Chapitre III

Ondes mécaniques

A. Cordes vibrantes

Nous étudions dans cette section la propagation des ondes sur une corde tendue. Établissons d'abord l'équation d'onde qui les décrit.

1. Équation d'onde

Nous adoptons les hypothèses et notations suivantes :

- La corde est tendue entre deux points fixes distants de L. On notera Ox l'axe selon lequel la corde est tendue lorsqu'elle est au repos ;
- La corde est souple, sans rigidité. Ceci signifie qu'elle peut être pliée sans effort. En pratique, il faut pour cela qu'elle soit mince. En conséquence, la force de tension est tangente à la corde en tout point de celle-ci ;
- La corde est homogène. Sa masse linéique au repos, μ, est donc identique en tout point de la corde. En notant m la masse totale de la corde, on a $\mu = m/L$;
- La corde vibre dans le plan Oxy et un point de la corde ne se déplace que selon $\vec{u}_y$;
- Le déplacement $y(x, t)$ de chaque point de la corde est faible. La corde étant tendue, l'angle entre la tangente à la corde (donc aussi la force de tension) et l'axe Ox est faible également ;
- La gravité est négligeable devant la tension de la corde.

Appelons $\vec{F}(x, t)$ la force de tension exercée, à l'instant t, au point d'abscisse x sur la portion de corde située aux abscisses $x' \leqslant x$ par la portion située en $x' > x$. Quand la corde est au repos, cette tension est uniforme ; notons F_0 sa norme.

Considérons un élément de corde compris entre le point M, d'abscisse x, et le point N voisin, d'abscisse $x + \mathrm{d}x$. Les forces extérieures exercées sur l'élément MN sont $\vec{F}(x + \mathrm{d}x, t)$ en N et $-\vec{F}(x, t)$ en M. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à MN, de masse $\mathrm{d}m$, on obtient

$$\mathrm{d}m\,\vec{a} = \vec{F}(x + \mathrm{d}x, t) - \vec{F}(x, t), \tag{III.1}$$

soit, en projetant,

$$\mathrm{d}m\,a_x = F_x(x + \mathrm{d}x, t) - F_x(x, t), \tag{III.2}$$

$$\mathrm{d}m\,a_y = F_y(x + \mathrm{d}x, t) - F_y(x, t). \tag{III.3}$$

Par hypothèse, $a_x = 0$, donc F_x ne dépend pas de x.

Au premier ordre, $F_y(x + \mathrm{d}x, t) \approx F_y(x, t) + (\partial F_y/\partial x)\,\mathrm{d}x$, donc

$$\mathrm{d}m\,a_y = \frac{\partial F_y}{\partial x}\,\mathrm{d}x. \tag{III.4}$$

Comme $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}x$ et que $a_y = \partial^2 y/\partial t^2$, on obtient en simplifiant par $\mathrm{d}x$ que

$$\mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F_y}{\partial x}\,. \tag{III.5}$$

Par ailleurs, $\vec{F}$ est tangent à la courbe, donc

$$F_y = F_x\,\frac{\partial y}{\partial x}\,, \tag{III.6}$$

d'où

$$\mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_x\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,, \tag{III.7}$$

puisque F_x ne dépend pas de x.

Enfin, la perturbation subie par la corde à cause des ondes est faible, donc $\|\vec{F}(x,t)\| \approx F_0$. Or

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = |F_x| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx |F_x|, \tag{III.8}$$

puisque $|\partial y/\partial x| \ll 1$. Comme, vu la définition adoptée pour $\vec{F}$, on doit avoir $F_x > 0$ pour que la corde soit tendue, on obtient que

$$\mu \, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0 \, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \,. \tag{III.9}$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert à une dimension pour $y(x,t)$ en posant

$$\boldsymbol{c = \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}} \,. \tag{III.10}$$

Cette équation a justement été établie pour la première fois par Jean Le Rond d'Alembert, en 1747.

