

Chapitre IV

Ondes stationnaires

On sait depuis les études réalisées par Pythagore et ses disciples au 6^e siècle av. J.-C. sur un monocorde que la musique entretient des liens étroits avec l'arithmétique : les sons produits par deux parties d'une même corde vibrante paraissent en effet d'autant plus consonants que le quotient des longueurs des parties forme une fraction dont le numérateur et dénominateur sont de petits entiers (après réduction de la fraction), et ce, que les sons soient successifs (mélodie) ou simultanés (harmonie). Le même phénomène peut être observé dans des tuyaux de section constante. Les cordes vibrantes et les tuyaux constituant des modèles très simplifiés des instruments de musique à cordes et à vent, intéressons-nous aux sons qui peuvent être créés dans ces dispositifs avant de donner quelques éléments de théorie musicale.

A. Corde vibrante

On a établi que le déplacement transversal d'une corde vibrante obéit à l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

et on sait que la solution de cette équation est de la forme

$$y(x, t) = y_+(x - ct) + y_-(x + ct), \quad (\text{IV.2})$$

mais on n'a pas encore exploité le fait que la corde est fixée à ses extrémités, c.-à-d. que, à tout instant,

$$y(x = 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad y(x = L, t) = 0. \quad (\text{IV.3})$$

Il en résulte que, pour tout t ,

$$y_-(ct) = -y_+(-ct) \quad \text{et} \quad y_-(L + ct) = -y_+(L - ct). \quad (\text{IV.4})$$

Posons $t = t' - L/c$. On a

$$y_-(ct) = -y_+(-ct) = -y_+(L - ct') = y_-(L + ct') = y_-(2L + ct'). \quad (\text{IV.5})$$

La fonction y_- est ainsi de période $2L$. Pour tout $x \in [0, L]$, la fonction $t \mapsto y_-(x - ct)$ est donc de période temporelle $T = 2L/c$; il en est évidemment de même pour $t \mapsto y_+(x + ct)$ et, par conséquent, pour leur somme $t \mapsto y(x, t)$.

Cherchons en particulier des solutions y_n sinusoïdales en temps^{*1}. Les fonctions $y_{n,+}$ et $y_{n,-}$ doivent alors être également sinusoïdales temporellement, donc de la forme

$$y_{n,\pm} = A_{\pm} \cos(\omega t \mp kx + \varphi_{\pm}), \quad (\text{IV.6})$$

où $\omega > 0$ et $k = \omega/c > 0$. Pour cette étude, il est commode d'utiliser la représentation complexe, dans laquelle $y_n(x, t) = \text{Re } \underline{y}_n(x, t)$ avec

$$\underline{y}_n(x, t) = \underline{A}_+ e^{i(\omega t - kx)} + \underline{A}_- e^{i(\omega t + kx)}. \quad (\text{IV.7})$$

Les fonctions y_n étant linéairement indépendantes pour des pulsations différentes, la condition $y(x = 0, t) = 0$ doit être vérifiée pour chacune d'entre elles, c.-à-d. $y_n(x = 0, t) = 0$. Ceci impose que

$$\underline{A}_+ + \underline{A}_- = 0, \quad (\text{IV.8})$$

donc

$$\underline{y}_n(x, t) = \underline{A}_+ e^{i\omega t} (e^{-ikx} - e^{ikx}) = -2i \underline{A}_+ e^{i\omega t} \sin(kx). \quad (\text{IV.9})$$

La condition $y(x = L, t) = 0$ doit être vérifiée pour chaque y_n , ce qui impose que

$$\sin(kL) = 0. \quad (\text{IV.10})$$

1. La signification de l'indice n apparaîtra plus loin. Disons seulement ici que, les fonctions y , y_- et y_+ étant périodiques de même période, on peut les décomposer en séries de Fourier, c.-à-d. en sommes infinies discrètes de sinusoïdes (y_n , $y_{n,+}$, $y_{n,-}$) indicées par un entier n , chaque sinusoïde de pulsation égale à un multiple entier de la pulsation $2\pi/T$.

