (2001) 333–340, `astro-ph/0006170`.

[Brooke *et al.*, 1985] G. BROOKE, G. CUNNINGHAM, P. J. V. EAMES, M. A. LAWRENCE, J. C. PERRETT, R. J. O. REID, & A. A. WATSON, “The primary cosmic ray spectrum above 10^{19} eV”. In [La Jolla, 1985], pp 150–153, vol **2**.

[Bucher *et al.*, 1999] M. BUCHER, K. MOODLEY, & N. G. TUROK, “The general primordial cosmic perturbation”. *Physical Review* **D62** (1999) 083508, `astro-ph/9904231`.

[Bunn, 1997] E. F. BUNN, "Calculations of cosmic background radiation anisotropies and implications". In [Lineweaver *et al.*, 1997], pp 135–183, astro-ph/9607088.

[Buonanno & Damour, 1999] A. BUONANNO & T. DAMOUR, "Gravitational, dilatonic and axionic radiative damping of cosmic strings". *Physical Review* **D60** (1999) 023517, gr-qc/9801105.

[Burbidge *et al.*, 1957] G. R. BURBIDGE, E. M. BURBIDGE, W. A. FOWLER, & F. HOYLE, "Synthesis of the elements in stars". *Review of Modern Physics* **29** (1957) 547–650.

[Burles *et al.*, 2001] S. BURLES, K. M. NOLLETH, & M. S. TURNER, "What is the big-bang-nucleosynthesis prediction for the baryon density and how reliable is it ?". *Physical Review* **D63** (2001) 063512, astro-ph/0008495.

[Burns, 1997] S. D. BURNS, "Isentropic and isocurvature axion perturbations in inflationary cosmology". astro-ph/9711303.

[Caldwell, 2002] R. R. CALDWELL, "A phantom menace ?". astro-ph/9908168.

[Caldwell *et al.*, 1998] R. R. CALDWELL, R. DAVE, & P. J. STEINHARD, "Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-state". *Physical Review Letters* **80** (1998) 1582–1585, astro-ph/9708069.

[CAMB, http] "CAMB". http://www.mrao.cam.ac.uk/~aml1005/cmb/.

[Carroll, 1998] S. M. CARROLL, "Quintessence and the rest of the world". *Physical Review Letters* **81** (1998) 3067–3070, astro-ph/9806099.

[Carter, 1991] B. CARTER, "Cosmological relic distribution of conducting string loops". *Annals of the New York Academy of Science* **647** (1991) 758–766.

[Carter, 1995] B. CARTER, "How about vortons ?". In [Guiderdoni *et al.*, 1995], pp 195–204.

[Casas *et al.*, 1989] J. A. CASAS, J. M. MORENO, C. MUÑOZ, & M. QUIRÓS, "Cosmological implications of an anomalous $\mathrm{U}(1)$: inflation, cosmic strings and constraints on superstring parameters". *Nuclear Physics* **B328** (1989) 272–291.

[Casas & Muñoz, 1989] J. A. CASAS & C. MUÑOZ, "Inflation from superstrings". *Physics Letters* **216B** (1989) 37–40.

[Chandrasekhar, 1960] S. CHANDRASEKHAR, *Radiative transfert*. Dover Publications, New York (1960), 393 pages, ISBN 0-486-60590-6.

[Cheng *et al.*, 1996] E. S. CHENG, D. A. COTTINGHAM, D. J. FIXSEN, C. A. INMAN, M. S. KOWITT, S. S. MEYER, L. A. PAGE, J. L. PUCHALLA, J. E. RUHL, & R. F. SILVERBERG, "MSAM 1-94 : repeated measurement of medium scale anisotropy in the cosmic microwave background radiation". *Astrophysical Journal Letters* **456** (1996) L71–L74, astro-ph/9508087.

[Cheung & Magueijo, 1997] C. CHEUNG & J. C. R. MAGUEIJO, "Painless causality in defect calculations". *Physical Review* **D56** (1997) 1982–1988, astro-ph/9702041.

[Cheung & Magueijo, 1998] C. CHEUNG & J. C. R. MAGUEIJO, "Non Gaussian sampling effects on the CMB power spectrum estimation". *Physical Review* **D57** (1998) 3285–3289, astro-ph/9707271.

[Chiba, 1999] T. CHIBA, "Quintessence, the gravitational constant, and gravity". *Physical Review* **D60** (1999) 083508, gr-qc/9903094.

[Chiba *et al.*, 2000] T. CHIBA, T. OKABE, & M. YAMAGUSHI, "Kinetically driven quintessence". *Physical Review* **D62** (2000) 023511, astro-ph/9912463.

[Clapp *et al.*, 1994] A. C. CLAPP, M. J. DEVLIN, J. O. GUNDERSEN, C. A. HAGMANN, V. V. HRISTOV, A. E. LANGE, M. A. LIM, P. M. LUBIN, P. D. MAUSKOPF, P. R. MEINHOLD, P. L. RICHARDS, G. F. SMOOT, S. T. TANAKA, P. T. TIMBIE, & C. A. WUENSCHE, "Measurements of anisotropy in the cosmic microwave background radiation at degree angular scales near the stars Sigma Hercules and Iota Draconis". *Astrophysical Journal Letters* **433** (1994) L57–L60, `astro-ph/9404072`.

[CMBFAST, `http`] "CMBFAST". `http://www.sns.ias.edu/~matiasz/CMBFAST/cmbfast.html`.

[Coble *et al.*, 1997] K. A. COBLE, S. DODELSON, & J. A. FRIEMAN, "Dynamical Lambda models of structure formation". *Physical Review* **D55** (1997) 1851–1859, `astro-ph/9608122`.

[Coble *et al.*, 1999] K. A. COBLE, M. DRAGOVAN, J. KOVAC, N. W. HALVERSON, W. L. HOLZAPFEL, L. E. KNOX, S. DODELSON, K. GANGA, D. L. ALVAREZ, J. B. PETERSON, G. S. GRIFFIN, M. G. NEWCOMB, K. W. MILLER, S. R. PLATT, & G. NOVAK, "Anisotropy in the cosmic microwave background at degree angular scales : Python V results". *Astrophysical Journal Letters* **519** (1999) L5–L8, `astro-ph/9902195`.

[Coleman *et al.*, 1991] *Quantum cosmology and baby Universes*, édité par S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran, & S. Weinberg. World Scientific, Singapore (1991), xii+353 pages. Proceedings of the 7$^{\text{th}}$ Jerusalem winter school for theoretical physics, held in Jerusalem, Israel, December 27, 1989–January 4, 1990.

[Contaldi *et al.*, 1998] C. R. CONTALDI, M. B. HINDMARSH, & J. C. R. MAGUEIJO, "CMB and LSS power spectra from local cosmic string seeded structure formation". In [Santander, 1998], `astro-ph/9810411`.

[Contaldi *et al.*, 1999a] C. R. CONTALDI, M. B. HINDMARSH, & J. C. R. MAGUEIJO, "The power spectra of CMB and density fluctuations seeded by local cosmic strings". *Physical Review Letters* **82** (1999) 679–682, `astro-ph/9808201`.

[Contaldi *et al.*, 1999b] C. R. CONTALDI, M. B. HINDMARSH, & J. C. R. MAGUEIJO, "CMB and density fluctuations from strings plus inflation". *Physical Review Letters* **82** (1999) 2034–2037, `astro-ph/9809053`.

[Cooray & Huterer, 1999] A. R. COORAY & D. HUTERER, "Gravitational lensing as a probe of quintessence". *Astrophysical Journal Letters* **513** (1999) L95–L98, `astro-ph/9901097`.

[Copeland *et al.*, 1990] E. J. COPELAND, D. HAWS, & M. B. HINDMARSH, "Classical theory of radiating strings". *Physical Review* **D42** (1990) 726–730.

[Copeland *et al.*, 1988] E. J. COPELAND, D. HAWS, N. G. TUROK, & M. B. HINDMARSH, "Dynamics of and radiation from superconducting strings and springs". *Nuclear Physics* **B306** (1988) 908–930.

[Copeland *et al.*, 1999] E. J. COPELAND, J. C. R. MAGUEIJO, & D. STEER, "Cosmological parameter dependence in local string theories of structure formation". *Physical Review* **D61** (1999) 063505, `astro-ph/9903174`.

[Copeland *et al.*, 1987] E. J. COPELAND, N. G. TUROK, & M. B. HINDMARSH, "Dynamics of superconducting cosmic strings". *Physical Review Letters* **58** (1987) 1910–1913.

[Crittenden & Turok, 1995] R. G. CRITTENDEN & N. G. TUROK, "The Doppler peaks from cosmic texture". *Physical Review Letters* **75** (1995) 2642–2645, `astro-ph/9505120`.

[Dabholkar & Quashnock, 1990] A. DABHOLKAR & J. M. QUASHNOCK, "Pinning down the axion". *Nuclear Physics* **B333** (1990) 815–832.

[Damour & Dyson, 1996] T. DAMOUR & F. DYSON, "The Oklo bound on the time variation of the fine-structure constant revisited". *Nuclear Physics* **B480** (1996) 37–54, hep-ph/9606486.

[Damour & Esposito-Farese, 1992] T. DAMOUR & G. ESPOSITO-FARESE, "Tensor multiscalar theories of gravitation". *Classical and Quantum Gravity* **9** (1992) 2093–2176.

[DAMTP, http] "Cosmic strings simulations". http://www.damtp.cam.ac.uk/user/gr/public/cs_evol.html .

[Davis & Davis, 1997] A.-C. DAVIS & S. C. DAVIS, "Microphysics of SO(10) cosmic strings". *Physical Review* **D55** (1997) 1879–1895, hep-ph/9608206.

[Davis, 1985a] R. L. DAVIS, "Goldstone bosons in string models of galaxy formation". *Physical Review* **D32** (1985) 3172–3177.

[Davis, 1985b] R. L. DAVIS, "Nucleosynthesis problems for string models of galaxy formation". *Physics Letters* **161B** (1985) 285–288.

[de Bernardis *et al.*, 2002] P. DE BERNARDIS, P. A. R. ADE, J. J. BOCK, J. R. BOND, J. BORRILL, A. BOSCALERI, K. A. COBLE, C. R. CONTALDI, B. P. CRILL, G. DE TROIA, P. FARESE, K. GANGA, M. GIACOMETTI, E. HIVON, V. V. HRISTOV, A. IACOANGELI, A. H. JAFFE, W. C. JONES, A. E. LANGE, L. MARTINIS, S. MASI, P. MASON, P. D. MAUSKOPF, A. MELCHIORRI, T. MONTROY, C. B. NETTERFIELD, E. PASCALE, F. PIACENTINI, D. Y. POGOSIAN, G. POLENTA, F. PONGETTI, S. PRUNET, G. ROMEO, J. E. RUHL, & F. SCARAMUZZI, "Multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background : significance and consequences for cosmology". *Astrophysical Journal* **564** (2002) 559–566, astro-ph/0105296.

[de Bernardis *et al.*, 2000] P. DE BERNARDIS, P. A. R. ADE, J. J. BOCK, J. R. BOND, J. BORRILL, A. BOSCALERI, K. A. COBLE, B. P. CRILL, G. DE GASPERIS, P. FARESE, P. G. FERREIRA, K. GANGA, M. GIACOMETTI, E. HIVON, V. V. HRISTOV, A. IACOANGELI, A. H. JAFFE, A. E. LANGE, L. MARTINIS, S. MASI, P. MASON, P. D. MAUSKOPF, A. MELCHIORRI, L. MIGLIO, T. MONTROY, C. B. NETTERFIELD, E. PASCALE, F. PIACENTINI, D. Y. POGOSIAN, S. PRUNET, S. RAO, G. ROMEO, J. E. RUHL, F. SCARAMUZZI, D. SFORNA, & N. VITTORIO, "A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation". *Nature* **404** (2000) 955–959, astro-ph/0004404.

[de la Macorra, 2002] A. DE LA MACORRA, "Can moduli fields parametrize the cosmological constant ?". hep-ph/9910330.

[de Laix & Scherrer, 1996] A. A. DE LAIX & R. J. SCHERRER, "Another look at Gaussian isocurvature hot dark matter models for large scale structure". *Astrophysical Journal* **464** (1996) 539–546, astro-ph/9509075.

[de Oliveira-Costa *et al.*, 1998] A. DE OLIVEIRA-COSTA, M. J. DEVLIN, T. HERBIG, A. D. MILLER, C. B. NETTERFIELD, L. A. PAGE, & M. TEGMARK, "Mapping the cosmic microwave background anisotropy : combined analysis of QMAP flights". *Astrophysical Journal Letters* **509** (1998) L77–L80, astro-ph/9808045.

[de Oliveira-Costa & Tegmark, 1999] *Microwave foregrounds*, édité par A. de Oliveira-Costa & M. Tegmark. *ASP Conference Series* **181**, Astronomical Society of the Pacific, San Francisco (1999). Volume produced as part of the Sloan Summit on origins, held in Princeton, New Jersey, November 14–15, 1998.

[Deruelle *et al.*, 1997] N. DERUELLE, D. LANGLOIS, & J.-P. UZAN, "Cosmological perturbations seeded by topological defects : setting the initial conditions". *Physical Review* **D56** (1997) 7608–7620, gr-qc/9707035. Erratum in [Deruelle *et al.*, 1998].

[Deruelle *et al.*, 1998] N. DERUELLE, D. LANGLOIS, & J.-P. UZAN, "Erratum : Cosmological perturbations seeded by topological defects : setting the initial conditions [*Phys. Rev.* **D56**, 7608 (1997)]". *Physical Review* **D58** (1998) 089901.

[Deruelle & Mukhanov, 1995] N. DERUELLE & V. F. MUKHANOV, "On matching conditions for cosmological perturbations". *Physical Review* **D52** (1995) 5549–5555, `gr-qc/9503050`.

[Dicke *et al.*, 1965] R. H. DICKE, P. J. E. PEEBLES, P. G. ROLL, & D. T. WILKINSON, "Cosmic black-body radiation". *Astrophysical Journal* **142** (1965) 414–419.

[Dicker *et al.*, 1999] S. R. DICKER, S. J. MELHUISH, R. D. DAVIES, C. M. GUTIÉRREZ, R. REBOLO, D. L. HARRISON, R. J. DAVIS, A. WILKINSON, R. J. HOYLAND, & R. A. WATSON, "CMB observations with the Jodrell Bank-IAC interferometer at 33 GHz". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **309** (1999) 750–760, `astro-ph/9907118`.

[Dimitropoulos, 1999] A. DIMITROPOULOS, "Damping of gravitational waves and density perturbations in the early Universe". *Astronomical and Astrophysical Transactions* **18** (1999) 543, `gr-qc/9805016`.

[Dine *et al.*, 1987a] M. DINE, I. ICHINOSE, & N. SEIBERG, "*F* terms and *D* terms in string theory". *Nuclear Physics* **B293** (1987) 253–265.