On en connaît déjà la solution générale :

$$y(x,t) = y_+(x - c\,t) + y_-(x + c\,t), \tag{III.11}$$

où y_+ et y_- sont des ondes progressives transversales se propageant, à la célérité c sans se déformer, respectivement vers les x croissants et décroissants.

En appliquant les opérateurs $\partial/\partial t$ et $F_0\,\partial/\partial x$ à l'équation III.9, on obtient la même équation pour les variables v_y et F_y au lieu de y.

2. Relation entre la tension et la vitesse vibrationnelle

La ***vitesse vibrationnelle*** est la vitesse $\vec{v}$ de déplacement d'un point du milieu (à bien distinguer de la célérité c de l'onde). Ici, $\vec{v} = v_y\,\vec{u}_y$ avec $v_y = \partial y/\partial t$.

Pour l'onde progressive y_+ vers les x croissants,

$$\frac{\partial y_+}{\partial x} = -\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial y_+}{\partial t} = -\,\frac{v_{y,+}}{c} \,. \tag{III.12}$$

Par ailleurs,

$$F_y \approx F_0 \, \frac{\partial y}{\partial x} \,, \tag{III.13}$$

donc

$$F_{y,+} = -Z\,v_{y,+}, \tag{III.14}$$

où

$$\boldsymbol{Z := \frac{F_0}{c}} \tag{III.15}$$

est une constante positive portant le nom d'***impédance de la corde***.

Pour une onde progressive y_- vers les x décroissants,

$$\frac{\partial y_-}{\partial x} = +\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial y_-}{\partial t} = +\,\frac{v_{y,-}}{c} \,, \tag{III.16}$$

donc

$$F_{y,-} = +Z\,v_{y,-}. \tag{III.17}$$

Remarquer qu'on obtient la même relation en introduisant la tension $F_{y,\uparrow}$ exercée par l'« aval », là où va l'onde progressive, sur l'« amont », là d'où elle vient. Pour y_+, $F_{y,\uparrow} = F_{y,+}$, mais pour y_-, $F_{y,\uparrow} = -F_{y,-}$. Dans les deux cas,

$$\boldsymbol{F_{y,\uparrow} = -Z\,v_{y,\pm}}. \tag{III.18}$$

Dans le cas général où $y = y_+ + y_-$, on a $F_y = F_{y,+} + F_{y,-}$, donc

$$\boldsymbol{F_y = -Z\,(v_{y,+} - v_{y,-})}. \tag{III.19}$$

Impédance complexe (hors programme)

Pour une corde vibrant sinusoïdalement (en temps) à la pulsation ω, on définit l'impédance complexe par

$$\underline{Z}_{\mathrm{c}} = -\,\frac{\underline{F}_y(x,t)}{\underline{v}_y(x,t)} \,. \tag{III.20}$$

En injectant dans l'équation de d'Alembert la représentation complexe

$$\underline{v}_y(x,t) = \underline{B}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}, \tag{III.21}$$

de $v_y(x,t)$, on obtient que

$$\underline{B}(x) = \underline{B}_+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,x/c} + \underline{B}_-\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,x/c}, \tag{III.22}$$

avec $\underline{B}_+$ et $\underline{B}_-$ des constantes complexes, d'où

$$\underline{v}_y(x,t) = \underbrace{\underline{B}_+\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,(t-x/c)}}_{=\underline{v}_{y,+}} + \underbrace{\underline{B}_-\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,(t+x/c)}}_{=\underline{v}_{y,-}} \tag{III.23}$$

et

$$\underline{F}_y(x,t) = -Z\,(\underline{v}_{y,+} - \underline{v}_{y,-}) = -Z\,\underline{B}_+\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,(t-x/c)} + Z\,\underline{B}_-\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,(t+x/c)}. \tag{III.24}$$