Le nombre d'onde doit donc prendre des valeurs discrètes

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{IV.11})$$

(d'où l'indice « n » introduit précédemment. Remarque que $n \in \mathbb{Z}^-$ est exclu car on a défini $y_{n,+}$ et $y_{n,-}$ avec $k > 0$). Les longueurs d'onde, pulsations, fréquences et périodes temporelles principales (c.-à-d. les plus petites périodes non nulles) correspondantes valent

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \quad (\text{IV.12})$$

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}, \quad (\text{IV.13})$$

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}, \quad (\text{IV.14})$$

$$T_n = \frac{1}{\nu_n} = \frac{2L}{nc}. \quad (\text{IV.15})$$

Remarque que $T_n = T/n$: T est donc bien une période temporelle de chaque mode y_n (mais pas la période principale, sauf pour $n = 1$).

Posons

$$-2i\underline{A}_+ = C_n e^{i\dot{\varphi}_n} \quad \text{avec } C_n > 0. \quad (\text{IV.16})$$

On obtient alors

$$y_n(x, t) = \text{Re}\left(C_n e^{i\dot{\varphi}_n} e^{i\omega_n t} \sin[k_n x]\right) = C_n \cos(\omega_n t + \dot{\varphi}_n) \sin(k_n x). \quad (\text{IV.17})$$

La fonction y_n s'écrit comme le produit d'une fonction de x et d'une fonction de t : il s'agit donc d'une **onde stationnaire**. On appelle cette solution un **mode propre** et ν_n est sa **fréquence propre**. La solution générale y sera une somme des modes propres y_n . Chaque fréquence propre ν_n est un multiple entier de la fréquence fondamentale $\nu_1 = c/(2L)$.

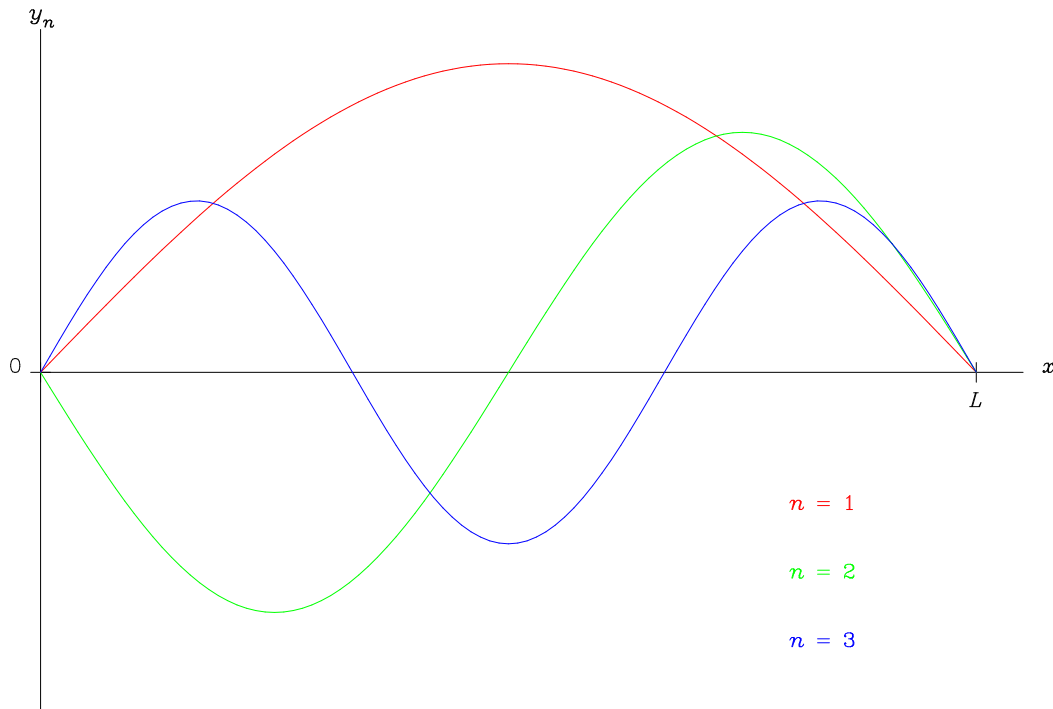


FIGURE IV.1. – Trois premiers modes de vibration de la corde à un instant t . L'amplitude $C_n \cos(\omega_n t + \dot{\varphi}_n)$ est arbitraire.

