Produit scalaire et applications

I. Produit scalaire ⌈euclidien⌡hermitien⌋

Définition 1. Soit E un ⌈$\mathbb{R}$⌡$\mathbb{C}$⌋-espace vectoriel. Un *produit scalaire* ⌈*euclidien*⌡*hermitien*⌋ sur E est une forme, c.-à-d. une application de $E \times E$ dans ⌈$\mathbb{R}$⌡$\mathbb{C}$⌋, notée $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ dans ce qui suit, vérifiant les propriétés suivantes pour tous vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ de E et pour tout scalaire λ :

- $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est *linéaire à droite* : $\langle \vec{x} \mid \vec{y} + \lambda\,\vec{z} \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \lambda \, \langle \vec{x} \mid \vec{z} \rangle$;
- $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est ⌈*symétrique*⌡*à symétrie hermitienne*⌋ : $\langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle^* = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$;
- $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est *définie* : $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0$ si et seulement si $\vec{x} = \vec{0}$;
- $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est *positive* : $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \geqslant 0$ pour tout vecteur $\vec{x}$.

⌟

Remarques. L'expression « forme définie » forme un tout : l'adjectif « définie » n'est pas à comprendre au sens usuel en mathématiques de « bien déterminée ».

On dit souvent *produit scalaire* au lieu de *produit scalaire euclidien*, et *produit hermitien* au lieu de *produit scalaire hermitien*. ⌟

Propriété-définition 1. Une forme linéaire à droite et ⌈symétrique⌡à symétrie hermitienne⌋ est *semi-linéaire à gauche* : $\langle \vec{x} + \lambda\,\vec{y} \mid \vec{z} \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{z} \rangle + \lambda^* \, \langle \vec{y} \mid \vec{z} \rangle$.

Une forme linéaire à droite et semi-linéaire à gauche est dite ⌈*bilinéaire*⌡*sesquilinéaire*⌋ (le préfixe « sesqui- » signifie « $1\frac{1}{2}$ »). ⌟

Définition 2. Deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont dits *orthogonaux* (ou encore *perpendiculaires* ou *normaux*) pour le produit scalaire ⌈euclidien⌡hermitien⌋ $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ si $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$. ⌟

Théorème 1 (inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Pour tout produit scalaire ⌈euclidien⌡hermitien⌋,

$$|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}\,\sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}\,. \tag{1}$$

L'égalité ne se produit que si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires. ⌟

Preuve (produit scalaire euclidien)**.** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle \vec{x} + \lambda\,\vec{y} \mid \vec{x} + \lambda\,\vec{y} \rangle = \underbrace{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}_{c} + \underbrace{2\,\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle}_{b}\,\lambda + \underbrace{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}_{a}\,\lambda^2 =: P(\lambda). \tag{2}$$

La fonction $\lambda \mapsto P(\lambda)$ est un polynôme du second degré en λ, avec $a \geqslant 0$. Il doit être positif pour tout λ puisque $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est une forme positive par définition d'un produit scalaire, donc doit n'admettre aucune racine réelle ou seulement une racine double. Il faut donc que le discriminant,

$$\Delta = \left(2\,\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle\right)^2 - 4\,\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle\,\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle, \tag{3}$$

soit négatif, c.-à-d.

$$|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}\,\sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}\,. \tag{4}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité quand $\Delta = 0$. Pour $\lambda = -b/(2\,a)$, on a alors $P(\lambda) = 0$, c'est-à-dire, puisque le produit scalaire est une forme définie, lorsque $\vec{x} + \lambda\,\vec{y} = \vec{0}$: $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont alors liés, c.-à-d. colinéaires. □

Preuve (produit scalaire hermitien)**.** Soit $\theta = \arg\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$. On a donc $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = |\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x} + \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\,\vec{y} \mid \vec{x} + \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\,\vec{y} \rangle &= \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle + \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\,\lambda + \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right)^*\lambda + \langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right)^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\,\lambda^2 \\
&= \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle + \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\,\lambda + \left(\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}\right)^*\lambda + \langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle\,\lambda^2 \\
&= \underbrace{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}_{c} + \underbrace{2\,|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle|}_{b}\,\lambda + \underbrace{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}_{a}\,\lambda^2 =: P(\lambda)
\end{aligned} \tag{5}$$