On en déduit finalement que

$$\underline{Z}_\mathrm{c}(\omega,x) = \frac{Z\,\underline{B}_+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,x/c} - Z\,\underline{B}_-\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,x/c}}{\underline{B}_+\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,x/c} + \underline{B}_-\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,x/c}}. \tag{III.25}$$

L'impédance complexe est donc une fonction de ω et x. Cas particuliers : si $\underline{y} = \underline{y}_+$ (c.-à-d. $\underline{B}_- = 0$), $\underline{Z}_\mathrm{c}(\omega,x) = +Z$; et si $\underline{y} = \underline{y}_-$ (c.-à-d. $\underline{B}_+ = 0$), $\underline{Z}_\mathrm{c}(\omega,x) = -Z$.

3. Aspects énergétiques

a. Puissance instantanée

La puissance instantanée reçue à l'instant t par la portion de corde située aux abscisses $x' \geqslant x$ de la part de la portion aux abscisses $x' < x$ est

$$\mathcal{P}(x,t) = -\vec{F}(x,t)\cdot\vec{v}(x,t) = -(F_x\,\vec{u}_x + F_y\,\vec{u}_y)\cdot v_y\,\vec{u}_y = -F_y\,v_y. \tag{III.26}$$

Comme $v_y = v_{y,+} + v_{y,-}$, la puissance instantanée transportée dans le sens des x croissants à l'abscisse x et au temps t est donc

$$\boldsymbol{\mathcal{P}(x,t) = Z\,(v_{y,+}^2 - v_{y,-}^2)}. \tag{III.27}$$

Chacune des ondes progressives y_+ et y_- transporte ainsi une puissance positive dans son sens de propagation : une puissance $\mathcal{P}_+ = Z\,v_{y,+}^2$ vers les x croissants pour y_+ ; une puissance $-Z\,v_{y,-}^2$ vers les x croissants pour y_-, soit une puissance $\mathcal{P}_- = Z\,v_{y,-}^2$ vers les x décroissants.

b. Puissance moyenne d'une onde sinusoïdale

Intéressons-nous en particulier au cas d'une onde progressive sinusoïdale,

$$y_\mathrm{sin}(x,t) = A\cos(\omega\,t - k_x\,x + \mathring{\varphi}). \tag{III.28}$$

On a

$$v_{y,\mathrm{sin}}(x,t) = -\omega\,A\sin(\omega\,t - k_x\,x + \mathring{\varphi}), \tag{III.29}$$

donc la puissance transportée dans le sens de $k_x\,\vec{u}_x$ par une onde sinusoïdale est

$$\mathcal{P}_\mathrm{sin}(x,t) = Z\,\omega^2\,A^2\sin^2(\omega\,t - k_x\,x + \mathring{\varphi}). \tag{III.30}$$

La moyenne de la fonction $x \mapsto \sin^2 x$ valant $1/2$ (cf. § I.31), la moyenne temporelle de la puissance transportée par une onde progressive sinusoïdale dans son sens de propagation vaut

$$\boldsymbol{\langle\mathcal{P}_\mathrm{sin}\rangle = \frac{1}{2}\,Z\,\omega^2\,A^2}, \tag{III.31}$$

indépendamment de t et de x.

B. Ondes sonores

1. Descriptions eulérienne et lagrangienne (hors programme)

Pour étudier le comportement d'un fluide, on peut adopter deux approches :

- soit l'on observe l'évolution de l'état du fluide au cours du temps en un point fixe de l'espace. En faisant de même en chaque point, on obtient une ***description eulérienne*** du fluide ;

- soit l'on suit l'évolution d'une particule de fluide. En faisant de même pour chaque particule, on obtient une ***description lagrangienne*** du fluide.

