# STRUCTURE INTERNE ET OBSERVABILITÉ DES DÉFAUTS TOPOLOGIQUES ÉTENDUS. (mémoire d'habilitation)

Patrick PETER
*Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, Observatoire de Paris-Meudon, UPR 176, CNRS, 92195 Meudon, France*
Email: peter@prunelle.obspm.fr

Ce mémoire présente les travaux effectués ces dernières années dans le domaine des défauts topologiques étendus. La structure interne de ceux-ci, au niveau classique, a été complètement comprise, et de ce fait il est maintenant possible de connaître un grand nombre des conséquences cosmologiques que leur existence induirait, conséquences qui sont ici résumées. Des expériences futures devraient permettre de valider ou d'infirmer rapidement les théories qui en contiennent. La tâche qui reste à accomplir consiste à mieux comprendre leurs propriétés au niveau quantique.

## NOTATIONS

Les unités sont choisies telles que les constantes de Planck-Dirac $\hbar$ et Boltzmann $k_{_B}$ et la vitesse de la lumière $c$ sont égales à l'unité

$$\hbar = c = k_{_B} = 1,$$

c'est–à–dire que la constante de Newton est ici $G_{_N} = m_{_{P\ell}}^{-2}$, où $m_{_{P\ell}} \sim 1.2 \times 10^{19}$GeV est la masse de Planck. La métrique de Minkowski est de signature $+2$, i.e.,

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{Diag}(-1, +1, +1, +1),$$

les conventions géométriques étant en général celles de la référence [1].

Les champs de Higgs responsables de la formation de défauts topologiques sont notés $\Phi$, et le champ de jauge associé, s'il y a lieu, $B_\mu$, la notation $A_\mu$ étant réservée au photon. Les tenseurs cinétiques associés à ces champs de jauge sont notés respectivement $H_{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu}$. Les indices grecs ($\mu, \nu, \cdots = 0, \cdots, 3$) sont des indices quadridimensionels, et les indices latins ($a, b, \cdots = 0, \cdots, d$) sont associés aux quantités existant dans un défaut, $d$ étant la dimension spatiale dudit défaut.

## INTRODUCTION: TRANSITIONS DE PHASE ET DÉFAUTS TOPOLOGIQUES.

L'observation de l'univers [2] nous enseigne que celui-ci est en expansion. Renversant la flèche du temps, nous en déduisons que dans le passé, il était plus petit. Cette simple constatation nous permet de savoir que la densité de l'univers est une fonction décroissante du temps, de même que la température. Il est donc permis de supposer, étant donné le contenu en matière de l'univers, qu'il est passé par un certain nombre de transitions de phase du type de celles qu'on observe quotidiennement dans les laboratoires. Poussant l'analogie encore plus loin, on peut donc imaginer [3] que, à l'instar de pratiquement toutes les transitions de phases étudiées expérimentalement, celles ayant eu lieu dans l'univers primordial ont donné naissance à des défauts topologiques[1]. Dans ce mémoire, nous partirons du principe que ce fut en effet le cas, et nous en étudierons les conséquences possibles afin de savoir si cette hypothèse est vérifiable dans des expériences actuelles ou à venir. Mais d'abord, récapitulons le contexte cosmologique et les notions de transitions de phase et de défauts topologiques en physique des particules.

### A. Cosmologie

La cosmologie actuelle [1,2] suppose que l'univers est rempli par un fluide parfait caractérisé par une quadri-vitesse $u^\mu$ (celle d'un observateur en mouvement avec le fluide, c'est–à–dire voyant les galaxies de son voisinage au repos), une densité de masse-énergie $\rho$ et une pression $p$, i.e. un tenseur énergie-impulsion

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}. \tag{1}$$

Les symétries du système reposent sur le principe cosmologique suivant lequel l'univers, vu sur des échelles suffisamment grandes, est homogène (en chaque évènement de l'univers passe une hypersurface de genre espace sur laquelle les conditions physiques sont identiques pour tout évènement) et isotrope (en chaque évènement, un observateur en mouvement avec le fluide cosmologique ne peut distinguer une direction d'espace d'une autre par des mesures locales). Ceci implique que la métrique peut être mise sous la forme

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij} dx^i dx^j, \tag{2}$$

[1] Notons cependant qu'il ne s'agit pas d'une hypothèse triviale puisqu'on peut aussi supposer, étant donnée la nature particulière des transitions de phase impliquées, qu'elles n'ont pas donné d'effets visibles [4]

les $\gamma_{ij}$ étant des coefficients indépendants du temps en fonctions desquels le tenseur de Riemann à trois dimensions s'écrit

$$R_{ijkl} = K(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \tag{3}$$

où le paramètre de courbure $K$ est constant sur chaque hypersurface. En définissant

$$k \equiv \frac{K}{|K|} = 0, \pm 1, \tag{4}$$

on obtient la solution générale sous ces hypothèses, $\chi$ étant une coordonné radiale:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + \Sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \tag{5}$$

avec

$$\Sigma = \begin{cases} \sin\chi & \text{pour} \quad k=1 \quad \text{(univers fermé)}, \\ \chi & \text{pour} \quad k=0 \quad \text{(univers plat)}, \\ \sinh\chi & \text{pour} \quad k=-1 \quad \text{(univers ouvert)}. \end{cases} \tag{6}$$

Il reste alors à évaluer la fonction d'expansion $a(t)$.

Pour ce faire, il faut maintenant écrire les équations d'Einstein avec la métrique (5) et le tenseur énergie-impulsion (1). Les symétries réduisent le nombre déquations à la seule équation de Friedmann (provenant de la composante $tt$ des équations d'Einstein)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{7}$$

dans la mesure où l'énergie dans un volume $V \propto a^3$ est conservée $[(\rho a^3)^{\cdot} = -p(a^3)^{\cdot}]$. On se donne de plus une équation d'état reliant l'energie par unité de volume $\rho$ à la pression $p$. Ici et partout ailleurs (sauf mention explicite du contraire), un point sur une quantité en dénote la dérivée par rapport au temps $t$.

Si on appelle $H(t) = \dot{a}/a$ le paramètre de Hubble, on voit que la densité de l'univers s'écrit sous la forme

$$\rho = \rho_c + \frac{3k}{8\pi G a^2}, \tag{8}$$

où la densité critique $\rho_c$ est donnée par

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{9}$$

L'univers est donc respectivement fermé ($k = 1$), plat ($k = 0$) ou ouvert ($k = -1$) selon que la densité est supérieure, égale ou inférieure à la densité critique.

Il y a maintenant une dernière hypothèse nécessaire à la résolution de l'équation de Friedmann, c'est l'équation d'état, et conséquemment la variation de la densité avec le facteur d'expansion $a$. Deux cas distincts sont considérés, celui d'un gaz de poussière, c'est–à–dire de pression nulle quelle que soit la densité, et celui d'un gaz de rayonnement, avec $p = \frac{1}{3}\rho$. Dans le premier cas, on a

$$\rho_m = \rho_m^0 \frac{a_0^3}{a^3} \quad \to a(t) \propto t^{2/3}, \tag{10}$$

et dans le second

$$\rho_r = \rho_r^0 \frac{a_0^4}{a^4} \quad \to a(t) \propto t^{1/2}, \tag{11}$$

où les valeurs avec un indice ou exposant 0 sont les valeurs actuelles (mesurées). Comme $\rho_m^0 \sim 10^{-31}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ et $\rho_r^0 \sim 10^{-33}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$, l'univers est à l'heure actuelle dominé par la matière. Comme la densité de radiation décroît bien plus vite que celle de la matière, cela n'a pas toujours été le cas (Figure 1) et en fait, la plupart de ce qui sera étudié par la suite concerne la phase où le rayonnement dominait.

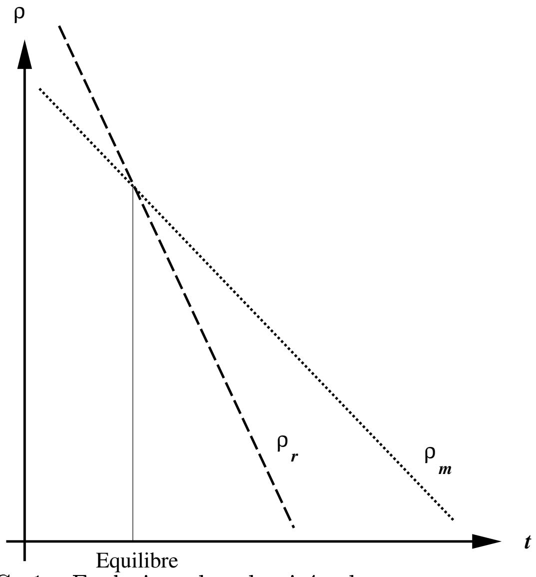


FIG. 1. Evolution des densités de rayonnement et de matière au cours du temps. Au point d'équilibre, les deux densités sont égales, et comme la matière domine maintenant, tous les temps situés avant cet équilibre sont dominés par le rayonnement.

### B. Equation d'état et brisure "spontanée" de symétrie.

Abordons maintenant le contenu de l'univers. Celui-ci est supposé décrit par des champs quantiques que l'on étudie statistiquement de manière à connaître les densités et pressions associées en fonction de la température [5]. Cela permet non seulement de calculer l'évolution de la température au cours du temps, mais aussi de mettre en évidence les transitions de phase. Considérons tout d'abord le cas d'un champ scalaire réel $\Phi(\mathbf{x}, t)$ libre dont la dynamique est gérée par la densité de Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2}m^2\Phi^2. \tag{12}$$

Le moment conjugué de $\Phi$ est $\pi \equiv \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_t\Phi) = \dot{\Phi}$, et donc le Hamiltonien s'écrit

$$H = \int d^3x\mathcal{H} = \int d^3x(\pi\dot{\Phi} - \mathcal{L}) = \int d^3x\frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla\Phi)^2 + m^2\Phi^2]. \tag{13}$$

Avec cette forme, le produit scalaire des champs en deux points en représentation de Heisenberg est

$$\langle\Phi_2(\mathbf{x}), t_2|\Phi_1(\mathbf{x}), t_1\rangle = \langle\Phi_2, t=0|\mathrm{e}^{-iH(t_2-t_1)}|\Phi_1, t=0\rangle \propto \int \mathcal{D}\Phi\mathcal{D}\pi \exp\left[i\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x[\pi\dot{\Phi} - \mathcal{H}]\right], \tag{14}$$

où les champs sont soumis aux conditions aux limites $\Phi(\mathbf{x}, t_2) = \Phi_2(\mathbf{x})$ et $\Phi(\mathbf{x}, t_1) = \Phi_1(\mathbf{x})$. Ceci permet de calculer la fonction de partition [6]

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta H} \tag{15}$$

en substituant les variables de temps par $\tau = it$ et en intégrant de $t_1 = 0$ à $t_2 = -i\beta$ ($\beta = 1/T$, où $T$ est la température):

$$\mathcal{Z} \propto \int_{\mathrm{per}} \mathcal{D}\Phi \int \mathcal{D}\pi\, \mathrm{e}^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x[i\pi\dot{\Phi} - \mathcal{H}]}, \tag{16}$$

la notation "*per*" reflètant les conditions aux limites périodiques sur le champ $\Phi$ (provenant des relations de commutation):

$$\Phi(\tau = 0) = \Phi(\tau = \beta), \tag{17}$$

et le point sur $\Phi$ en dénotant sa dérivée par rapport à $\tau$. Finalement, on obtient, après intégration sur $\pi$,

$$\mathcal{Z} = N(\beta)\int_{\mathrm{per}} \mathcal{D}\Phi \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x\mathcal{L}(\Phi, \bar{\partial}_\mu\Phi)\right], \tag{18}$$

relation dans laquelle $\bar{\partial}_\mu = (i\partial_\tau, \nabla)$ et $N(\beta)$ est un facteur (infini) de normalisation.

Pour le champ scalaire libre, on peut ré-écrire (18) sous la forme [notant $\bar{x} \equiv (\tau, \mathbf{x})$]

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= N(\beta)\int_{\mathrm{per}} \mathcal{D}\Phi \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^3xd^3x'd\tau d\tau'\Phi(\bar{x}')\times\right. \\ &\quad \left.\times\, (\bar{\partial}'_\mu\bar{\partial}^\mu + m^2)\delta(\bar{x}' - \bar{x})\Phi(\bar{x})\right] \\ &= N(\beta)\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\ln(\bar{\partial}'_\mu\bar{\partial}^\mu + m^2)\delta(\bar{x}' - \bar{x})\right]\right\}. \end{aligned}\tag{19}$$

L'évaluation de la trace se fait via un développement de Fourier du champ et de l'opérateur dont on veut la trace

$$\Phi(\bar{x}) = \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{-i\omega_n\tau}\mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\tilde{\Phi}(\omega_n, \mathbf{p}), \tag{20}$$

$$\delta(\bar{x}' - \bar{x}) = \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{-i\omega_n(\tau'-\tau)+i\mathbf{p}\cdot(\bar{\mathbf{x}}'-\bar{\mathbf{x}})}, \tag{21}$$

$$(\bar{\partial}'_\mu\bar{\partial}^\mu + m^2)\delta(\bar{x}' - \bar{x}) = \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{-i\omega_n\tau}\mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2), \tag{22}$$

ce qui donne, après calcul [7] des sommes sur les fréquences [somme discrète avec $\omega_n = 2\pi n/\beta$ du fait de l'équation (17)]

$$\ln\mathcal{Z} = -\int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \ln\left[1 - \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\right]\right), \tag{23}$$

le facteur de normalisation $N(\beta)$ s'étant simplifié dans l'évaluation des sommes.

L'énergie libre est alors

$$F \equiv \frac{-1}{\beta}\ln\mathcal{Z} \equiv \int d^3x\mathcal{F}, \tag{24}$$

et on trouve, pour une température très supérieure à la masse de $\Phi$ ($\beta m \gg 1$, cas ultra-relativiste qui nous intéresse),

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2}{90}T^4, \tag{25}$$

ce qui conduit, via les relations thermodynamiques usuelles

$$F = E - TS, \qquad p = -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T, \qquad S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_V, \tag{26}$$

$p$, $E$ et $S$ étant respectivement la pression, l'énergie totale et l'entropie, aux relations

$$p = \frac{\pi^2}{90}T^4, \qquad \mathcal{S} = \frac{2\pi^2}{45}T^3, \qquad \left(S = \int d^3x\mathcal{S}\right) \tag{27}$$

et finalement à la densité d'énergie ($E = \int d^3x\rho$)

$$\rho = \frac{\pi^2}{30}T^4. \tag{28}$$

Si l'on veut refaire ces calculs avec d'autres types de bosons (champs de jauge vectoriels tels que le photon par exemple), il suffit[2] de multiplier ces résultats par le nombre de degrés de liberté du champ bosonique impliqué (soit un facteur deux pour le photon).

[2]Notons au passage que ce calcul n'est absolument pas trivial; il nécessite en particulier l'introduction de fantômes de Fadeev-Popov afin de ne pas compter les degrés de liberté non physiques dus aux invariances.

Le cas des fermions se résout de la même manière, avec une petite subtilité qui provient de la nature anticommutante des champs. Ceci implique qu'au lieu des conditions aux limites périodiques (17), on prend des conditions anti-périodiques

$$\Psi(\tau = 0) = -\Psi(\tau = \beta), \tag{29}$$

modifiant ainsi les fréquences en $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$. Au lieu de (23), on trouve alors, pour un spineur de Dirac (4 composantes indépendantes)

$$\ln \mathcal{Z} = 2 \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Big(\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \ln 2 \left[1 + \mathrm{e}^{-\beta\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\right]\Big), \tag{30}$$

le nouveau signe devant l'exponentielle reflètant la statistique de Fermi-Dirac. Finalement, si on note $N_{_B}$ et $N_{_F}$ les nombres de degrés de liberté bosoniques et fermioniques (avec $N_{_B} = 2$ pour un boson de jauge de masse nulle, $N_{_F} = 4$ pour un spineur de Dirac et $N_{_F} = 2$ pour un spineur de Weyl), on constate que dans l'approximation ultra-relativiste (toutes les particules sont de masse nulle, c'est–à–dire qu'il s'agit de radiation), on a:

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2}{90} T^4 (N_{_B} + \frac{7}{8} N_{_F}), \tag{31}$$

$$p = \frac{1}{3}\rho = \frac{\pi^2}{90} T^4 (N_{_B} + \frac{7}{8} N_{_F}), \tag{32}$$

et

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi^2}{45} T^3 (N_{_B} + \frac{7}{8} N_{_F}). \tag{33}$$

Comme il ne s'agit ici que de théories de champs libres, ces relations peuvent aussi être comprises comme le premier ordre d'un développement, notamment de l'énergie libre, en puissances des interactions, c'est–à–dire en boucle. Pour aller plus loin, il faut maintenant connaître (ou choisir) les interactions.

Pour calculer les effets de haute température, il faut tout d'abord décrire la physique à température nulle. On choisit donc un modèle avec symétrie brisée dans lequel un champ de Higgs $\Phi$ (ayant un nombre de degrés de liberté arbitraire) évolue, à température nulle, dans un potentiel d'auto-interaction de la forme [8]

$$V = \frac{\lambda_\phi}{8} (|\Phi|^2 - \eta^2)^2, \tag{34}$$

où $|\Phi|^2 = \Phi^\dagger\Phi$. Dans ce cas, le Lagrangien est bien invariant sous les transformations générales unitaires de la forme $\Phi \to g\Phi$ (ces transformations formant un groupe $G$) puisqu'alors $\Phi^\dagger\Phi \to (g\Phi)^\dagger g\Phi = \Phi^\dagger g^\dagger g\Phi = \Phi^\dagger\Phi$.

Pour cette théorie, le vide correspond au minimum de ce potentiel, ce qui impose une valeur moyenne dans le vide (VEV[3]) du champ

$$\left.\frac{dV}{d\Phi}\right|_{\Phi=\langle 0|\Phi|0\rangle} = 0 \Rightarrow \langle 0|\Phi|0\rangle = \Phi_0; \quad \Phi_0^\dagger\Phi_0 = \eta^2, \tag{35}$$

où $\Phi_0$ représente une configuration constante de norme fixée (une phase pour un champ complexe par exemple). La symétrie est ici brisée puisque le vide n'est plus invariant: pour qu'il le soit, il faudrait que pour toutes les transformations $g \in G$ on ait $g\Phi_0 = \Phi_0$, ce qui impliquerait $\Phi_0^\dagger\Phi_0 = 0$, en contradiction avec (35). Cela dit, en général, il existe un sous groupe $H \subset G$ dont les éléments $h \in H$ satisfont $h\Phi_0 = \Phi_0$; la symétrie initiale $G$ a donc été réduite à celle de $H$, ce qu'on note $G \to H$.