La fonction $\lambda \mapsto P(\lambda)$ est un polynôme du second degré en λ, avec $a \geqslant 0$. Il doit être positif pour tout λ puisque $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est une forme positive par définition d'un produit scalaire, donc doit n'admettre aucune racine réelle ou seulement une racine double. Il faut donc que le discriminant,

$$\Delta = \left(2\,|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle|\right)^2 - 4\,\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle, \tag{6}$$

soit négatif, c.-à-d.

$$|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}\,\sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}\,. \tag{7}$$

□

II. Normes et angles

Définition 3. Une *norme* est une application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que

- $N(\vec{x}) \geqslant 0\,;$
- $N(\vec{x}) = 0$ si et seulement si $\vec{x} = \vec{0}\,;$
- $N(\lambda\,\vec{x}) = |\lambda|\,N(\vec{x})\,;$
- $N(\vec{x} + \vec{y}) \leqslant N(\vec{x}) + N(\vec{y})$ (*inégalité triangulaire*).

⌟

Définition 4. Un vecteur $\vec{x}$ est *unitaire* (on dit aussi *normé*) pour la norme $N(\cdot)$ si $N(\vec{x}) = 1$. ⌟

Théorème 2. Soit $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ un produit scalaire ⌈euclidien⌠hermitien⌡ dans E. Alors, l'application $\|\cdot\|\colon \vec{x} \mapsto \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}$ est une norme. On l'appelle la *norme* ⌈*euclidienne*⌠*hermitienne*⌡ associée à ce produit scalaire. ⌟

Preuve. Montrons l'inégalité triangulaire. (Les autres points découlent directement de la définition d'un produit scalaire.) On a

$$\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \geqslant \|\vec{x} + \vec{y}\| \iff \left(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\right)^2 - \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \geqslant 0. \tag{8}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\right)^2 - \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| - \langle \vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} + \vec{y} \rangle \\
&= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| - \left(\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle + \langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle\right) \\
&= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| - \left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle^*\right) \\
&= 2\left(\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| - \mathrm{Re}\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Comme $\mathrm{Re}\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle \leqslant |\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle|$ et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$, on obtient bien l'inégalité triangulaire. □

Théorème 3 (Pythagore)**.** Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, alors $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ pour la norme associée à $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Inversement, si $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire *euclidien* (faux pour un produit *hermitien*), alors, si $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux. ⌟

Définition 5. L'*angle* entre deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire *euclidien* est l'unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}\,. \tag{10}$$

⌟

(Cette définition a bien un sens car $\cos\theta \in [-1, 1]$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

III. Espace ⌈euclidien⌠hermitien⌡

Définition 6. Un *espace* ⌈*euclidien*⌠*hermitien*⌡ est un ⌈$\mathbb{R}$⌠$\mathbb{C}$⌡-espace vectoriel de dimension finie (n ci-après) muni d'un produit scalaire ⌈euclidien⌠hermitien⌡. ⌟

Remarque. Plus généralement, lorsque l'espace vectoriel n'est pas nécessairement de dimension finie, on dit qu'il s'agit d'un *espace préhilbertien* ⌈*réel*⌠*complexe*⌡ s'il est muni d'un produit scalaire ⌈euclidien⌠hermitien⌡. ⌟

Théorème 4. Soit $e = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de ⌈$\mathbb{R}^n$⌊$\mathbb{C}^n$⌋. L'application « · »: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$) qui à $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)_e$ et $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)_e$ associe $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{*}\, y_i$ est un *produit scalaire* dit *canonique*. ⌟

Preuve. Vérification des propriétés définissant un produit scalaire. □

Définition 7. Une base $f = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ est *orthonormée* pour un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ si,

$$\langle \vec{f}_i \mid \vec{f}_j \rangle = \delta_{i,j}\,, \tag{11}$$

c.-à-d. si, pour tout i, $\langle \vec{f}_i \mid \vec{f}_i \rangle = 1$ (donc $\|\vec{f}_i\| = 1$ pour la norme $\|\cdot\|$ associée à $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$) et, pour tout $j \neq i$, $\langle \vec{f}_i \mid \vec{f}_j \rangle = 0$. ⌟

Théorème 5. La base canonique de ⌈$\mathbb{R}^n$⌊$\mathbb{C}^n$⌋ est orthonormée pour le produit scalaire « · ». ⌟

Théorème 6. Soit $f = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ une base d'un espace ⌈euclidien⌊hermitien⌋.

$$\langle \vec{x} \mid \vec{f} \rangle = \sum_i \sum_j x_i^{*}\, y_j \,\langle \vec{f}_i \mid \vec{f}_j \rangle. \tag{12}$$

Si f est une base orthonormée pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, alors $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \sum_i x_i^{*}\, y_i$.