Intéressons-nous à une grandeur dont la valeur est donnée en chaque point de l'espace, de position $\vec{r} = (x, y, z)$, et à chaque instant t par un champ scalaire f. En description eulérienne, puisque l'on se place en un point fixe, la variation par unité de temps de cette grandeur est

$$\lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{f(\vec{r}, t+\mathrm{d}t) - f(\vec{r}, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{III.32}$$

En revanche, en description lagrangienne, une particule située à la position $\vec{r}$ à l'instant t s'est déplacée à la position $\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$, avec $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(\vec{r}, t)\,\mathrm{d}t$. La variation par unité de temps de la grandeur est donc

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} := \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{f(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}, t+\mathrm{d}t) - f(\vec{r}, t)}{\mathrm{d}t}. \tag{III.33}$$

Cette dérivée porte le nom de ***dérivée particulaire*** [※1].

Or

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f = f(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}, t+\mathrm{d}t) - f(\vec{r}, t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\ &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{III.34}$$

En divisant par $\mathrm{d}t$ et en prenant la limite $\mathrm{d}t \to 0$, on obtient que

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f}. \tag{III.35}$$

Si la grandeur est donnée par un champ vectoriel $\vec{f}$, on obtient en considérant chacune de ses composantes que [※2]

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{f}}, \tag{III.36}$$

où, pour n'importe quel vecteur $\vec{g}$,

$$\vec{g} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} := g_x \frac{\partial}{\partial x} + g_y \frac{\partial}{\partial y} + g_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{III.37}$$

En particulier, l'accélération de la particule située en $\vec{r}$ à t est

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}. \tag{III.38}$$

2. Équation d'onde à une dimension

On s'intéresse ici aux ondes sonores (on dit aussi « acoustiques ») se propageant dans un fluide contenu dans un tuyau d'axe Ox et de section de surface S constante. Pour traiter le problème, on va faire les hypothèses suivantes :

- Les différents champs ne dépendent spatialement que de l'abscisse *au repos*, notée x ci-après ;
- Le fluide est non visqueux : la seule force interne à considérer est donc celle résultant de la pression ;
- Les perturbations du milieu sont de faible ampleur et les vitesses de vibration sont faibles ;
- La pesanteur est négligeable.

Considérons un élément de fluide compris au repos entre les surfaces S_x et $S_{x+\mathrm{d}x}$, d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. La force extérieure exercée sur la surface S_x de l'élément vaut $p(x, t)\,S\,\vec{u}_x$, où p est la pression totale dans le fluide ; la force exercée sur la surface $S_{x+\mathrm{d}x}$ vaut $-p(x+\mathrm{d}x, t)\,S\,\vec{u}_x$.

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à l'élément de fluide, on obtient

$$\mathrm{d}m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = (p[x, t] - p[x+\mathrm{d}x, t])\,S\,\vec{u}_x. \tag{III.39}$$

Comme $\mathrm{d}m = \rho_0\,S\,\mathrm{d}x$, où ρ_0 est la masse volumique du fluide au repos, et que $\vec{v} = v(x, t)\,\vec{u}_x$, on obtient en faisant un développement limité de $p(x + \mathrm{d}x, t)$ au premier ordre en $\mathrm{d}x$ et en simplifiant par $\mathrm{d}x$ et S que

$$\rho_0\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{III.40}$$

1. On la note parfois aussi « $\mathrm{D}f/\mathrm{D}t$ ».
2. On pourrait d'ailleurs écrire la même expression pour le champ scalaire f. En revanche, même si on peut lui attribuer un sens, l'écriture $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{f}$ est ambiguë.

Enfin, d'après III.38,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial x}\,v + \frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{\partial v}{\partial t}\,, \tag{III.41}$$

car le terme advectif $v\,\partial v/\partial x$ est négligeable devant le terme $\partial v/\partial t$ d'après l'hypothèse selon laquelle la vitesse vibrationnelle est faible.