En musique, les modes propres sont aussi appelés des **harmoniques** ; celui pour $n = 1$ est le **fondamental**. L'étude qui vient d'être faite s'applique bien à des cordes pincées, comme celles d'une guitare acoustique. En appuyant la corde avec un doigt contre le manche de l'instrument, on fixe la longueur L sur laquelle la corde peut vibrer, donc la longueur d'onde du fondamental^{§2}.

Les valeurs des C_n et ϕ_n des différents harmoniques définissent le **timbre** de l'instrument pour cette note^{§3}.

Les modes propres sont des fonctions sinusoïdales du temps, d'amplitude de déplacement $C_n |\sin(k_n x)|$. Les points pour lesquels cette amplitude est minimale sont appelés des **nœuds** de déplacement. Dans le cas présent, cette amplitude minimale est même nulle. Les points de la corde situés en $x = 0$ et $x = L$ sont immobiles à tout instant et sont donc évidemment des nœuds. C'est aussi vrai, pour le mode n , de tous les points pour lesquels $\sin(k_n x) = 0$. Notons $x_{\text{nd}}(y_n, \cdot)$ l'abscisse de ces nœuds. On doit avoir $k_n x_{\text{nd}}(y_n, \cdot) = q \pi$ avec q entier et $x_{\text{nd}}(y_n, \cdot) \in [0, L]$, soit

$$x_{\text{nd}}(y_n, q) = \frac{qL}{n} \quad \text{avec } q \in [0, n]_{\mathbb{N}}. \quad (\text{IV.18})$$

Les points de la corde dont l'amplitude de déplacement pour le mode n est maximale sont appelés des **ventres** de déplacement. Notons $x_{\text{vt}}(y_n, \cdot)$ l'abscisse de ces ventres. On doit avoir $k_n x_{\text{vt}}(y_n, \cdot) = m \pi + \pi/2$ avec m entier et $x_{\text{vt}}(y_n, \cdot) \in [0, L]$, soit

$$x_{\text{vt}}(y_n, m) = \frac{(m + 1/2)L}{n} \quad \text{avec } m \in [0, n - 1]_{\mathbb{N}}. \quad (\text{IV.19})$$

B. Tuyau

1. Préliminaire

Le cas d'un tuyau parcouru par des ondes acoustiques se traite de manière analogue, mais présente plus de variété selon que les extrémités du tuyau sont fermées ou ouvertes.

En une extrémité fermée, le déplacement longitudinal est nul, donc $\psi(\cdot, t) = 0$ pour tout t . Comme $\rho_0 \partial v / \partial t = -\partial \delta p / \partial x$ (cf. III.49) et que $v = \partial \psi / \partial t$, on en déduit que $\partial \delta p / \partial x = 0$: **la pression acoustique est extrême en une extrémité fermée**.

Inversement, **en une extrémité ouverte, la pression acoustique est nulle** (plus exactement, elle chute à zéro sur une très courte distance ; cf. § V.c.2), donc $\delta p(\cdot, t) = 0$ pour tout t . Comme $\delta p = -(1/\chi) \partial \psi / \partial x$ (cf. III.48), on en déduit que $\partial \psi / \partial x = 0$: **le déplacement est extrême en une extrémité ouverte**.

2. Deux extrémités fermées

On a les conditions aux limites

$$\psi(x = 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x = L, t) = 0 \quad (\text{IV.20})$$

pour tout t . Ce sont les mêmes que pour le déplacement transversal y sur la corde vibrante, donc on obtient exactement les mêmes résultats (nombre d'onde, fréquence, etc., de chaque mode propre ψ_n ; nœuds et ventres de ψ_n) avec la substitution $y \mapsto \psi$.