[Dine *et al.*, 1987b] M. DINE, N. SEIBERG, & E. WITTEN, "Fayet-Iliopoulos terms in string theory". *Nuclear Physics* **B289** (1987) 589–598.

[Diu *et al.*, 1989] B. DIU, C. GUTHMANN, D. LEDERER, & B. ROULET, *Physique statistique*. Hermann, Paris (1989), xii+1001 pages, ISBN 2-70-566065-8.

[Dodelson *et al.*, 2000] S. DODELSON, M. KAPLINGHAT, & E. D. STEWART, "Solving the coincidence problem : tracking oscillating energy". *Physical Review Letters* **85** (2000) 5276–5279, `astro-ph/0002360`.

[Dolgov, 1997] A. D. DOLGOV (1997). "Baryogenesis, 30 years after", `hep-ph/9707419`. Presented at 25$^{\text{th}}$ ITEP winter school of physics, Moscow, Russia, February 18–27, 1997.

[Durrer, 1994] R. DURRER, "Gauge invariant cosmological perturbation theory : a general study and its application to the texture scenario of structure formation". *Fundamentals of Cosmic Physics* **14** (1994) 209–339, `astro-ph/9311041`.

[Durrer *et al.*, 1996] R. DURRER, A. GANGUI, & M. SAKELLARIADOU, "Doppler peaks : a fingerprint of topological defects". *Physical Review Letters* **76** (1996) 579–582, `astro-ph/9507035`.

[Durrer *et al.*, 2001] *Cosmology and particle physics 2000*, édité par R. Durrer, J. Garcia-Bellido, & M. Shaposhnikov. *AIP conference proceedings* **555**, American Institute of Physics, Woodbury (2001), xvi+598 pages. Proceedings of the conference on cosmology and particle physics, held in Verbier, Switzerland, July 17–28, 2000.

[Durrer & Kunz, 1998] R. DURRER & M. KUNZ, "Cosmic microwave background anisotropies from scaling seeds : generic properties of the correlation functions". *Physical Review* **D57** (1998) 3199–3203, `astro-ph/9711133`.

[Durrer *et al.*, 1997] R. DURRER, M. KUNZ, C. H. LINEWEAVER, & M. SAKELLARIADOU, "Cosmic microwave background anisotropies from scaling seeds : fit to observational data". *Physical Review Letters* **79** (1997) 5198–5201, `astro-ph/9706215`.

[Durrer *et al.*, 1999a] R. DURRER, M. KUNZ, & A. MELCHIORRI, "Cosmic microwave background anisotropies from scaling seeds : global defect models". *Physical Review* **D59** (1999) 123005, `astro-ph/9811174`.

[Durrer *et al.*, 1999b] R. DURRER, M. KUNZ, & A. MELCHIORRI, "Cosmic microwave background anisotropies from global texture". In [Maiani *et al.*, 1999], p 18, astro-ph/9901377.

[Durrer & Sakellariadou, 1997] R. DURRER & M. SAKELLARIADOU, "Microwave background anisotropies from scaling seed perturbations". *Physical Review* **D56** (1997) 4480–4493, astro-ph/9702028.

[Durrer & Zhou, 1996] R. DURRER & Z.-H. ZHOU, "Large scale structure formation with global topological defects : a new formalism and its implementation by numerical simulations". *Physical Review* **D53** (1996) 5394–5410, astro-ph/9508016.

[Efimov *et al.*, 1991] N. N. EFIMOV, T. A. EGOROV, A. V. GLUSHKOV, M. I. PRAVDIN, & I. E. SLEPTSOV, "The energy spectrum and anisotropy of primary cosmic rays at energy $E(0) > 10^{17}$ eV observed in Yakutsk". In [Nagano & Takahara, 1991], pp 20–33.

[Efstathiou, 2000] G. P. EFSTATHIOU, "Constraining the equation of state of the Universe from distant type Ia supernovae and cosmic microwave background anisotropies". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **310** (2000) 842–850, astro-ph/9904356.

[Egorov, 1993] T. A. EGOROV, "Recent results from Yakutsk experiment". In [Nagano, 1993], pp 35–51.

[Einasto *et al.*, 1997] J. EINASTO, M. EINASTO, S. GOTTLÖBER, V. MÜLLER, V. SAAR, A. A. STAROBINSKY, E. TAGO, D. L. TUCKER, H. ANDERNACH, & P. FRISCH, "A 120-Mpc periodicity in the three-dimensional distribution of galaxy superclusters". *Nature* **385** (1997) 139–141.

[Einstein, 1915a] A. EINSTEIN, "Zür allgemeine Relativitätstheorie". *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte. 2. Halbband* (1915) 778–798.

[Einstein, 1915b] A. EINSTEIN, "Zür allgemeine Relativitätstheorie (Nachtrag)". *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte. 2. Halbband* (1915) 799–801.

[Einstein, 1915c] A. EINSTEIN, "Die Feldgleichungen der Gravitation". *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte. 2. Halbband* (1915) 844–847.

[Einstein, 1917] A. EINSTEIN, "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie". *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte. 2. Halbband* (1917) 142–152.

[Enqvist & Kurki-Suonio, 2000] K. ENQVIST & H. KURKI-SUONIO, "Constraining isocurvature fluctuations with the Planck Surveyor". *Physical Review* **D61** (2000) 043002, astro-ph/9907221.

[Enqvist & Mac Donald, 1999] K. ENQVIST & J. MAC DONALD, "Observable isocurvature fluctuations from the Affleck-Dine condensate". *Physical Review Letters* **83** (1999) 2510–2513, hep-ph/9811412.

[EROS, http] "EROS Home Page". http://www.lal.in2p3.fr/recherche/eros/ .

[Fabris & Martin, 1997] J. C. FABRIS & J. MARTIN, "Amplification of density perturbations in fluids with negative pressure". *Physical Review* **D55** (1997) 5205–5207.

[Femenia *et al.*, 1998] B. FEMENIA, R. REBOLO, C. M. GUTIÉRREZ, M. LIMON, & L. PICCIRILLO, "The Instituto de Astrofísica de Canarias – Bartol cosmic microwave background anisotropy experiment : results of the 1994 campaign". *Astrophysical Journal* **498** (1998) 117–136, astro-ph/9711225.

[Ferreira & Joyce, 1997] P. G. FERREIRA & M. G. F. JOYCE, "Structure formation with a self-tuning scalar field". *Physical Review Letters* **79** (1997) 4740–4743, astro-ph/9707286.

[Ferreira & Joyce, 1998] P. G. FERREIRA & M. G. F. JOYCE, "Cosmology with a primordial scaling field". *Physical Review* **D58** (1998) 023503, astro-ph/9711102.

[Ferreira *et al.*, 1998] P. G. FERREIRA, J. C. R. MAGUEIJO, & K. M. GÓRSKI, “Evidence for non-Gaussianity in the COBE DMR four year sky maps”. *Astrophysical Journal Letters* **503** (1998) L1–L4, `astro-ph/9803256`.

[Fixsen *et al.*, 1996] D. J. FIXSEN, E. S. CHENG, J. M. GALES, J. C. MATHER, R. A. SHAFER, & E. L. WRIGHT, “The cosmic microwave background spectrum from the full COBE/FIRAS data set”. *Astrophysical Journal* **473** (1996) 576–587, `astro-ph/9605054`.

[Ford, 1987] L. H. FORD, “Gravitational particle creation and inflation”. *Physical Review* **D35** (1987) 2955–2960.

[Ford & Parker, 1977] L. H. FORD & L. PARKER, “Quantized gravitational wave perturbations in Robertson-Walker Universes”. *Physical Review* **D16** (1977) 1601–1608.

[Fort *et al.*, 1997] B. FORT, Y. MELLIER, & M. DANTEL-FORT, “Distribution of galaxies at large redshift and cosmological parameters from the magnification bias in Cl0024+1654”. *Astronomy and Astrophysics* **321** (1997) 353–362, `astro-ph/9606039`.

[Freedman, 2000] W. L. FREEDMAN, “Determination of cosmological parameters”. *Physica Scripta* **T85** (2000) 37–46, `astro-ph/9905222`.

[Friedmann, 1922] A. FRIEDMANN, “Über die Krümmung des Raumes”. *Zeitschrift für Physik* **10** (1922) 377–386.

[Friedmann, 1924] A. FRIEDMANN, “Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes”. *Zeitschrift für Physik* **21** (1924) 326–332.

[Fukugita *et al.*, 1990] M. FUKUGITA, N. SUGIYAMA, & M. UMEMURA, “Constraints on cold dark matter dominated Universes from cosmic background radiation anisotropies”. *Astrophysical Journal* **358** (1990) 28–35.

[Gamov, 1946] G. GAMOV, “Expanding Universe and the origin of elements”. *Physical Review* **70** (1946) 572–573.

[Ganga *et al.*, 1994] K. GANGA, L. A. PAGE, E. S. CHENG, & S. S. MEYER, “The amplitude and spectral index of the large angular scale anisotropy in the cosmic microwave background radiation”. *Astrophysical Journal Letters* **432** (1994) L15–L18, `astro-ph/9404009`.

[Ganga *et al.*, 1997a] K. GANGA, B. V. RATRA, S. E. CHURCH, N. SUGIYAMA, P. A. R. ADE, W. L. HOLZAPFEL, P. D. MAUSKOPF, & A. E. LANGE, “Using SuZIE arcminute-scale CMB anisotropy data to probe open and flat-Lambda CDM cosmogonies”. *Astrophysical Journal* **484** (1997) 517–522, `astro-ph/9702186`.

[Ganga *et al.*, 1997b] K. GANGA, B. V. RATRA, J. O. GUNDERSEN, & N. SUGIYAMA, “UCSB South Pole 1994 CMB anisotropy measurement constraints on open and flat-Lambda CDM cosmogonies”. *Astrophysical Journal* **484** (1997) 7–30, `astro-ph/9602141`.

[Gangui, 1994] A. GANGUI, “Non-Gaussian effects in the cosmic microwave background from inflation”. *Physical Review* **D50** (1994) 3684–3691, `astro-ph/9406014`.

[Gangui *et al.*, 1994] A. GANGUI, F. LUCCHIN, S. MATARRESE, & S. MOLLERACH, “The three point correlation function of the cosmic microwave background in inflationary models”. *Astrophysical Journal* **430** (1994) 447–457, `astro-ph/9312033`.

[Gangui & Martin, 2000] A. GANGUI & J. MARTIN, “Best unbiased estimators for the three-point correlators of the cosmic microwave background radiation”. *Physical Review* **D62** (2000) 103004, `astro-ph/0001361`.

[Garnavich *et al.*, 1998a] P. M. GARNAVICH, S. JHA, P. CHALLIS, A. CLOCCHIATTI, A. DIERCKS, A. V. FILIPPENKO, R. L. GILLILAND, C. J. HOGAN, R. P. KIRSHNER, B. LEIBUNDGUT, M. M. PHILLIPS, D. REISS, A. G. RIESS, B. P. SCHMIDT, R. A. SCHOMMER, R. C. SMITH, J. SPYROMILIO, C. STUBBS, N. B. SUNTZEFF, J. TONRY, & S. M. CARROLL, "Supernova limits on the cosmic equation of state". *Astrophysical Journal* **509** (1998) 74–79, `astro-ph/9806396`.

[Garnavich *et al.*, 1998b] P. M. GARNAVICH, R. P. KIRSHNER, P. CHALLIS, J. TONRY, R. L. GILLILAND, R. C. SMITH, A. CLOCCHIATTI, A. DIERCKS, A. V. FILIPPENKO, M. HAMUY, C. J. HOGAN, B. LEIBUNDGUT, M. M. PHILLIPS, D. REISS, A. G. RIESS, B. P. SCHMIDT, R. A. SCHOMMER, J. SPYROMILIO, C. STUBBS, N. B. SUNTZEFF, & L. WELLS, "Constraints on cosmological models from hubble space telescope observations of high-z supernovae". *Astrophysical Journal Letters* **493** (1998) L53–L57, `astro-ph/9710123`.

[Gasperini, `http`] "Maurizio Gasperini – Home Page". `http://carmen.to.infn.it/~gasperin/`.

[Gatzañaga & Baugh, 1998] E. GATZAÑAGA & C. M. BAUGH, "Testing deprojection algorithms on mock angular catalogues : evidence for a break in the power spectrum". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **294** (1998) 229–244, `astro-ph/9704246`.

[Gawiser, `http`] "CMB Anisotropy Observations". `http://mamacass.ucsd.edu/people/gawiser/cmb.html`.

[Gibbons *et al.*, 1990] *The Formation and evolution of cosmic strings*, édité par G. W. Gibbons, S. W. Hawking, & T. Vachaspati. Cambridge University Press, Cambridge (1990), xi+542 pages. Proceedings of the workshop supported by the Economic and Social Research Council and the Nuttfield Foundation, held in Cambridge, July 3–7, 1989.

[Gill & Kibble, 1994] A. J. GILL & T. W. B. KIBBLE, "Cosmic rays from cosmic strings". *Physical Review* **D50** (1994) 3660–3665, `hep-ph/9403395`.

[Gillies, 1997] G. T. GILLIES, "The Newtonian gravitational constant : recent measurements and related studies". *Reports on Progress in Physics* **60** (1997) 151–225.

[Giovannini, 1999a] M. GIOVANNINI, "Production and detection of relic gravitons in quintessential inflationary models". *Physical Review* **D60** (1999) 123511, `astro-ph/9903004`.

[Giovannini, 1999b] M. GIOVANNINI, "Relic gravitons, dominant energy condition and bulk viscous stresses". *Physical Review* **D59** (1999) 121301, `gr-qc/9903113`.

[Giovannini, 1999c] M. GIOVANNINI, "Spikes in the relic graviton background from quintessential inflation". *Classical and Quantum Gravity* **16** (1999) 2905–2913, `hep-ph/9903263`.

[Goldberg *et al.*, 1967] J. N. GOLDBERG, A. J. MAC FARLANE, E. T. NEWMAN, F. ROHRLICH, & E. C. G. SUDARSHAN, "Spin-s spherical harmonic and ð". *Journal of Mathematical Physics* **8** (1967) 2155–2161.

[Goldstone, 1961] J. GOLDSTONE, "Field theories with 'superconductor' solutions". *Nuovo Cimento* **19** (1961) 154–164.

[Górski *et al.*, 1992] K. M. GÓRSKI, J. D. SILK, & N. VITTORIO, "Cold dark matter confronts the cosmic microwave background : large angular scalar anisotropies in $\Omega_0 + \Lambda = 1$ models". *Physical Review Letters* **68** (1992) 733–736.

[Gottlöber *et al.*, 1991] S. GOTTLÖBER, V. MÜLLER, & A. A. STAROBINSKY, "Analysis of inflation driven by a scalar field and a curvature squared term". *Physical Review* **D43** (1991) 2510–2520.

[Gradshteyn & Ryzhik, 1980] I. S. GRADSHTEYN & I. M. RYZHIK, *Table of integrals, series and products*. Academic Press, London (1980), xlv+1160 pages, ISBN 0-12-294760-6.