Il est maintenant possible d'obtenir la dépendance du potentiel d'auto-interaction (énergie libre) avec la température à un niveau d'approximation supérieur au précédent en remplaçant le champ de Higgs $\Phi$ par une valeur prenant en compte la brisure de symétrie,

$$\Phi = \langle 0|\Phi|0\rangle + \varphi \equiv \phi_c + \varphi, \tag{36}$$

et en reportant cette nouvelle valeur du champ dans l'énergie libre (24). Ceci permet d'introduire une dépendance dans la valeur "classique" du champ $\phi_c$, et donc d'introduire les couplages entre les différentes particules prenant leurs masses via le champ de Higgs sans pour autant avoir des termes autres que quadratiques dans le Lagrangien. Pour une théorie générale comprenant des champs de jauge $A^a_\mu$ et des fermions $\psi_r$, la partie quadratique du Lagrangien s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{_{QUAD}} = &-\frac{1}{2}\bar{\partial}_\mu\varphi_i\bar{\partial}^\mu\varphi_i - \frac{1}{2}[M^2_{_S}(\phi_c)]_{ij}\varphi_i\varphi_j \\ &-\frac{1}{4}(\bar{\partial}^\mu A^\nu_a - \bar{\partial}^\nu A^\mu_a)(\bar{\partial}_\mu A_{\nu a} - \bar{\partial}_\nu A_{\mu a}) \\ &+\frac{1}{2}[M^2_{_V}(\phi_c)]_{ab} A^\mu_a A_{\mu b} \\ &+i\bar{\psi}_r\gamma^\mu\bar{\partial}_\mu\psi_r - [M_{_F}(\phi_c)]_{rs}\bar{\psi}_r\psi_s,\end{aligned} \tag{37}$$

et l'intégration sur les champs conduit à une partie qui ne s'annule pas à température nulle, correspondant à une renormalisation des masses et des champs, et un terme qui vaut

$$V^{eff}(\varphi_x) = \frac{T^4}{2\pi}\int_0^\infty dy\, y^2\, \mathcal{G}(y), \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(y) = &\sum_i \ln[1 - \exp(-\sqrt{y^2 + (M^2_{_S})_i T^{-2}})] \\ &+3\sum_a \ln[1 - \exp(-\sqrt{y^2 + (M^2_{_V})_a T^{-2}}) - \ln(1 - \mathrm{e}^{-y})] \\ &-4\sum_r \ln[1 + \exp(-\sqrt{y^2 + (M^2_{_F})_r T^{-2}})]\end{aligned} \tag{39}$$

où $y = |\mathbf{p}|/T$ et $(M_{_S})_i$, $(M_{_V})_a$ et $(M_{_F})_r$ sont les valeurs propres des matrices de masses apparaissant dans (37). Deux limites sont intéressantes: tout d'abord il y a le cas où la température est très faible devant toutes les

[3] *Vacuum Expectation Value*

masses des autres particules. Dans ce cas, tous les termes de (38) sont exponentiellement petits et il n'y a pas de dépendance; c'est le cas donc d'un gaz de poussière sans interaction pour lequel, comme on a vu, la pression est négligeable. Le deuxième cas est l'autre extrême, dans lequel ce sont les masses qui sont faibles devant la température; il s'agit donc essentiellement de décrire du rayonnement. Dans ce cas, on trouve

$$V^{eff}(\phi_c) \simeq -\frac{\pi^2 T^4}{90}(N_{_B} + \frac{7}{8}N_{_F}) + \frac{T^4}{24}[\mathrm{Tr}(M_{_S}^2) + 3\mathrm{Tr}(M_{_V}^2) + 2\mathrm{Tr}(M_{_F}^2)]. \quad (40)$$

On peut appliquer ce résultat général au cas particulier du modèle de Higgs abélien qui consiste en un champ scalaire complexe $\Phi$ et un champ vectoriel $B_\mu$ dont la dynamique est décrite par un Lagrangien invariant sous les transformations de phase [$G$ =U(1)]:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs ab.}} = -\bar{D}_\mu\Phi(\bar{D}^\mu\Phi)^\star - \frac{1}{4}\bar{H}_{\mu\nu}\bar{H}^{\mu\nu} - V(\Phi), \quad (41)$$

où $V(\Phi)$ est donné par (34) et

$$\bar{D}_\mu\Phi \equiv (\bar{\partial}_\mu + iqB_\mu)\Phi, \qquad \bar{H}_{\mu\nu} \equiv \bar{\partial}_\mu B_\nu - \bar{\partial}_\nu B_\mu. \quad (42)$$

Ici, il n'y a pas de fermions, et en posant

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_c + \varphi_1 + i\varphi_2), \quad (43)$$

on trouve la partie intéressante du Lagrangien sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \cdots &- \frac{1}{2}(\partial\varphi_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial\varphi_2)^2 - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} \\ &-\frac{1}{2}q^2\varphi^2 B_\mu B^\mu - \frac{\lambda_\phi}{8}\left[\left(\frac{\phi_c^2}{2} - \eta^2\right)^2\right. \\ &\left.+\varphi_1^2(\frac{3}{2}\phi_c^2 - \eta^2) + \varphi_2^2(\frac{1}{2}\phi_c^2 - \eta^2)\right], \end{aligned} \quad (44)$$

de laquelle on tire les matrices de masse suivantes:

$$M_{_S}^2(\phi_c) = \frac{\lambda_\varphi}{8}\mathrm{Diag}\left\{(\frac{3}{2}\phi_c^2 - \eta^2), (\frac{1}{2}\phi_c^2 - \eta^2)\right\}, \quad (45)$$

et

$$M_{_V}^2(\phi_c) = q^2\phi_2. \quad (46)$$

Une fois insérées dans (40), ces matrices de masses conduisent au potentiel effectif [$f(T)$ est une fonction de la température seulement, pas de $\phi_c$]

$$V^{eff}(\phi_c) = \frac{\lambda_\varphi}{8}\left[\frac{\phi_c^2}{2} - \eta^2(T)\right]^2 + f(T), \quad (47)$$

où le nouveau minimum dépend de la température suivant

$$\eta^2(T) = \eta^2 - \frac{2T^2}{3\lambda_\varphi}(\frac{\lambda_\varphi}{4} + 3q^2), \quad (48)$$

ce qui change de signe pour une température critique $T_c$ donnée par

$$T_c^2 = \frac{6\lambda_\varphi\eta^2}{\lambda_\varphi + 12q^2}. \quad (49)$$

La forme de ce potentiel est représentée sur la figure 2. On voit clairement un minimum en $\phi_c = 0$ pour les hautes températures et la symétrie brisée pour $T < T_c$ puisque le minimum n'y est plus en $\phi_c = 0$.

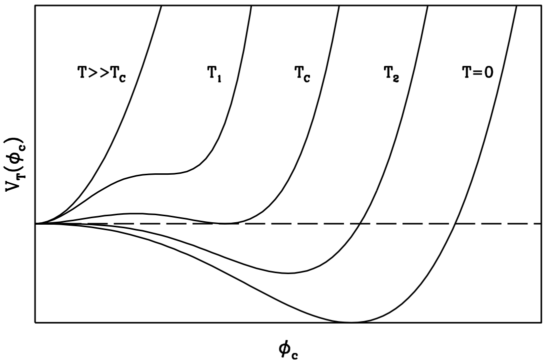


FIG. 2. Dépendance du potentiel $V(\phi_c)$ avec la température. A très haute température, le potentiel n'a qu'un seul minimum en $\phi_c = 0$, puis il y a apparition d'un minimum local ($T = T_1 > T_c$), $\phi_c = 0$ restant un minimum global jusqu'à la température critique $T_c$ à partir de laquelle le deuxième minimum devient plus bas et la brisure de symétrie a effectivement lieu. En $T = 0$, le minimum absolu est pour $\phi_c = \eta$, cf eq.(35).

### C. Modèle standard des particules, supersymétrie et grande unification.

Avant d'utiliser ce qui précède à la formation des défauts topologiques, précisons d'abord le contenu effectif en matière de l'univers, c'est–à–dire la physique des particules, telle qu'on la connait expérimentalement.

Le modèle standard des particules [9] repose sur le schéma de brisure de symétrie

$$\mathrm{SU}_c(3) \times \mathrm{SU}_{_L}(2) \times \mathrm{U}_{_Y}(1) \rightarrow \mathrm{SU}_c(3) \times \mathrm{U}_{em}(1),$$

où $\mathrm{SU}_c(3)$ représente l'invariance de couleur pour les quarks, $\mathrm{SU}_{_L}(2)$ l'invariance "gauche"[4] et $\mathrm{U}_{_Y}(1)$ celle sous les tranformations d'hypercharge, ces deux dernières s'appliquant aussi bien aux quarks qu'aux leptons et étant brisées en $\mathrm{U}_{em}(1)$ qui est l'invariance

[4] D'où le $L$ pour *Left*.

électromagnétique. Ces symétries sont implémentées dans le modèle suivant, qui contient 6 quarks, notés $u$ (pour *up*), $d$ (*down*), $s$ (*strange*), $c$ (*charm*), $b$ (*bottom*) et $t$ (*top*), celui-ci ayant été le dernier découvert expérimentalement et 6 leptons, $e$ (électron), $\nu_e$ (neutrino électronique), $\mu$ (muon), $\nu_\mu$ (neutrino muonique), $\tau$ et $\nu_\tau$. Chaque quark apparait sous trois formes possibles, ayant chacune une couleur [invariance SU(3)] et ces particules sont regroupées en doublets ou singulets de SU(2). Les neutrinos sont supposés de masse nulle et n'apparaissent donc que comme particules gauches partenaires dans le doublet des autres particules gauches [d'où le nom de l'invariance $\mathrm{SU}_L(2)$]. Les quarks se présentent aussi sous forme de doublets de particules gauches et de singulets de particules droites. En résumé, on regroupe les doublets de SU(2)

$$\ell_L^{(e)} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad q_L^{(u)} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \qquad (50)$$

et de même pour les autres générations.

La dynamique de ces fermions est décrite par

$$\mathcal{L}_{\text{fermions}} = -i \sum_{\text{générations}} (\bar{\ell}\gamma^\mu D_\mu \ell + \bar{q}\gamma^\mu D_\mu q), \qquad (51)$$

avec $\ell = \ell_L + \ell_R = (\frac{1-\gamma_5}{2})\ell + (\frac{1+\gamma_5}{2})\ell$, $q = q_L + q_R$ et

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}_\mu - ig'\frac{Y}{2}B_\mu - ig_c\mathbf{T}_c\cdot\mathbf{C}_\mu, \qquad (52)$$

où $\mathbf{T} = \vec{\sigma}/2$ pour un doublet et 0 pour un singulet, les $\sigma_i$ étant les matrices de Pauli, et $\mathbf{T}_c = \vec{\lambda}/2$ pour un quark [triplet de SU(3)] et 0 sinon. Les $\lambda_a$ sont les matrices de Gell-Mann satisfaisant les relations de commutation de SU(3).

A ces termes de fermions, il faut rajouter les champs de jauge:

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{4}\sum_{\text{groupes}} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (53)$$

où

$$F_{\mu\nu}\Big|_{\mathrm{SU}(3)} = \partial_\mu \mathbf{C}_\nu - \partial_\nu \mathbf{C}_\mu + ig_c[\mathbf{C}_\mu, \mathbf{C}_\nu], \qquad (54)$$

$$F_{\mu\nu}\Big|_{\mathrm{SU}(2)} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + ig'[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu], \qquad (55)$$

et

$$F_{\mu\nu}\Big|_{\mathrm{U}(1)} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \qquad (56)$$

Enfin, on complète la théorie en incluant un champ de Higgs $\Phi$, doublet de SU(2),

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = -(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\Phi), \qquad (57)$$

$V$ étant donné par (34), et des couplage de Yukawa pour donner des masses aux fermions

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\sum_{\text{générations}} \Big\{ f^{(e)}\bar{\ell}_L\Phi e_R + f^{(u)}\bar{q}_L\widetilde{\Phi}u_R + f^{(d)}\bar{q}_L\Phi d_R + \text{h.c.}, \Big\} \qquad (58)$$

avec

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\Phi} = i\sigma_2\Phi^\star = \begin{pmatrix} \varphi^{0\star} \\ -\varphi^- \end{pmatrix}. \qquad (59)$$

Quand le minimum du potentiel est atteint, à basse température, on voit sur (58) que si

$$\langle 0|\Phi|0\rangle = \Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (60)$$

alors les différents quarks et leptons acquièrent des masses différentes (dépendantes des paramètres arbitraires $f$) à l'exception des neutrinos qui restent de masse nulle. On voit aussi qu'un générateur, celui de la charge électrique, annihile le vide:

$$Q\Phi_0 = \frac{1}{2}(\sigma_3 + Y)\Phi_0 = 0, \qquad (61)$$

ce qui signifie que l'invariance électromagnétique n'est pas violée [$\exp(i\alpha Q)\Phi_0 = \Phi_0$ comme il convient pour l'invariance du vide sous la symétrie]; on est donc bien dans le schéma mentionné plus haut. Par ailleurs, certains bosons de jauge acquièrent des masses (sauf le photon comme on vient de le voir, et les gluons, qui, médiant l'interaction de couleur SU(3) n'interviennent pas dans le cadre de la brisure de symétrie) dans un rapport fixé par les rapports des constantes de couplage des groupes; ces conséquences (et d'autres) ont été expérimentalement vérifiées à un niveau de précision d'environ $10^{-3}$, notamment au travers des propriétés du $Z^0$ [10].

On pense à l'heure actuelle que ce modèle ne décrit pas toute la physique, ce d'autant plus qu'il contient environ une vingtaine de paramètres arbitraires. Il y a de fait plusieurs manières de l'étendre d'une façon plus ou moins naturelle. La plus simple consiste à adjoindre des invariances supplémentaires [11], non encore détectées[5], ce qui semble plutôt *ad hoc.* Cela permet cependant de calculer les effets de théories ayant le modèle standard comme limite à basse énergie, et notamment d'en étudier les défauts topologiques [12–14]. Les deux autres possibilités, non exclusives, sont la supersymétrie [15] et la grande unification [16]. Dans tous les cas, on suppose finalement simplement l'existence d'une "nouvelle physique" à une échelle d'énergie $\Lambda$ qu'il convient de préciser. Un façon de donner un ordre de grandeur à cette échelle d'énergie

[5] Ce fait contraint les masses des particules en jeu dans les interactions

est la suivante: le modèle standard contient une particule scalaire (non observée, le boson de Higgs) dont la renormalisation de la masse pose un problème. En effet, pour des raisons d'unitarité, la masse $m_H$ de cette particule doit être au maximum de quelques centaines de GeV. Or elle se calcule, à une boucle, sous la forme

$$m_H^2 = m_0^2 + \delta m_H^2 \sim m_0^2 - \alpha\Lambda^2, \tag{62}$$

le coefficient numérique $\alpha$ étant de l'ordre de l'unité. Si aucun ajustement fin des paramètres n'est présent[6], on en déduit alors que $\Lambda$ doit être au plus de l'ordre de quelques TeV. C'est à ce niveau donc que de la nouvelle physique, telle que la supersymétrie, devrait intervenir.

L'idée de supersymétrie [15] provient d'un problème technique et de sa solution potentielle. Ce problème est celui posé par l'équation (62), liée à l'existence de champs réels (pour toutes les autres particules, la renormalisation de la masse est seulement logarithmique dans la nouvelle échelle d'énergie). Si on imagine que la théorie contient des particules supplémentaires, alors il y aura des termes en plus dans l'estimation de la correction radiative à la masse. Ces nouveaux termes, pour peu qu'il viennent de fermions, contribuent avec un signe opposé au premier, ce qui peut avoir pour effet d'améliorer la divergence initiale si les paramètres sont bien choisis. C'est le cas lorsqu'on impose une nouvelle symétrie (il faut que cette annulation des termes dominants soit effective à tous les ordres), ici la supersymétrie. On voit que pour que cette symétrie ait un sens, il faut ajouter, pour chaque particule de la théorie initiale, une nouvelle particule, le partenaire supersymétrique, ayant un spin différent (1/2 en plus) de la première. C'est donc une symétrie entre fermions et bosons.

Cette idée renforce la deuxième possibilité d'extension du modèle standard, à savoir la grande unification [16]. En effet, imposer la supersymétrie ne résoud pas le problème du grand nombre de paramètres arbitraires, et en fait elle le complique quand on tient compte du fait que la supersymétrie, n'étant pas observée, doit être brisée. La grande unification s'attaque à ce problème en postulant l'existence d'une grande symétrie contenant SU(3)×SU(2)×U(1) et ayant été brisée. Dans ce cadre, si on choisit une invariance sous les transformation d'un groupe semi-simple, tel que SU(5) ou SO(10), alors il n'y a plus par exemple qu'une seule constante de couplage (au lieu de trois dans le modèle standard), les différentes valeurs observées provenant des corrections radiatives de basse énergie. En effet, si on calcule les valeurs des trois constantes de couplage en fonction de l'énergie (voir Figure 3), on s'aperçoit qu'à une très haute énergie, celles-ci ont presque la même valeur numérique. Cette coïncidence est renforcée dans le cas supersymétrique.