Si X et Y sont les vecteurs colonnes représentant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans f, alors $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = X^{\mathsf{T}*}\, Y$. ⌟

Définition 8. Soit $\mathcal{A}$ un endomorphisme de E. Un endomorphisme $\mathcal{A}^{\dagger}$ est dit *adjoint* de $\mathcal{A}$ si pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E, on a

$$\langle \mathcal{A}^{\dagger}(\vec{x}) \mid \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \mid \mathcal{A}(\vec{y}) \rangle. \tag{13}$$

⌟

Théorème 7. Soit E un espace ⌈euclidien⌊hermitien⌋ pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Tout endomorphisme $\mathcal{A}$ admet un unique endomorphisme adjoint.

Si $\mathcal{A}$ est représenté par une matrice A dans une base f orthonormée (pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$), alors la matrice dans f de l'adjoint $\mathcal{A}^{\dagger}$ de $\mathcal{A}$ est donnée par $A^{\mathsf{T}*}$. ⌟

Preuve (2e partie uniquement).

$$\langle \vec{x} \mid \mathcal{A}(\vec{y}) \rangle = X^{\mathsf{T}*}\,(A\,Y) = X^{\mathsf{T}*}\,([A^{\mathsf{T}*}]^{\mathsf{T}*}\,Y) = (X^{\mathsf{T}*}\,[A^{\mathsf{T}*}]^{\mathsf{T}*})\,Y = (A^{\mathsf{T}*}\,X)^{\mathsf{T}*}\,Y = \langle \mathcal{A}^{\dagger}(\vec{x}) \mid \vec{y} \rangle \tag{14}$$

si $A^{\mathsf{T}*}$ est la matrice de $\mathcal{A}^{\dagger}$. □

Notation. Ci-après, $M^{\dagger} := M^{\mathsf{T}*}$ pour toute matrice M (carrée ou colonne). La matrice $M^{\mathsf{T}*}$ est appelée la *transconjuguée* de M. ⌟

IV. Endomorphismes et matrices ⌈orthogonaux⌊unitaires⌋

Définition 9. Un endomorphisme ⌈$\mathcal{O}$⌊$\mathcal{U}$⌋ est dit ⌈*orthogonal*⌊*unitaire*⌋ si, pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$,

$$\langle \mathcal{O}(\vec{x}) \mid \mathcal{O}(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle \qquad ⌊ \qquad \langle \mathcal{U}(\vec{x}) \mid \mathcal{U}(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle. \tag{15}$$

En dimension finie, la matrice ⌈O⌊U⌋ représentant ⌈$\mathcal{O}$⌊$\mathcal{U}$⌋ dans une base orthonormée pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est dite ⌈*orthogonale*⌊*unitaire*⌋. ⌟

Théorème 8. Soient f une base orthonormée pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et ⌈O⌊U⌋ la représentation matricielle dans f de l'endomorphisme ⌈orthogonal $\mathcal{O}$⌊unitaire $\mathcal{U}$⌋. On a

$$O^{\mathsf{T}}\,O = I \qquad ⌊ \qquad U^{\dagger}\,U = I. \tag{16}$$

Une matrice ⌈orthogonale⌊unitaire⌋ est donc inversible, et son inverse est son adjointe. ⌟

Preuve (cas unitaire). Soient X et Y les vecteurs colonnes représentant des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E dans f. On a

$$\langle \mathcal{U}(\vec{x}) \mid \mathcal{U}(\vec{y}) \rangle = X^{\dagger}\,U^{\dagger}\,U\,Y = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = X^{\dagger}\,Y \tag{17}$$

pour tous $\vec{x}$ et $\vec{y}$, donc $U^{\dagger}\,U = I$. □

Remarques. On a

$$
O = \mathrm{mat}_{f,f}\,\mathcal{O} = \begin{array}{c} \mathcal{O}(\vec{f}_j) \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & O_{i,j} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ /\!/\ \vec{f}_i \end{array} . \tag{18}
$$

La matrice O décrit ainsi la transformation *active* $\mathcal{O}$: si $\vec{y} = \mathcal{O}(\vec{x})$ et que $X = \mathrm{mat}_f\,\vec{x}$ et $Y = \mathrm{mat}_f\,\vec{y}$, alors $Y = O\,X$.