[Grishchuk, 1974] L. P. GRISHCHUK, “Amplification of gravitational waves in an isotropic Universe”. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **40** (1974) 409–415.

[Grishchuk, 1988] L. P. GRISHCHUK, “Gravitational wave astronomy”. *Soviet Physics Uspekhi* **31** (1988) 940–954.

[Grishchuk, 1993a] L. P. GRISHCHUK, “Quantum effects in cosmology”. *Classical and Quantum Gravity* **10** (1993) 2449–2478, `gr-qc/9302036`.

[Grishchuk, 1993b] L. P. GRISHCHUK, “Relic gravitational waves and limits on inflation”. *Physical Review* **D48** (1993) 3513–3516, `gr-qc/9304018`.

[Grishchuk, 1994] L. P. GRISHCHUK, “Density perturbations of quantum mechanical origin and anisotropy of the microwave background”. *Physical Review* **D50** (1994) 7154–7172, `gr-qc/9405059`.

[Grishchuk, 2000] L. P. GRISHCHUK (2000). “Relic gravitational waves and their detection”, `gr-qc/0002035`. Based on a talk given at the 220$^{\text{th}}$ WE-Heraeus seminar on “Gyros, clocks, and interferometers : testing general relativity in space”, held at Bad Honnef, Germany, August 22–27, 1999.

[Grivell & Liddle, 1996] I. J. GRIVELL & A. R. LIDDLE, “Accurate determination of inflationary perturbations”. *Physical Review* **D54** (1996) 7191–7198, `astro-ph/9607096`.

[Guiderdoni *et al.*, 1995] *Dark matter in cosmology, clocks and tests of fundamental laws*, édité par B. Guiderdoni, G. L. Greene, D. Hinds, & J. Trần Thanh Vân. Éditions Frontières, Gif-sur-Yvette, France (1995), x+664 pages. Proceedings of the XXX$^{\text{th}}$ Rencontre de Moriond, Villars-sur-Ollon, Switzerland, January 22–29, 1995.

[Gunn & Peterson, 1965] J. E. GUNN & B. A. PETERSON, “On the density of neutral hydrogen in intergalactic space”. *Astrophysical Journal* **142** (1965) 1633–1636.

[Guth, 1981] A. H. GUTH, “The inflationary Universe : a possible solution to the horizon and flatness problems”. *Physical Review* **D23** (1981) 347–356.

[Guth & Pi, 1982] A. H. GUTH & S.-Y. PI, “Fluctuations in the new inflationary Universe”. *Physical Review Letters* **49** (1982) 1110–1113.

[Gutiérrez *et al.*, 2000] C. M. GUTIÉRREZ, R. REBOLO, R. A. WATSON, R. D. DAVIES, A. W. JONES, & A. N. LASENBY, “The Tenerife cosmic microwave background maps : observations and first analysis”. *Astrophysical Journal* **529** (2000) 47–55, `astro-ph/9903196`.

[Halliwell, 1991] J. J. HALLIWELL, “Introductory lectures on quantum cosmology”. In [Coleman *et al.*, 1991], pp 159–243.

[Halliwell & Hawking, 1985] J. J. HALLIWELL & S. W. HAWKING, “The origin of structure in the Universe”. *Physical Review* **D31** (1985) 1777–1791.

[Halpern & Scott, 1999] M. HALPERN & D. SCOTT, “Future cosmic microwave background experiments”. In [de Oliveira-Costa & Tegmark, 1999], p 283, `astro-ph/9904188`.

[Halverson *et al.*, 2002] N. W. HALVERSON, E. M. LEITCH, C. PRYKE, J. KOVAC, J. E. CARLSTROM, W. L. HOLZAPFEL, M. DRAGOVAN, J. K. CARTWRIGHT, B. S. MASON, S. PADIN, T. J. PEARSON, M. C. SHEPHERD, & A. C. S. READHEAD, “DASI first results : a measurement of the cosmic microwave background angular power spectrum”. *Astrophysical Journal* **568** (2002) 38–45, `astro-ph/0104489`.

[Hanany *et al.*, 2000] S. HANANY, P. A. R. ADE, A. BALBI, J. J. BOCK, J. BORRILL, A. BOSCALERI, P. DE BERNARDIS, P. G. FERREIRA, V. V. HRISTOV, A. H. JAFFE, A. E. LANGE,

A. T. LEE, P. D. MAUSKOPF, C. B. NETTERFIELD, S. OH, E. PASCALE, B. RABII, P. L. RICHARDS, G. F. SMOOT, R. STOMPOR, C. L. WINANT, & J.-H. P. WU, "MAXIMA-1 : a measurement of the cosmic microwave background anisotropy on angular scales of 10 arcminutes to 5 degrees". *Astrophysical Journal Letters* **545** (2000) L5–L9, `astro-ph/0005123`.

[Harrison, 1970] E. R. HARRISON, "Fluctuations at the threshold of classical cosmology". *Physical Review* **D1** (1970) 2726–2730.

[Harvey & Naculich, 1989] J. A. HARVEY & S. G. NACULICH, "Cosmic strings from pseudoanomalous $U(1)$'s". *Physics Letters* **217B** (1989) 231–237.

[Hawking, 1982] S. W. HAWKING, "The development of irregularities in a single bubble inflationary Universe". *Physics Letters* **115B** (1982) 295–297.

[Hawking & Ellis, 1973] S. W. HAWKING & G. F. R. ELLIS, *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Cambridge (1973), xi+391 pages, ISBN 0-521-20016-4.

[Hilbert, 1915] D. HILBERT, "Die Grunlagen der Physik". *Königliche Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen. Mathematische-physikalische Klasse, Nachrichten* (1915) 395–407.

[Hill, 1983] C. T. HILL, "Monoponolium". *Nuclear Physics* **B224** (1983) 469–490.

[Hill *et al.*, 1987] C. T. HILL, D. N. SCHRAMM, & T. P. WALKER, "Ultrahigh-energy cosmic rays from superconducting cosmic strings". *Physical Review* **D36** (1987) 1007–1018.

[Hindmarsh & Kibble, 1995] M. B. HINDMARSH & T. W. B. KIBBLE, "Cosmic strings". *Reports on Progress in Physics* **58** (1995) 477–562, `hep-ph/9411342`.

[Hinshaw *et al.*, 1996] G. HINSHAW, A. J. BANDAY, C. H. BENNETT, K. M. GÓRSKI, A. J. KOGUT, G. F. SMOOT, & E. L. WRIGHT, "Band power spectra in the COBE DMR four-year anisotropy maps". *Astrophysical Journal Letters* **464** (1996) L17–L20, `astro-ph/9601059`.

[Holzapfel *et al.*, 2000] W. L. HOLZAPFEL, J. E. CARLSTROM, L. GREGO, G. P. HOLDER, M. K. JOY, & E. D. REESE, "Limits on arcminute-scale cosmic microwave background anisotropy at 28.5 GHz". *Astrophysical Journal* **539** (2000) 57–66, `astro-ph/9912010`.

[Hoyle, 1948] F. HOYLE, "A new model for the expanding Universe". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **108** (1948) 372–382.

[Hu, 1995] W. T. HU, *Wandering in the background : a cosmic microwave background explorer* (1995). PhD Thesis, University of California at Berkeley, `astro-ph/9508126`.

[Hu, 1996] W. T. HU, "Concepts in CMB anisotropy formation". In [Martinez-Gonzalez & Sanz, 1996], pp 207–239, `astro-ph/9511130`.

[Hu *et al.*, 1995a] W. T. HU, E. F. BUNN, & N. SUGIYAMA, "COBE constraints on baryon isocurvature models". *Astrophysical Journal Letters* **447** (1995) L59–L64, `astro-ph/9501034`.

[Hu *et al.*, 1995b] W. T. HU, D. SCOTT, N. SUGIYAMA, & M. S. WHITE, "The effect of physical assumptions on the calculation of microwave background anisotropies". *Physical Review* **D52** (1995) 5498–5515, `astro-ph/9505043`.

[Hu *et al.*, 1998] W. T. HU, U. SELJAK, M. S. WHITE, & M. ZALDARRIAGA, "A complete treatment of CMB anisotropies in a FRW Universe". *Physical Review* **D57** (1998) 3290–3301, `astro-ph/9709066`.

[Hu & Silk, 1993] W. T. HU & J. D. SILK, "Thermalization and spectral distortions of the cosmic background radiation". *Physical Review* **D48** (1993) 485–502.

[Hu *et al.*, 1997a] W. T. HU, D. N. SPERGEL, & M. S. WHITE, "Distinguishing causal seeds from inflation". *Physical Review* **D55** (1997) 3288–3302, `astro-ph/9605193`.

[Hu & Sugiyama, 1995a] W. T. HU & N. SUGIYAMA, "Toward understanding CMB anisotropies and their implications". *Physical Review* **D51** (1995) 2599–2630, `astro-ph/9411008`.

[Hu & Sugiyama, 1995b] W. T. HU & N. SUGIYAMA, "Anisotropies in the cosmic microwave background : an analytic approach". *Astrophysical Journal* **444** (1995) 489–506.

[Hu *et al.*, 1997b] W. T. HU, N. SUGIYAMA, & J. D. SILK, "The physics of microwave background anisotropies". *Nature* **386** (1997) 37–43, `astro-ph/9604166`.

[Hu & White, 1997a] W. T. HU & M. S. WHITE, "Tensor anisotropies in an open Universe". *Astrophysical Journal Letters* **486** (1997) L1–L4, `astro-ph/9701210`.

[Hu & White, 1997b] W. T. HU & M. S. WHITE, "CMB anisotropies : total angular momentum method". *Physical Review* **D56** (1997) 596–615, `astro-ph/9702170`.

[Hu & White, 1997c] W. T. HU & M. S. WHITE, "A CMB polarization primer". *New Astronomy* **2** (1997) 323–344, `astro-ph/9706147`.

[Hubble, 1925] E. HUBBLE, "NGC 6822, a remote stellar system". *Astrophysical Journal* **62** (1925) 409–433.

[Hubble, 1926a] E. HUBBLE, "A spiral nebula as a stellar system : Messier 33". *Astrophysical Journal* **63** (1926) 236–274.

[Hubble, 1926b] E. HUBBLE, "Extragalactic nebulae". *Astrophysical Journal* **64** (1926) 321–369.

[Hubble, 1929] E. HUBBLE, "A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae". *Proceedings of the National Academy of Science (U.S.A.)* **15** (1929) 168–173.

[Hubble & Humason, 1931] E. HUBBLE & M. L. HUMASON, "The velocity-distance relation among extragalactic nebulae". *Astrophysical Journal* **74** (1931) 43–80.

[Huey *et al.*, 1999] G. HUEY, L.-M. WANG, R. DAVE, R. R. CALDWELL, & P. J. STEINHARD, "Resolving the cosmological missing energy problem". *Physical Review* **D59** (1999) 063005, `astro-ph/9804285`.

[IAP, `http`] "IAP FTP site". `ftp://ftp.iap.fr/pub/from_users/bouchet/cmb_images/pile.gif` .

[Itzykson & Zuber, 1980] C. ITZYKSON & J.-B. ZUBER, *Quantum field theory*. Mac Graw-Hill, New York (1980), xxii+705 pages, ISBN 0-07-032071-3.

[Jaffe *et al.*, 2001] A. H. JAFFE, P. A. R. ADE, A. BALBI, J. J. BOCK, J. R. BOND, J. BORRILL, A. BOSCALERI, K. A. COBLE, B. P. CRILL, P. DE BERNARDIS, P. FARESE, P. G. FERREIRA, K. GANGA, M. GIACOMETTI, S. HANANY, E. HIVON, V. V. HRISTOV, A. IACOANGELI, A. E. LANGE, A. T. LEE, L. MARTINIS, S. MASI, P. D. MAUSKOPF, A. MELCHIORRI, T. MONTROY, C. B. NETTERFIELD, S. OH, E. PASCALE, F. PIACENTINI, D. Y. POGOSIAN, S. PRUNET, B. RABII, S. RAO, P. L. RICHARDS, G. ROMEO, J. E. RUHL, F. SCARAMUZZI, D. SFORNA, G. F. SMOOT, R. STOMPOR, C. L. WINANT, & J.-H. P. WU, "Cosmology from MAXIMA-1, BOOMERanG and COBE/DMR CMB observations". *Physical Review Letters* **86** (2001) 3475–3479, `astro-ph/0007333`.

[Jafry *et al.*, 1994] Y. R. JAFRY, J. CORNELISSE, & R. REINHARD, "LISA — a laser interferometer space antenna for gravitational-wave measurements". *ESA Bulletin* **18** (1994) 219–228.

[Jeannerot, 1996] R. JEANNEROT, "A supersymmetric $\mathrm{SO}(10)$ model with inflation and cosmic strings". *Physical Review* **D53** (1996) 5426–5436, `hep-ph/9509365`.

[Jeannerot, 1997] R. JEANNEROT, "Inflation in supersymmetric unified theories". *Physical Review* **D56** (1997) 6205–6216, `hep-ph/9706391`.

[Jeans, 1902] J. H. JEANS, “The stability of a spiral nebula”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **A199** (1902) 49.

[Jedamzik, 2000] K. JEDAMZIK, “Lithium-6 : a probe of the early Universe”. *Physical Review Letters* **84** (2000) 3248–3251, `astro-ph/9909445`.

[Joyce, 1997] M. G. F. JOYCE, “Electroweak baryogenesis and the expansion rate of the Universe”. *Physical Review* **D55** (1997) 1875–1878, `hep-ph/9606223`.

[Juszkiewicz *et al.*, 2000] R. JUSZKIEWICZ, P. G. FERREIRA, H. A. FELDMAN, A. H. JAFFE, & M. DAVIS, “Evidence for a low-density Universe from the relative velocities of galaxies”. *Science* **287** (2000) 109–112, `astro-ph/0001041`.

[Kaiser, 1983] N. KAISER, “Small-angle anisotropy of the microwave background radiation in the adiabatic theory”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **202** (1983) 1169–1180.

[Kaiser & Stebbins, 1984] N. KAISER & A. J. STEBBINS, “Microwave anisotropy due to cosmic strings”. *Nature* **310** (1984) 391–393.

[Kamionkowski & Buchalter, 2000] M. KAMIONKOWSKI & A. BUCHALTER, “The second peak : the dark-energy density and the cosmic microwave background”. `astro-ph/0001045`.

[Kamionkowski *et al.*, 1997a] M. KAMIONKOWSKI, A. KOSOWSKY, & A. J. STEBBINS, “A probe of primordial gravity waves and vorticity”. *Physical Review Letters* **78** (1997) 2058–2061, `astro-ph/9609132`.

[Kamionkowski *et al.*, 1997b] M. KAMIONKOWSKI, A. KOSOWSKY, & A. J. STEBBINS, “Statistics of cosmic microwave background polarization”. *Physical Review* **D55** (1997) 7368–7388, `astro-ph/9611125`.

