La méthode des échelons

La méthode des échelons (dite aussi méthode des pivots de Gauss) permet de résoudre les problèmes suivants :

- calcul du déterminant d'une matrice carrée ;
- calcul de l'inverse d'une matrice carrée ;
- calcul du rang d'une matrice quelconque ;
- résolution d'un système linéaire quelconque ;
- détermination des équations du sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs et d'une base de ce SEV.

Pour échelonner A, on effectue des opérations sur les lignes : combinaison linéaire de lignes (attention à ne pas prendre 0 pour le coefficient de la ligne sur laquelle on travaille) et interversion de lignes. Ces opérations correspondent à une multiplication par une matrice à gauche. Pour savoir quelle matrice, il suffit de faire la même opération sur la matrice identité. Cette matrice est inversible. On effectue les mêmes opérations en parallèle sur I_n.

I. Principe de l'échelonnement

On cherche à obtenir une matrice ne contenant que des 0 sous la diagonale en effectuant des combinaisons linéaires de lignes et, si besoin est, des échanges de lignes.

Au bout de $k-1$ étapes, la matrice A d'ordre (n,p) a été transformée en une matrice $A^{(k-1)} = \left(a_{i,j}^{(k-1)}\right)$, où $i \in [1 \dots n]$ est l'indice de ligne et $j \in [1 \dots p]$ est l'indice de colonne. Sur les $k-1$ premières colonnes, $A^{(k-1)}$ ne comprend que des 0 sous la diagonale :

$$\forall j \in [1 \dots k-1],\ i > j \Longrightarrow a_{i,j}^{(k-1)} = 0.$$

à chaque étape q, la matrice $A^{(q)}$ a été obtenue par multiplication à gauche (action sur les lignes uniquement) de la matrice $A^{(q-1)}$ par une matrice inversible M_q. On a donc

$$A^{(q)} = M_q A^{(q-1)} = M_q M_{q-1} A^{(q-2)} = \cdots = M_q M_{q-1} \dots M_2 M_1 A.$$

L'objet de l'étape k est d'obtenir une matrice $A^{(k)}$ ne comprenant que des 0 sous la diagonale sur les k premières colonnes.

1. Si $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$, cet élément sert de pivot. Aucun échange de lignes n'est alors nécessaire.
   On effectue une combinaison linéaire de chaque ligne $i > k$ avec la ligne k de manière à mettre des 0 en $a_{i,k}^{(k)}$:
   $$\forall i > k,\ L_i^{(k)} = \lambda L_i^{(k-1)} + \mu L_k^{(k-1)},$$
   avec $\lambda \neq 0$.
2. Si $a_{k,k}^{(k-1)} = 0$, on cherche une ligne $i' > k$ telle que $a_{i',k}^{(k-1)} \neq 0$.
   a. S'il existe $i' > k$ tel que $a_{i',k}^{(k-1)} \neq 0$, on échange les lignes k et i'. On applique à cette matrice la même méthode qu'au n° 1.
   b. Sinon, le rang est strictement inférieur à $\min(n,p)$. Si la matrice est carrée, son déterminant est alors nul et elle n'est pas inversible. Pour poursuivre l'échelonnement, il faut faire un échange de colonnes.

II. Calcul du déterminant

Ça n'a de sens que si $p = n$.
On échelonne la matrice sous la diagonale.
Attention :

- Pour les combinaisons linéaires de lignes (I.1), il faut *ajouter* à $L_i^{(k-1)}$ un multiple de $L_k^{(k-1)}$ (c.-à-d. que le coefficient devant $L_i^{(k-1)}$ doit être $\lambda = 1$).
- Il faut par ailleurs compter le nombre d'échanges de lignes (I.2.a).

On obtient au final une matrice triangulaire supérieure supérieure A'. Le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux de A' ou à son opposé. Si le nombre d'échange de lignes est pair (en particulier s'il n'y en a pas eu !),

$$\text{dét}\, A = \prod_{i=1}^{n} A'_{i,i}.$$

Sinon,

$$\text{dét}\, A = -\prod_{i=1}^{n} A'_{i,i}.$$

III. Calcul de l'inverse

Ça n'a de sens que si $p = n$.