La suppression est donnée par

$$\delta p = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (\text{IV.21})$$

En représentation complexe, on déduit de

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \underline{A}_+ e^{i(\omega_n t - k_n x)} + \underline{A}_- e^{i(\omega_n t + k_n x)} \quad (\text{IV.22})$$

que

$$\underline{\delta p}_n(x, t) = \frac{i k_n}{\chi} (\underline{A}_+ e^{i(\omega_n t - k_n x)} - \underline{A}_- e^{i(\omega_n t + k_n x)}). \quad (\text{IV.23})$$

Puisque $\underline{A}_- = -\underline{A}_+$ d'après la condition sur ψ en $x = 0$, on obtient que

$$\underline{\delta p}_n(x, t) = \frac{i k_n}{\chi} \underline{A}_+ e^{i \omega_n t} (e^{-i k_n x} + e^{i k_n x}) = 2 \frac{i k_n}{\chi} \underline{A}_+ e^{i \omega_n t} \cos(k_n x). \quad (\text{IV.24})$$

Posons

$$2 \frac{i k_n}{\chi} \underline{A}_+ = C'_n e^{i \phi'_n}. \quad (\text{IV.25})$$

2. Plus exactement, on place le doigt entre deux frettes. La longueur utile de la corde est celle de la partie entre le chevalet et la frette la plus proche de celui-ci.
3. En réalité, on entend surtout le son produit par la table d'harmonie et amplifié par la caisse de résonance. La table est excitée par les cordes via le chevalet sur lequel celles-ci sont tendues.

En représentation réelle, pour le mode n , on a alors

$$\delta p_n(x, t) = C'_n \cos(\omega_n t + \hat{\varphi}'_n) \cos(k_n x). \quad (\text{IV.26})$$

Dans le cas d'un tuyau fermé, les nœuds de pression sont les points d'abscisse

$$x_{\text{nd}}^{\text{f-f}}(\delta p_n, m) = \frac{(m + 1/2)L}{n} \quad \text{avec } m \in [0, n - 1]_{\mathbb{N}}, \quad (\text{IV.27})$$

c.-à-d. les ventres de déplacement $x_{\text{vt}}^{\text{f-f}}(\psi_n, \cdot)$. Les ventres de pression sont les points d'abscisse

$$x_{\text{vt}}^{\text{f-f}}(\delta p_n, q) = \frac{qL}{n} \quad \text{avec } q \in [0, n]_{\mathbb{N}}, \quad (\text{IV.28})$$

c.-à-d. les nœuds de déplacement $x_{\text{nd}}^{\text{f-f}}(\psi_n, \cdot)$.

3. Une extrémité fermée, l'autre ouverte

Prenons l'extrémité fermée en $x = 0$ et l'extrémité ouverte en $x = L$.

On a encore $\psi(x = 0, t) = 0$, donc $\underline{A}_- = -\underline{A}_+$ et

$$\underline{\delta p}_n(x, t) = 2 \frac{ik}{\chi} \underline{A}_+ e^{i\omega t} \cos(kx). \quad (\text{IV.29})$$

Comme $\delta p(x = L, t) = 0$, on a

$$\cos(kL) = 0. \quad (\text{IV.30})$$

Le nombre d'onde prend donc les valeurs discrètes

$$k_n = -\frac{\pi}{2L} + n \frac{\pi}{L} = (n - 1/2) \frac{\pi}{L} = (2n - 1) \frac{\pi}{2L} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{IV.31})$$

Les longueurs d'onde, pulsations, fréquences et périodes temporelles correspondantes valent

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{4L}{2n - 1}, \quad (\text{IV.32})$$

$$\omega_n = k_n c = \frac{(2n - 1)\pi c}{2L}, \quad (\text{IV.33})$$

$$v_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{(2n - 1)c}{4L}, \quad (\text{IV.34})$$

$$T_n = \frac{1}{v_n} = \frac{4L}{(2n - 1)c}. \quad (\text{IV.35})$$

La fréquence des différents harmoniques est donc un multiple *impair* de la fréquence fondamentale $v_1 = c/(4L)$ (la moitié de celle obtenue dans les cas fermé-fermé et ouvert-ouvert).