[Kamionkowski & Loeb, 1997] M. KAMIONKOWSKI & A. LOEB, “Getting around cosmic variance”. *Physical Review* **D56** (1997) 4511–4513, `astro-ph/9703118`.

[Kanasawa *et al.*, 1999] T. KANASAWA, M. KAWASAKI, N. SUGIYAMA, & T. YANAGIDA, “Observational implications of axionic isocurvature fluctuations”. *Progress of Theoretical Physics* **102** (1999) 71–87, `astro-ph/9805102`.

[Kaspi *et al.*, 1994] S. KASPI, J. H. TAYLOR, & M. F. RYBA, “High-precision timing of millisecond pulsars — III. Long-term monitoring of PSRs B1885+09 and B1937+21”. *Astrophysical Journal* **428** (1994) 713–728.

[Kawasaki *et al.*, 1996] M. KAWASAKI, N. SUGIYAMA, & T. YANAGIDA, “Isocurvature and adiabatic fluctuations of axion in chaotic inflation models and large scale structure”. *Physical Review* **D54** (1996) 2442–2446, `hep-ph/9512368`.

[Kibble, 1976] T. W. B. KIBBLE, “Topology of cosmic domains and strings”. *Journal of Physics* **A9** (1976) 1387–1398.

[Kibble, 1980] T. W. B. KIBBLE, “Some implications of a cosmological phase transition”. *Physics Report* **67** (1980) 183–199.

[Kim, 1999] J. E. KIM, “Axion and almost massless quark as ingredients of quintessence”. *Journal of High Energy Physics* **05** (1999) 022, `hep-ph/9811509`.

[Knox, 1995] L. E. KNOX, “Determination of inflationary observables by cosmic microwave background anisotropy experiments”. *Physical Review* **D52** (1995) 4307–4318, `astro-ph/9504054`.

[Kodama & Sasaki, 1984] H. KODAMA & M. SASAKI, “Cosmological perturbation theory”. *Progress of Theoretical Physics Supplement* **78** (1984) 1–166.

[Kofman, 1986] L. A. KOFMAN, "What initial perturbations may be generated in inflationary cosmological models". *Physics Letters* **173B** (1986) 400–404.

[Kofman & Linde, 1987] L. A. KOFMAN & A. D. LINDE, "Generation of density perturbations in the inflationary cosmology". *Nuclear Physics* **B282** (1987) 555–588.

[Kofman *et al.*, 1985] L. A. KOFMAN, A. D. LINDE, & A. A. STAROBINSKY, "Inflationary Universe generated by the combined action of a scalar field and gravitational vacuum polarization". *Physics Letters* **157B** (1985) 361–367.

[Kofman *et al.*, 1997] L. A. KOFMAN, A. D. LINDE, & A. A. STAROBINSKY, "Towards the theory of reheating after inflation". *Physical Review* **D57** (1997) 3258–3295, `hep-ph/9704452`.

[Kofman & Pogosian, 1988] L. A. KOFMAN & D. Y. POGOSIAN, "Nonflat perturbations in inflationary cosmology". *Physics Letters* **214B** (1988) 508–514.

[Kofman & Starobinsky, 1985] L. A. KOFMAN & A. A. STAROBINSKY, "Effect of the cosmological constant on large-scale anisotropies of the microwave background". *Soviet Astronomy Letters* **11** (1985) 271–274.

[Kolatt & Dekel, 1997] T. S. KOLATT & A. DEKEL, "Large-scale power spectrum from peculiar velocities". *Astrophysical Journal* **479** (1997) 592–605, `astro-ph/9512132`.

[Kolb & Peccei, 1995] *Particle and nuclear astrophysics and cosmology in the next millennium*, édité par E. W. Kolb & R. D. Peccei. World Scientific, Singapore (1995), 614 pages. Proceedings of the Snowmass summer study, held in Snowmass, USA, June 29–July 14, 1994.

[Kolb & Turner, 1990] E. W. KOLB & M. S. TURNER, *The early Universe*. Addison-Wesley, Reading (1990), xxii+547 pages, ISBN 0-201-11603-0.

[Kolda & Lyth, 1999] C. F. KOLDA & D. H. LYTH, "Quintessential difficulties". *Physics Letters* **458B** (1999) 197–201, `hep-ph/9811375`.

[Kosowsky & Turner, 1995] A. KOSOWSKY & M. S. TURNER, "CBR anisotropy and the running of the scalar spectral index". *Physical Review* **D52** (1995) 1739–1743, `astro-ph/9504071`.

[Kramer *et al.*, 2000] *Pulsar Astronomy — 2000 and beyond*, édité par M. Kramer, N. Wex, & R. Wielibinski. *ASP Conference Series* **202**, Astronomical Society of the Pacific, San Francisco (2000). Proceedings of the International Astronomical Union Colloquium 177, held in Bonn, Germany, August 30–September 3, 1999.

[Krauss, 1994] *CMB anisotropies two years after COBE*, édité par L. A. Krauss. World Scientific, Singapore (1994), 258 pages. Proceedings of the Case Western Reserve University workshop, held in Cleveland, USA, April 22–24, 1994.

[Kunz & Durrer, 1997] M. KUNZ & R. DURRER, "Microwave background anisotropies induced by global scalar fields : the large N limit". *Physical Review* **D55** (1997) 4516–4520, `astro-ph/9612202`.

[La Jolla, 1985] *19th international cosmic ray conference*, La Jolla. *Conference papers (9 volumes)*, Scientific and Technical Information Branch, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C. (1985). La Jolla, U.S.A., August 11–23, 1985.

[Lachièze-Rey & Luminet, 1995] M. LACHIÈZE-REY & J.-P. LUMINET, "Cosmic topology". *Physics Report* **254** (1995) 135–214, `gr-qc/9605010`.

[Landau & Lifchitz, 1982] L. D. LANDAU & E. M. LIFCHITZ, *Mécanique*. Éditions Mir, Moscou (1982), 248 pages, ISBN 5-03-000198-0.

[Landau & Lifchitz, 1988] L. D. LANDAU & E. M. LIFCHITZ, *Mécanique quantique*. Éditions Mir, Moscou (1988), 768 pages, ISBN 5-03-000199-9.

[Landau & Lifchitz, 1989a] L. D. LANDAU & E. M. LIFCHITZ, *Théorie des champs*. Éditions Mir, Moscou (1989), 520 pages, ISBN 5-03-000641-9.

[Landau & Lifchitz, 1989b] L. D. LANDAU & E. M. LIFCHITZ, *Mécanique des fluides*. Éditions Mir, Moscou (1989), 752 pages, ISBN 5-03-000644-3.

[Lange *et al.*, 2001] A. E. LANGE, P. A. R. ADE, J. J. BOCK, J. R. BOND, J. BORRILL, A. BOSCALERI, K. A. COBLE, B. P. CRILL, G. DE GASPERIS, P. FARESE, P. G. FERREIRA, K. GANGA, M. GIACOMETTI, E. HIVON, V. V. HRISTOV, A. IACOANGELI, A. H. JAFFE, L. MARTINIS, S. MASI, P. D. MAUSKOPF, A. MELCHIORRI, T. MONTROY, C. B. NETTERFIELD, E. PASCALE, F. PIACENTINI, D. Y. POGOSIAN, S. PRUNET, S. RAO, G. ROMEO, J. E. RUHL, F. SCARAMUZZI, & D. SFORNA, “First estimations of cosmological parameters from BOOMERanG”. *Physical Review* **D63** (2001) 042001, `astro-ph/0005004`.

[Langlois, 1994] D. LANGLOIS, *Sur les inhomogénéités en cosmologie et les fluides relativistes* (1994). Thèse de doctorat, Spécialité : Physique Théorique, Université Paris VII, 4, place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05.

[Langlois, 1999] D. LANGLOIS, “Correlated adiabatic and isocurvature perturbations from double inflation”. *Physical Review* **D59** (1999) 123512, `astro-ph/9906080`.

[Langlois & Riazuelo, 2000] D. LANGLOIS & A. RIAZUELO, “Correlated mixtures of adiabatic and isocurvature cosmological perturbations”. *Physical Review* **D62** (2000) 043504, `astro-ph/9912497`.

[Lawrence *et al.*, 1991] M. A. LAWRENCE, R. J. O. REID, & A. A. WATSON, “The cosmic ray energy spectrum above 4×10^{17} eV as measured by the Haverah Park array”. *Journal of Physics* **G17** (1991) 733–757.

[Le Dour *et al.*, 2001] M. LE DOUR, M. DOUSPIS, J. G. BARTLETT, & A. BLANCHARD, “Cosmological constraints from the cosmic microwave background”. *Astronomy and Astrophysics* **364** (2001) 369–376, `astro-ph/0004282`.

[Lee *et al.*, 2001] A. T. LEE, P. A. R. ADE, A. BALBI, J. J. BOCK, J. BORRILL, A. BOSCALERI, P. DE BERNARDIS, P. G. FERREIRA, S. HANANY, V. V. HRISTOV, A. H. JAFFE, P. D. MAUSKOPF, C. B. NETTERFIELD, E. PASCALE, B. RABII, P. L. RICHARDS, G. F. SMOOT, R. STOMPOR, C. L. WINANT, & J.-H. P. WU, “A high spatial resolution analysis of the MAXIMA-1 cosmic microwave background anisotropy data”. *Astrophysical Journal Letters* **561** (2001) L1–L5, `astro-ph/0104459`.

[Leitch *et al.*, 2000] E. M. LEITCH, A. C. S. READHEAD, T. J. PEARSON, S. T. MYERS, S. GULKIS, & C. R. LAWRENCE, “A measurement of anisotropy in the cosmic microwave background on 7 arcmin – 22 arcmin scales”. *Astrophysical Journal* **532** (2000) 37–56, `astro-ph/9807312`.

[Lemaître, 1927] G. LEMAÎTRE, “Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques”. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* **A47** (1927) 49–59. Translated in english in [Lemaître, 1931].

[Lemaître, 1931] G. LEMAÎTRE, “A homogeneous Universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **91** (1931) 483–490. Traduction anglaise de [Lemaître, 1927].

[Lesgourgues, 1998] J. LESGOURGUES, *Modèles inflationnaires et anisotropies du fond diffus* (1998). Thèse de doctorat, Spécialité : Physique Théorique, Université François Rabelais, Parc de Grandmont, F-37200 Tours.

[Lesgourgues & Peloso, 2000] J. LESGOURGUES & M. PELOSO, “Remarks on the BOOMERanG results, the cosmological constant and the leptonic asymmetry”. *Physical Review* **D62** (2000) 081301(R), `astro-ph/0004412`.

[Lesgourgues & Polarski, 1997] J. LESGOURGUES & D. POLARSKI, “CMB anisotropy predictions for a model of double inflation”. *Physical Review* **D56** (1997) 6425–6432, `astro-ph/9710083`.

[Lesgourgues *et al.*, 1997] J. LESGOURGUES, D. POLARSKI, & A. A. STAROBINSKY, “Quantum-to-classical transition of cosmological perturbations for non-vacuum initial states”. *Nuclear Physics* **B497** (1997) 479–510, `gr-qc/9611019`.

[Lesgourgues *et al.*, 1998] J. LESGOURGUES, D. POLARSKI, & A. A. STAROBINSKY, “CDM models with a BSI steplike primordial spectrum and a cosmological constant”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **297** (1998) 769–776, `astro-ph/9711139`.

[Lesgourgues *et al.*, 1999a] J. LESGOURGUES, D. POLARSKI, & A. A. STAROBINSKY, “How large can be the primordial gravitational wave background in inflationary models ?”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **308** (1999) 281–288, `astro-ph/9807019`.

[Lesgourgues *et al.*, 1999b] J. LESGOURGUES, S. PRUNET, & D. POLARSKI, “Parameters extraction by PLANCK for a CDM model with BSI steplike primordial spectrum and cosmological constant”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **303** (1999) 45–49, `astro-ph/9807020`.

[Lewis *et al.*, 2000] A. LEWIS, A. D. CHALLINOR, & A. N. LASENBY, “Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models”. *Astrophysical Journal* **538** (2000) 473–476, `astro-ph/9911177`.

[Liddle & Lyth, 1993] A. R. LIDDLE & D. H. LYTH, “The cold dark matter density perturbation”. *Physics Report* **231** (1993) 1–105, `astro-ph/9303019`.

[Lidsey *et al.*, 1997] J. E. LIDSEY, A. R. LIDDLE, E. W. KOLB, E. J. COPELAND, & T. BARREIRO, “Reconstructing the inflation potential : an overview”. *Review of Modern Physics* **69** (1997) 373–410, `astro-ph/9508078`.

[Lifchitz, 1946] E. M. LIFCHITZ, “On the gravitational instability of the expanding Universe”. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **16** (1946) 576.

[Lifchitz & Khalatnikov, 1963] E. M. LIFCHITZ & I. M. KHALATNIKOV, “Investigations in relativistic cosmology”. *Advances in Physics* **12** (1963) 185–249.

[Linde, 1982] A. D. LINDE, “A new inflationary Universe scenario : a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems”. *Physics Letters* **108B** (1982) 389–393.

[Linde, 1983] A. D. LINDE, “Chaotic inflation”. *Physics Letters* **129B** (1983) 177–181.

[Linde, 1985] A. D. LINDE, “Generation of isothermal density perturbations in the inflationary Universe”. *Physics Letters* **158B** (1985) 375–380.

[Linde, 1990] A. D. LINDE, *Particle physics and inflationary cosmology*. Harwood, New York (1990), xvii+362 pages, ISBN 3-7186-0490-6.

[Linde, 1991] A. D. LINDE, “Axions in inflationary cosmology”. *Physics Letters* **259B** (1991) 38–47.

[Linde, 1994] A. D. LINDE, “Hybrid inflation”. *Physical Review* **D49** (1994) 748–754, `astro-ph/9307002`.

[Linde & Mukhanov, 1997] A. D. LINDE & V. F. MUKHANOV, “Non Gaussian isocurvature perturbations from inflation”. *Physical Review* **D56** (1997) 535–539, `astro-ph/9610219`.

[Linde & Riotto, 1997] A. D. LINDE & A. RIOTTO, “Hybrid inflation in supergravity”. *Physical Review* **D56** (1997) 1841–1844, hep-ph/9703209.

[Lineweaver & Barbosa, 1998] C. H. LINEWEAVER & D. BARBOSA, “What can cosmic microwave background observations already say about cosmological parameters ?”. *Astrophysical Journal* **496** (1998) 624–634, astro-ph/9706077.

[Lineweaver *et al.*, 1997] *The cosmic microwave background*, édité par C. H. Lineweaver, J. G. Bartlett, A. Blanchard, M. Signore, & J. D. Silk. *NATO ASI Series* **502**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997), xiv+449 pages. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute conference, held at Strasbourg, France, May 27–June 7, 1996.

[Linsley, 1963] J. LINSLEY, “Evidence for a primary cosmic-ray particle with energy $> 10^{20}$ eV”. *Physical Review Letters* **10** (1963) 146–148.