A. Première phase

La première phase est semblable au calcul du déterminant. On fait en parallèle les mêmes opérations sur la matrice I_n. La matrice I'_n obtenue à partir de I_n est donc telle que

$$A' = I'_n A.$$

B. Deuxième phase

On cherche à obtenir une matrice diagonale à partir de A' en effectuant des combinaisons linéaires de lignes (les échanges sont désormais inutiles).

Au bout de $k-1$ étapes, la matrice A' a été transformée en une matrice $A'^{(k-1)}$. Sur les $k-1$ dernières colonnes (c.-à-d. les colonnes $n+1-(k-1)$ à n), $A'^{(k-1)}$ ne comprend que des 0 au-dessus de la diagonale :

$$\forall j \in [n+1-(k-1)\dots n],\, i < j \Longrightarrow a_{i,j}^{(k-1)} = 0$$

(il n'y a bien sûr aussi que des 0 sous la diagonale).

L'objet de l'étape k est d'obtenir une matrice $A'^{(k)}$ ne comprenant que des 0 au-dessus de la diagonale sur les k dernières colonnes.

On effectue une combinaison linéaire de chaque ligne $i < k$ avec la ligne k de manière à mettre des 0 en $a'^{(k)}_{i,n+1-k}$.

Au bout de $n-1$ étapes au plus, A' a été transformée en une matrice diagonale. La matrice A'' obtenue en divisant chaque ligne par son élément diagonal est donc la matrice identité, I_n.

On effectue les mêmes opérations sur I'_n. On obtient une matrice I''_n telle que

$$I_n = A'' = I''_n A,$$

c.-à-d.

$$A^{-1} = I''_n.$$

IV. Calcul du rang

On veut calculer le rang d'une matrice à n lignes et p colonnes. Cette matrice est par exemple constituée des coordonnées de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n ; le rang de la matrice est alors le rang de cette famille de vecteurs.

On applique la même méthode que pour le calcul du déterminant jusqu'à ce qu'il n'y ait que des 0 sous la diagonale ou que l'on se retrouve dans la situation du A·2·b, c.-à-d.

$$\forall j \in [1 \ldots k-1],\, i > j \Longrightarrow a_{i,j}^{(k-1)} = 0,$$

$$\forall i \geq k,\, a_{i,k}^{(k-1)} = 0,$$

$$\exists (i',j'),\, i' \geq k,\, j' > k,\, a_{i',j'}^{(k-1)} \neq 0.$$

On échange alors les colonnes k et j'. On peut alors effectuer l'opération A·1 après échange des lignes k et i' et reprendre l'échelonnement des lignes.

Lorsqu'il n'y a plus que des 0 sous la diagonale, l'échelonnement est terminé. Le rang r de la matrice (ou de la famille de vecteurs) est alors le nombre de lignes non complètement nulles.

V. Résolution d'un système linéaire

On veut résoudre un système linéaire de n équations à p inconnues x_i.

On a $AX = B$, où $A = (a_{i,j})$ est une matrice à n lignes et p colonnes, $X = {}^t(x_1, \ldots, x_p)$ le vecteur-colonne contenant les p inconnues et $B = {}^t(b_1, \ldots, b_n)$ le vecteur-colonne contenant le second membre.

Si A^{-1} existe et est connue (il faut notamment que $p = n$), $X = A^{-1}B$. Sinon, on procède de la manière suivante.

On écrit côte-à-côte A et B. On écrit au-dessus de la matrice A le vecteur X en ligne (c.-à-d. x_j au-dessus de la colonne j de A). On échelonne la matrice A et on effectue les mêmes opérations sur B. X reste inchangé.

Lorsqu'on se retrouve dans la situation du A·2·b, on doit échanger des *colonnes* de A (p. ex. k et j'). Il faut alors échanger les *éléments* k et j' de X, c.-à-d. x_k et $x_{j'}$. On effectue ensuite l'échange des lignes k et i' de A et B (mais X reste inchangé).

On obtient à la fin une matrice A' ne contenant que des 0 sous la diagonale. Si A' contient (au moins) une ligne i complètement nulle et que $b'_i \neq 0$, le système n'a pas de solution.

Sinon, si $r = p$, il y a une seule solution. Si $r < p$, il y a une infinité de solutions.