On en déduit que

$$\rho_0\,\frac{\partial v}{\partial t} = -\,\frac{\partial p}{\partial x}\,. \tag{III.42}$$

La dérivée $\partial p/\partial x$ peut être calculée à partir de la compressibilité du milieu,

$$\boldsymbol{\chi = -\,\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial p}}, \tag{III.43}$$

où V est le volume considéré. Pour l'élément de volume au repos entre x et $x + \mathrm{d}x$ et dont les faces se déplacent respectivement en $x + \psi(x,t)$ et $x + \mathrm{d}x + \psi(x + \mathrm{d}x, t)$, le volume au repos vaut

$$V_0 = ([x + \mathrm{d}x] - x)\,S = S\,\mathrm{d}x \tag{III.44}$$

et le volume perturbé,

$$V_0 + \delta V = ([x + \mathrm{d}x + \psi(x + \mathrm{d}x, t)] - [x + \psi(x,t)])\,S = S\,\mathrm{d}x + (\psi[x + \mathrm{d}x, t] - \psi[x,t])\,S. \tag{III.45}$$

La variation de volume est donc

$$\delta V = (\psi[x + \mathrm{d}x, t] - \psi[x,t])\,S \approx S\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x. \tag{III.46}$$

Une pression p_0 uniforme (indépendante de la position et du temps) règne au repos dans le milieu. Quand l'onde le traverse, la pression devient $p(x,t) = p_0 + \delta p(x,t)$, où δp est la ***pression acoustique*** (ou ***surpression***, mais noter que celle-ci peut être négative). On a donc

$$\begin{aligned}\chi &= -\,\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial p} \approx -\,\frac{1}{V_0}\,\frac{\delta V}{\delta p}\\ &= -\,\frac{1}{S\,\mathrm{d}x}\,\frac{S\,(\partial\psi/\partial x)\,\mathrm{d}x}{\delta p} = -\,\frac{1}{\delta p}\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\,,\end{aligned} \tag{III.47}$$

soit

$$\boldsymbol{\delta p = -\,\frac{1}{\chi}\,\frac{\partial \psi}{\partial x}}, \tag{III.48}$$

Comme

$$\rho_0\,\frac{\partial v}{\partial t} = -\,\frac{\partial p}{\partial x}\,, \tag{III.49}$$

que $v = \partial\psi/\partial t$, que $p = p_0 + \delta p$, que $\partial p_0/\partial x = 0$ et que χ ne dépend pas de x, on obtient

$$\rho_0\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = +\,\frac{1}{\chi}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\,. \tag{III.50}$$

Le champ ψ obéit donc à l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \chi\,\rho_0\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\,, \tag{III.51}$$

dont la solution est de la forme

$$\psi(x,t) = \psi_+(x - c\,t) + \psi_-(x + c\,t), \tag{III.52}$$

où ψ_+ et ψ_- sont des ondes progressives vers les x croissants et décroissants, respectivement, de célérité

$$\boldsymbol{c = \frac{1}{\sqrt{\chi\,\rho_0}}}. \tag{III.53}$$

Ces ondes sont longitudinales puisque le déplacement ψ est parallèle à la direction de propagation x.

En appliquant les opérateurs $\partial/\partial t$ et $(-1/\chi)\,\partial/\partial x$ à l'équation III.51, on obtient la même équation pour les variables v et δp au lieu de ψ.

3. Compressibilité d'un gaz parfait

La compressibilité χ se calcule aisément dans le cas où le fluide où se propage l'onde est un gaz parfait. Il faut cependant préciser le type de transformation subie par l'élément de volume quand l'onde le parcourt. On distingue notamment deux cas :

- Transformation isotherme à une température T constante dans le gaz : $\chi = \chi_T$. Il faut pour cela que le volume ait le temps d'échanger de la chaleur avec l'extérieur ;
- Transformation adiabatique : $\chi = \chi_\mathcal{S}$.