[Lochak, 1994] G. LOCHAK, *La géométrisation de la physique*. Flammarion, Paris (1994), 272 pages, ISBN 2-08-211210-1.

[Lopez *et al.*, 1999] R. E. LOPEZ, S. DODELSON, A. HECKLER, & M. S. TURNER, “Precision detection of the cosmic neutrino background”. *Physical Review Letters* **82** (1999) 3952–3955, astro-ph/9803095.

[Lucchin *et al.*, 1986] F. LUCCHIN, S. MATARRESE, & M. D. POLLOCK, “Inflation with a nonminimally coupled scalar field”. *Physics Letters* **167B** (1986) 163–167.

[Lund & Regge, 1976] F. LUND & T. REGGE, “Unified approach to strings and vortices with soliton solutions”. *Physical Review* **D14** (1976) 1524–1535.

[Lynden-Bell, 1967] D. LYNDEN-BELL, “Statistical mechanics of violent relaxation in stellar system”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **136** (1967) 101–121.

[Lyth, 1985] D. H. LYTH, “Large-scale energy-density perturbations and inflation”. *Physical Review* **D31** (1985) 1792–1798.

[Lyth & Riotto, 1999] D. H. LYTH & A. RIOTTO, “Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation”. *Physics Report* **314** (1999) 1–146, astro-ph/9807278.

[Lyubarskii, 1960] G. Y. LYUBARSKII, *The application of group theory in physics*. Pergamon Press, Oxford (1960), x+382 pages.

[Ma & Bertschinger, 1995] C.-P. MA & E. BERTSCHINGER, “Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges”. *Astrophysical Journal* **455** (1995) 7–25, astro-ph/9506072.

[Ma *et al.*, 1999] C.-P. MA, R. R. CALDWELL, P. W. BODE, & L.-M. WANG, “The mass power spectrum in quintessence cosmological models”. *Astrophysical Journal Letters* **521** (1999) L1–L4, astro-ph/9906174.

[Mac Hugh *et al.*, 1996] M. P. MAC HUGH, G. ZALAMANSKY, F. VERNOTTE, & E. LANTZ, “Pulsar timing and the upper limits on a gravitational wave background : a Bayesian approach”. *Physical Review* **D54** (1996) 5993–6000.

[Madau, 2000] P. MADAU, “Cosmological reionization”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **A358** (2000) 2021–2034, astro-ph/0003096.

[Maeda, 1986] K.-I. MAEDA, “Stability and attractor in Kaluza-Klein cosmology”. *Classical and Quantum Gravity* **3** (1986) 233.

[Magueijo *et al.*, 1996a] J. C. R. MAGUEIJO, A. J. ALBRECHT, D. COULSON, & P. G. FERREIRA, “Doppler peaks from active perturbations”. *Physical Review Letters* **76** (1996) 2617–2620, astro-ph/9511042.

[Magueijo *et al.*, 1996b] J. C. R. MAGUEIJO, A. J. ALBRECHT, P. G. FERREIRA, & D. COULSON, "The structure of Doppler peaks induced by active perturbations". *Physical Review* **D56** (1996) 3727–3744, `astro-ph/9605047`.

[Magueijo *et al.*, 1998] J. C. R. MAGUEIJO, P. G. FERREIRA, & K. M. GÓRSKI, "Evidence for non-gaussianity in the COBE". In [Santander, 1998], `astro-ph/9810414`.

[Maiani *et al.*, 1999] *Rome 1998, 3-K cosmology*, édité par L. Maiani, F. Melchiorri, & N. Vittorio. *AIP conference proceedings* **476**, American Institute of Physics, Woodbury (1999), 358 pages. Proceedings, of the European Commission's Training and Mobility of Researchers programme conference, held in Rome, Italy, October 5–10, 1998.

[MAP, `http`] "MAP Home Page". `http://map.gsfc.nasa.gov/`.

[Marck & Lasota, 1997] *Relativistic gravitation and gravititional radiation*, édité par J.-A. Marck & J.-P. Lasota. *Cambridge contemporary astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997), xv+475 pages. Proceedings of the Les Houches School of Physics, held in Les Houches, Haute Savoie, September 26–October 6, 1995.

[Martin, 1995] J. MARTIN, *Sur les effets quantiques en cosmologie primordiale* (1995). Thèse de doctorat, Spécialité : Physique Théorique, Université Paris VII, 2, place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05.

[Martin & Brandenberger, 2001] J. MARTIN & R. H. BRANDENBERGER, "Trans-Planckian problem of inflationary cosmology". *Physical Review* **D63** (2001) 123501, `hep-th/0005209`.

[Martin & Grishchuk, 1997] J. MARTIN & L. P. GRISHCHUK, "Best unbiased estimates for the microwave background anisotropies". *Physical Review* **D56** (1997) 1924–1938, `gr-qc/9702018`.

[Martin *et al.*, 2000a] J. MARTIN, A. RIAZUELO, & M. SAKELLARIADOU, "Non-vacuum initial states for cosmological perturbations of quantum-mechanical origin". *Physical Review* **D61** (2000) 083518, `astro-ph/9904167`.

[Martin *et al.*, 2000b] J. MARTIN, A. RIAZUELO, & D. J. SCHWARZ, "Slow-roll inflation and CMB anisotropy data". *Astrophysical Journal Letters* **543** (2000) L99–L102, `astro-ph/0006392`.

[Martin *et al.*, 2001] J. MARTIN, A. RIAZUELO, & D. J. SCHWARZ, "Precision of inflationary predictions and recent CMB anisotropy data". In [Durrer *et al.*, 2001], pp 281–284, `0010453`.

[Martin & Schwarz, 1998] J. MARTIN & D. J. SCHWARZ, "The influence of cosmological transitions on the evolution of density perturbations". *Physical Review* **D57** (1998) 3302–3316, `gr-qc/9704049`.

[Martin & Schwarz, 2000] J. MARTIN & D. J. SCHWARZ, "The precision of slow-roll predictions for the CMBR anisotropies". *Physical Review* **D62** (2000) 103520, `astro-ph/9911225`.

[Martín *et al.*, 2000] *Relativity and gravitation in General*, édité par J. Martín, E. Ruiz, F. Atrio-Barandela, & A. Molina. World Scientific, Singapore (2000), vi+358 pages. Proceedings of the Spanish relativity meeting in honour of the 65$^{\text{th}}$ birthday of Lluís Bel, held in Salamanca, Spain, September 22–25, 1998.

[Martin & Peter, 2000] X. MARTIN & P. PETER, "Current-carrying string loop motion : limits on the classical description and shocks". *Physical Review* **D61** (2000) 043510, `hep-ph/9808222`.

[Martinez-Gonzalez & Sanz, 1996] *The Universe at high-z, large scale structure and the cosmic microwave background*, édité par E. Martinez-Gonzalez & J.-L. Sanz. *Lecture notes in physics* **470**, Springer Verlag, Berlin (1996), viii+254 pages. Proceedings of the advanced summer school, held at Laredo, Cantabria, Spain, September 4–8, 1995.

[Martins, 1997] C. J. A. P. MARTINS, "String evolution in open Universes". *Physical Review* **D55** (1997) 5208–5211, `astro-ph/9701055`.

[Martins & Shellard, 1996] C. J. A. P. MARTINS & E. P. S. SHELLARD, "Quantitative string evolution". *Physical Review* **D54** (1996) 2535–2556, `astro-ph/9602271`.

[Masi *et al.*, 1996] S. MASI, P. DE BERNARDIS, M. DE PETRIS, M. GERVASI, A. BOSCALERI, E. AQUILINI, L. MARTINIS, & F. SCARAMUZZI, "Foregrounds removal and CMB fluctuations in a multiband anisotropy experiment : ARGO 1993". *Astrophysical Journal Letters* **463** (1996) L47–L50.

[Matacz, 1997] A. L. MATACZ, "A new theory of stochastic inflation". *Physical Review* **D55** (1997) 1860–1874, `gr-qc/9604022`.

[Mather *et al.*, 1990] J. C. MATHER, E. S. CHENG, R. E. EPLEE, R. B. ISAACMAN, S. S. MEYER, R. A. SHAFER, R. WEISS, E. L. WRIGHT, C. H. BENNETT, N. W. BOGGESS, E. DWEK, S. GULKIS, M. G. HAUSER, M. A. JANSSEN, T. J. KELSALL, P. M. LUBIN, S. H. MOSELEY, T. L. MURDOCK, R. F. SILVERBERG, G. F. SMOOT, & D. T. WILKINSON, "A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cosmic background explorer (COBE) satellite". *Astrophysical Journal Letters* **354** (1990) L37–L40.

[Mauskopf *et al.*, 2000] P. D. MAUSKOPF, P. A. R. ADE, P. DE BERNARDIS, J. J. BOCK, J. BORRILL, A. BOSCALERI, B. P. CRILL, G. DE GASPERIS, G. DE TROIA, P. FARESE, P. G. FERREIRA, K. GANGA, M. GIACOMETTI, S. HANANY, V. V. HRISTOV, A. IACOANGELI, A. H. JAFFE, A. E. LANGE, A. T. LEE, S. MASI, A. MELCHIORRI, F. MELCHIORRI, L. MIGLIO, T. MONTROY, C. B. NETTERFIELD, E. PASCALE, F. PIACENTINI, P. L. RICHARDS, G. ROMEO, J. E. RUHL, E. S. SCANNAPIECO, F. SCARAMUZZI, R. STOMPOR, & N. VITTORIO, "Measurement of a peak in the cosmic microwave background power spectrum from the North American test flight of BOOMERanG". *Astrophysical Journal Letters* **536** (2000) L59–L62, `astro-ph/9911444`.

[Melchiorri *et al.*, 2000] A. MELCHIORRI, P. A. R. ADE, P. DE BERNARDIS, J. J. BOCK, J. BORRILL, A. BOSCALERI, B. P. CRILL, G. DE TROIA, P. FARESE, P. G. FERREIRA, K. GANGA, G. DE GASPERIS, M. GIACOMETTI, V. V. HRISTOV, A. H. JAFFE, A. E. LANGE, S. MASI, P. D. MAUSKOPF, L. MIGLIO, C. B. NETTERFIELD, E. PASCALE, F. PIACENTINI, G. ROMEO, J. E. RUHL, & N. VITTORIO, "A measurement of Omega from the North American test flight of BOOMERanG". *Astrophysical Journal Letters* **536** (2000) L63–L66, `astro-ph/9911445`.

[Melchiorri *et al.*, 1999] A. MELCHIORRI, M. V. SAZHIN, V. V. SHULGA, & N. VITTORIO, "The gravitational-wave contribution to the CMB anisotropies". *Astrophysical Journal* **518** (1999) 562–569, `astro-ph/9901220`.

[Mellier, 1999] Y. MELLIER, "Probing the Universe with weak lensing". *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **37** (1999) 127–189, `astro-ph/9812172`.

[Miller *et al.*, 1999] A. D. MILLER, R. R. CALDWELL, M. J. DEVLIN, W. B. DORWART, T. HERBIG, M. R. NOLTA, L. A. PAGE, J. L. PUCHALLA, E. TORBET, & H. T. TRAN, "A measurement of the angular power spectrum of the CMB from $\ell = 100$ to 400". *Astrophysical Journal Letters* **524** (1999) L1–L4, `astro-ph/9906421`.

[Misner *et al.*, 1973] C. W. MISNER, K. S. THORNE, & J. A. WHEELER, *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco (1973), xxvi+1279 pages, ISBN 0-7167-0334-3.

[Moriond, 2000] *Energy density in the Universe*, Moriond. Version électronique uniquement, `http://moriond.in2p3.fr/J00/ProcMJ2000/index.html` (2000). Proceedings of the XXXV$^{\text{ème}}$ Rencontres de Moriond, held in Les Arcs, France, January 22–29, 2000.

[Mukhanov, 1988] V. F. MUKHANOV, “Quantum theory of gauge invariant cosmological perturbations”. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **67** (1988) 1297–1302.

[Mukhanov & Chibisov, 1981] V. F. MUKHANOV & G. V. CHIBISOV, “Quantum fluctuation and ‘non-singular’ Universe”. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **33** (1981) 532–535.

[Mukhanov *et al.*, 1992] V. F. MUKHANOV, H. A. FELDMAN, & R. H. BRANDENBERGER, “Theory of cosmological perturbations”. *Physics Report* **215** (1992) 203–333.

[Nagano, 1993] *Techniques for the study of extremely high energy cosmic rays*, édité par M. Nagano. Université de Tokyo, Tokyo (1993), 376 pages. Proceedings of the Institute for Cosmic Ray Research workshop, held in Tokyo, Japan, September 27–30, 1993.

[Nagano & Takahara, 1991] *Astrophysical aspects of the most energetic cosmic rays*, édité par M. Nagano & F. Takahara. World Scientific, Singapore (1991), xiv+500 pages. Proceedings of the Institute for Cosmic Ray Research international symposium, held in Kofu, Japan, November 26–29, 1990.

[Nakahara, 1990] M. NAKAHARA, *Geometry, topology and physics*. Institute of Physics Publishing, Bristol (1990), xiv+505 pages, ISBN 0-85274-095-6.

[Narlikar, 1983] J. V. NARLIKAR, *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge (1983), xvi+416 pages, ISBN 0-521-42352.

[Netterfield *et al.*, 2002] C. B. NETTERFIELD, P. A. R. ADE, J. J. BOCK, J. R. BOND, J. BORRILL, A. BOSCALERI, K. A. COBLE, C. R. CONTALDI, B. P. CRILL, P. DE BERNARDIS, P. FARESE, K. GANGA, M. GIACOMETTI, E. HIVON, V. V. HRISTOV, A. IACOANGELI, A. H. JAFFE, W. C. JONES, A. E. LANGE, L. MARTINIS, S. MASI, P. MASON, P. D. MAUSKOPF, A. MELCHIORRI, T. MONTROY, E. PASCALE, F. PIACENTINI, D. Y. POGOSIAN, S. PRUNET, F. PONGETTI, G. ROMEO, J. E. RUHL, & F. SCARAMUZZI, “A measurement by BOOMERanG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background”. *Astrophysical Journal* **571** (2002) 604–614, `astro-ph/0104460`.

[Netterfield *et al.*, 1997] C. B. NETTERFIELD, M. J. DEVLIN, N. JAROSIK, L. A. PAGE, & E. J. WOLLACK, “A measurement of the angular power spectrum of the anisotropy in the cosmic microwave background”. *Astrophysical Journal* **474** (1997) 47–66, `astro-ph/9601197`.

[Newman & Penrose, 1966] E. T. NEWMAN & R. PENROSE, “Note on the Bondi-Metzner-Sachs group”. *Journal of Mathematical Physics* **7** (1966) 863–870.

[Nguyễn & Trần Thanh Vân, 2002] *Physics at extreme energies*, édité par V. H. Nguyễn & J. Trần Thanh Vân. Thế Gió’i Publishers, Hanoï (2002), xiv+542 pages. Proceedings of the IV$^{\text{ème}}$ Rencontres du Viet-Nam, held in Hanoï, Viet-Nam, July 19–25, 2000.