Soit $\vec{f}'_j = \mathcal{O}(\vec{f}_j)$ pour tout j et $f' = (\vec{f}'_1, \dots, \vec{f}'_n)$. L'endomorphisme $\mathcal{O}$ étant bijectif ($\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}^\dagger$), f' est une base de E, et même une base orthonormée puisque $\langle \vec{f}'_i \mid \vec{f}'_j \rangle = \langle \vec{f}_i \mid \vec{f}_j \rangle = \delta_{i,j}$.

Puisque $\vec{f}'_j = \mathcal{O}(\vec{f}_j)$, on a aussi $O = P_{f\to f'}$, où $P_{f\to f'}$ est la matrice de passage de la base f vers la base f'.

Enfin, puisque $\mathrm{Id}(\vec{f}'_j) = \vec{f}'_j$, on a $O = \mathrm{mat}_{f',f}\,\mathrm{Id}$. La matrice O décrit donc aussi la transformation *passive* correspondant au changement de coordonnées d'un même vecteur entre les bases f et f'. En effet, $O = P_{f\to f'} = \mathrm{mat}_{f',f}\,\mathrm{Id}$, donc si $X' = \mathrm{mat}_{f'}\,\vec{x}$, comme $\vec{x} = \mathrm{Id}(\vec{x})$, on a $X = P_{f\to f'}\,X' = O\,X'$.

Ce qui précède vaut évidemment aussi pour $\mathcal{U}$ et U. ⌟

Propriété 1. Soit ⌈O⌋U⌋ une matrice ⌈orthogonale⌋unitaire⌋. Alors ⌈$\det O = \pm 1$⌋$|\det U| = 1$⌋. ⌟

Preuve. $U^\dagger\,U = I$, donc $\det (U^*)^\mathsf{T} \det U = (\det U)^* \det U = |\det U|^2 = 1$. Même raisonnement pour O, et comme $\det O \in \mathbb{R}$, on a $\det O = \pm 1$. □

Propriété 2.
1. Les valeurs propres d'un endomorphisme ⌈orthogonal⌋unitaire⌋ ⌈valent ± 1⌋sont de module 1⌋.
2. Les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

⌟

Preuve.
1. Soit λ une valeur propre de $\mathcal{U}$ et $\vec{x}$ un vecteur propre associé non nul. On a $\langle \mathcal{U}(\vec{x}) \mid \mathcal{U}(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle$ puisque $\mathcal{U}$ est unitaire. Par ailleurs, $\mathcal{U}(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}$, donc $\langle \mathcal{U}(\vec{x}) \mid \mathcal{U}(\vec{x}) \rangle = \lambda^*\,\lambda\,\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = |\lambda|^2\,\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle$. Il en résulte que $|\lambda| = 1$ puisque $\vec{x} \neq \vec{0}$.
2. Soient λ et λ' des valeurs propres distinctes de $\mathcal{U}$ associées à des vecteurs propres $\vec{x}$ et $\vec{x}'$. On a $\langle \mathcal{U}(\vec{x}) \mid \mathcal{U}(\vec{x}') \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{x}' \rangle$ puisque $\mathcal{U}$ est unitaire. Par ailleurs, $\langle \mathcal{U}(\vec{x}) \mid \mathcal{U}(\vec{x}') \rangle = \lambda^*\,\lambda'\,\langle \vec{x} \mid \vec{x}' \rangle$. On a donc soit $\lambda^*\,\lambda' = 1$ (0 est impossible puisque $|\lambda| = |\lambda'| = 1$), soit $\langle \vec{x} \mid \vec{x}' \rangle = 0$. Or $\lambda^* = 1/\lambda$ puisque $|\lambda| = 1$. Comme $\lambda \neq \lambda'$, on a nécessairement $\langle \vec{x} \mid \vec{x}' \rangle = 0$.