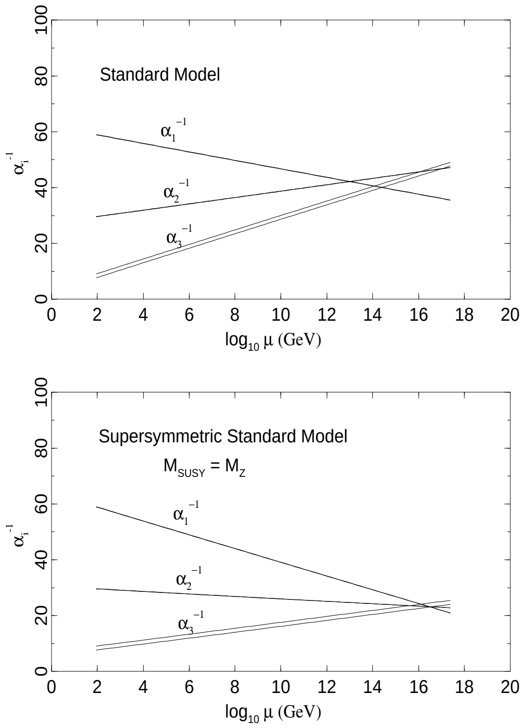


FIG. 3. Variation des constantes de couplage avec l'énergie dans le cadre du modèle standard (Figure du haut) et du modèle supersymétrique minimum (Figure du bas). L'unification est nettement plus probante dans le cas supersymétrique

Pour toutes ces extensions du modèle standard de la physique des particules à basse énergie, la structure du vide, donnée par celle du champ de Higgs, n'est pas nécessairement triviale comme c'est le cas sinon. En fait, on est maintenant dans le cadre généralisé à

$$G \to H \to \cdots \to \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \to \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1), \tag{63}$$

et les invariances initiales $G$ sont inconnues. Malheureusement, nous n'avons pas accès expérimentalement à ces domaines d'énergie, ce qui fait que nous ne sommes pas en mesure de déterminer la physique de ce niveau autrement que par les conséquences à basse énergie, pour lesquelles beaucoup de théories reproduisent les mêmes données. Heureusement, les transitions de phase qui ont dû avoir lieu dans ce cadre dans l'univers primordial peuvent avoir laissé des traces encore visibles sous la forme de défauts topologiques [17]. Leur étude permettra donc peut–être de répondre à des questions inaccessibles sinon. On trouvera de plus que ces objets conduisent à de nouvelles conséquences cosmologiques, inattendues, ce qui renforce l'intérêt de leur étude en soi.

[6] Ce *Fine tuning* est généralement considéré comme une solution inadmissible.

### D. Défauts topologiques.

Nous allons maintenant revenir au mécanisme de brisure de symétrie dans certains cas simples afin de voir apparaître des situations caractéristiques des transitions de phase ordinaires (c'est–à–dire du ressort des laboratoires terrestres) [18].

Considérons tout d'abord le cas d'un champ scalaire réel $\phi$ dont la dynamique est régie par

$$\mathcal{L} = -(\partial\phi)^2 - \frac{\lambda_\phi}{8}(\phi^2 - \eta^2), \tag{64}$$

qui possède l'invariance discrète[7] $\phi \to -\phi$, donc $G = Z_2$. Lorsque le champ choisit un minimum, c'est en $\phi_0 = \pm\eta$, ce qui brise totalement la symétrie. On est donc dans le schéma $Z_2 \to \{\emptyset\}$. La longueur de corrélation $\xi$ du champ quantique lors de la transition de phase s'estime facilement [19] comme la longueur d'onde Compton de la particule,

$$\xi \sim m_{_H}^{-1}. \tag{65}$$

Si pendant la transition de phase, on considère deux régions de l'univers séparées d'une distance supérieure à cette longueur de corrélation, par définition de celle-ci, les valeurs prises par $\phi$ sont indépendantes, et peuvent par conséquent être différentes. Autrement dit, il peut y avoir des régions de l'espace dans lesquelles $\phi = +\eta$ et d'autres dans lesquelles $\phi = -\eta$. Entre les deux, on trouve donc, par interpolation, qu'il existe une surface sur laquelle $\phi = 0$. Cette surface, topologiquement stable, s'appelle un mur de domaine[8].

La formation des cordes cosmiques est essentiellement similaire au mécanisme précédent, à la seule différence que les invariances sont changées. Pour voir ce qui se passe, il suffit de reprendre le modèle de Higgs abélien où $G = U(1) \to \{\emptyset\}$. Le champ $\Phi$ est maintenant complexe et évolue dans le potentiel (34). Longtemps après la brisure de symétrie, le champ a choisi une phase arbitraire (qui n'a d'ailleurs pas d'effet localement) en chaque point, ces phases étant là encore décorrélées sur des distances supérieures à la longueur de corrélation. Il est alors possible de trouver des régions autour desquelles la phase effectue une (ou plusieurs) rotations complètes. Ceci est illustré sur la figure 4 sur laquelle on voit que la phase du champ de Higgs suivant un chemin particulier de l'espace physique varie entre 0 et $2\pi n$, où $n$ est un entier[9]. De ce fait, le chemin n'est pas contractible, ce

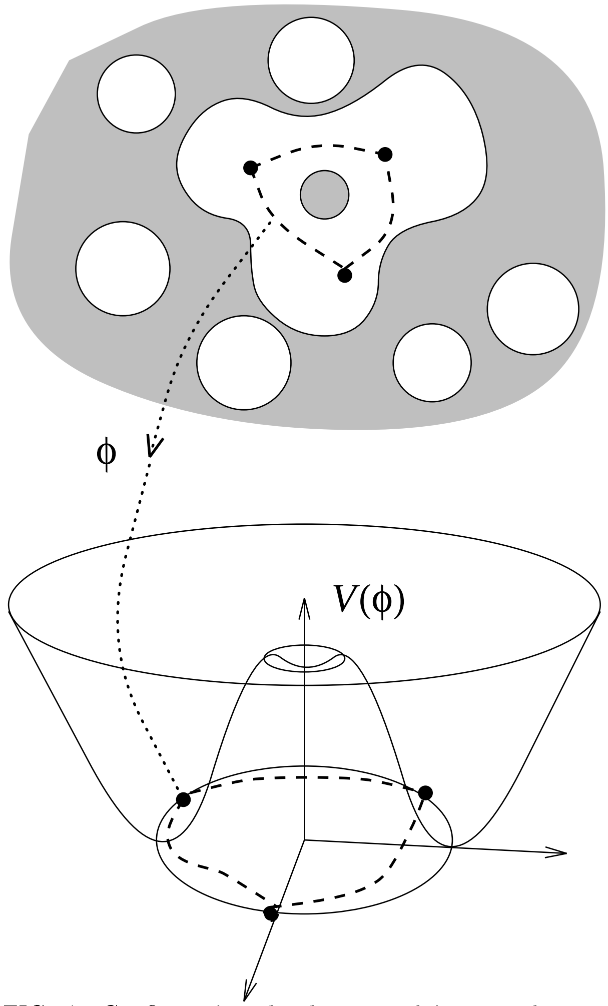


FIG. 4. Configuration de champ scalaire complexe conduisant à l'existence d'une corde cosmique. Les variations de phase du champ de Higgs sont indiquées et reliées aux minima du potentiel. La petite région grisée au centre finira par ne contenir qu'un point sur lequel $\phi = 0$. Ce diagramme montre un potentiel un peu plus compliqué que (34) dans lequel il existe un minimum local autour de $\phi = 0$, ce qui implique une transition de phase du premier ordre (procédant par nucléation) à la place des transitions du deuxième ordre considérées jusqu'ici. Ceci ne change strictement rien au mécanisme sous-jacent et à la stabilité topologique. Extrait de [20].

---

[7] Dans beaucoup de théories de Grande Unification (*Grand Unified Theories*, ou GUT) on rencontre ce genre de symétrie. Comme on le verra, ceci pose souvent des problèmes de compatibilité avec la cosmologie.

[8] *Domain wall.*

[9] Appelé *winding number*

qui implique l'existence d'une ligne sur laquelle $\phi = 0$, une corde cosmique. Les figures 5 et 6 montrent respectivement l'allure du champ de Higgs au voisinage d'une corde et la densité d'énergie correspondante.

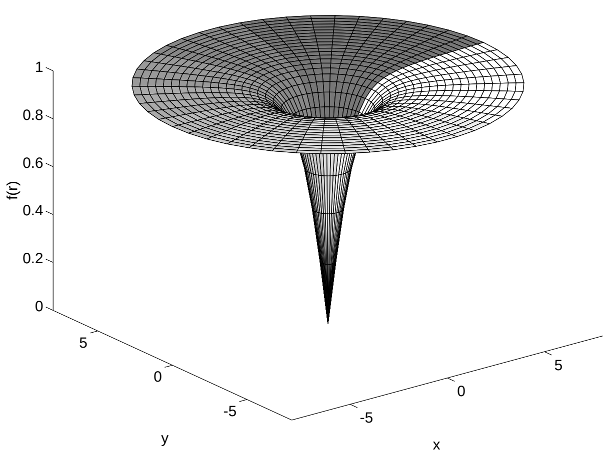


FIG. 5. Amplitude du champ de Higgs autour d'une corde cosmique. Le champ s'annule à l'origine et rejoint sa valeur nominale de vide (ici normalisée à l'unité) en conservant la symétrie cylindrique. Extrait de [20].

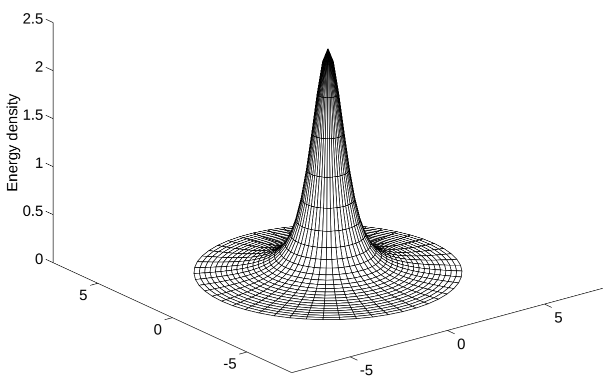


FIG. 6. Densité d'énergie autour d'une corde cosmique. L'énergie est maximale au centre, là où le champ de Higgs s'annule. Extrait de [20].

De la même manière, on peut généraliser en considérant des topologies du vide pour lesquelles, au lieu de chemin, ce sont des surfaces qui sont incontractibles. Dans ce cas, il n'y a qu'un point de l'espace en lequel le champ doit s'annuler, un monopôle.

Du point de vue de la structure de groupe sous-jacente à tous ces modèles, en considérant le vide lui même, dont la topologie est donnée par le groupe quotient $\mathcal{M} = G/H$ dans le schéma $G \to H$, la présence ou l'absence de défauts se déduit simplement [3,20,21] par l'étude des groupes d'homotopie de $\mathcal{M}$: si $\pi_0(\mathcal{M}) \not\sim \{\emptyset\}$, il y aura apparition de murs de domaines dans le modèle (c'est le cas de toutes les symétries discrètes brisées)[10], ce sera des cordes si $\pi_1 \not\sim \{\emptyset\}$ et des monopôles si $\pi_2 \not\sim \{\emptyset\}$.

Deux points sont encore à considérer ici. Tout d'abord concernant les murs de domaines: ceux-ci, s'ils sont produits par le mécanisme décrit plus haut, sont incompatibles avec la cosmologie. En effet, un seul de ces murs existant à l'heure actuelle conduirait à une densité d'énergie $10^8$ fois supérieure à celle de toute la matière connue, même pour une brisure de symétrie ayant lieu seulement à environ 100 GeV. De plus, il aurait été vu dans les anisotropies du rayonnement de fond diffus à un niveau très au delà de ce qui est observé. En conséquence, toute théorie produisant des murs de domaines stables à haute énergie doit être rejetée [3]. Cela n'exclut pas par ailleurs d'autres types de murs (parcourus par des courant en particulier) dont les conséquences cosmologiques restent à étudier, comme on le verra plus loin.

Les monopôles posent un problème un peu similaire, mais cette fois ci du fait de leur nombre et de ce que les sections efficaces d'annihilation sont très faibles et ils finiraient assez vite par dominer l'univers, conduisant celui-ci à une recontraction non observée [22]. Il existe plusieurs solutions à ce problème, la plus simple consistant à invoquer une période d'inflation [2,21,23] suivant la transition au cours de laquelle apparurent les monopôles, avec l'effet de les dissoudre. Il faut remarquer qu'il s'agit là d'un vrai problème inhérent à toutes les théories de grande unification puisque malgré tout, quel que soit le groupe d'unification, le schéma doit être tel qu'on conserve une symétrie U(1) d'électromagnétisme à basse température. Ceci implique que $\pi_2(\mathcal{M}) \sim \pi_1(H) \sim \pi_1[U(1)]$, ce qui est l'ensemble des nombres entiers relatifs, et donc non trivial.

Les modèles de cordes ne posent aucun de ces problèmes, ce pour plusieurs raisons. D'abord, étant linéaires et non pas surfaciques, la masse contenue dans chacune d'elle n'est pas aussi importante que pour un mur. Par ailleurs, ce sont tout de même des objets étendus, et donc elles sont susceptibles de se contracter jusqu'au point où leur dimension devient suffisamment faible pour que les effets quantiques puissent lever la stabilité topologique. Enfin, ce problème de contraction existe car elles apparaissent préférentiellement sous forme de boucles fermées: même si ca n'était pas le cas, les collisions entre cordes (et auto-collisions de même) formeraient des boucles [24] quoi qu'il arrive (voir Figure 7). Ces boucles ont tendance à se contracter, ne serait-ce que sous l'effet de leur propre tension. Or la stabilité topologique n'est assurée que localement, la boucle étant finalement topologiquement équivalente à une configuration de champ triviale. Conséquemment, en deça d'une certaine taille, de l'ordre de la longueur d'onde Compton

[10] $\pi_0$ compte le nombre d'éléments disjoints du groupe, $\pi_1$ recense les chemins non contractibles, et $\pi_2$ les surfaces.

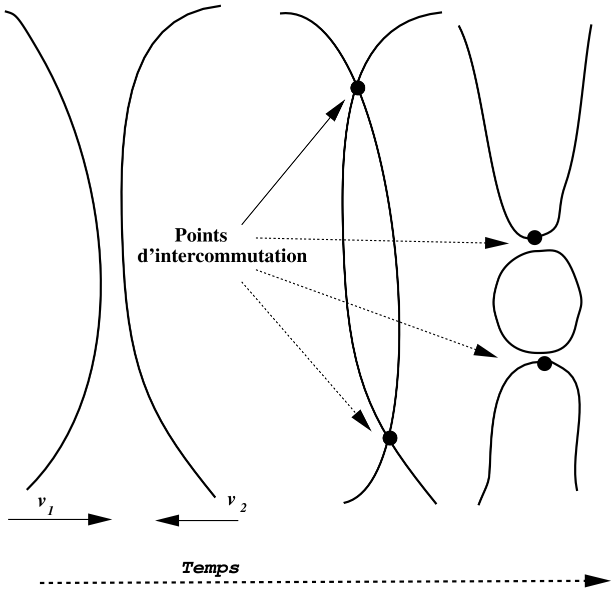


FIG. 7. Intercommutation de deux cordes et formation de boucles. Les points où les cordes se croisent échangent leurs extrémités. Les deux morceaux de cordes ici représentés peuvent appartenir à la même corde.

du champ de Higgs, la boucle se désintègre en particules de Higgs (voir Figure 8)[11]. L'évolution d'un ensemble de cordes prenant en compte ces différents mécanismes conduit à une structure (réseau de cordes) telle que présentée sur la figure 9 [27].

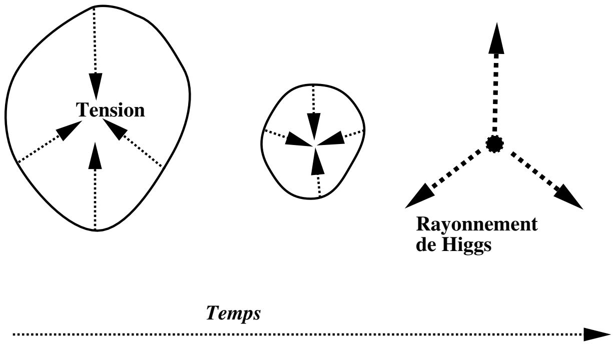


FIG. 8. Désintégration d'une boucle par effet de contraction due à la tension.

[11]Il faut noter ici que de ce fait, la présence à l'heure actuelle de défauts topologiques étendus est incompatible avec une topologie non simplement connexe de l'univers lui-même [25], du moins tant que la taille caractéristique de ce dernier reste inférieure au temps de Hubble. Cette mutuelle exclusion pourrait aussi à l'avenir être utilisée comme preuve [26].

Tous ces défauts ne sont pas des conséquences de théories aussi simples que celle présentées ici. En fait, les champs qui les constituent sont, dans la plupart des situations envisageables, couplés à d'autres champs, ce qui en modifie la structure en rajoutant notamment des courants conservés [12,14,28] (initialement considérés comme "supraconducteurs" par analogie avec ce qui se passe dans les systèmes ordinaires à basse température). Nous allons donc à partir de maintenant nous intéresser à cette structure interne au travers de modèles microscopiques simplifiés dont on espère qu'ils ne sont pas trop éloignés de la réalité. Ceci sera fait dans les deux cas intéressants des murs de domaines et des cordes cosmiques, le cas des monopôles étant laissé de côté dans la présente étude qui n'est concernée que par les défauts étendus. Pour les monopôles en effet, et contrairement aux deux autres, une approche semi-classique est nécessaire et devrait permettre d'aborder les propriétés quantiques des boucles de cordes cosmiques; ce travail est actuellement en cours [29]. Nous nous concentrerons ensuite sur le cas des cordes, cas le plus immédiatement applicable à la cosmologie, afin d'en déduire, au travers d'un formalisme macroscopique adéquat [30] et d'une équation d'état analytique approximée [31], les effets tant au niveau gravitationnel qu'électromagnétique sur la cosmologie [32]. Ceci nous permettra de conclure quant à l'observabilité éventuelle de ces objets, notamment à un niveau expérimental, en particulier comme rayons cosmiques de très hautes énergies [33].

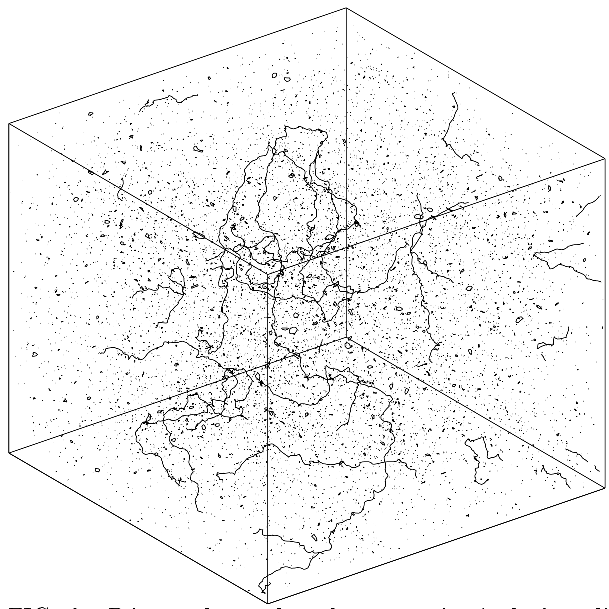

FIG. 9. Réseau de cordes obtenu après évolution d'un système de défauts répartis alèatoirement dans l'univers en tenant compte de l'expansion.