[Nolleth & Burles, 2000] K. M. NOLLETH & S. BURLES, “Estimating reaction rates and uncertainties for primordial nucleosynthesis”. *Physical Review* **D61** (2000) 123505, `astro-ph/0001440`.

[Novikov *et al.*, 1999] D. I. NOVIKOV, H. A. FELDMAN, & S. F. SHANDARIN, “Minkowski functionals and cluster analysis for CMB maps”. *International Journal of Modern Physics* **D8** (1999) 291–306, `astro-ph/9809238`.

[Olinto *et al.*, 1997] *XVIIIth Texas Symposium on relativistic astrophysics and cosmology*, édité par A. V. Olinto, J. A. Frieman, & D. N. Schramm. World Scientific, Singapore (1997). Proceedings of the XVIII$^{\text{th}}$ Texas Symposium, held in Chicago, Illinois, December 15–20, 1996.

[Olive, 1994] K. A. OLIVE (1994). "Big Bang baryogenesis", hep-ph/9404352. Lectures given at 33rd international university school of nuclear and particle physics : "Matter under extreme conditions", held at Schladming, Austria, February 27–March 5, 1994.

[Olive, 2000] K. A. OLIVE, "Big Bang nucleosynthesis". In [Aubourg *et al.*, 2000], pp 79–93, astro-ph/9903309.

[Olive *et al.*, 2000] K. A. OLIVE, G. STEIGMAN, & T. P. WALKER, "Primordial nucleosynthesis : theory and observations". *Physics Report* **333-334** (2000) 389–407, astro-ph/9905320.

[Ostriker *et al.*, 1986] J. P. OSTRIKER, C. THOMPSON, & E. WITTEN, "Cosmological effects of superconducting strings". *Physics Letters* **180B** (1986) 231–239.

[Padin *et al.*, 2001] S. PADIN, J. K. CARTWRIGHT, B. S. MASON, T. J. PEARSON, A. C. S. READHEAD, M. C. SHEPHERD, J. SIEVERS, P. S. UDOMPRASERT, W. L. HOLZAPFEL, S. T. MYERS, J. E. CARLSTROM, E. M. LEITCH, M. K. JOY, L. BRONFMAN, & J. MAY, "First intrinsic anisotropy observations with the Cosmic Background Imager". *Astrophysical Journal Letters* **549** (2001) L1–L5, astro-ph/0012211.

[Padmanabhan, 1993] T. PADMANABHAN, *Structure formation in the Universe*. Cambridge University Press, Cambridge (1993), xvi+483 pages, ISBN 0-521-41448-2.

[Padmanabhan, 1996] T. PADMANABHAN, *Cosmology and astrophysics through problems*. Cambridge University Press, Cambridge (1996), xxv+486 pages, ISBN 0-521-46783-7.

[Pando *et al.*, 1998] J. PANDO, D. VALLS-GABAUD, & L.-Z. FANG, "Evidence for scale-scale correlations in the cosmic microwave background radiation". *Physical Review Letters* **81** (1998) 4568–4571, astro-ph/9810165.

[Panek, 1986] M. PANEK, "The large scale microwave background fluctuations, gauge invariant formalism". *Physical Review* **D34** (1986) 416–423.

[Parodi *et al.*, 2000] B. R. PARODI, A. SAHA, A. SANDAGE, & G. A. TAMMANN, "Supernova type Ia luminosities, their dependence on second parameters, and the value of H_0". *Astrophysical Journal* **540** (2000) 634–651, astro-ph/0004063.

[Partridge *et al.*, 1997] B. PARTRIDGE, E. A. RICHARDS, E. B. FOMALONT, & K. I. KELLERMANN, "Small-scale cosmic microwave background observations at 8.4 GHz". *Astrophysical Journal* **483** (1997) 38–50.

[Peacock, 1998] J. A. PEACOCK, *Cosmological physics*. Cambridge University Press, Cambridge (1998), xi+682 pages.

[Peebles, 1968] P. J. E. PEEBLES, "Recombination of the primeval plasma". *Astrophysical Journal* **153** (1968) 1–12.

[Peebles, 1980] P. J. E. PEEBLES, *The large-scale structure of the Universe*. Princeton University Press, Princeton (1980), xiii+422 pages, ISBN 0-691-08240-5.

[Peebles, 1987a] P. J. E. PEEBLES, "Origin of the large-scale galaxy peculiar velocity fields : a minimal isocurvature model". *Nature* **327** (1987) 210–211.

[Peebles, 1987b] P. J. E. PEEBLES, "Cosmic background temperature anisotropy in a minimal isocurvature model for galaxy formation". *Astrophysical Journal Letters* **315** (1987) L73–L76.

[Peebles, 1993] P. J. E. PEEBLES, *Principles of physical cosmology*. Princeton University Press, Princeton (1993), xviii+718 pages, ISBN 0-691-07428-3.

[Peebles & Vilenkin, 1999] P. J. E. PEEBLES & A. V. VILENKIN, "Quintessential inflation". *Physical Review* **D59** (1999) 063505, astro-ph/9810509.

[Peebles & Yu, 1970] P. J. E. PEEBLES & J. T. YU, “Primeval adiabatic perturbation in an expanding Universe”. *Astrophysical Journal* **162** (1970) 815–836.

[Pen *et al.*, 1997] U.-L. PEN, U. SELJAK, & N. G. TUROK, “Power spectra in global defect theories of cosmic structure formation”. *Physical Review Letters* **79** (1997) 1611–1614, astro-ph/9704165.

[Pen *et al.*, 1994] U.-L. PEN, D. N. SPERGEL, & N. G. TUROK, “Cosmic structure formation and microwave anisotropies from global field ordering”. *Physical Review* **D49** (1994) 692–729.

[Penzias & Wilson, 1965] A. A. PENZIAS & R. W. WILSON, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s”. *Astrophysical Journal* **142** (1965) 419–421.

[Perivolaropoulos, 1995] L. PERIVOLAROPOULOS, “Spectral analysis of microwave background perturbations induced by cosmic strings”. *Astrophysical Journal* **451** (1995) 429–435, astro-ph/9402024.

[Perlmutter *et al.*, 1998] S. PERLMUTTER, G. ALDERING, M. DELLA VALLE, S. DEUSTUA, R. S. ELLIS, S. FABBRO, A. S. FRUCHTER, G. GOLDHABER, A. GOOBAR, D. E. GROOM, I. M. HOOK, A. G. KIM, M. Y. KIM, R. A. KNOP, C. LIDMAN, R. G. MAC MAHON, P. E. NUGENT, R. PAIN, N. PANAGIA, C. R. PENNYPACKER, P. RUIZ LAPUENTE, B. SCHAEFER, & N. WALTON, “Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe and its cosmological implications”. *Nature* **391** (1998) 51–54, astro-ph/9712212.

[Perlmutter *et al.*, 1999a] S. PERLMUTTER, G. ALDERING, G. GOLDHABER, R. A. KNOP, P. E. NUGENT, P. G. CASTRO, S. DEUSTUA, S. FABBRO, A. GOOBAR, D. E. GROOM, I. M. HOOK, A. G. KIM, M. Y. KIM, J. C. LEE, N. J. NUÑES, R. PAIN, C. R. PENNYPACKER, R. QUIMBY, C. LIDMAN, R. S. ELLIS, M. IRWIN, R. G. MAC MAHON, P. RUIZ LAPUENTE, N. WALTON, B. SCHAEFER, B. J. BOYLE, A. V. FILIPPENKO, T. MATHESON, A. S. FRUCHTER, N. PANAGIA, H. J. M. NEWBERG, & W. J. COUCH, “Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae”. *Astrophysical Journal* **517** (1999) 565–586, astro-ph/9812133.

[Perlmutter *et al.*, 1999b] S. PERLMUTTER, M. S. TURNER, & M. S. WHITE, “Constraining dark energy with SNe Ia and large-scale structure”. *Physical Review Letters* **83** (1999) 670–673, astro-ph/9901052.

[Perrota *et al.*, 2000] F. PERROTA, C. BACCIGALUPI, & S. MATARRESE, “Extended quintessence”. *Physical Review* **D61** (2000) 023507, astro-ph/9906066.

[Peter, 1992] P. PETER, “Low mass current carrying cosmic strings”. *Physical Review* **D46** (1992) 3322–3334.

[Peter, 1997] P. PETER, *Structure interne et observabilité des défauts topologiques étendus* (1997). Mémoire d’habilitation, Observatoire de Paris-Meudon, F-92195 Meudon Cedex, France.

[Peterson *et al.*, 2000] J. B. PETERSON, G. S. GRIFFIN, M. G. NEWCOMB, D. L. ALVAREZ, C. M. CANTALUPO, D. MORGAN, K. W. MILLER, K. GANGA, D. PERNIC, & M. THOMA, “First results from Viper : detection of small-scale anisotropy at 40 GHz”. *Astrophysical Journal Letters* **532** (2000) L83–L86, astro-ph/9910503.

[Pierpaoli *et al.*, 1999] E. PIERPAOLI, J. GARCIA-BELLIDO, & S. BORGANI, “Microwave background anisotropies and large scale structure constraints on isocurvature modes in a two-field model of inflation”. *Journal of High Energy Physics* **10** (1999) 015, hep-ph/9909420.

[PLANCK, http] “The Home Page of PLANCK”. http://astro.estec.esa.nl/Planck/.

[Platt *et al.*, 1997] S. R. PLATT, J. KOVAC, M. DRAGOVAN, J. B. PETERSON, & J. E. RUHL, “Anisotropy in the microwave sky at 90 GHz : results from Python III”. *Astrophysical Journal* **485** (1997) L1–L4, astro-ph/9606175.

[Pogosian & Vachaspati, 1999] L. POGOSIAN & T. VACHASPATI, "Cosmic microwave background anisotropy from wiggly strings". *Physical Review* **D60** (1999) 083504, `astro-ph/9903361`.

[Polarski & Starobinsky, 1992] D. POLARSKI & A. A. STAROBINSKY, "Isocurvature perturbations in multiple inflationary models". *Nuclear Physics* **B385** (1992) 623–650.

[Polarski & Starobinsky, 1994] D. POLARSKI & A. A. STAROBINSKY, "Spectra of perturbations produced by double inflation with an intermediate matter dominated stage". *Physical Review* **D50** (1994) 6123–6129, `astro-ph/9404061`.

[Press *et al.*, 1992] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, & B. P. FLANNERY, *Numerical recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge (1992), xxvi+994 pages, ISBN 0-521-43108-5.

[Protheroe & Johnson, 1996a] R. J. PROTHEROE & P. A. JOHNSON, "Propagation of ultrahigh-energy protons over cosmological distances and implications for topological defect models". *Astroparticle Physics* **4** (1996) 253–269, `astro-ph/9506119`. Erratum in [Protheroe & Johnson, 1996b].

[Protheroe & Johnson, 1996b] R. J. PROTHEROE & P. A. JOHNSON, "Propagation of ultrahigh-energy protons over cosmological distances and implications for topological defect models". *Astroparticle Physics* **5** (1996) 215.

[Pryke *et al.*, 2002] C. PRYKE, N. W. HALVERSON, E. M. LEITCH, J. KOVAC, J. E. CARLSTROM, W. L. HOLZAPFEL, & M. DRAGOVAN, "Cosmological parameter extraction from the first season of observations with DASI". *Astrophysical Journal* **568** (2002) 46–51, `astro-ph/0104490`.

[Quashnock *et al.*, 1989] J. M. QUASHNOCK, A. LOEB, & D. N. SPERGEL, "Magnetic field generation during the cosmological QCD phase transition". *Astrophysical Journal Letters* **344** (1989) L49–L51.

[Ratra, 1992] B. V. RATRA, "Cosmological 'seed' magnetic field from inflation". *Astrophysical Journal Letters* **391** (1992) L1–L4.

[Ratra *et al.*, 1999] B. V. RATRA, K. GANGA, R. STOMPOR, N. SUGIYAMA, P. DE BERNARDIS, & K. M. GÓRSKI, "ARGO CMB anisotropy measurement constraints on open and flat-Lambda CDM cosmogonies". *Astrophysical Journal* **510** (1999) 11–19, `astro-ph/9807298`.

[Ratra *et al.*, 1998] B. V. RATRA, K. GANGA, N. SUGIYAMA, G. S. TUCKER, G. S. GRIFFIN, H. T. NGUYÊN, & J. B. PETERSON, "Using White Dish CMB anisotropy data to probe open and flat-Lambda CDM cosmogonies". *Astrophysical Journal* **505** (1998) 8–11, `astro-ph/9710270`.

[Ratra & Peebles, 1988] B. V. RATRA & P. J. E. PEEBLES, "Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field". *Physical Review* **D37** (1988) 3406–3427.

[Reeves, 1981] H. REEVES, *Patience dans l'azur*. Seuil, Paris (1981), 304 pages, ISBN 2-02-005924-X.

[Reeves, 1986] H. REEVES, *L'heure de s'enivrer*. Seuil, Paris (1986), 290 pages, ISBN 2-02-009345-6.

[Riazuelo, 2000] A. RIAZUELO, *Signature de divers modèles d'Univers primordial dans les anisotropies du rayonnement fossile* (2000). Thèse de doctorat, Spécialité : Astrophysique, Université Paris XI-Orsay, F-91405 Orsay Cedex.

[Riazuelo & Deruelle, 2000a] A. RIAZUELO & N. DERUELLE, "Cosmic microwave background anisotropies seeded by coherent and scaling sources". In [Martín *et al.*, 2000], pp 99–104.

[Riazuelo & Deruelle, 2000b] A. RIAZUELO & N. DERUELLE, "Cosmic microwave background anisotropies seeded by incoherent sources". *Annalen der Physik* **9** (2000) 288–298, `gr-qc/0005024`.

[Riazuelo *et al.*, 2000] A. RIAZUELO, N. DERUELLE, & P. PETER, "Topological defects and cosmic microwave background anisotropies : are the predictions reliable ?". *Physical Review* **D61** (2000) 123504, `astro-ph/9910290`.

[Riazuelo & Langlois, 2000] A. RIAZUELO & D. LANGLOIS, "Correlated mixtures of adiabatic and isocurvature cosmological perturbations". In [Moriond, 2000], `http://moriond.in2p3.fr/J00/ProcMJ2000/riazuelo/abstract.html`, `astro-ph/0003339`.

[Riazuelo & Uzan, 2000] A. RIAZUELO & J.-P. UZAN, "Quintessence and gravitational waves". *Physical Review* **D62** (2000) 083506, `astro-ph/0004156`.