Posons

$$2 \frac{ik_n}{\chi} \underline{A}_+ = C'_n e^{i\hat{\varphi}'_n}. \quad (\text{IV.36})$$

On a alors

$$\delta p_n(x, t) = C'_n \cos(\omega_n t + \hat{\varphi}'_n) \cos(k_n x) \quad (\text{IV.37})$$

et

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \underline{A}_+ e^{i\omega_n t} (e^{-ik_n x} - e^{ik_n x}) = -2i \underline{A}_+ e^{i\omega_n t} \sin(k_n x) = -\frac{\chi C'_n}{k_n} e^{i(\omega_n t + \hat{\varphi}'_n)} \sin(k_n x). \quad (\text{IV.38})$$

Donc

$$\psi_n(x, t) = -\frac{\chi C'_n}{k_n} \cos(\omega_n t + \hat{\varphi}'_n) \sin(k_n x). \quad (\text{IV.39})$$

Le n -ième mode propre admet donc des nœuds de déplacement pour $\sin(k_n x) = 0$, c.-à-d. pour

$$x_{\text{nd}}^{\text{f-o}}(\psi_n, m) = \frac{mL}{n - 1/2} \quad \text{avec } m \in [0, n - 1]_{\mathbb{N}}. \quad (\text{IV.40})$$

Les ventres de déplacement sont les points d'abscisse

$$x_{\text{vt}}^{\text{f-o}}(\psi_n, m) = \frac{(m + 1/2)L}{n - 1/2} \quad \text{avec } m \in [0, n - 1]_{\mathbb{N}}. \quad (\text{IV.41})$$

4. Deux extrémités ouvertes

Lorsque les deux extrémités sont ouvertes,

$$\delta p(x=0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \delta p(x=L, t) = 0 \quad (\text{IV.42})$$

à tout instant. Or, pour une onde sinusoïdale,

$$\underline{\delta p}_n(x, t) = \frac{ik}{\chi} \left(\underline{A}_+ e^{i(\omega t - kx)} - \underline{A}_- e^{i(\omega t + kx)} \right) \quad (\text{IV.43})$$

(IV.23). La condition $\delta p(x=0, t) = 0$ impose que

$$\underline{A}_- = \underline{A}_+, \quad (\text{IV.44})$$

donc

$$\underline{\delta p}_n(x, t) = \frac{ik}{\chi} \underline{A}_+ e^{i\omega t} (e^{-ikx} - e^{ikx}) = -2i \frac{ik}{\chi} \underline{A}_+ e^{i\omega t} \sin(kx) = 2 \frac{k}{\chi} \underline{A}_+ e^{i\omega t} \sin(kx). \quad (\text{IV.45})$$

La condition $\delta p(x=L, t) = 0$ impose que

$$\sin(kL) = 0. \quad (\text{IV.46})$$

Le nombre d'onde prend donc les valeurs discrètes

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*, \quad (\text{IV.47})$$

les mêmes que pour un tuyau fermé aux deux extrémités.

Posons

$$2 \frac{k_n}{\chi} \underline{A}_+ = C'_n e^{i\phi'_n}. \quad (\text{IV.48})$$

On a

$$\delta p_n(x, t) = \text{Re} \underline{\delta p}_n(x, t) = C'_n \cos(\omega_n t + \phi'_n) \sin(k_n x). \quad (\text{IV.49})$$

Par ailleurs,

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \underline{A}_+ e^{i\omega_n t} (e^{-ik_n x} + e^{ik_n x}) = \frac{2\chi C'_n}{k_n} e^{i(\omega_n t + \phi'_n)} \cos(k_n x), \quad (\text{IV.50})$$

donc

$$\psi_n(x, t) = \frac{2\chi C'_n}{k_n} \cos(\omega_n t + \phi'_n) \cos(k_n x). \quad (\text{IV.51})$$

Le n -ième mode propre admet donc des nœuds de déplacement pour $\cos(k_n x) = 0$, c.-à-d. pour

$$x_{\text{nd}}^{\text{o-o}}(\psi_n, m) = \frac{(m+1/2)L}{n} \quad \text{avec } m \in [0, n-1]_{\mathbb{N}}. \quad (\text{IV.52})$$

Les ventres de déplacement sont les points d'abscisse

$$x_{\text{vt}}^{\text{o-o}}(\psi_n, q) = \frac{qL}{n} \quad \text{avec } q \in [0, n]_{\mathbb{N}}. \quad (\text{IV.53})$$

Les nœuds (resp. ventres) de déplacement $x_{\text{nd}}^{\text{o-o}}(\psi_n, \cdot)$ (resp. $x_{\text{vt}}^{\text{o-o}}(\psi_n, \cdot)$) sont les ventres (resp. nœuds) de surpression $x_{\text{vt}}^{\text{o-o}}(\delta p_n, \cdot)$ (resp. $x_{\text{nd}}^{\text{o-o}}(\delta p_n, \cdot)$).