Or le temps de traversée de l'élement par l'onde est bien inférieur au temps caractéristique d'échange de chaleur avec l'extérieur au volume. La température de l'élément ne peut donc être maintenue constante et la transformation est quasi adiabatique. Par ailleurs, le passage de l'onde ne provoque pas de changement irréversible du milieu, donc l'entropie $\mathcal{S}$ est conservée (d'où le « $\mathcal{S}$ » en indice de χ). Enfin, la perturbation étant de faible ampleur, on peut considérer que la transformation est quasi statique. On peut donc appliquer la loi de Laplace, $p\,V^\gamma = \mathrm{c^{te}}$, à l'élément de volume, où $\gamma = C_p/C_V$ et C_p et C_V sont, respectivement, les capacités calorifiques à pression constante et à volume constant.

Différencions la relation $p\,V^\gamma = \mathrm{c^{te}}$. On obtient

$$\mathrm{d}p\,V^\gamma + \gamma\,p\,V^{\gamma-1}\,\mathrm{d}V = 0, \tag{III.54}$$

soit

$$\chi_\mathcal{S} = -\frac{1}{V}\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{\gamma\,p} \approx \frac{1}{\gamma\,p_0}\,. \tag{III.55}$$

D'après la loi des gaz parfaits, $p_0\,V_0 = n\,R\,T$, où n est le nombre de moles dans le volume V_0 et T est la température du milieu. En écrivant que $n = m/M$, où $m = \rho_0\,V_0$ est la masse de l'élément et M est la masse molaire du gaz, on obtient

$$\chi_\mathcal{S} = \frac{V_0}{\gamma\,n\,R\,T} = \frac{M}{\gamma\,\rho_0\,R\,T}\,. \tag{III.56}$$

La célérité du son est donc donnée par

$$c = \frac{1}{\sqrt{\chi_\mathcal{S}\,\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma\,R\,T}{M}}\,. \tag{III.57}$$

Pour l'air, composé à 80 % de N_2 (28 g/mol) et à 20 % d'O_2 (32 g/mol), $M = (0{,}8\times 28 + 0{,}2\times 32)$ g/mol $= 28{,}8\times 10^{-3}$ kg/mol. Ces deux gaz sont diatomiques, donc, aux températures usuelles, $\gamma = 7/5$. À $T = 20$ °C $= 293$ K,

$$\boldsymbol{c} = \sqrt{\frac{1{,}4\times 8{,}32\times 293}{28{,}8\times 10^{-3}}} \mathbf{= 344\,m/s}, \tag{III.58}$$

un résultat très proche de la valeur expérimentale.

La célérité des ondes acoustiques est supérieure dans les liquides (1500 m/s dans l'eau) et les solides (plusieurs km/s ; il y a aussi des ondes transversales, mais celles-ci sont plus lentes que les ondes longitudinales).

4. Relation entre surpression et vitesse vibrationnelle

La vitesse vibrationnelle $\vec{v}$ de déplacement d'un point du milieu vaut ici $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$ avec $v = \partial\psi/\partial t$.

Pour l'onde progressive ψ_+ vers les x croissants,

$$\frac{\partial\psi_+}{\partial x} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\psi_+}{\partial t} = -\frac{v_+}{c}\,. \tag{III.59}$$

La force due à la surpression exercée par la partie du milieu située aux abscisses $x' > x$ sur la partie $x' \leqslant x$ vaut $F(x,t)\,\vec{u}_x$ avec

$$F(x,t) = -S\,\delta p(x,t) = \frac{S}{\chi}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{S}{\chi\,c}\,v_+, \tag{III.60}$$

donc

$$F_+ = -Z\,v_+, \tag{III.61}$$

où

$$\boldsymbol{Z := \frac{S}{\chi\,c}} \tag{III.62}$$

est une constante positive portant le nom d'***impédance du tuyau***.