[Riess *et al.*, 1998] A. G. RIESS, A. V. FILIPPENKO, P. CHALLIS, A. CLOCCHIATTI, A. DIERCKS, P. M. GARNAVICH, R. L. GILLILAND, C. J. HOGAN, S. JHA, R. P. KIRSHNER, B. LEIBUNDGUT, M. M. PHILLIPS, D. REISS, B. P. SCHMIDT, R. A. SCHOMMER, R. C. SMITH, J. SPYROMILIO, C. STUBBS, N. B. SUNTZEFF, & J. TONRY, "Observational evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant". *Astronomical Journal* **116** (1998) 1009–1038, `astro-ph/9805201`.

[Riotto & Trodden, 1999] A. RIOTTO & M. TRODDEN, "Recent progress in baryogenesis". *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **49** (1999) 35–75, `hep-ph/9901362`.

[Robertson, 1935] H. P. ROBERTSON, "On the foundations of relativistic cosmology". *Proceedings of the National Academy of Science (U.S.A.)* **15** (1935) 822–829.

[Rowan-Robinson, 1998] M. ROWAN-ROBINSON, "Cosmological parameters and the case for cold dark matter". In [Spooner & Kudryavtsev, 1998], p 25, `astro-ph/9906277`.

[Rubakov *et al.*, 1982] V. A. RUBAKOV, M. V. SAZHIN, & A. V. VERYASKIN, "Graviton creation in the inflationary Universe and the grand unification scale". *Physics Letters* **115B** (1982) 189–192.

[Sachs & Wolfe, 1967] R. K. SACHS & A. M. WOLFE, "Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background". *Astrophysical Journal* **147** (1967) 73–90.

[Sadat *et al.*, 1997] R. SADAT, A. BLANCHARD, & J. OUKBIR, "Constraining Ω_0 from X-ray properties of clusters of galaxies at high redshift". *Astronomy and Astrophysics* **329** (1997) 21–29, `astro-ph/9708119`.

[Sahni & Wang, 2000] V. SAHNI & L.-M. WANG, "A new cosmological model of quintessence and dark matter". *Physical Review* **D62** (2000) 103517, `astro-ph/9910097`.

[Sakellariadou & Tetradis, 1998] M. SAKELLARIADOU & N. A. TETRADIS, "Spectrum of cosmological perturbations from multiple-stage inflation". `hep-ph/9806461`.

[Sakellariadou & Vilenkin, 1988] M. SAKELLARIADOU & A. V. VILENKIN, "Numerical experiments with cosmic strings in flat space-time". *Physical Review* **D37** (1988) 885–887.

[Sakellariadou & Vilenkin, 1990] M. SAKELLARIADOU & A. V. VILENKIN, "Cosmic string evolution in flat space-time". *Physical Review* **D42** (1990) 349–353.

[Santander, 1998] *The cosmic microwave background and the PLANCK mission*, Santander (1998). Proceedings of the Universidad Internacional Menéndez y Pelayo workshop, held in Santander, Spain, June 22–26, 1998.

[Scott *et al.*, 1996] P. F. SCOTT, R. SAUNDERS, G. POOLEY, C. M. M. O'SULLIVAN, A. N. LASENBY, M. E. JONES, M. P. HOBSON, P. J. DUFFETT-SMITH, & J. C. BAKER, "Measurements of structure in the cosmic background radiation with the Cambridge Cosmic Anisotropy Telescope". *Astrophysical Journal Letters* **461** (1996) L1–L4.

[Seager *et al.*, 1999] S. SEAGER, D. D. SASSELOV, & D. SCOTT, “A new calculation of the recombination epoch”. *Astrophysical Journal Letters* **523** (1999) L1–L5, astro-ph/9909275.

[Seljak, 1994] U. SELJAK, “A two-fluid approximation for calculating the cosmic microwave background anisotropies”. *Astrophysical Journal Letters* **435** (1994) L87–L90, astro-ph/9406050.

[Seljak *et al.*, 1997] U. SELJAK, U.-L. PEN, & N. G. TUROK, “Polarization of the microwave background in defect models”. *Physical Review Letters* **79** (1997) 1615–1618, astro-ph/9704231.

[Seljak & Zaldarriaga, 1996] U. SELJAK & M. ZALDARRIAGA, “A line-of-sight integration approach to cosmic microwave background anisotropies”. *Astrophysical Journal* **469** (1996) 437–444, astro-ph/9603033.

[Seljak & Zaldarriaga, 1997] U. SELJAK & M. ZALDARRIAGA, “An all-sky analysis of polarization in the microwave background”. *Physical Review* **D55** (1997) 1830–1840, astro-ph/9609170.

[Shellard & Allen, 1990] E. P. S. SHELLARD & B. ALLEN, “On the evolution of consmic strings”. In [Gibbons *et al.*, 1990], pp 421–448.

[Sigl *et al.*, 1995] G. SIGL, K. JEDAMZIK, D. N. SCHRAMM, & V. S. BEREZINSKY, “Helium photodisintegration and nucleosynthesis : implications for topological defects, high energy cosmic rays, and massive black holes”. *Physical Review* **D52** (1995) 6682–6693, astro-ph/9503094.

[Silk, 1968] J. D. SILK, “Cosmic black-boby radiation and galaxy formation”. *Astrophysical Journal* **151** (1968) 459–472.

[Slipher, 1914] V. M. SLIPHER (1914). “Spectropraphic observations of nebulea”. Paper presented at the 17$^{\text{th}}$ meeting of the American Astronomical Society, August, 1914.

[Slipher, 1915] V. M. SLIPHER, “Spectropraphic observations of nebulea”. *Popular Astronomy* **23** (1915) 21–24.

[Sloan, http] “The Sloan Digital Sky Survey”. http://astro.uchicago.edu/home/web/sdss/www/ .

[Smith *et al.*, 1998] C. C. SMITH, A. KLYPIN, M. A. K. GROSS, J. R. PRIMACK, & J. HOLTZMAN, “Linearizing the observed power spectrum”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **297** (1998) 910–922, astro-ph/9702099.

[Smoot, 1997a] G. F. SMOOT, “The CMB spectrum”. In [Lineweaver *et al.*, 1997], pp 271–308, astro-ph/9705101.

[Smoot, 1997b] G. F. SMOOT, “The CMB anisotropy experiments”. In [Lineweaver *et al.*, 1997], pp 185–240, astro-ph/9705135.

[Smoot *et al.*, 1992] G. F. SMOOT, C. H. BENNETT, A. J. KOGUT, E. L. WRIGHT, J. AYMON, N. W. BOGGESS, E. S. CHENG, G. DE AMICI, S. GULKIS, M. G. HAUSER, G. HINSHAW, C. H. LINEWEAVER, K. LOEWENSTEIN, P. D. JACKSON, M. A. JANSSEN, E. KAITA, T. J. KELSALL, P. KEEGSTRA, P. M. LUBIN, J. C. MATHER, S. S. MEYER, S. H. MOSELEY, T. L. MURDOCK, L. ROKKE, R. F. SILVERBERG, L. TENORIO, R. WEISS, & D. T. WILKINSON, “Structure in the COBE DMR first year maps”. *Astrophysical Journal Letters* **396** (1992) L1–L5.

[Songaila *et al.*, 1999] A. SONGAILA, E. M. HU, L. L. COWIE, & R. G. MAC MAHON, “Limits on the Gunn-Peterson effect at $z = 5$”. *Astrophysical Journal Letters* **525** (1999) L5–L8, astro-ph/9908321.

[Spokoiny, 1993] B. L. SPOKOINY, “Deflationary Universe scenario”. *Physics Letters* **315B** (1993) 40–45, gr-qc/9306008.

[Spooner & Kudryavtsev, 1998] *Identification of dark matter*, édité par N. J. C. Spooner & V. Kudryavtsev. World Scientific, Singapore (1998), 687 pages. Proceedings of the international workshop, held in Buxton, England, September 7–11, 1998.

[Staren *et al.*, 2000] J. W. STAREN, P. R. MEINHOLD, J. D. CHILDERS, A. LEVY, M. A. LIM, P. M. LUBIN, M. D. SEIFFERT, T. GAIER, N. FIGUEIREDO, T. VILLELA, C. A. WUENSCHE, M. TEGMARK, & A. DE OLIVEIRA-COSTA, "A spin-modulated telescope to make two dimensional CMB maps". *Astrophysical Journal* **539** (2000) 52–56, `astro-ph/9912212`.

[Starobinsky, 1979] A. A. STAROBINSKY, "Spectrum of relict gravitation radiation and early state of the Universe". *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **30** (1979) 682–685.

[Starobinsky, 1980] A. A. STAROBINSKY, "A new type of isotropic cosmological models without singularity". *Physics Letters* **91B** (1980) 99–102.

[Starobinsky, 1982] A. A. STAROBINSKY, "Dynamics of phase transition in the new inflationary Universe scenario and generation of perturbations". *Physics Letters* **117B** (1982) 175–178.

[Starobinsky, 1983] A. A. STAROBINSKY, "The perturbation spectrum evolving from a nonsingular, initially de Sitter cosmology, and the microwave background anisotropy". *Soviet Astronomy Letters* **9** (1983) 302–304.

[Starobinsky, 1992] A. A. STAROBINSKY, "Spectrum of adiabatic perturbations in the Universe when there are singularities in the inflation potential". *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **55** (1992) 489–494.

[Stebbins, 1997] A. J. STEBBINS, "The CMBR spectrum". In [Lineweaver *et al.*, 1997], pp 241–270, `astro-ph/9705178`.

[Steidel & Sargent, 1987] C. C. STEIDEL & W. L. W. SARGENT, "A new upper limit on the density of generally distributed intergalactic neutral hydrogen". *Astrophysical Journal Letters* **318** (1987) L11–L13.

[Steinhard, 1995] P. J. STEINHARD, "Cosmology at the crossroads". In [Kolb & Peccei, 1995], pp 51–72, `astro-ph/9502024`.

[Steinhard *et al.*, 1999] P. J. STEINHARD, L.-M. WANG, & I. ZLATEV, "Cosmological tracking solutions". *Physical Review* **D59** (1999) 123504, `astro-ph/9812313`.

[Stewart & Lyth, 1993] E. D. STEWART & D. H. LYTH, "A more accurate analytic calculation of the spectrum of cosmological perturbations produced during inflation". *Physics Letters* **302B** (1993) 171–175, `gr-qc/9302019`.

[Stewart & Walker, 1984] E. D. STEWART & M. WALKER, "Perturbations of space-times in general relativity". *Proceedings of the Royal Society of London* **A341** (1984) 49–74.

[Stewart, 1990] J. M. STEWART, "Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models". *Classical and Quantum Gravity* **7** (1990) 1169–1180.

[Stinebring *et al.*, 1990] D. R. STINEBRING, M. F. RYBA, J. H. TAYLOR, & R. W. ROMANI, "The cosmic gravitational wave background : limits from millisecond pulsar timing". *Physical Review Letters* **65** (1990) 285–288.

[Stompor *et al.*, 2001] R. STOMPOR, M. ABROE, P. A. R. ADE, A. BALBI, D. BARBOSA, J. J. BOCK, J. BORRILL, A. BOSCALERI, P. DE BERNARDIS, P. G. FERREIRA, S. HANANY, V. V. HRISTOV, A. H. JAFFE, A. T. LEE, E. PASCALE, B. RABII, P. L. RICHARDS, G. F. SMOOT, C. L. WINANT, & J.-H. P. WU, "Cosmological implications of the MAXIMA-i high resolution cosmic microwave background anisotropy measurement". *Astrophysical Journal Letters* **561** (2001) L7–L10, `astro-ph/0105062`.

[Stompor *et al.*, 1996] R. STOMPOR, A. J. BANDAY, & K. M. GÓRSKI, "Flat dark matter dominated models with hybrid adiabatic plus isocurvature initial conditions". *Astrophysical Journal* **463** (1996) 8–14, `astro-ph/9511087`.

[Subramanyan *et al.*, 1993] R. SUBRAMANYAN, R. D. EKERS, M. SINCLAIR, & J. D. SILK, "A search for arcmin-scale in the cosmic microwave background". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **263** (1993) 416–424.

[Sugiyama, 1995] N. SUGIYAMA, "Cosmic background anisotropies in cold dark matter cosmology". *Astrophysical Journal Supplement Series* **100** (1995) 81–305, `astro-ph/9412025`.

[Sylos Labini *et al.*, 1996] F. SYLOS LABINI, A. GABRIELLI, M. MONTUORI, & L. PIETRONERO, "Finite size effects on the galaxy number counts : evidence for fractal behavior up to the deepest scale". *Physica* **A226** (1996) 195–242, `astro-ph/9605135`.

[Tanaka *et al.*, 1996] S. T. TANAKA, A. C. CLAPP, M. J. DEVLIN, N. FIGUEIREDO, J. O. GUNDERSEN, S. HANANY, V. V. HRISTOV, A. E. LANGE, M. A. LIM, P. M. LUBIN, P. R. MEINHOLD, P. L. RICHARDS, G. F. SMOOT, & J. W. STAREN, "Measurements of anisotropy in the cosmic microwave background radiation at 0.5° scales near the stars HR5127 and Phi Herculis". *Astrophysical Journal Letters* **468** (1996) L81–L84, `astro-ph/9512067`.

[Tegmark, 1996] M. TEGMARK, "The angular power spectrum from the four-year COBE data". *Astrophysical Journal Letters* **464** (1996) L35–L38, `astro-ph/9601077`.

[Tegmark, 2000] M. TEGMARK, "Cosmological constraints from current CMB and SN Ia data : a brute force 8 parameter analysis". *Astrophysical Journal Letters* **514** (2000) L69–L72, `astro-ph/9809201`.

[Tegmark *et al.*, 2000] M. TEGMARK, D. J. EISENSTEIN, W. T. HU, & A. DE OLIVEIRA-COSTA, "Foregrounds and forecasts for the cosmic microwave background". *Astrophysical Journal* **530** (2000) 133–165, `astro-ph/9905257`.

[Tegmark & Hamilton, 1997] M. TEGMARK & A. J. S. HAMILTON, "Uncorrelated measurements of the CMB power spectrum". In [Olinto *et al.*, 1997], pp 270–272, `astro-ph/9702019`.

[Tegmark & Rees, 1998] M. TEGMARK & M. REES, "Why is the CMB fluctuation level 10^{-5} ?". *Astrophysical Journal* **499** (1998) 526–532, `astro-ph/9709058`.

[Tegmark & Zaldarriaga, 2000a] M. TEGMARK & M. ZALDARRIAGA, "Current cosmological constraints from a 10 parameter CMB analysis". *Astrophysical Journal* **544** (2000) 30–42, `astro-ph/0002091`.

[Tegmark & Zaldarriaga, 2000b] M. TEGMARK & M. ZALDARRIAGA, "New CMB constraints on the cosmic matter budget : trouble for nucleosynthesis ?". *Physical Review Letters* **85** (2000) 2240–2243, `astro-ph/0004393`.

[Tegmark, `http`] "The home page of Max Tegmark". `http://www.hep.upenn.edu/~max/index.html` .

[Thorne, 1980] K. S. THORNE, "Multipole expansions of gravitational radiation". *Review of Modern Physics* **52** (1980) 299–339.