## I. STRUCTURE INTERNE ET MODÈLES MICROSCOPIQUES.

Les modèles que nous utiliserons pour décrire des défauts topologiques sont les modèles simplifiés considérés plus haut, auquels nous adjoindrons des champs supplémentaires munis de couplages arbitraires sur la valeur desquels nous resterons muets; c'est la théorie sous-jacente qui devrait les fixer.

Partout dans la suite, nous noterons $\Phi$ le champ de Higgs, qui sera soit réel, pour former des murs de domaines, soit complexe pour les cordes, et $B_\mu$ le champ de jauge associé dans le dernier cas (couplé par une constante de couplage $q$). L'existence d'un courant sera liée à un champ scalaire complexe $\Sigma(x^\mu)$ couplé le cas échéant au photon $A_\mu$ par la constante $e$ qui, dans nos unités, prend la valeur numérique $e^2 \simeq 1/137$ pour une charge égale à celle de l'électron. On rajoute donc au Lagrangien de Higgs, pour décrire la dynamique de l'ensemble, les termes

$$\mathcal{L}_{\mathrm{courant}} = -\frac{1}{2}(D\Sigma)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - V(\Phi,\Sigma), \tag{66}$$

avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{67}$$

et

$$D_\mu \Sigma = (\partial_\mu + ieA_\mu)\Sigma, \tag{68}$$

le potentiel d'interaction, hormis le terme usuel de brisure de symétrie étant donné par

$$V(\Phi,\Sigma) = f(|\Phi|^2 - \eta^2)|\Sigma|^2 + \frac{1}{2}m_\sigma^2|\Sigma|^2 + \frac{1}{4}\lambda_\sigma|\Sigma|^4. \tag{69}$$

Ces termes sont généralement admis comme permettant déjà de connaître la dynamique d'un défaut topologique contenant un courant, quel qu'il soit, à un niveau d'approximation suffisant. Certaines théories plus réalistes conduisent en effet à des approximations dans lesquelles cette description est suffisante, tout en fixant les paramètres. C'est le cas notamment des modèles dans lesquels le groupe usuel est étendu simplement pour faire apparaître artificiellement des défauts; dans ces modèles, on constate que les approximations qui suivent sont justifiées, et de plus on déduit que l'existence de courants dans les cordes peut être vue comme une conséquence de la physique à basse énergie.

Nous allons maintenant étudier les différents défauts avec cette structure, en commençant par les murs de domaines puisque ce sont les plus simples.

### A. Murs de domaines.

Compte tenu de ce que les murs de domaines semblent incompatibles avec la cosmologie, il pourrait paraître vain d'en étudier les propriétés dans le cas où ceux-ci sont parcourus par des courants de surface. En fait, ce n'est pas le cas, et ce pour plusieurs raisons. La première est que l'existence d'un courant a tendance à diminuer l'énergie par unité de surface par rapport au cas ordinaire sans courant; c'est d'ailleurs la raison pour laquelle il peut y avoir des courants. Mais ceci implique que, pour certaines valeurs des paramètres, l'énergie par unité de surface pourrait être considérablement plus faible que ce à quoi on pourrait s'attendre naïvement, supprimant par là-même l'impossibilité cosmologique. Par ailleurs, l'autre hypothèse généralement admise pour résoudre le problème des murs de domaines, à supposer qu'ils aient un jour été produits, consiste à postuler qu'ils sont apparus lors de transitions de phase plus compliquées que celles décrites ici, au cours desquelles non seulement des murs, mais aussi des cordes seraient apparues. Dans ce cas, tous les murs auraient été entourés de cordes, et donc de surface finie. Etant donnée leur grande tension de surface, ces objets se seraient rapidement évaporés par le même mécanisme que pour les cordes (voir Figure 8), en fait dans un intervalle de temps inférieur à un temps de Hubble, et n'auraient pas pu avoir de conséquences encore visibles à l'heure actuelle. Maintenant cet argument ne s'applique que pour des murs n'étant pas parcourus par des courants, ces derniers pouvant peut–être atteindre des configurations d'équilibre, soit de type "frisbee", pour des murs entourés de cordes, ou encore soutenues par les effets de répulsion électromagnétique, les courants se redistribuant à la surface du mur. Toutes ces raisons font que leur étude n'est pas purement académique. Par ailleurs, le mur de domaine permet de bien voir comment des courants peuvent être générés dans des défauts topologiques en général puisque le potentiel dans lequel va évoluer $\Sigma$ avant que le courant n'existe est calculable analytiquement. Dans cette étude, qui sert de prototype aux autres travaux concernant les défauts topologiques étendus, nous nous placerons dans la limite neutre dans laquelle $e = 0$ et nous ne considèrerons donc pas la présence du champ électromagnétique, ceci étant réservé aux cordes.

Considérons donc une surface sur laquelle $\Phi = 0$. Localement, on peut toujours choisir cette surface comme donnée par la condition $z = 0$ dans un système de coordonnées cartésiennes. On aura donc une solution de la forme [34]

$$\Phi = \varphi(z), \quad \Sigma = \sigma(z)\exp[i(kx - \omega t)], \tag{70}$$

en supposant que le courant parcoure le mur dans la direction de la coordonnée $x$, ce qui revient de fait à ajuster cette coordonnée dans la direction du courant; il n'y a jusqu'ici rien d'arbitraire. Regardons pour le moment la configuration sans courant dans laquelle $\sigma = 0$. L'équation d'Euler-Lagrange pour $\Phi$ conduit à

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{\lambda_\phi}{2}(\varphi^2 - \eta^2)\varphi, \tag{71}$$

dont la solution est connue:

$$\varphi = \eta \tanh(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_\phi}\eta z). \quad (72)$$

Si on perturbe maintenant le porteur de charge en l'écrivant sous la forme précédente avec $k = 0$ et $\sigma \ll m_\sigma$, on trouve une équation de type Schrödinger

$$-\frac{d^2\sigma}{dz^2} + \mathcal{V}(z)\sigma = \omega^2\sigma, \quad (73)$$

c'est–à–dire que $\Sigma$ évolue dans un potentiel défini par

$$\mathcal{V}(z) \equiv -2f\eta^2[1 - \tanh^2(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_\phi}\eta z)] + m_\sigma^2, \quad (74)$$

ce qui est défini négatif dans le cas où

$$m_\sigma^2 \le 2f\eta^2. \quad (75)$$

Donc l'équation (73) admet des valeurs propres avec $\omega^2 < 0$, ce qui indique une instabilité. Cela veut dire que le champ a spontanément tendance à se condenser dans le mur. Notons à ce point que la situation est exactement similaire dans les cas de cordes cosmiques et de monopôles, à ceci près que les nombres de dimension sont différents et que les potentiels respectifs ne sont pas connus analytiquement. Malgré tout, on peut d'ores et déjà constater que la condition (75) s'appliquera toujours pour indiquer la présence de condensats dans les défauts topologiques.

Pour le reste de l'étude, aussi bien d'ailleurs pour les murs que pour les autres types de défauts, il s'avère utile de ne travailler qu'avec des variables sans dimensions, ne serait-ce que pour pouvoir simplifier le traitement numérique des équations. Ceci se fait en exprimant toutes les unités de longueur en unité de $\eta^{-1}\lambda_\phi^{-1/2}$, en renormalisant les champs par

$$\varphi = \eta X, \quad \sigma = \frac{m_\sigma}{\sqrt{\lambda_\sigma}}Y, \quad (76)$$

les nouveaux champs $X$ et $Y$ étant sans dimensions, et en faisant apparaître les paramètres indépendants par

$$\alpha_1 = \frac{m_\sigma^2}{\lambda_\sigma\eta^2} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{fm_\sigma^2}{\lambda_\phi\lambda_\sigma\eta^2} \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \frac{m_\sigma^4}{\lambda_\phi\lambda_\sigma\eta^4}. \quad (77)$$

Le courant conservé est le courant usuel

$$J_\mu = \frac{i}{2}\Sigma \overset{\leftrightarrow}{\partial_\mu} \Sigma^*, \quad (78)$$

c'est–à–dire, dans la configuration (70),

$$J_\mu = (k\delta_{\mu x} - \omega\delta_{\mu t})\sigma^2(z), \quad (79)$$

dont on peut s'apercevoir qu'il ne dépend en fait que de la forme invariante de Lorentz

$$w \equiv k^2 - \omega^2, \quad (80)$$

ce qui défini le paramètre d'état, là encore aussi bien pour un mur que pour une corde cosmique (le cas des monopôles ici diffère légèrement en ce sens que $w$ y est défini négatif, du fait de l'absence de dimension spatiale[12]). Le courant est en fait directement proportionnel à ce paramètre, ce qui montre que si celui-ci est positif, il s'agit d'un courant de genre espace, similaire à un courant électrique ordinaire, alors que dans le cas contraire $w < 0$, il s'agira donc d'un courant de genre temps, soit une densité de charge. Le premier cas est aussi appelé *régime magnétique* puisque dans ce cas, si le courant est couplé au champ électromagnétique, il existe un référentiel dans lequel seul est présent un champ magnétique, alors que le deuxième cas est qualifié de *régime électrique* puisqu'alors c'est le champ électrique qui reste seul.

On doit encore renormaliser le paramètre d'état, ce qui est accompli par la definition

$$w = \frac{\lambda_\phi\lambda_\sigma\eta^4}{m_\sigma^2}\tilde{w}, \quad (81)$$

avec la contrainte, nécessaire à l'existence même d'un courant et à la stabilité de la configuration

$$-\alpha_3 \le \tilde{w} \le 2\alpha_2 - \alpha_3, \quad (82)$$

le membre de droite de ces inégalités étant défini positif en vertu de (75).

Par la suite, on va vouloir considérer tout défaut topologique comme infiniment fin de sorte à ne plus devoir prendre en compte directement les degrés de liberté internes. Dans cet esprit, on définit des quantités intégrées autour du défaut. Pour le mur, on a le courant

$$\mathcal{C} \equiv 2\int dz \sqrt{|J_\mu J^\mu|} \quad (83)$$

représenté sur la figure 10 en fonction du paramètre d'état linéarisé[13]

$$\nu \equiv \mathrm{Sign}(\tilde{w})\sqrt{|\tilde{w}|}, \quad (84)$$

pour un ensemble représentatif des paramètres $\{\alpha_i\}$

Pour connaître finalement toutes les variables macroscopiques, il faut encore intégrer le tenseur énergie-impulsion

$$T^{\mu\nu} = -2g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\alpha\beta}} + g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (85)$$

qui doit être diagonalisé pour en faire ressortir l'énergie par unité de surface et la tension. Ces deux dernières sont représentées sur la figure 11.

[12] De plus, le monopôle formant une structure unidimensionnelle, les énergies correspondantes au condensat sont nécessairement quantifiées (états liés), ce qui modifie considérablement le problème.

[13] Ce paramètre permet une compréhension plus aisée des figures puisque, dans le cas $w < 0$, il existe un référentiel dans lequel $\nu \propto \omega$, c'est l'énergie du porteur de charge, et si $w > 0$, on peut se placer dans le cas où $\nu \propto k$, son impulsion.

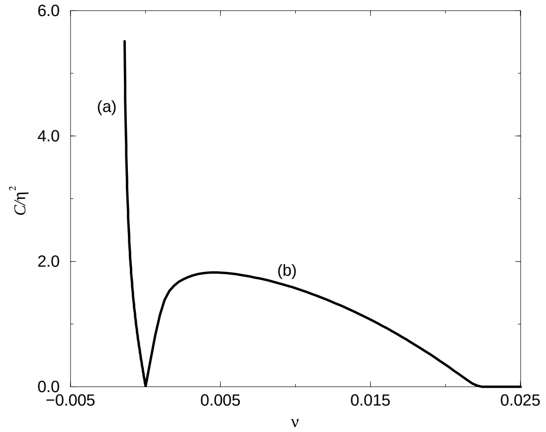


FIG. 10. Variation de l'amplitude du courant de surface (intégré) dans un mur de domaine avec le paramètre d'état, ($a$) pour le régime électrique, et ($b$) pour le régime magnétique. Extrait de [34].

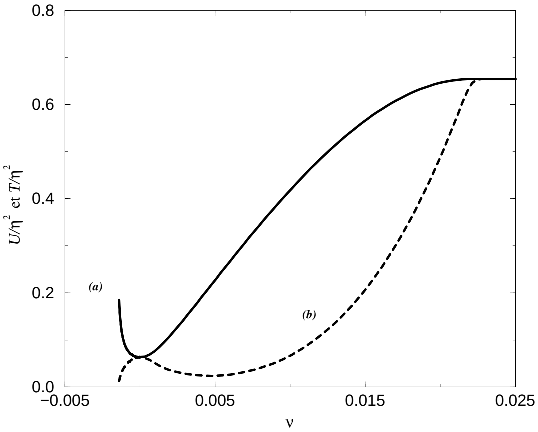


FIG. 11. Variation de l'énergie par unité de surface et de la tension (intégrées) dans un mur de domaine en fonction du paramètre d'état, ($a$) pour un courant de genre temps, et ($b$) pour un courant de genre espace. Extrait de [34].

Ces courbes montrent ce qui est générique aux défauts topologiques, à savoir les effets de saturation et de seuil de fréquence. Le premier effet, sur lequel aucune étude analytique n'est malheureusement possible, reflète l'existence d'un courant de genre espace maximum au delà duquel le défaut devient instable vis–à–vis de l'émission de porteurs de charge. Il est apparent sur les figures 10 et 11 comme l'endroit où le courant, du côté ($b$) des courbes, passe par un maximum en fonction du paramètre d'état, lorsque dans le même temps la tension est minimum (mais positive, nous y reviendrons). Le deuxième effet, visible sous la forme d'une divergence du courant sur la figure 10 et d'une annulation de la tension sur la figure 11 ($a$) peut se montrer de la manière suivante, indépendante de la dimension du défaut.

Si $d$ est le nombre de dimensions spatiales du défaut ($d = 2$ pour un mur, $d = 1$ pour une corde), l'équation d'Euler-Lagrange que doit satisfaire $\sigma$ asymptotiquement (loin du défaut) est de la forme

$$\Delta_{3-d}\sigma \sim (w + m_\sigma^2)\sigma, \tag{86}$$

où $\Delta_{3-d}$ représente le Laplacien en $3 - d$ dimensions, autrement dit $d^2/dr^2 + \frac{2-d}{r} d/dr$ avec $r$ une variable "radiale" (la coordonnée $z$ dans le cas du mur). La solution en terme de fonctions de Bessel est connue et permet de déduire, en la reportant dans la définition du courant, le comportement dominant de celui-ci. On trouve

$$\mathcal{C} \propto (w + m_\sigma^2)^{\frac{d-3}{2}}, \tag{87}$$

et donc une divergence du courant lorsque $w \to -m_\sigma^2$.

Ces mécanismes ayant été clarifiés dans le cas des murs, on peut maintenant aborder l'étude des cordes pour laquelle une grande partie de ce qui a été dit ici reste valable.

### B. Cordes cosmiques.

La structure interne d'une corde cosmique parcourue par un courant s'obtient de la même manière que pour les murs, en intégrant le courant conservé orthogonalement à la corde et le tenseur énergie-impulsion dûment diagonalisé. Pour ce faire, on considère la corde comme alignée sur l'axe $z$, et on travaille en coordonnnées cylindriques. Dans ces hypothèses, la solution est choisie comme [35–38]

$$\Phi = \varphi(r)\mathrm{e}^{in\theta}, \quad \Sigma = \sigma(r)\exp[i(kz - \omega t)] = \sigma \mathrm{e}^{i\psi}, \tag{88}$$

et les champs de jauge se mettent sous la forme

$$Q(r) = n + qB_\theta(r), \tag{89}$$

toutes les autres composantes de $B_\mu$ s'annulant, et

$$wP(r) = P_z^2(r) - P_t^2(r), \quad P_a \equiv \partial\psi - eA_a, \tag{90}$$

c'est–à–dire qu'on a renormalisé le champ électromagnétique avec le paramètre d'état.

La forme générale des champs obtenus numériquement est illustrée sur les figures 12 et 13 dans les cas respectifs de la limite neutre où $e = 0$ et en tenant compte des corrections électromagnétiques. On y constate en particulier que l'introduction de la constante de couplage électromagnétique conduit à une divergence logarithmique du champ correspondant, ce qui est attendu compte tenu du fait qu'on étudie une corde infiniment longue.

La structure générale d'une corde est clairement indiquée sur ces figures. En fait, on peut définir deux régions: la première, le cœur de la corde proprement dit, se limite à la distance sur laquelle les champs $X$, $Q$ et $Y$ diffèrent sensiblement de leurs valeurs asymptotiques;

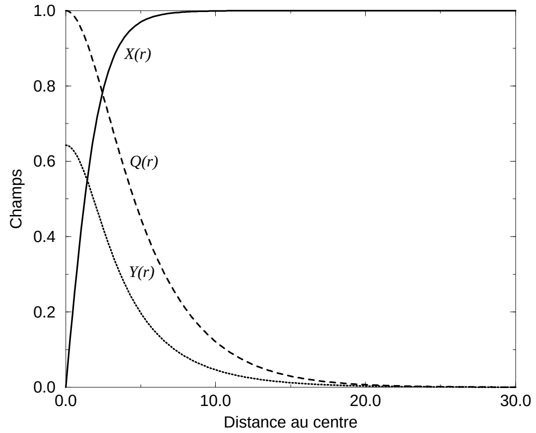


FIG. 12. Structure au voisinage de la corde cosmique. Le champ de Higgs $[X(r)]$ est en trait plein, celui du porteur de charge $[Y(r)]$ en tiretés et le champ de jauge correspondant à $B_\mu$ $[Q(r)]$ en pointillés. Cette figure a été calculée dans la limite neutre où $e = 0$. Extrait de [37].