Par ailleurs, les termes « $\cos(kx)$ » et « $\sin(kx)$ » étant permutés dans les expressions du déplacement et de la surpression entre les cas ouvert-ouvert et fermé-fermé, les nœuds (resp. ventres) de déplacement du cas ouvert-ouvert sont les nœuds (resp. ventres) de surpression du cas fermé-fermé. De même, les nœuds (resp. ventres) de surpression du cas ouvert-ouvert sont les nœuds (resp. ventres) de déplacement du cas fermé-fermé.

c. Cordes et tuyaux sonores : récapitulatif

Cas	k_n	y_n, ψ_n			$F_{y,n} \text{**4}, \delta p_n$		
		\propto	x_{nd}	x_{vt}	\propto	x_{nd}	x_{vt}
Corde, tuyau f-f	$\frac{n}{L} \pi$	$\sin(k_n x)$	$\frac{qL}{n}$	$\frac{m+1/2}{n} L$	$\cos(k_n x)$	$\frac{m+1/2}{n} L$	$\frac{qL}{n}$
Tuyau f-o	$\frac{n-1/2}{L} \pi$	$\sin(k_n x)$	$\frac{mL}{n-1/2}$	$\frac{m+1/2}{n-1/2} L$	$\cos(k_n x)$	$\frac{m+1/2}{n-1/2} L$	$\frac{mL}{n-1/2}$
Tuyau o-o	$\frac{n}{L} \pi$	$\cos(k_n x)$	$\frac{m+1/2}{n} L$	$\frac{qL}{n}$	$\sin(k_n x)$	$\frac{qL}{n}$	$\frac{m+1/2}{n} L$

(avec $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in [0, n-1]_{\mathbb{N}}$ et $q \in [0, n]_{\mathbb{N}}$).

4. Les modes de tension d'une corde vibrante n'ont pas été étudiés spécifiquement, mais la relation entre F_y et y pour une corde, $F_y = F_0 \partial y / \partial x$, étant analogue à celle entre δp et ψ pour un tuyau ($\delta p = -\chi^{-1} \partial \psi / \partial x$), les résultats obtenus pour δp_n s'appliquent également à $F_{y,n}$.

D. Quelques notions sur les gammes musicales

Deux sons sinusoïdaux de fréquences ν_1 et ν_2 paraissent d'autant plus consonants que le rapport ν_2/ν_1 est proche d'une fraction irréductible de deux entiers petits. Pour des notes de musique, cette règle phénoménologique s'applique aux fréquences des harmoniques fondamentaux.

Les **intervalles** (ν_1, ν_2) de notes les plus simples correspondent aux rapports de fréquences suivants :

ν_2/ν_1	Nom
1/1	unisson
2/1	octave
3/2	quinte parfaite
4/3	quarte parfaite
5/4	tierce majeure

On peut remarquer que, si les intervalles (ν_1, ν_2) et (ν_2, ν_3) forment une quinte et une quarte parfaites, alors (ν_1, ν_3) constitue une octave : une octave est donc constituée d'une quinte et d'une quarte.

Si (ν_0, ν_1) et (ν_0, ν_2) forment respectivement une quarte et une quinte parfaites (par rapport à la même fréquence ν_0), l'intervalle (ν_1, ν_2) constitue un **ton**. Le rapport de fréquences correspondant est

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{3/2}{4/3} = \frac{9}{8}. \quad (\text{IV.54})$$

Malheureusement, le rapport entre la quinte (ou la quarte) et l'unisson (ou l'octave) ne correspond alors pas à un nombre entier de tons, c.-à-d. à une puissance entière de $9/8$. En revanche, $3/2$ est assez proche d'une puissance demi-entière de $9/8$: $(9/8)^{7/2} \approx 1,5102$.