□

Théorème 9 (admis)**.** Tout endomorphisme unitaire est diagonalisable dans une base orthonormée. ⌟

Remarque. Le théorème ne s'applique pas aux matrices orthogonales. Certes, une matrice orthogonale peut être considérée comme une matrice unitaire à coefficients réels, mais les valeurs propres et les vecteurs propres ne seront pas, eux, nécessairement réels. ⌟

V. Endomorphismes et matrices ⌈symétriques⌋hermitiens⌋

Définition 10. Soit $\mathcal{A}$ un endomorphisme dans un espace E muni d'un produit scalaire ⌈euclidien⌋hermitien⌋ $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. $\mathcal{A}$ est dit ⌈*symétrique*⌋*hermitien*⌋ pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ si pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, on a $\langle \vec{x} \mid \mathcal{A}(\vec{y}) \rangle = \langle \mathcal{A}(\vec{x}) \mid \vec{y} \rangle$. ⌟

Remarque. Un endomorphisme ⌈symétrique⌋hermitien⌋ est aussi dit *auto-adjoint*. ⌟

Théorème-définition 1. Si $\mathcal{A}$ est ⌈symétrique⌋hermitien⌋ pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ dans un espace ⌈euclidien⌋hermitien⌋, alors, dans toute base orthonormée pour $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, sa matrice A vérifie

$$
A^\mathsf{T} = A \qquad ⌋ \qquad A^\dagger = A. \tag{19}
$$

La matrice A est dite ⌈*symétrique*⌋*hermitienne*⌋. ⌟

Propriété 3. Les valeurs propres d'un endomorphisme unitaire sont réelles. ⌟

Preuve. Soit λ une valeur propre et $\vec{x}$ un vecteur propre associé non nul. On a $\langle \vec{x} \mid \mathcal{A}(\vec{x}) \rangle = \langle \mathcal{A}(\vec{x}) \mid \vec{x} \rangle$ puisque $\mathcal{A}$ est hermitienne. Par ailleurs, $\langle \vec{x} \mid \mathcal{A}(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{x} \mid \lambda \vec{x} \rangle = \lambda \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle$ et $\langle \mathcal{A}(\vec{x}) \mid \vec{x} \rangle = \langle \lambda \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = \lambda^* \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle$. Comme $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \neq 0$, on a $\lambda^* = \lambda$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Propriété 4. Soit $\mathcal{A}$ un endomorphisme ⌈symétrique⌊hermitien⌋. Les vecteurs propres de $\mathcal{A}$ associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. ⌟

Preuve. $\langle \vec{x} \mid \mathcal{A}(\vec{x}') \rangle = \langle \mathcal{A}(\vec{x}) \mid \vec{x}' \rangle$. Par ailleurs, $\langle \vec{x} \mid \mathcal{A}(\vec{x}') \rangle = \langle \vec{x} \mid \lambda' \vec{x}' \rangle = \lambda' \langle \vec{x} \mid \vec{x}' \rangle$ et $\langle \mathcal{A}(\vec{x}) \mid \vec{x}' \rangle = \langle \lambda \vec{x} \mid \vec{x}' \rangle = \lambda^* \langle \vec{x} \mid \vec{x}' \rangle$. Or $\lambda \in \mathbb{R}$ (par définition si $\mathcal{A}$ est symétrique, et par la propriété précédente si $\mathcal{A}$ est hermitien), donc, puisque $\lambda \neq \lambda'$, on a $\langle \vec{x} \mid \vec{x}' \rangle = 0$. □

Théorème 10 (théoreme spectral, admis)**.** Soit A une matrice ⌈symétrique⌊hermitienne⌋. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres de ⌈$\mathbb{R}^n$⌊$\mathbb{C}^n$⌋ et les valeurs propres de A sont dans $\mathbb{R}$ (y compris dans le cas hermitien).

Il existe donc une matrice diagonale réelle Λ et une matrice ⌈orthogonale O⌊unitaire U⌋ telles que

$$A = O \Lambda O^{\mathsf{T}} \qquad ⌊ \qquad A = U \Lambda U^{\dagger}. \tag{20}$$

⌟