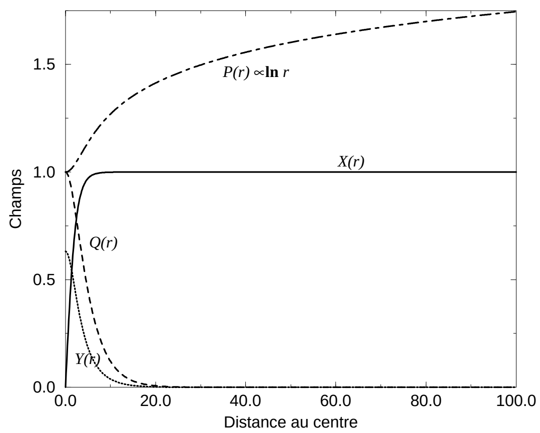


FIG. 13. Structure au voisinage de la corde cosmique. Le champ de Higgs $[X(r)]$ est en trait plein, celui du porteur de charge $[Y(r)]$ en tiretés, le champ de jauge correspondant à $B_\mu$ $[Q(r)]$ en pointillés, et finalement le champ électromagnétique est en tiretés-pointés. On peut constater la divergence (attendue) logarithmique du champ électromagnétique. Extrait de [38].

il n'y a que celle-ci dans la limite neutre. Cette région peut être encore en principe partagée en deux, compte-tenu du fait que $X$ et $Q$ sont principalement condensés sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde Compton du champs de Higgs $\sim \lambda^{-1/2}\eta^{-1}$, alors que le porteur de charge n'est, quant à lui, présent significativement que sur sa propre longueur d'onde Compton $m_\sigma^{-1}$. La deuxième région, que l'on peut qualifier de vide autour de la corde, est celle dans laquelle domine le champ électromagnétique et sa divergence logarithmique. Elle correspond bien en effet à ce qu'on qualifierait d'extérieur autour d'un fil électrique.

Les figures 14 et 15 sont le pendant des figures équivalentes 10 et 11 montrant respectivement l'amplitude du courant et l'équation d'état (énergie par unité de longueur et tension) en fonction du paramètre d'état. Les résultats sont très ressemblants avec ceux des murs. Il y a toutefois quelques informations supplémentaires sur ces figures. Tout d'abord, on a ici calculé l'influence de la constante de couplage électromagnétique sur la structure. Comme on peut le voir, tant qu'on se restreint à la dynamique générale de la corde, cette influence est totalement négligeable, d'autant plus qu'il s'agit sur ces figures d'une exagération du phénomène. Ceci est surtout vrai dans le cas de courants de genre espaces ($\nu > 0$ sur les figures), mais aussi dans une large mesure pour des courants modérés de genre temps. En fait, la divergence du courant due à l'effet de seuil de fréquence est de la même nature selon qu'on considère le couplage électromagnétique ou non, mais le seuil, au lieu d'être simplement fixé à $w = -m_\sigma^2$, est décalé vers des plus petites valeurs de $w$ (en valeur absolue). Dans la limite où $e \to \infty$, on s'attend à ne pas avoir de régime électrique possible.

Plusieurs points de clarification concernant l'équation d'état s'imposent à ce stade. Tout d'abord concernant le régime magnétique pour lequel, contrairement à ce qui avait été supposé initialement [36], il ne semble pas possible de rendre la tension négative; c'est ce qu'on a appelé la "No-Spring Conjecture" [39]. Bien sur, il ne s'agit que d'un résultat numérique, et donc non prouvé à l'heure actuelle, mais on a pu voir que les travaux précédents qui affirmaient avoir obtenu de tels états en fait prenaient en compte le champ électromagnétique extérieur. Ce faisant, au lieu de calculer un effet local, ils regardaient effectivement des configurations circulaires stationnaires soutenues statiquement par un courant. En réalité, de telles configurations n'existent que pour des rayons gigantesques [39] étant donnée la faiblesse de l'interaction magnétique, et représentent donc des cas négligeables à un niveau cosmologique. Cela dit, d'autres configurations d'équilibre existent, appelées vortons, qui utilisent la force centrifuge pour compenser la tension; ils tournent en fait à une vitesse $v^2_{\mathrm{rotation}} = T/U$. Les interactions électromagnétiques ne font que modifier cette relation et conduisent à [40]

$$v^2_{\mathrm{rotation}} \frac{T - I^2 \ln(8R/r_\sigma)}{U + I^2 \ln(8R/r_\sigma)}, \tag{91}$$

dans laquelle $I = e\mathcal{C}$ est le courant électromagnétique, et $R$ le rayon de la configuration circulaire en question.

La divergence due au seuil de fréquence donnée par la relation (87) permet en fait de calculer analytiquement une approximation, dont on verra qu'elle est particulièrement excellente, pour l'équation d'état. Pour ce faire, il est nécessaire d'établir le formalisme macroscopique qui permet de se passer de la connaissance de la structure interne dès que les quan-

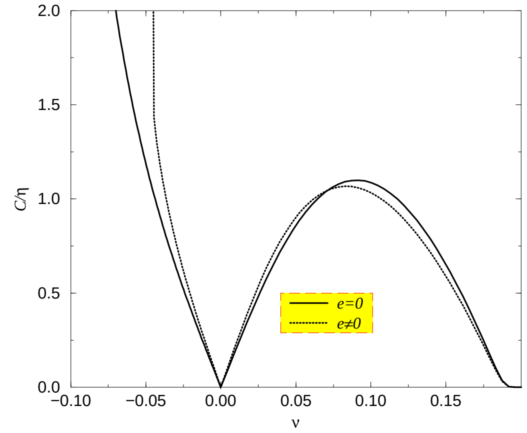


FIG. 14. Variation de l'amplitude du courant (intégré) le long d'une corde cosmique avec le paramètre d'état. En trait plein le courant dans la limite neutre, la courbe en pointillés montrant les corrections électromagnétiques pour des valeurs des paramètres très fortement exagérées de sorte à pouvoir constater l'effet sinon invisible pour des valeurs physiquement raisonnables des paramètres, du moins pour les courants de genre espace ou modérément de genre temps. Extrait de [38].

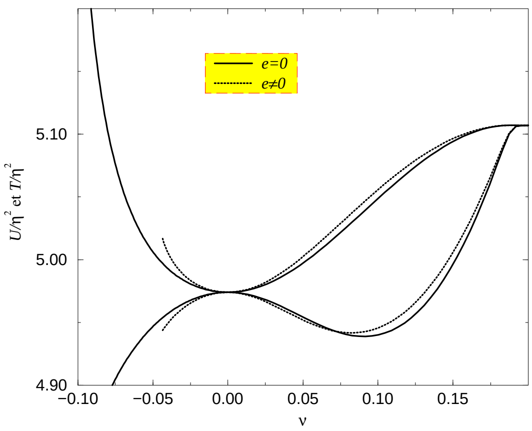


FIG. 15. Variation de l'énergie par unité de longueur et de la tension (intégrées) le long d'une corde cosmique en fonction du paramètre d'état. La même remarque que sur la figure 14 s'applique concernant les corrections électromagnétiques indiquées en pointillés. Extrait de [38].

tités intégrées qu'on vient de calculer sont connues pour déduire les conséquences possibles observables des défauts topologiques étendus.

## II. FORMALISME MACROSCOPIQUE.

Dans cette section, comme dans la suite, on se restreindra aux cordes cosmiques parcourues par des courants [30], sachant que tout ce qui suit est également applicable, à de légères modifications près, aux murs de domaines. Dans le cas qui nous intéresse, on considère que la dynamique de l'objet est décrite par une fonction Lagrangienne, qui contient toute l'information sur les degrés de liberté internes intégrés comme décrit plus haut. Dans le cas où la corde n'a pas de structure, c'est–à–dire pas de courant, cette fonction Lagrangienne est simplement une constante, et l'action dont la dynamique résulte est prise comme la surface balayée par la corde; c'est l'action de Goto-Nambu. Voyons maintenant le formalisme en lui-même avant d'aborder les différents cas d'équations d'état connus analytiquement.

### A. Fonction maîtresse et Lagrangien.

Quand un courant parcourt la corde, il y a une nouvelle variable dynamique qui peut être prise comme un champ scalaire $\varphi$ n'existant que dans la corde. Ca sera par exemple la phase du porteur de charge. Le gradient de cette phase permet de définir le paramètre d'état, indépendamment de la microphysique, $w \propto \partial_a\varphi\partial^a\varphi$, la contraction se faisant via la métrique induite sur la corde [21]

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} x^\mu_{\ ,a} x^\nu_{\ ,b} \ , \tag{92}$$

où $x^\mu(\xi_a)$ représente les coordonnées d'un point de la corde en question, et $\xi_a$ les coordonnées intrinsèques dans la corde[14]. Comme on l'a vu, la connaissance du paramètre d'état est suffisante pour connaître l'énergie par unité de longueur et la tension, qui sont les valeurs propres du tenseur énergie-impulsion. Autrement dit, toute la dynamique est contenue dans cette simple variable scalaire $w$. Il ne reste donc plus qu'à obtenir une fonction Lagrangienne $\mathcal{L}\{w\}$ pour calculer l'évolution d'une corde.

Il existe aussi une formulation, duale de la première [30,32], dans laquelle on utilise une fonction maîtresse $\Lambda\{\chi\}$, où $\chi$ est l'analogue du paramètre d'état, c'est–à–dire le carré du gradient d'un champ scalaire $\psi$, orthogonal à celui de $\varphi$ :

$$\gamma^{ab}\varphi_{|a}\psi_{|b} = 0, \tag{93}$$

relation dans laquelle on a pris en compte la potentielle interaction électromagnétique par l'intermédaire d'une différentiation covariante

$$\varphi_{|a} \equiv \partial_a\varphi - eA_\mu x^\mu_a = \varphi_{,a} - eA_a. \tag{94}$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir précisément les paramètres $w$ et $\chi$ par

[14] On choisit usuellement $\xi^1 = \sigma$ et $\xi^0 = \tau$ comme coordonnées respectivement de genre espace et temps le long de la corde.

$$\chi = \tilde{\kappa}_0 \gamma^{ab} \psi_{|a} \psi_{|b} \quad \longleftrightarrow \quad w = \kappa_0 \gamma^{ab} \varphi_{|a} \varphi_{|b} \ , \tag{95}$$

relations dans lesquelles les coefficients $\kappa_0$ et $\tilde{\kappa}_0$, respectivement positifs et négatifs permettent de respecter la normalisation des paramètres d'état en fonction des paramètres microscopiques sous-jacents du modèle. Les relations (93) et (95) montrent que si le courant défini par $\varphi$ est de genre espace, alors celui défini par $\psi$ est de genre temps, et vice versa. On voit déjà ici que la dualité peut intervenir sous la forme d'un échange entre les descriptions de courants de genres différents. En fait, comme on le verra par la suite, les fonctions $\mathcal{L}$ et $\Lambda$ représentent l'énergie par unité de longueur et la tension, comme il est résumé dans le tableau I ci-dessous.

### Equations d'état dans les deux régimes

| régime | $U$ | $T$ | $\chi$ et $w$ | courant |
|---|---|---|---|---|
| électrique | $-\Lambda$ | $-\mathcal{L}$ | $< 0$ | genre temps |
| magnétique | $-\mathcal{L}$ | $-\Lambda$ | $> 0$ | genre espace |

TABLE I. Valeurs de l'énergie par unité de longueur $U$ et de la tension $T$ en fonction de ce que le courant est de genre espace ou temps. Adapté de [32].

Les deux fonctions préalablement définies ne dépendant que des carrés des gradients des champs scalaires induits, on voit immédiatement qu'il existe deux courants de Noether conservés, à savoir

$$n^a = -\frac{\partial \Lambda}{\partial \psi_{|a}} \quad \longleftrightarrow \quad z^a = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{|a}} \ , \tag{96}$$

ce qui donne

$$\mathcal{K}^{-1} n^a = -\tilde{\kappa}_0 \psi^{|a} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\mathcal{K}}^{-1} z^a = -\kappa_0 \varphi^{|a} \ , \tag{97}$$

où $\mathcal{K}$ et $\tilde{\mathcal{K}}$ s'écrivent sous la forme

$$\tilde{\mathcal{K}}^{-1} = -2\frac{d\Lambda}{d\chi} \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{K}^{-1} = -2\frac{d\mathcal{L}}{dw}, \tag{98}$$

l'équivalence des deux formulations démontrée plus bas reliant ces deux fonctions par la relation

$$\tilde{\mathcal{K}} = -\mathcal{K}^{-1}. \tag{99}$$

Conséquemment, nous n'utiliserons qu'une seule de ces fonctions, $\mathcal{K}$.

Si on introduit à ce point la mesure antisymétrique sur la surface $\epsilon^{ab}$ de carré $\gamma$ ($\epsilon_{ab}\epsilon^{b}{}_{c} = \gamma_{ac}$), on en déduit

$$\varphi_{|a} = \mathcal{K}\frac{\sqrt{-\tilde{\kappa}_0}}{\sqrt{\kappa_0}} \epsilon_{ab} \psi^{|b} \ , \tag{100}$$

ce qui donne par suite

$$w = \mathcal{K}^2 \chi. \tag{101}$$

La fonction maîtresse et le Lagrangien sont reliés par une transformation de Legendre

$$\Lambda = \mathcal{L} + \mathcal{K}\chi \ . \tag{102}$$

L'équivalence entre les deux formulations se montre facilement en variant les actions de surface respectives, i.e.,

$$\mathcal{S}_\Lambda = \int d\sigma\, d\tau \sqrt{-\gamma}\, \Lambda\{\chi\}, \tag{103}$$

et

$$\mathcal{S}_\mathcal{L} = \int d\sigma\, d\tau \sqrt{-\gamma}\, \mathcal{L}\{w\}, \tag{104}$$

avec $\gamma \equiv \det\{\gamma_{ab}\}$. Les tenseurs énergie-impulsion de ces théories se déduisent des relations

$$\hat{T}^{\mu\nu}_\Lambda \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_\Lambda}{\delta g_{\mu\nu}} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Lambda)}{\partial g_{\mu\nu}}, \tag{105}$$

et

$$\hat{T}^{\mu\nu}_\mathcal{L} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}. \tag{106}$$

qui peuvent se mettre sous la forme standard d'une intégrale sur la corde elle-même,

$$\sqrt{-g}\,\hat{T}^{\mu\nu} = \int d\sigma\, d\tau \sqrt{-\gamma}\, \delta^{(4)} \left[x^\rho - x^\rho\{\sigma,\tau\}\right] \overline{T}^{\mu\nu} \tag{107}$$

les tenseurs de surface pouvant s'écrire

$$\overline{T}^{\mu\nu}_\Lambda = \Lambda \eta^{\mu\nu} + \mathcal{K}^{-1} \omega^\mu \omega^\nu \quad \longleftrightarrow \quad \overline{T}^{\mu\nu}_\mathcal{L} = \mathcal{L}\eta^{\mu\nu} + \mathcal{K} c^\mu c^\nu \ , \tag{108}$$

équations dans lesquelles on a utilisé le premier tenseur fondamental de la surface

$$\eta^{\mu\nu} = \gamma^{ab} x^\mu_{,a} x^\nu_{,b} \ . \tag{109}$$

et les deux vecteurs de flux renormalisés

$$n^\mu = \sqrt{-\tilde{\kappa}_0}\, \omega^\mu \quad \longleftrightarrow \quad z^\mu = \sqrt{\kappa_0}\, c^\mu \ . \tag{110}$$

On voit ici la justification du fait que $\Lambda$ et $\mathcal{L}$ sont bien les valeurs propres du tenseur énergie-impulsion comme indiqué sur le tableau I.

Si maintenant on insère les équations (110) dans (108) et qu'on utilise (99), (101) et (102), on constate que les deux tenseurs coïncident. Ceci achève de prouver l'équivalence entre les deux formulations puisque les équations du mouvement de la corde déduites des actions de surface se ramènent dans les deux cas à

$$\eta^\rho_\mu \nabla_\rho \overline{T}^{\mu\nu} = 0, \quad (111)$$

dans la mesure où on ne s'occupe pas des corrections électromagnétiques. Dans le cas contraire, on peut ramener les équations du mouvement à une forme simplifiée en posant

$$K_{\mu\nu}{}^\rho \equiv \eta^\tau_\mu \eta^\sigma_\nu \nabla_\tau \eta^\rho_\sigma \quad (112)$$

appelé second tenseur fondamental de la corde, et en définissant le projecteur orthogonal à la surface $\perp^\rho_\mu = g^\rho_\mu - \eta^\rho_\mu$. Alors, avec $F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}A_{\nu]}$ et les couplages habituels, les équations s'écrivent

$$\overline{T}^{\mu\nu} K_{\mu\nu}{}^\rho = \perp^{\rho\mu} F_{\mu\nu} j^\nu, \quad (113)$$

avec $j^\mu$ le courant électromagnétique le long de la corde, à savoir explicitement

$$j^\mu = rec^\mu \equiv qc^\mu, \quad (114)$$

pour un courant constitué de particules de charge $r$ (en unité de la charge élementaire $e$). C'est avec (113) qu'on calcule les propriétés des configurations stationnaires dans lesquelles le courant électrique est important.

Passons maintenant au cas spécifique des boucles de corde cosmique. Celles-ci sont particularisées par deux nombres entiers conservés $N$ et $Z$ provenant des deux courants (97). Explicitement, on a

$$\left(\sqrt{-\gamma}\, n^a\right)_{,a} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \left(\sqrt{-\gamma}\, z^a\right)_{,a} = 0\ . \quad (115)$$

ce qui, intégré sur toute la boucle, et en vertu du théorème de Green, produit

$$N = \oint d\sigma^a \epsilon_{ab} n^b \quad \longleftrightarrow \quad Z = \oint d\sigma^a \epsilon_{ab} z^b\ . \quad (116)$$

Il est facile de voir qu'il s'agit là de nombres entiers car ces deux intégrales le sont en fait sur les deux phases $\varphi$ et $\psi$

$$\begin{aligned} 2\pi Z = \oint d\psi \ &= \oint d\sigma^a \psi_{,a} \\ &\longleftrightarrow \\ 2\pi N \ &= \oint d\varphi = \oint d\sigma^a \varphi_{,a}\ . \end{aligned} \quad (117)$$

Toujours en unités de la charge élémentaire $e$, la charge totale de la boucle sera $Q = Ze$. Par ailleurs, le moment angulaire $J$ s'avère valoir $J = ZN$.

Enfin, la contribution électromagnétique de la corde sur elle-même peut s'évaluer et on trouve [41]

$$A^\mu\Big|_{\text{corde}} = \lambda j^\mu = \lambda q c^\mu, \quad (118)$$

avec

$$\lambda = 2\ln(m_\sigma \Delta), \quad (119)$$

où $\Delta$ est une limite infrarouge qui vient compenser la divergence logarithmique du potentiel électromagnétique, en fait au maximum la longueur de la boucle, et $m_\sigma$, masse du porteur de charge, représente une limite ultraviolette qui reflète l'épaisseur effectivement finie de la corde. Du fait du comportement seulement logarithmique de $\lambda$ avec la taille de la corde, on peut dans les situations pratiques le considérer comme constant. On peut aussi voir que cette contribution peut être prise en compte simplement dans le formalisme dual car elle revient à effectuer le remplacement

$$\Lambda \to \Lambda + \frac{1}{2}\lambda q^2 \chi, \quad (120)$$

opération qui n'est aisée que dans la formulation en fonction maîtresse puisqu'il n'est pas toujours possible d'inverser cette relation pour en déduire le Lagrangien.