Il est donc assez naturel également qu'on ait cherché à subdiviser l'octave en tons et **demi-tons**, chaque ton correspondant à deux demi-tons. La musique occidentale a trouvé acceptable de découper l'octave en une **gamme** dite **diatonique** constituée de cinq tons et deux demi-tons, ces derniers insérés entre un groupe de trois tons et un groupe de deux tons. En partant de *do*, on obtient la gamme de *do* majeur : *do, ré, mi, fa, sol, la, si, do⁺* en allant des graves vers les aigus^{*5}, c.-à-d. vers les fréquences croissantes. Les intervalles entre les notes de cette gamme sont les suivants, du grave vers l'aigu :

Intervalle	Nombre de demi-tons
<i>do-ré</i>	2
<i>ré-mi</i>	2
<i>mi-fa</i>	1
<i>fa-sol</i>	2
<i>sol-la</i>	2
<i>la-si</i>	2
<i>si-do⁺</i>	1

Les demi-tons (et de même pour les tons) ne peuvent cependant pas être à la fois des rationnels et être tous égaux. Il n'y a en réalité pas de solution totalement satisfaisante car 2 n'est la puissance entière (> 1) d'aucun nombre rationnel.

La subdivision de l'octave en douze demi-tons égaux irrationnels a été proposée par Simon Stevin au 16^e siècle. La gamme ainsi obtenue est dite à **tempérament égal** et a été notamment popularisée par J.S. Bach dans son *Clavier bien tempéré*. Le rapport entre deux notes séparées par un demi-ton doit valoir $2^{1/12} = 1,0595\dots$, ce qui donne les rapports de fréquence suivants par rapport au premier *do* :

<i>do</i>	$2^{0/12} = 1$	$= 1/1$
<i>do</i> # (= <i>ré</i> b)	$2^{1/12} = 1,0595\dots$	
<i>ré</i>	$2^{2/12} = 1,1225\dots$	$\approx 9/8$
<i>ré</i> # (= <i>mi</i> b)	$2^{3/12} = 1,1892\dots$	
<i>mi</i>	$2^{4/12} = 1,2599\dots$	$\approx 5/4$
<i>fa</i>	$2^{5/12} = 1,3348\dots$	$\approx 4/3$
<i>fa</i> # (= <i>sol</i> b)	$2^{6/12} = 1,4142\dots$	
<i>sol</i>	$2^{7/12} = 1,4983\dots$	$\approx 3/2$
<i>sol</i> # (= <i>la</i> b)	$2^{8/12} = 1,5874\dots$	$\approx 8/5$
<i>la</i>	$2^{9/12} = 1,6818\dots$	
<i>la</i> # (= <i>si</i> b)	$2^{10/12} = 1,7818\dots$	
<i>si</i>	$2^{11/12} = 1,8877\dots$	
<i>do⁺</i>	$2^{12/12} = 2$	$= 2/1$

= dièse ; b = bémol.

5. La dernière note, ici notée *do⁺* pour la distinguer, est une octave plus aiguë que le premier *do*.

On remarque que la quinte (*do-sol*) et la quarte (*do-fa*) sont quasi parfaites et que la tierce majeure (*do-mi*) est aussi très acceptable.

Le même schéma peut être appliqué de manière itérative aux octaves supérieures et inférieures. En fixant la fréquence d'une note particulière dans une certaine octave, on obtient les fréquences de toutes les notes dans toutes les octaves. On convient classiquement que la fréquence du *la* de la troisième octave vaut 440 Hz.

La gamme à tempérament égal est particulièrement intéressante pour les instruments, tels le piano, ne pouvant jouer qu'à des fréquences discrètes fixées à l'avance (contrairement au violon, pour lequel on peut faire varier continûment la fréquence du son en faisant glisser le doigt sur la corde). Il est en effet possible de transposer toutes les notes du même nombre de demi-tons sans que cela change les rapports de fréquence entre ces notes et donc la mélodie et l'harmonie.