[Thorsett & Dewey, 1996] S. E. THORSETT & R. J. DEWEY, "Pulsar timing limits on very low frequency stochastic gravitational radiation". *Physical Review* **D53** (1996) 3468–3471.

[Tomita, 1982] K. TOMITA, "Tensor spherical and pseudo-spherical harmonics in four-dimensional spaces". *Progress of Theoretical Physics* **68** (1982) 310–313.

[Torbet *et al.*, 1999] E. TORBET, M. J. DEVLIN, W. B. DORWART, T. HERBIG, A. D. MILLER, M. R. NOLTA, L. A. PAGE, J. L. PUCHALLA, & H. T. TRAN, “A measurement of the angular power spectrum of the microwave background made from the high Chilean Andes”. *Astrophysical Journal Letters* **521** (1999) L79–L82, `astro-ph/9905100`.

[Tucker *et al.*, 1997] G. S. TUCKER, H. P. GUSH, M. HALPERN, I. SHINKODA, & W. TOWLSON, “Anisotropy in the microwave sky : results from the first flight of BAM”. *Astrophysical Journal Letters* **475** (1997) L73–L76, `astro-ph/9611225`.

[Turner *et al.*, 1993] M. S. TURNER, M. S. WHITE, & J. E. LIDSEY, “Tensor perturbations in inflationary models as a probe of cosmology”. *Physical Review* **D48** (1993) 4613–4622, `astro-ph/9306029`.

[Turner & Widrow, 1988] M. S. TURNER & L. M. WIDROW, “Inflation-produced, large-scale magnetic fields”. *Physical Review* **D37** (1988) 2743–2754.

[Turok, 1989] N. G. TUROK, “Global texture as the origin of cosmic structure”. *Physical Review Letters* **63** (1989) 2625–2628.

[Turok, 1996a] N. G. TUROK, “Causality and the Doppler peaks”. *Physical Review* **D54** (1996) 3686–3689, `astro-ph/9604172`.

[Turok, 1996b] N. G. TUROK, “Sub-degree scale microwave anisotropies from cosmic defects”. `astro-ph/9606087`.

[Turok, 1996c] N. G. TUROK, “A causal source which mimics inflation”. *Physical Review Letters* **77** (1996) 4138–4141, `astro-ph/9607109`.

[Turok *et al.*, 1998] N. G. TUROK, U.-L. PEN, & U. SELJAK, “The scalar, vector and tensor contributions to CMB anisotropies from cosmic defects”. *Physical Review* **D58** (1998) 023506, `astro-ph/9706250`.

[Tytler *et al.*, 2000] D. TYTLER, J. M. O’MEARA, N. SUZUKI, & D. LUBIN, “Review of Big Bang nucleosynthesis and primordial abundances”. *Physica Scripta* **T85** (2000) 12–31, `astro-ph/0001318`.

[Uzan, 1998a] J.-P. UZAN, “Dynamics of relativistic interacting gases : from a kinetic to a fluid description”. *Classical and Quantum Gravity* **15** (1998) 1063–1088, `gr-qc/9801108`.

[Uzan, 1998b] J.-P. UZAN, *Défauts topologiques et conditions aux limites en cosmologie primordiale* (1998). Thèse de doctorat, Spécialité : Physique Théorique, Université Paris XI-Orsay, F-91405 Orsay Cedex.

[Uzan, 1999] J.-P. UZAN, “Cosmological scaling solutions of non-minimally coupled scalar fields”. *Physical Review* **D59** (1999) 123510, `gr-qc/9903004`.

[Uzan *et al.*, 2000a] J.-P. UZAN, N. DERUELLE, & A. RIAZUELO, “Cosmic microwave background anisotropies seeded by coherent topological defects : a semi-analytic approach”. In [Aubourg *et al.*, 2000], file `04/26` (CDROM), `astro-ph/9810313`.

[Uzan *et al.*, 2000b] J.-P. UZAN, R. LEHOUCQ, & J.-P. LUMINET, “New developments in the search for the topology of the Universe”. In [Aubourg *et al.*, 2000], file `04/25` (CDROM), `gr-qc/0005128`.

[Vachaspati, 1991] T. VACHASPATI, “Magnetic fields from cosmological phase transitions”. *Physics Letters* **265B** (1991) 258–261.

[Veeraraghavan & Stebbins, 1990] S. VEERARAGHAVAN & A. J. STEBBINS, “Causal compensated perturbations in cosmology”. *Astrophysical Journal* **365** (1990) 37–65.

[Vernizzi *et al.*, 2001] F. VERNIZZI, A. MELCHIORRI, & R. DURRER, “Cosmic microwave background anisotropies from pre-Big Bang cosmology”. *Physical Review* **D63** (2001) 063501, `astro-ph/0008232`.

[Vilenkin, 1981] A. V. VILENKIN, “Cosmological density fluctuations produced by vacuum strings”. *Physical Review Letters* **46** (1981) 1169–1172.

[Vilenkin & Shellard, 1994] A. V. VILENKIN & E. P. S. SHELLARD, *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge University Press, Cambridge (1994), xix+517 pages, ISBN 0-521-39153-9.

[Vilenkin & Vachaspati, 1987] A. V. VILENKIN & T. VACHASPATI, “Radiation of Goldstone bosons from cosmic strings”. *Physical Review* **D35** (1987) 1138–1140.

[Vilenkin, 1969] N. J. VILENKIN, *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*. Dunod, Paris (1969), xxxii+628 pages.

[Vincent *et al.*, 1997] G. R. VINCENT, M. B. HINDMARSH, & M. SAKELLARIADOU, “Correlations in cosmic string networks”. *Physical Review* **D55** (1997) 573–581, `astro-ph/9606137`.

[Waga & Frieman, 2000] I. WAGA & J. A. FRIEMAN, “New constraints from high redshift supernovae and lensing statistics upon scalar field cosmologies”. *Physical Review* **D62** (2000) 043521, `astro-ph/0001354`.

[Wald, 1984] R. M. WALD, *General relativity*. University of Chicago Press, Chicago (1984), xiii+491 pages, ISBN 0-226-87033-2.

[Walker, 1936] A. G. WALKER, “On Milne’s theory of world-structure”. *Proceedings of the London Mathematical Society* **42** (1936) 90–127.

[Wang *et al.*, 2000] L.-M. WANG, R. R. CALDWELL, J. P. OSTRIKER, & P. J. STEINHARD, “Cosmic concordance and quintessence”. *Astrophysical Journal* **530** (2000) 17–35, `astro-ph/9901388`.

[Wang *et al.*, 2002] X. WANG, M. TEGMARK, & M. ZALDARRIAGA, “Is cosmology consistent ?”. *Physical Review* **D65** (2002) 123001, `astro-ph/0105091`.

[Watson, 1991] A. A. WATSON, “Studies made at Haverah Park of the energy spectrum, mass composition and anisotropy of cosmic rays above 4×10^{17} eV”. In [Nagano & Takahara, 1991], pp 2–19.

[Wawrzyńczyk, 1984] A. WAWRZYŃCZYK, *Group representations and special functions*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (1984), xvi+688 pages, ISBN 90-277-1269-7.

[Weinberg, 1972] S. WEINBERG, *Gravitation and cosmology*. Addison Wiley and sons, New York (1972), xxviii+657 pages, ISBN 0-471-92567-5.

[Weinberg, 1989] S. WEINBERG, “The cosmological constant problem”. *Review of Modern Physics* **61** (1989) 1–23.

[Wetterich, 1988] C. WETTERICH, “An asymptotic vanishing time-dependant cosmological ‘constant’”. *Astronomy and Astrophysics* **301** (1988) 321–328.

[White, 1992] M. S. WHITE, “Contribution of long wavelength gravitational waves to the cosmic microwave background anisotropy”. *Physical Review* **D46** (1992) 4198–4205, `hep-ph/9207239`.

[White *et al.*, 2000] M. S. WHITE, D. SCOTT, & E. PIERPAOLI, “BOOMERanG returns unexpectedly”. *Astrophysical Journal* **545** (2000) 1–5, `astro-ph/0004385`.

[White *et al.*, 1994] M. S. WHITE, D. SCOTT, & J. D. SILK, “Anisotropies in the cosmic microwave background”. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **32** (1994) 319–370.

[Wilson *et al.*, 2000] G. W. WILSON, L. E. KNOX, S. DODELSON, K. A. COBLE, E. S. CHENG, D. A. COTTINGHAM, D. J. FIXSEN, A. B. GOLDIN, C. A. INMAN, M. S. KOWITT, S. S. MEYER, L. A. PAGE, J. L. PUCHALLA, J. E. RUHL, & R. F. SILVERBERG, "New cosmic microwave background power spectrum constraints from MSAM 1". *Astrophysical Journal* **532** (2000) 57–64, `astro-ph/9902047`.

[Witten, 1985] E. WITTEN, "Superconducting strings". *Nuclear Physics* **B249** (1985) 557–592.

[Witten, 2000] E. WITTEN (2000). "The cosmological constant from the viewpoint of string theory", `hep-ph/0002297`. Based on a lecture given at the 4^{th} international symposium on sources and detection of dark matter in the Universe (DM 2000), held at Marina del Rey, California, Feb 23–25, 2000.

[Wollack *et al.*, 1997] E. J. WOLLACK, M. J. DEVLIN, N. JAROSIK, C. B. NETTERFIELD, L. A. PAGE, & D. T. WILKINSON, "An instrument for investigation of the cosmic microwave background radiation at intermediate angular scales". *Astrophysical Journal* **476** (1997) 440–457, `astro-ph/9601196`.

[Wu *et al.*, 1998] J.-H. P. WU, P. P. AVELINO, E. P. S. SHELLARD, & B. ALLEN, "Cosmic strings, loops, and linear growth of matter perturbations". *International Journal of Modern Physics* **D11** (1998) 61–102, `astro-ph/9812156`.

[Yoshida *et al.*, 1995] S. YOSHIDA, N. HAYASHIDA, K. HONDA, M. HONDA, S. IMAIZUMI, N. INOUE, K. KADOTA, F. KAKIMOTO, K. KAMATA, S. KAWAGUCHI, N. KAWASUMI, Y. MATSUBARA, K. MURAKAMI, M. NAGANO, H. OHOKA, M. TESHIMA, I. TSUSHIMA, & H. YOSHII, "The cosmic ray energy spectrum above 3×10^{18} eV measured by the Akeno Giant Air Shower Array". *Astroparticle Physics* **3** (1995) 105–123.

[Zaldarriaga & Seljak, 1997] M. ZALDARRIAGA & U. SELJAK, "Signature of gravity waves in polarization of the microwave background". *Physical Review Letters* **78** (1997) 2054–2057, `astro-ph/9609169`.

[Zaldarriaga & Seljak, 1998] M. ZALDARRIAGA & U. SELJAK, "Gravitational lensing effect on cosmic microwave background polarization". *Physical Review* **D58** (1998) 023003, `astro-ph/9803150`.

[Zaldarriaga *et al.*, 1998] M. ZALDARRIAGA, U. SELJAK, & E. BERTSCHINGER, "Integral solution for the microwave background anisotropies in nonflat Universes". *Astrophysical Journal* **494** (1998) 491–502, `astro-ph/9704265`.

[Zehavi & Dekel, 1999] I. ZEHAVI & A. DEKEL, "Constraints on the cosmological constant from flows and supernovae". *Nature* **401** (1999) 252–254, `astro-ph/9904221`.

[Zel'dovich, 1972] Y. B. ZEL'DOVICH, "A hypothesis, unifying the structure and entropy of the Universe". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **160** (1972) 1P–3P.

[Zel'dovich *et al.*, 1969] Y. B. ZEL'DOVICH, V. G. KURT, & R. A. SUNYAEV, "The recombination of hydrogen in the hot model of the Universe". *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **28** (1969) 146–150.

[Zel'dovich & Sunyaev, 1969] Y. B. ZEL'DOVICH & R. A. SUNYAEV, "The interaction of matter and radiation in a hot-model Universe". *Astrophysics and Space Science* **4** (1969) 301–316.

[Ziaeepour, 2000] H. ZIAEEPOUR, "Cosmic equation of state, quintessence and decaying dark matter". `astro-ph/0002400`.

[Zlatev *et al.*, 1999] I. ZLATEV, L.-M. WANG, & P. J. STEINHARD, "Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant". *Physical Review Letters* **82** (1999) 896–899, `astro-ph/9807002`.

[Zwicky, 1936] F. ZWICKY, “Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln”. *Helvetica Physica Acta* **6** (1936) 110–127.

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude de divers modèles d'Univers primordial et leur observabilité dans les anisotropies du rayonnement fossile.

Dans la première partie sont exposées les équations d'évolution des perturbations cosmologiques. On y fait un rappel de la physique du rayonnement fossile, et l'influence des différents paramètres cosmologiques y est présentée. Les trois parties suivantes s'intéressent à différents scénarios d'Univers primordial. La deuxième partie porte sur les scénarios à base de sources actives, dont font partie les défauts topologiques. Les différences majeures avec les scénarios inflationnaires y sont exposées. On y détaille notamment l'importance des effets non linéaires dans l'évolution des sources et de leurs interactions non gravitationnelles avec le reste de l'Univers. La troisième partie porte sur les scénarios inflationnaires, et discute les hypothèses habituellement faites à propos de l'état des perturbations en fin d'inflation. L'accent est mis sur l'importance de la modélisation de ces conditions initiales pour pouvoir extraire des informations précises sur les paramètres cosmologiques à partir des observations des anisotropies du rayonnement fossile. Enfin, la quatrième partie traîte des scénarios de quintessence, et notamment de l'influence de ce champ scalaire sur la dynamique des perturbations cosmologiques. Il est montré que ces modèles font des prédictions assez différentes des scénarios avec constante cosmologique.

Mots-clés : Cosmologie, Formation des grandes structures, Rayonnement fossile, Inflation, Défauts topologiques.

Abstract

This PhD thesis is devoted to the study of several primordial Universe scenarios and their imprint on the Cosmic Microwave Background (CMB) anisotropies.

In the first part, the cosmological perturbation evolution equations are derived. The physics of the CMB is explained, as well as its dependence on the cosmological parameters. The next three parts tackle several primordial Universe scenarios. Part two presents active seeds scenarios, among which are topological defects. The major differences with inflationary scenarios are presented. The importance of non linear effects in the seeds evolution as well as non gravitational interactions with the rest of the Universe are explained. Part three is about inflationary scenarios and discusses the standard hypotheses that are usually made about the state of the cosmological perturbations at the end of inflation. We stress the importance of a correct parameterization of the perturbations in order to extract some accurate information about the cosmological parameters from the CMB anisotropies observations. Finally, part four presents some work about quintessence scenarios, especially the influence of the quintessence field on the cosmological perturbations. It is shown that the predictions made from these scenarios are quite different from scenarios with a cosmological constant.

Keywords: Cosmology, Large Scale Structures, Cosmic Microwave Background, Inflation, Topological Defects.