Ceci complète le formalisme macroscopique nécessaire à l'étude des cordes en tant qu'objets infiniment fins. Il ne reste donc plus qu'à connaître l'équation d'état.

### B. Equation d'état.

La structure interne d'une corde cosmique n'a pu être obtenue que numériquement, ce du fait des non linéarités des équations de champs qui en interdisent une résolution analytique. Comme on l'a vu, le cas le plus simple, sans courant, conduit évidemment à l'action de Goto-Nambu, qui est caractérisé dans le formalisme précédemment développé par [42]

$$\mathcal{L}_{\text{Goto-Nambu}}(w) = \Lambda_{\text{Goto-Nambu}}(\chi) = -m^2, \quad (121)$$

et l'action est alors juste proportionnelle à la surface de la corde.

La première possibilité à laquelle on peut penser lorsqu'on veut étendre la dynamique à celle des courants consiste à regarder la limite des faibles courants [43]. Alors, on imagine (à tort d'ailleurs) qu'il suffit de corriger l'action de Goto-Nambu avec un terme linéaire, ce qui conduit au modèle auto dual

$$\mathcal{L}_{\text{linéaire}} = -m^2 - \frac{w}{2} \Longleftrightarrow \Lambda_{\text{linéaire}} = -m^2 - \frac{\chi}{2}. \quad (122)$$

Malheureusement, ce modèle, pour attrayant qu'il soit dans sa simplicité et sa caractéristique d'auto dualité, ne peut pas décrire une corde dont la microphysique est donnée par les modèles étudiés jusqu'à présent. Cela est du à la raison suivante.

Les perturbations qui se propagent le long des cordes ayant une structure interne peuvent être de deux types, longitudinal (comme des ondes sonores résultantes des variations locales de tension) et transverses (modification extrinsèques de la forme de la surface dans l'espace-temps). Ces deux types de perturbations ont comme vitesses respectives [30]

$$c^2_{\scriptscriptstyle L} = -\frac{dT}{dU}, \qquad \text{et } c^2_{\scriptscriptstyle T} = \frac{T}{U}. \quad (123)$$

Ces deux vitesses ne sont évidemment pas définies dans le cadre de Goto-Nambu, mais le deviennent pour n'importe quel autre modèle. La caractéristique principale des modèles microscopiques est qu'ils produisent de façon systématique des équations d'état satisfaisant [37,38]

$$c_L\Big|_{\text{Numérique}} < c_T\Big|_{\text{Numérique}}, \tag{124}$$

ce qui n'est pas le cas de l'approximation linéaire pour laquelle $c_L = 1$ et $c_T < 1$.

Dans l'idée d'auto dualité, on peut aussi considérer une amélioration du premier cas en considérant [44]

$$\mathcal{L}_{\text{KK}} = -m\sqrt{m^2+w} \iff \Lambda_{\text{KK}} = -m\sqrt{m^2+\chi}, \tag{125}$$

modèle artificiel qui provient d'une projection de type Kaluza-Klein, cette fois-ci muni de la propriété que les deux vitesses des perturbations sont égales (et inférieures à l'unité). Alors qu'on pourrait penser que ce deuxième modèle peut être approximé par le premier dans la limite des faibles courants, cette simple constatation sur la propagation des perturbations montre que cela ne peut être le cas, même dans cette limite.

En fait, il faut réaliser que pour traiter correctement le cas d'une structure interne, aucun des modèles précédents ne peut satisfaire le besoin d'un paramètre de masse supplémentaire, $m_\star$, identifiable à la masse du porteur de charge. Celle-ci en effet joue un grand rôle tant dans les phénomènes de saturation de courant que de seuil de fréquence. La plus basse approximation à laquelle on peut donc penser, pour des courants de petite amplitude, devra donc prendre la forme

$$\mathcal{L}_{\text{ampl.}\ll 1} = -m^2 - \frac{w}{2} + \frac{w^2}{4m_\star^2}, \tag{126}$$

afin que les vitesses soient en accord avec les calculs numériques, ce qui sera le cas si $m_\star < m$, une condition d'ailleurs applicable aussi dans le cadre microscopique [cf. équation (75)]. Il faut noter ici que, du coup, la propriété d'auto dualité doit être perdue pour décrire un système physiquement réaliste.

Bien évidemment, ce modèle ne permet pas de rendre compte des effets non linéaires tels que la saturation qu'il est nécessaire d'introduire explicitement. Le plus simple consiste à postuler un Lagrangien du type [45]

$$\mathcal{L}_{\text{rationnel}} = -m^2 - \frac{w}{2}\left(1+\frac{w}{m_\star^2}\right)^{-1}, \tag{127}$$

pour lequel l'équation d'état est montrée en trait plein sur les figures 16 et 17. On constate en fait que l'introduction de cette saturation artificiellement conduit non seulement à une excellente approximation, particulièrement dans la région où le courant est de genre espace, mais de plus produit explicitement une divergence pour les courants de genre temps. Cette divergence ne correspond pas exactement à celle attendue, mais cela peut se corriger en introduisant à la place un modèle logarithmique

$$\mathcal{L}_{\text{logarithme}} = -m^2 - \frac{m_\star^2}{2}\ln\left\{1+\frac{w}{m_\star^2}\right\}, \tag{128}$$

qui possède là encore toutes les caractéristiques requises. Ce modèle est montré en traits tiretés sur les figures.

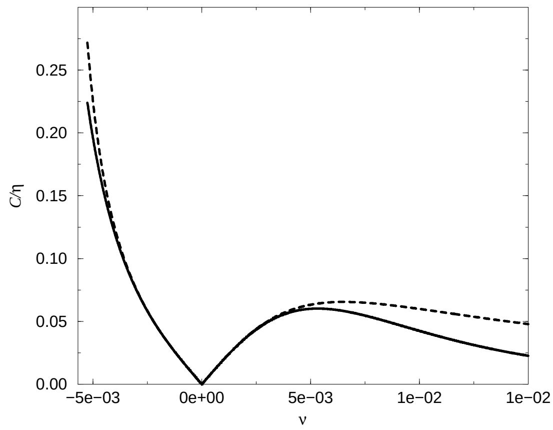


FIG. 16. Le courant dans les modèles analytiques satisfaisant les contraintes microscopiques. En traits plein, le modèle rationnel (127) et en tiretés le modèle logarithmique (128). Comparer avec la figure 14.

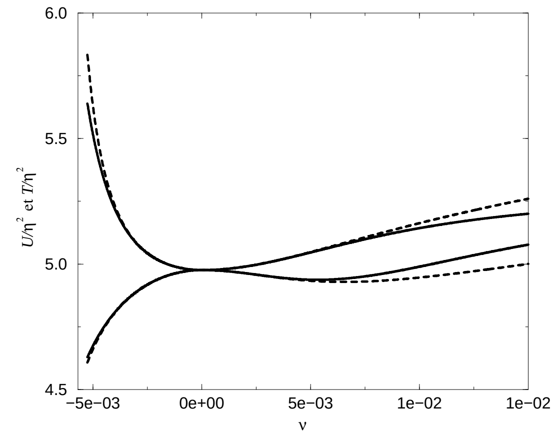


FIG. 17. L'équation d'état correspondante aux modèles analytiques. La nomenclature est la même que sur la figure 16. La comparaison avec la figure 15 montre que ces approximations sont excellentes.

En conclusion, pour étudier analytiquement une corde, il convient d'utiliser préférentiellement le modèle rationnel (127) pour le régime magnétique et le modèle logarithmique (128) pour le régime électrique. Ce dernier, en fait, représente aussi une très bonne approximation sur l'ensemble des états, et en plus conduit à des équations solubles analytiquement dans certains cas.

Un exemple est donné par l'étude des boucles circulaires. Pour ce type de situation en effet, on peut voir que les équations du mouvement d'un anneau non couplé au champ électromagnétique se ramène à celle d'une particule plongée dans un potentiel: si $r$ est le rayon de l'anneau, alors on trouve [46]

$$M^2\dot{r}^2 = M^2 - \Upsilon^2, \tag{129}$$

$M$ étant la masse totale de l'anneau, et le potentiel $\Upsilon$ ne dépendant que de $r$, et ce d'une manière connue par la fonction $\mathcal{L}$, et d'allure indiquée sur la figure 18. Plusieurs cas sont ici visibles: soit le potentiel est défini pour toutes les valeurs du rayon, et auquel cas il possède un minimum absolu entouré de deux divergences autour de $r \to 0$ et $r \to \infty$, ce qui signifie qu'un tel anneau fini toujours par aboutir à ce minimum, formant ce qu'on appelle un vorton. Sinon, quoi que la divergence à l'infini soit toujours présente, ce qui reflète simplement qu'il faut une quantité infinie d'énergie pour étirer la boucle infiniment (confinement), deux cas de figure peuvent se produire. Soit il existe un minimum, et alors l'évolution vers cet état dépend de la valeur de la masse totale: le potentiel est limité à une valeur critique du rayon, ce point correspondant à une certaine énergie. Si la masse de l'anneau excède cette énergie, il sera instable, sinon, il peut atteindre l'état d'équilibre (ce qui n'implique rien sur la stabilité de celui-ci). Dans le dernier cas où il n'existe pas de minimum, alors il n'y a pas d'état déquilibre, et la boucle est instable.

Les premières perturbations électromagnétiques ne modifient pas cette structure générale, mais changent seulement les valeurs des paramètres produisant telle ou telle situation [32]. C'est en fait ce qui est montré sur la figure 18 où la valeur de $\lambda q^2$ a été variée à partir d'une configuration ayant un état d'équilibre quelle que soit la masse. On peut voir que ces corrections ont tendance à déstabiliser l'anneau.

Il est maintenant temps de passer aux conséquences observationnelles et expérimentales des cordes, ce qui est fait dans la suite.

## III. OBSERVABILITÉ.

Le principe même d'étudier les défauts topologiques étendus consiste à espérer déduire de leurs propriétés des conséquences observables, généralement cosmologiques et grâce auxquelles il nous serait permis d'accéder à une connaissance de la physique à des énergies sinon hors de notre portée. Pour ce faire, on peut utiliser précisément l'énormité des énergies mises en jeu, parce qu'elles permettent de produire soit des effets gravitationnels, soit des particules hautement énergétiques, toutes choses observables. Nous commencerons par voir les potentielles conséquences dues au champ de gravitation autour d'une corde, puis nous verrons comment il est possible que des cordes aient déjà été observées, ce qui devrait être confirmé ou infirmé dans un futur proche.

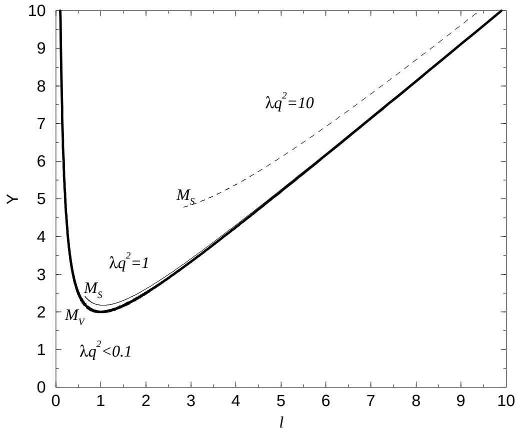


FIG. 18. Le potentiel dans lequel évolue une boucle circulaire en fonction de sa longueur $\ell = 2\pi r$. Les courbes montrent tous les cas de figures possibles dépendants des valeurs des paramètres sous-jacents à l'anneau, c'est–à–dire ses nombres quantiques $N$ et $Z$, et la correction électromagnétique $\lambda q^2$. Extrait de [32].

### A. Effets gravitationnels.

La métrique autour d'une corde sans structure est cônique, c'est–à–dire plate avec un angle manquant. Autrement dit, elle s'écrit [47]

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + dz^2 + r^2 d\tilde{\theta}^2, \quad 0 \leq \tilde{\theta} \leq 2\pi(1-4GU), \tag{130}$$

où on voit que la variable angulaire est restreinte à un domaine de variation limité. Ceci implique qu'après un tour incomplet autour de la corde, on doit identifier les points, formant ainsi des cônes. Cela est illustré sur la figure 19 sur laquelle on voit comment il pourrait être possible de voir une corde par ses effets gravitationnels: si une source en $Q$ emet de la lumière derrière une corde, elle formera une image double $(O_1, O_2)$ du fait de la déflection des rayons lumineux. Ce fait est plus ou moins inchangé lorsque la corde possède une structure, à ceci près que la métrique devient dans ce cas celle de Kasner [48]

$$ds^2 = -\left(\frac{R}{r_\sigma}\right)^{2\alpha} dt^2 + dR^2 + \left(\frac{R}{r_\sigma}\right)^{2\beta} dz^2 + \gamma R^2 \left(\frac{R}{r_\sigma}\right)^{2\delta} d\theta^2, \tag{131}$$

avec $\alpha+\beta+\delta = \alpha^2+\beta^2+\delta^2 = 1$, et les paramètres sont obtenus par la gravitation linéarisée au premier ordre dans la constante de Newton $G$. On trouve $\alpha = -\beta = 2G(U-T) + \mathcal{O}(G^2)$, $\delta = \mathcal{O}(G^2)$ et $\gamma = 1 - 4G(U+T)$. Ce dernier paramètre redonne bien l'angle manquant du cas sans structure si on pose $U = T$. Ici, $r_\sigma$ donne une mesure de l'épaisseur de la corde, dans les cas pratiques la longueur d'onde Compton du porteur de charge.

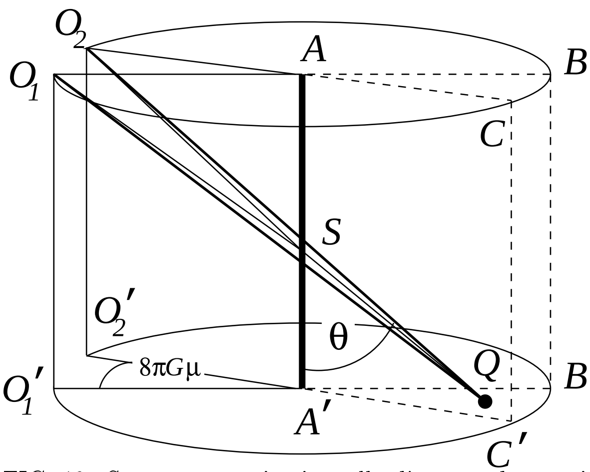


FIG. 19. Structure gravitationnelle d'une corde cosmique. Les couples de points $(O_1,O_2)$ et $(O_1',O_2')$ sont identifiés. Une source en $Q$ sera donc vue comme un image double après être passée près de la corde $(A,A')$. Extrait de [20].

La déflection angulaire s'avère indépendante de l'équation d'état tant que la corde n'est pas couplée avec le champ électromagnétique, du moins au premier ordre en $G$. En effet on trouve

$$\Delta\theta = 4\pi GU + \mathcal{O}[G^2\ln(D/r_\sigma)], \qquad (132)$$

où $D$ est le paramètre d'impact entre le rayon lumineux incident et la corde.

Dans le cas d'un couplage avec le champ électromagnétique, cette dernière relation est modifiée et on trouve, en notant $I = e\mathcal{C}$ l'amplitude du courant [49]

$$^{M}\Delta\theta = 4\pi G\Big[U + I^2\big(\frac{3}{2} + \ln 2D/r_\sigma\big)\Big] + \mathcal{O}(G^2), \quad (133)$$

dans le cas d'un courant de genre espace (régime magnétique), et

$$^{E}\Delta\theta = 4\pi G\Big[U - I^2\big(\frac{3}{2} - \ln 2D/r_\sigma\big)\Big] + \mathcal{O}(G^2), \quad (134)$$

pour un courant de genre temps (régime électrique). Ces corrections, d'ordre $e^2$ sont généralement négligeables et ne conduisent pas à des effets différents qui pourraient permettre de distinguer une corde sans courant d'une corde avec courant.

Il existe cependant un moyen d'identifier de façon certaine une corde parcourue par un courant. C'est dans le cas où sur une fraction de la corde, il existe un courant variable de genre lumière [50]. Pour connaître d'abord la métrique autour d'une telle corde, il convient de prendre le cas d'un courant de genre espace, puis effectuer une transformation de Lorentz jusqu'à la vitesse de la lumière. Cette procédure est en général singulière mais il existe une limite dans laquelle toutes les variables d'intérêt restent finies. Introduisant les coordonnées nulles $u = t - z$ et $v = t + z$, on trouve une métrique de la forme (connue sous le nom de "*pp*–waves" [51])

$$ds^2 = -dudv - H(u,r)du^2 + dr^2 + r^2\gamma d\theta^2, \qquad (135)$$

avec $H(u,r) = p^2(u)V(r)$, et $\gamma$ comme précédemment. La fonction

$$V(r) = 8G(U-T)\ln r/r_\sigma + 8GI^2\ln^2 r/r_\sigma \qquad (136)$$

peut être interprétée comme un potentiel dans lequel le rayon lumineux va évoluer, alors que $p^2(u)$ représente la forme temporelle de la fraction de corde portant un courant de genre lumière. Dans la pratique, on considère une impulsion limitée sur une distance $a$ de sorte qu'on a $p^2(u) = \Theta(u)\Theta(u-a)$, avec $\Theta$ la fonction "escalier" de Heaviside.

Lorsqu'on veut maintenant calculer la déflection des rayons lumineux, il suffit de résoudre l'équation des géodésiques dans la métrique (135). Pour le cas stationnaire, avec $p^2(u)$ constant, on constate qu'on a trois constantes du mouvement, et ces équations se ramènent à

$$\dot{r}^2 + \frac{L_\mu^2}{r^2} + 4p_-^2V(r) = -m^2 + 4p_-p_+, \qquad (137)$$

pour une particule de masse $m$ ($\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu = -m^2$), les constantes du mouvement étant $p_- = \dot{u}/2$, $p_+ = \dot{v}/2 + 2p_-V(r)$ et $L_\mu = (1-4G\mu)r^2\dot{\theta}$, $[\mu \equiv \frac{1}{2}(U+T)]$. Cette équation confirme l'interprétation de $V(r)$ comme potentiel. Malheureusement, la métrique stationnaire n'a pas les propriétés asymptotiques usuelles au sens où même pour un rayon lumineux ($m = 0$), toutes les orbites du potentiel $V(r)$ sont bornées. C'est la raison pour laquelle on considère plutôt une impulsion de durée finie $a$. Le cas dont on va maintenant discuter est montré sur la figure 20.

Lorsqu'une corde est située entre une source et l'observateur, on a vu qu'on s'attend à voir déjà une image double de la source, les deux images étant séparées d'une distance angulaire faible ($GU \lesssim 10^{-6}$ rad). Distinguer entre une image double et une coïncidence n'étant pas possible, la pulsation de courant de genre lumière est indispensable pour une observation inambigüe de corde. Les figures 21 et 22 montrent en quoi une telle observation serait intéressante.

La figure 21 montre en effet, dans le plan d'observation $(\theta,\phi)$, la trajectoire de l'image double. Comme on peut le voir, l'image double décrit une sorte d'ellipse dans ce plan, ellipse non fermée. C'est une idéalisation dans le cas où la corde n'a pas bougé pendant toute la durée de l'effet, ce qui est en pratique peu probable. Cela dit, une observation suffisante consisterait à ne voir qu'une partie de ces courbes: si une image double, préalablement identifiée comme telle (c'est–à–dire que les deux images ont les mêmes propriétés spectrales notamment) évolue d'une manière symétrique dans le plan $(\theta,\phi)$, alors cela

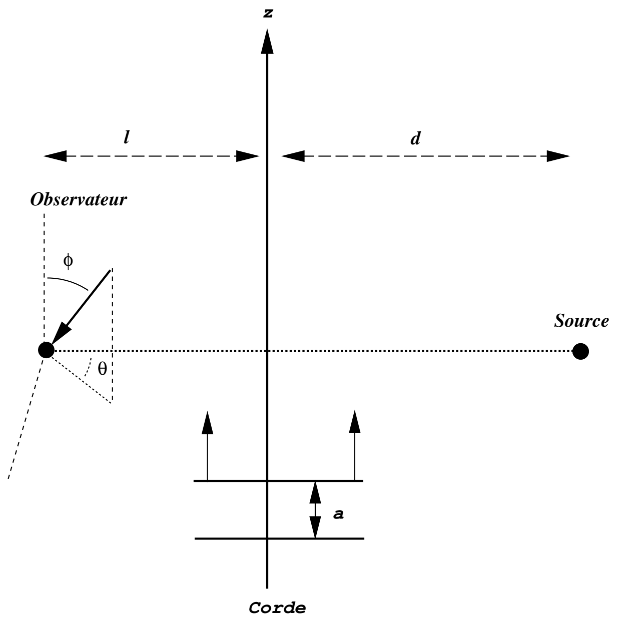


FIG. 20. Configuration d'observation d'une corde parcourue par une impulsion de courant de genre lumière de durée $a$. L'observateur est situé à une distance $\ell$ de la corde, et la source à une distance $d$.

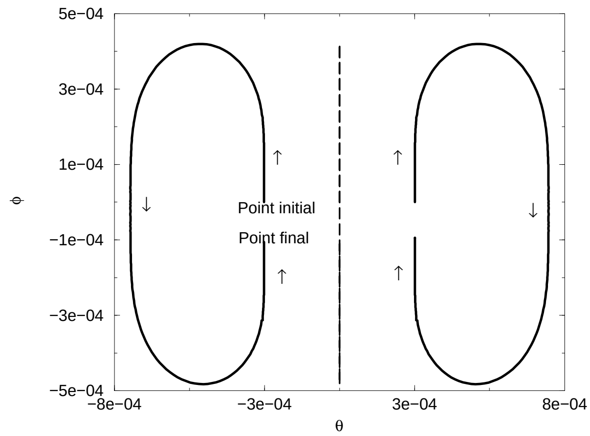


FIG. 21. Trajectoire effective dans le plan $(\theta, \phi)$ d'un rayon lumineux telle que vue par l'observateur après qu'il ait été dévié par une impulsion de courant de genre lumière. Extrait de [50].

veut dire qu'il existe un objet possédant la symétrie cylindrique entre la source et nous, qui plus est muni de propriétés gravitationnelles variables. Comme il ne s'agit pas de symétrie axiale mais bien cylindrique, cela ne peut correspondre, dans l'état actuel des théories, qu'à une corde cosmique, et ce d'autant plus si l'ordre de grandeur de l'écart angulaire entre les deux images correspond au départ à ce qui est attendu.

Une vérification de l'hypothèse "corde" dans le cas d'une observation telle que celle représentée sur la figure 21 est proposée sur la figure 22. Sur cette figure, on voit le redshift $\mathcal{Z}$ de la source varier avec le temps d'observation, avec

$$\mathcal{Z} = \frac{\nu_{\text{émis}} - \nu_{\text{observé}}}{\nu_{\text{émis}}}. \tag{138}$$

Les deux observations conjointes permettraient de conclure d'une manière définitive quant à l'existence des cordes cosmiques, qui plus est parcourues par des courants couplés électromagnétiquement. A l'heure actuelle toutefois, il n'existe pas encore de telles preuves observationnelles. C'est pourquoi nous abordons maintenant le dernier volet de ce mémoire concernant les défauts topologiques de plus basses énergies.

### B. Vortons et rayons cosmiques.

Comme on l'a vu, les cordes cosmiques parcourues par des courants peuvent éventuellement conduire à des états stationnaires, appelés vortons [52]. Ces derniers, s'ils sont stables jusqu'à maintenant et si la température de transition de phase à laquelle ils sont apparus est de l'ordre de celle de la grande unification, conduisent à une catastrophe cosmologique [53]. En effet, il est possible d'estimer la densité de vortons rapportée à la densité critique (9) qu'il suffit ensuite de contraindre à être inférieure à l'unité. Ce faisant, on trouve que si $m_\sigma \sim \eta$, alors ces deux masses ne peuvent pas excéder $10^7$GeV, mais si on demande que la transition de phase qui a formé les cordes soit celle de grande unification, c'est–à–dire $\eta \sim 10^{16}$GeV, alors il faut $m_\sigma \lesssim 10^{9\pm1}$GeV. Dans tous les cas de figure, la contrainte produit des énergies très en deça de la grande unification.

Une autre contrainte, plus difficilement contournable, est donnée par la nucléosynthèse. Pour que cette dernière s'effectue en effet, il faut que les vortons soient suffisamment instables, ayant une durée de vie au plus inférieure à quelques minutes. La contrainte proprement dite consiste simplement à demander que la densité de vortons soit négligeable au moment où la nucléosynthèse a lieu, de sorte à préserver les résultats des calculs standards dont la compatibilité avec les données observationnelles représente un des plus beaux succès de la cosmologie moderne. Pour que cela soit le cas, on a les deux possibilités suivantes: soit $\eta \sim m_\sigma \lesssim 10^9$GeV, soit $\eta \sim 10^{16}$GeV et $m_\sigma \lesssim 10^{12}$GeV. Ces contraintes sont plus tolérantes vis–à–vis des modèles possibles, mais encore assez restrictives. L'ensemble de ces résultats est représenté sur la figure 23.

Il y a en fait deux moyens dont on a déjà parlé de réduire le problème. Le premier consiste à regarder la stabilité des vortons. Classiquement, le problème a été traité complètement, et même s'il s'est avéré que certains anneaux n'étaient pas stables (et dans ce cas encore, leur état final n'est pas clair), d'autres le sont, ceux attendus majoritaires dans la distribution [54]. Cette voie semble donc fermée. Quantiquement, il n'existe pour le moment

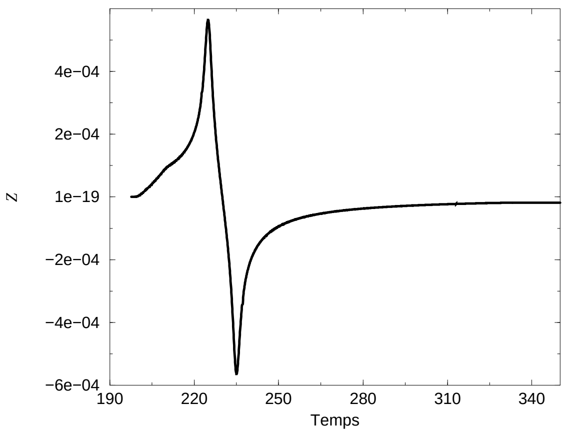


FIG. 22. Evolution du redshift au cours du temps d'un rayon lumineux dévié par un courant de genre lumière dans une corde cosmique. Extrait de [50].

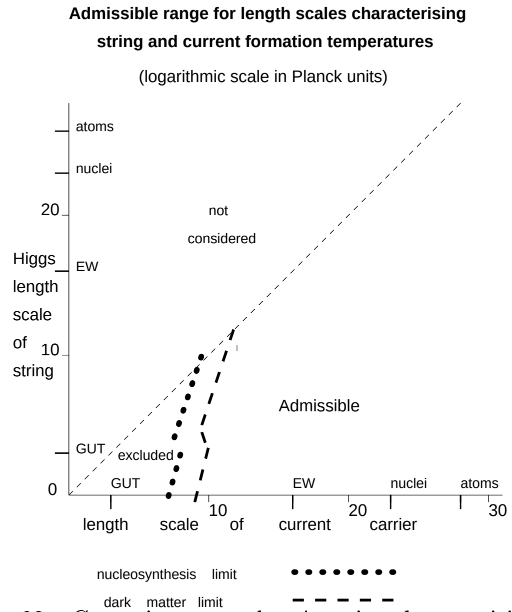


FIG. 23. Contraintes sur les énergies de transitions de phases pour les vortons. En abscisse, la masse du porteur de charge, en ordonnée celle du Higgs. Extrait de [53].

rien qui puisse permettre de décider définitivement [55]. Il est toutefois très probable que le résultat dépende très fortement du modèle microphysique, ce qui réduit considérablement l'importance de l'effet, du moins tant qu'aucun modèle ne se présentera de façon certaine.

Le deuxième moyen de réduire le problème de l'excès de vortons a été proposé récemment et est basé sur les corrections électromagnétiques présentées plus haut [32]. Il s'agit de constater qu'une boucle ne peut devenir ultérieurement un vorton que si les paramètres internes conservés avec lesquels elle a été produite satisfont certaines relations. Comme on l'a vu, ces relations sont changées lorsqu'on tient compte des corrections électromagnétiques. Si on considère maintenant une distribution telle qu'indiquée sur la figure 24, fonction de $b \simeq Z/N$, on voit que dans le cas indiqué $(A)$ sur la figure, le nombre de vortons qu'il est possible d'atteindre, proportionnel à l'aire hachurée, est considérablement plus important que dans le cas indiqué $(B)$. Pour peu que l'évolution du réseau de corde soit très centré sur une valeur particulière de $b$, et il y a des raisons de penser que c'est le cas, alors les contraintes de la figure 23 pourraient être relachées. Il n'est pas clair que cela soit à un niveau suffisant pour permettre des courants de grande unification.

La question se pose finalement de savoir si cette surdensité de vortons pose réellement un problème. En fait, étant donné les caractéristiques des vortons, il se peut même que ceux-ci puissent être utiles pour expliquer un autre phénomène, les rayons cosmiques de très hautes énergies [33], dont le spectre est montré sur la figure 25.

A l'extrémité de ce spectre, on voit quelques évènements atteignant des énergies supérieures à $10^{20}$eV, le record ayant été observé par l'expérience "Fly's eye" à $(3.2 \pm 0.6) \times 10^{20}$eV [57]. De tels évènements ne sont prévus par aucun modèle astrophysique. En effet, selon la théorie standard, il s'agirait principalement de protons ayant été accélérés par des champs magnétiques par un mécanisme de Fermi [58]. Une limite fondamentale concernant ce mécanisme est que la distance sur laquelle s'applique le champ magnétique multiplié par la valeur de ce champ donne l'énergie maximale qu'il est permis de donner à un proton. Cette relation est indiquée sur la figure 26 sur laquelle sont plaçés les meilleurs candidats de sites d'accélérations astrophysiques. On y voit que les seuls sites qui pourraient éventuellement avoir suffisamment d'énergie pour produire des protons aux énergies requises ne l'ont que marginalement. Donc on ignore déjà comment produire ces objets.

Même en supposant que le problème de l'accélération soit réglé, la solution n'est pas encore trouvée car l'univers est rempli du rayonnement de fond à 3°K. Un proton de $10^{20}$eV verrait ce rayonnement à une énergie bien plus grande et en fait se désintègrerait en produisant des pions. Cela fait que son énergie se dégraderait assez rapidement, comme indiqué sur la figure 27. On conclut de ce fait que pour une origine cosmologique à la production de rayons cosmiques, une limite, dite de Greisen-Zatsepin-Kuz'min [60], est attendue aux alentours de $10^{19}$eV. Les observations au delà de cette limite ne sont donc pas expliquées.

Si maintenant on étudie de plus près en quoi consiste les vortons, on s'aperçoit qu'ils peuvent être vus comme des particules de masse[15] $M_V \simeq Z\eta$, pour une charge

[15]On se place dans l'hypothèse où la masse du porteur de charge et l'échelle de brisure de symétrie sont du même ordre de grandeur $(\eta \sim m_\sigma)$.

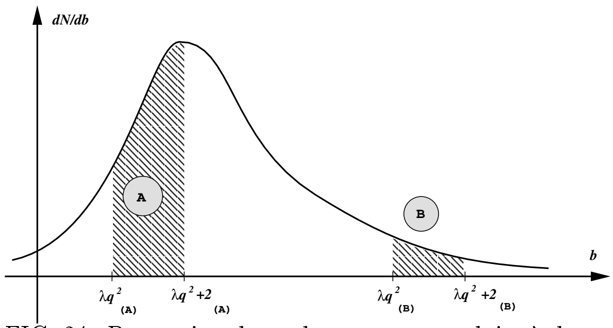


FIG. 24. Proportion de cordes pouvant conduire à des vortons stables. La densité de vortons, proportionnelle à l'aire hachurée dépendant de la constante de couplage, peut être réduite considérablement si celle-ci est suffisamment importante. Extrait de [32].

électrique $Ze$. Ces vortons sont porteurs d'états liés grâce auxquels il serait encore possible de les identifier de façon certaine, quoique malheureusement en dehors de toute capacité expérimentale. En effet, en supposant qu'il soit possible d'accélérer un vorton à une énergie de $10^{20}$eV (et il semble que ça soit le cas [33,62]), alors en notant $\Delta E$ la variation d'énergie entre deux niveaux successifs et $\gamma$ le facteur de Lorentz vue par un proton de l'atmosphère avec lequel on suppose une interaction, alors l'énergie toujours vue par ce proton s'estime par $\varepsilon \sim \gamma \Delta E$. Pour qu'une interaction inélastique permettant d'extraire un état lié ait lieu, il faut aussi que $\gamma m_p \sim \Delta E$, $m_p$ étant la masse de la particule interagissant avec le vorton (en pratique, un proton). Autrement dit, on en déduit $\gamma^2 \sim \varepsilon/m_p$. Avec un moment angulaire de l'ordre $J \sim ZN \sim Z^2$, cela donne les niveaux d'énergie séparés par $\Delta E \simeq \eta/Z^2$, de sorte que l'échelle d'énergie appropriée pour décrire un vorton dans cette hypothèse est

$$\eta \simeq Z^2 \sqrt{\varepsilon m_p}. \qquad (139)$$

Si on fixe $m_p$ à la masse du proton et $\varepsilon \sim 10^{20}$eV, on trouve, avec $Z \sim 100$ (cas usuellement considéré comme le plus probable), $\gamma^2 \simeq 10^{11}$ et finalement $\eta \sim 10^9$GeV. Ce problème obtient donc potentiellement une solution si on estime que l'univers est rempli de vortons [33].

Un dernier point concernant les vortons: leur section efficace d'interaction avec des protons. Le calcul donne, pour cette quantité

$$\sigma_V \simeq 10^{-32} \left( \frac{10^9 \mathrm{GeV}}{\eta} \right)^2 \left( \frac{Z}{100} \right)^6 \mathcal{F}(\Delta E/\eta) \mathrm{cm}^2, \qquad (140)$$

ce qui implique que la probabilité d'interaction d'un vorton dans l'atmosphère totale est de l'ordre de $10^{-4}$–$10^{-5}$; on s'attend donc à voir les vortons de la même manière que les neutrinos qui ont aussi des sections efficaces très faibles. La fonction $\mathcal{F}$, dans laquelle est contenue l'information sur les états liés, est montrée dans un modèle simplifié sur la figure 28. Il faut noter que le

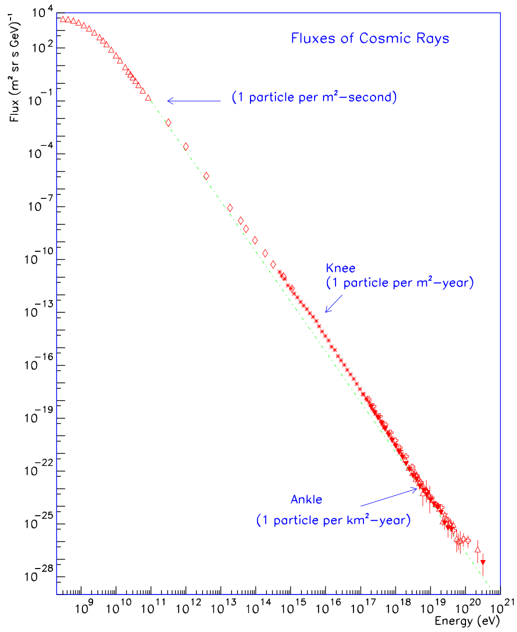


FIG. 25. Spectre des rayons cosmiques observé. Extrait de [56].

flux d'évènements attendus dans le cadre de ce modèle est compatible avec les données expérimentales actuelles. Reste à savoir maintenant si les expériences futures, notamment le projet AUGER [56], confirmeront cette hypothèse.

## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.

L'ensemble des caractéristiques principales des défauts topologiques à un niveau classique a été présenté ici. Il reste bien évidemment quelques points obscurs à la physique des défauts, en particulier dans le cas des cordes. Celles-ci en effet, à cause des vortons que les courants qui les parcourent peuvent produire, nécessitent maintenant une étude quantique de sorte à en calculer précisément le temps de vie. Comme on l'a dit plus haut, il est malheureusement très probable que ce temps de vie dépende fortement des paramètres microscopiques, de sorte que toutes les conclusions quant à l'application cosmologique risquent d'être tenables, rendant par là même les calculs caduques.

Un point en particulier, qui n'a pas encore été développé, concerne les courants de fermions. La présente étude s'est volontairement restreinte à des courants de bosons, compte tenu de ce que, classiquement, on peut montrer une équivalence entre les deux cas. Cela dit, il est clair que les caractéristiques quantiques des deux types de courants peuvent être totalement différentes. Et de plus, les courants de fermions sont attendus de façon plus générique encore que ceux de bosons.

On y a vu que la plupart des propriétés des cordes en

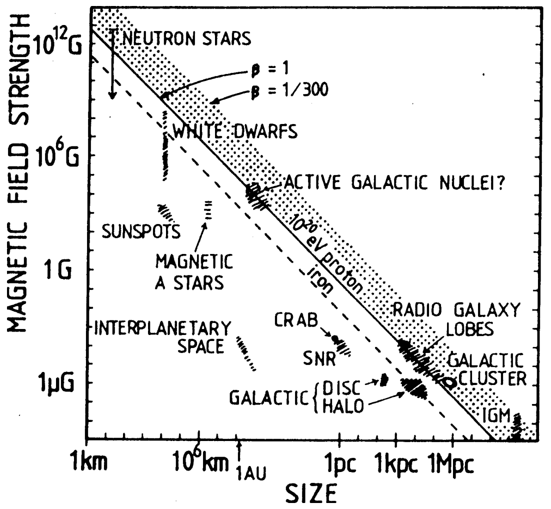


FIG. 26. Limite de production possible des objets astrophysiques pour des rayons cosmiques d'énergies supérieures à $10^{20}$eV. Seuls les objets qui seraient situés au dessus de la limite indiquée par le trait plein pourraient accélérer (et encore) des protons à cette énergie. Comme on peut le voir, il n'y a pratiquement pas de candidat, et les rares qui pourraient être assez puissants ne le sont que très marginalement. Extrait de [59].

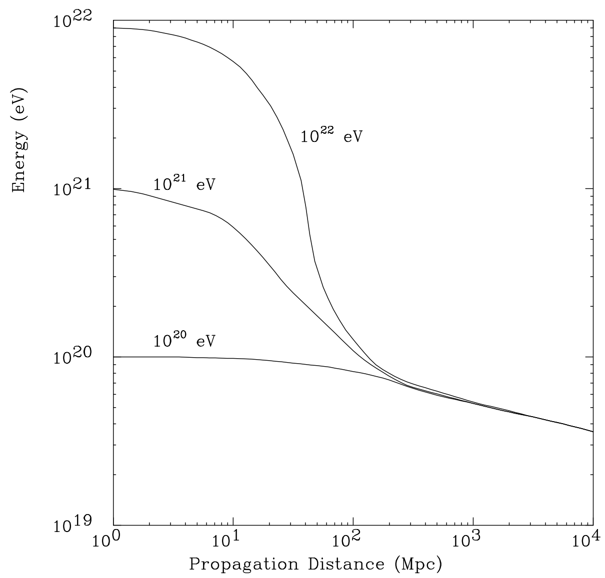


FIG. 27. Pertes en énergie d'un proton dans le rayonnement de fond en fonction de la distance parcourue. On voit clairement la coupure de Greisen-Zatsepin-Kuz'min qui limite la distance possible à quelques dizaines de Mpc. Extrait de [61].

particulier tendent à les rendre difficilement compatibles avec les données observationnelles cosmologiques. Il est de ce fait étonnant de constater que plus de vingt ans après que T. Kibble les ait proposées, elles soient encore prêtes à expliquer les phénomènes astrophysiques et n'aient pas été rejetées. En réalité, nous sommes peut–être même à l'aube de leur découverte expérimentale.

Comme on a vu, l'existence des vortons, pour problématique qu'elle soit dans le cadre usuel, peut expliquer certains évènements astrophysiques actuellement énigmatiques. Là encore, les propriétés quantiques des vortons, si on envisage qu'ils pourraient être en mesure de fournir l'explication recherchée, doivent être élucidées afin de prévoir les résultats du projet grâce auquel, peut–être, on découvrira directement des preuves d'existence des défauts topologiques provenant des transitions de phase cosmologiques. Les nombreuses difficultés peuvent être explicitées par la figure 29 sur laquelle on voit une simulation typique du développement d'un évènement consistant en l'interaction d'une particule très énergétique avec l'atmosphère. Comme l'indique la figure, reconstruire les propriétés de la particule incidente ressemble beaucoup à une gageure. Malgré tout, cela sera possible et c'est pourquoi il est absolument indispensable que nous comprenions le plus parfaitement possible les interactions des vortons avec l'atmosphère, c'est–à–dire leurs propriétés quantiques. Certaines prédictions sont d'ores et déjà incontournables, telles l'idée d'une section efficace montrant des états liés ou le fait que les interactions étant du type "neutrino", on s'attend à ce qu'un grand nombre d'évènements soient produits dans l'atmosphère suivant un angle de zénith assez grand (cascades horizontales). Dès que la statistique sera suffisante, et il peut s'agir ici d'une attente de quelques années seulement, il sera peut–être possible de prouver l'existence des défauts topologiques.

Pour conclure, je dirais qu'il serait dommage que des cordes cosmiques aient déjà été observées sans que nous soyons capables de le montrer.

## REMERCIEMENTS

Les travaux qui ont fait l'objet de cette thèse l'ont été avec les participations enthousiastes de mes collègues du Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie, en particulier Silvano Bonazzola et Brandon Carter. De nombreuses discussions avec Edouard Audit, Céline Boehm, Luc Blanchet, Nathalie Deruelle, Eric Huguet, Rémi Hakim, David Langlois, Jean-Pierre Lasota, Hélène Sol et Jean-Philippe Uzan à l'Observatoire de Meudon m'ont aussi apportées d'indispensables éclaircissements. Je dois aussi beaucoup à mes collaborations externes, à savoir notamment Anne-Christine Davis, Paul Shellard et Neil Turok du Department of Applied Mathematics de l'University of Cambridge (GB), Tom Kibble de l'Imperial College de l'University of London (GB), Jaume Garriga de l'Universitat Autonoma de Barcelona (Espagne),

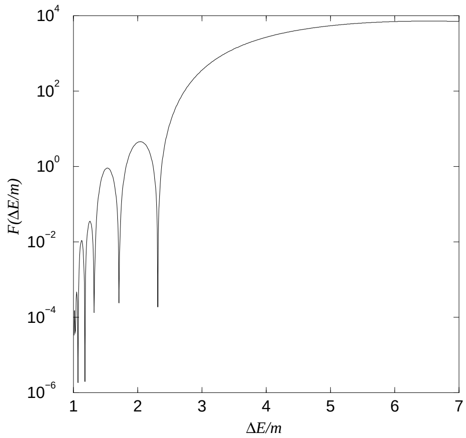


FIG. 28. Variation de la section efficace d'interaction d'un vorton avec un proton en fonction de l'énergie. On voit nettement sur ce graphique les différents niveaux d'énergies qui pourraient être mis en évidence. Cette structure reflète la présence d'états liés et par suite celle des défauts topologiques. Extrait de [33].

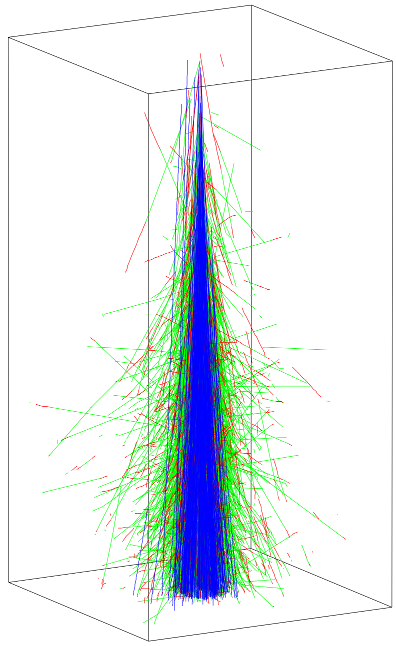

FIG. 29. Simulation numérique du développement d'une cascade atmosphérique. Chaque trait représente une particule à observer et la particule incidente est un proton d'énergie $10^{19}$eV.


Alejandro Gangui de la Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (Italie), Murat Boratav et Pierre Billoir du Laboratoire de Physique Nucléaire et des Hautes Énergies de l'Université de Paris (VI), Alan Watson de l'University of Leeds (GB), et finalement James Cronin de l'University of Chicago (USA). Toutes ces personnes ont énormément contribué à l'avancée des travaux mentionnés dans ce mémoire, soit directement, soit par l'intermédiaire des nombreuses et stimulantes discussions que nous avons pu avoir ensemble; qu'ils en soient remerciés. Enfin, je voudrais remercier Sabine Kimmel, qui a bien voulu accepter la tâche ingrate de relire et corriger ce texte.


---


[1] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (San Francisco, Freeman, 1973); S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, New York, 1972).

[2] E. Kolb and M. Turner, *The Early Universe* (Addison Wesley, Redwood City, CA, 1990).

[3] T. W. B. Kibble, J. Phys. A **9**, 1387 (1976), Phys. Rep. **67**, 183 (1980).

[4] Voir par exemple A. Melfo, G. Senjanovic, *in Future Perspectives in Elementary Particle Physics* (Valencia, June 1995), *Four Seas Conference* (Trieste, July 1995), hep-ph/9605284 et les références incluses.

[5] D. Bailin, A. Love, *Introduction to gauge field theory*, (Adam Hilger, IOP, 1986).

[6] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill, NY, 1971).

[7] C. W. Bernard, Phys. Rev. D **9**, 3312 (1974).

[8] P. W. Higgs, Phys. Rep. **145**, 1156 (1966); D. Fórster, Nucl. Phys. B **81**, 84 (1974).

[9] S. L. Glashow, Nucl. Phys. B **22**, 579 (1961); A. Salam, J. C. Ward, Phys. Lett. **13**, 168 (1964); S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967); Des revues sur le modèle standard se trouvent, par exemple, dans F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks and Leptons*, John Wiley (1984); L. Okun, *Leptons and Quarks*, North-Holland (1982); V. Barger and R. J. N. Phillips, *Collider Physics*, Addison-Wesley (1987), Dernière édition (1996).

[10] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL and the LEP Electroweak Working Group, CERN-PPE/95-172 (1995); K. Hagiwara, Talk presented at XVII International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies, Beijing, China, August 1995, KEK-TH-461, hep-ph/9512425 (1995).

[11] P. Fayet, Phys. Rep. **105**, 21 (1984); Nucl. Phys. B**347**, 743 (1990); Class. Quantum Grav. **13**, A19 (1996).

[12] P. Peter Phys. Rev. D **46**, 3322 (1992).

[13] P. Peter, Phys. Rev. D **49**, 5052 (1994).

[14] A.-C. Davis, P. Peter, Phys. Lett. B**358**, 197 (1995).

[15] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, 1992).

[16] P. Langacker, Phys. Rep. **72**, 185 (1981).

[17] T. W. B. Kibble, G. Lazarides, Q. Shafi, Phys. Rev. D **26**, 435 (1982); : A. -C. Davis, S. C. Davis, Phys. Rev. D **55**, 1879 (1997).

[18] *Formation and Interactions of Topological Defects*, Ed.

A. c. Davis & R. Brandenberger (Plenum Press, NY, 1995).
[19] N. Turok, *in Formation and Evolution of Cosmic Strings*, Ed. G. W. Gibbons, S. W. Hawking & T. Vachaspati (Cambridge University Press, 1990).
[20] M. B. Hindmarsh, T. W. B. Kibble, Rep. Prog. Phys. **58**, 477 (1995).
[21] E. P. S. Shellard & A. Vilenkin, *Cosmic strings and other topological defects*, Cambridge University Press (1994).
[22] J. Preskill, Phys. Rev. Lett. **43**, 1365 (1979).
[23] A. Linde, Rep. Prog. Phys. **47** (1984); *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood, New York, 1990).
[24] E. P. S. Shellard, Nucl. Phys. B **283**, 264 (1988); K. Moriarty, E. Myers, C. Rebbi, Phys. Lett. B **207**, 411 (1988); R. Matzner, J. McCracken, *in Cosmic Strings: The Current Status*, Ed. F. S Accetta, L. M. Krauss (World Scientific, Singapore, 1988); P. Laguna, R. Matzner, Phys. Rev. D **41**, 1751 (1990).
[25] M. Lachièze-Rey, J.-P. Luminet, Phys. Rep. **254**, 135 (1995) and references therein.
[26] J. P. Uzan, P. Peter, Phys. Lett. B **406**, 20 (1997).
[27] D. Austin, E. Copeland, T. W. B. Kibble, Phys. Rev. D **48**, 5594 (1993); A. Albrecht, N. Turok, Phys. Rev. Lett. **54**, 1868 (1985); Phys. Rev. D **40**, 973 (1989); D. P. Bennett, F. R. Bouchet, Phys. Rev. Lett. **60**, 257 (1988); Phys. Rev. Lett. **63**, 2776 (1989); Phys. Rev. D **41**, 2408 (1990); B. Allen, E. P.S. Shellard, Phys. Rev. Lett. **64**, 119 (1990).
[28] E. Witten, Nucl. Phys. B **249**, 557 (1985).
[29] P. Peter, E. Huguet, en préparation.
[30] B. Carter, in citeOTAN; Phys. Lett. **B 224**, 61 (1989) et **B 228**, 466 (1989); *in* Formation and evolution of cosmic strings, Ed. G. W. Gibbons, S. W. Hawking & T. Vachaspati (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990); Phys. Lett. B **224**, 61 (1989); Phys. Lett. B **228**, 466 (1989).
[31] B. Carter, P. Peter, Phys. Rev. D **52**, R1744 (1995).
[32] A. Gangui, P. Peter, C. Boehm, Phys. Rev. D (1997) soumis.
[33] S. Bonazzola, P. Peter, Astropart. Phys. **7**, 161 (1997).
[34] P. Peter, J. Phys. A **29**, 5125 (1996).
[35] H. B. Nielsen, P. Olesen, Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973)
[36] Voir par exemple A. Babul, T. Piran, D. N. Spergel, Phys. Lett. **B 202**, 307 (1988) ainsi que de nombreuses références dans [39].
[37] P. Peter, Phys. Rev. D **45**, 1091 (1992).
[38] P. Peter, Phys. Rev. D **46**, 3335 (1992).
[39] P. Peter, Phys. Rev. D **47**, 3169 (1993).
[40] P. Peter, Phys. Lett. B **298**, 60 (1993).
[41] B. Carter, Phys. Lett. B **404**, 246 (1997).
[42] T. Goto, Prog. Theor. Phys. **46**, 1560 (1971); Y. Nambu, Phys. Rev. D **10**, 4262 (1974).
[43] D. N. Spergel, T. Piran, J. Goodman, Nucl. Phys. B **291**, 847 (1987); A. Vilenkin, T. Vachaspati, Phys. Rev. Lett. **58**, 1041 (1987).
[44] N. K. Nielsen, P. Olesen, Nucl. Phys. B **291**, 829 (1987).
[45] B. Carter, P. Peter, Phys. Rev. D **52**, R1744 (1995).
[46] B. Carter, P. Peter, A. Gangui, Phys. Rev. D **55**, 4647 (1997).
[47] A. Vilenkin, *in* 300 years of Gravitation, Ed. S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, 1987)
[48] P. Peter, Class. Quantum Grav. **11**, 131 (1994) et les références incluses.
[49] P. Peter, D. Puy, Phys. Rev. D **48**, 5546 (1993)
[50] J. Garriga, P. Peter, Class. Quantum Grav. **11**, 1743 (1994).
[51] D. Kramer sl et al., *Exact solutions of Einstein field equations* (Berlin, Deutscher).
[52] R. L. Davis, E. P. S. Shellard, Phys. Rev. D **38**, 4722 (1988); Nucl. Phys. B **323**, 209 (1989); B. Carter, Ann. N.Y. Acad.Sci., **647**, 758 (1991); B. Carter, Proceedings of the XXXth Rencontres de Moriond, Villard-sur-Ollon, Switzerland, 1995, Edited by B. Guiderdoni and J. Tran Thanh Vân (Editions Frontières, Gif-sur-Yvette, 1995).
[53] R. Brandenberger, B. Carter, A.C. Davis, M. Trodden, Phys. Rev. D **54**, 6059 (1996).
[54] X. Martin, P. Peter, Phys. Rev. D **51**, 4092 (1995).
[55] R. L. Davis, Phys. Rev. D **38**, 3722 (1988).
[56] The Pierre Auger Project Design Report, Fermilab (1995).
[57] S. Yoshida et al., Astropart. Phys. **3**, 105 (1995); N. N. Efimov et al., ICRR Symposium on Astrophysical Aspects of the Most Energetic Cosmic Rays, Ed. by M. Nagano, F. Takahara, World Scientific (1991); T. A. Egorov, Proceedings of the Tokyo Workshop on Techniques for the Study of Extremely High Energy Cosmic Rays, Ed. M. Nagano, published by the Institute for Cosmic Rays Research, University of Tokyo (September 1993); J. Linsley, Phys. Rev. Lett. **10**, 146 (1963); G. Brooke et al., 19th ICRC (La Jolla) **2**, 150 (1985); A. A. Watson, ICRR Symposium on Astrophysical Aspects of the Most Energetic Cosmic Rays, Ed. by M. Nagano, F. Takahara, World Scientific (1991); M. A. Lawrence, R. J. O. Reid, A. A. Watson, J. Phys. G **17**, 733 (1991).
[58] E. Fermi, *Phys. Rev.* **75**, 1169 (1949); T. K. Gaisser, *Cosmic rays and particle physics*, Cambridge University Press (1990); L. O'Drury, *Rep. Prog. Phys.* **46**, 973 (1983).
[59] A. M. Hillas, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **22**, 425 (1984).
[60] K. Greisen, Phys. Rev. Lett. **16**, 748 (1966); G. T. Zatsepin, V. A. Kuz'min, JETP Lett. **4**, 78 (1966).
[61] J. W. Cronin, Nucl. Phys. B **28** (Proc. Supp.), 213 (1992); F. A. Aharonian, J. W. Cronin, Phys. Rev. D **50**, 1892 (1993).
[62] R. D. Blanford, R. L. Znajek, *M. N. R. A. S.*, **179**, 433 (1977).