Pour une onde progressive ψ_- vers les x décroissants,

$$\frac{\partial\psi_-}{\partial x} = +\frac{1}{c}\,\frac{\partial\psi_-}{\partial t} = +\frac{v_-}{c}\,, \tag{III.63}$$

donc
$$F_- = +Z\,v_-. \tag{III.64}$$

Comme pour la corde vibrante, on obtient une relation générale en introduisant la force $F_\uparrow$ exercée par l'« aval », là où va l'onde progressive, sur l'« amont », là d'où elle vient. Pour ψ_+, $F_\uparrow = F_+$, mais pour ψ_-, $F_\uparrow = -F_-$ Dans les deux cas,
$$\boldsymbol{F_\uparrow = -Z\,v_\pm}. \tag{III.65}$$

Dans le cas général où $\psi = \psi_+ + \psi_-$, on a $F = F_+ + F_-$, donc
$$\boldsymbol{F = -Z\,(v_+ - v_-)}. \tag{III.66}$$

On définit aussi l'***impédance caractéristique*** par
$$\boldsymbol{z = \frac{Z}{S} = \frac{1}{\chi\,c}}. \tag{III.67}$$
De $F = -\delta p\,S$, on déduit que
$$\boldsymbol{\delta p = z\,(v_+ - v_-)}. \tag{III.68}$$

5. Aspects énergétiques

La puissance instantanée reçue à l'instant t, du fait de la surpression[※3], par l'air dans la portion de tuyau située aux abscisses (au repos) $x' \geqslant x$ de la part de la portion aux abscisses $x' < x$ est
$$\mathcal{P}(x,t) = \delta p(x,t)\,S\,\vec{u}_x \cdot \vec{v}(x,t) = \delta p\,S\,v \boldsymbol{= Z\,(v_+^2 - v_-^2)}. \tag{III.71}$$
Comme pour la corde vibrante, chacune des ondes progressives ψ_+ et ψ_- transporte donc une puissance positive dans son sens de propagation : une puissance $\mathcal{P}_+ = Z\,v_+^2$ vers les x croissants pour ψ_+ ; une puissance $-Z\,v_-^2$ vers les x croissants pour ψ_-, soit une puissance $\mathcal{P}_- = Z\,v_-^2$ vers les x décroissants.

Pour une onde acoustique sinusoïdale dans un tuyau, on obtient les mêmes expressions des puissances instantanée et moyenne que pour une corde vibrante (cf. III.30 et III.31).

a. Intensité acoustique et niveau sonore

On appelle ***intensité acoustique*** la quantité
$$\boldsymbol{I = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{S}}. \tag{III.72}$$
Pour une onde progressive sinusoïdale,
$$\boldsymbol{I_{\sin} = \frac{1}{2}\,z\,\omega^2\,A^2}. \tag{III.73}$$

L'intensité acoustique s'exprime en $\mathrm{W/m^2}$ dans le système international. On utilise fréquemment à la place le ***niveau d'intensité acoustique en décibels* (dB)**, défini par rapport à l'**intensité de référence $\boldsymbol{I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}}$** par
$$\boldsymbol{L = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}}. \tag{III.74}$$
Pour une oreille normale, le seuil d'audibilité décroît de 70 dB vers 30 Hz à 10 dB vers 2 kHz et remonte à 50 dB vers 20 kHz. Le seuil de douleur est d'environ 120 dB sur tout l'intervalle de fréquence.

L'amplitude de déplacement d'une onde acoustique est extrêmement faible : à une fréquence de 1000 Hz, $A \approx 10^{-10}$ m pour un niveau sonore de 20 dB.

6. Ondes acoustiques à trois dimensions

a. Équation d'onde (hors programme)

Un tuyau est un milieu essentiellement unidimensionnel. Plus généralement, à trois dimensions, le déplacement à l'instant t d'un élément de fluide est un vecteur, $\vec{\psi}(\vec{r},t)$, où $\vec{r}$ est la position au repos de l'élément.

3. On peut aussi s'intéresser à la puissance instantanée de la force de pression totale,
$$\mathcal{P}_{\text{tot}}(x,t) = (p_0 + \delta p[x,t])\,S\,v(x,t). \tag{III.69}$$
La puissance moyenne de cette force vaut
$$\langle \mathcal{P}_{\text{tot}} \rangle = p_0\,S\,\langle v \rangle + S\,\langle \delta p\,v \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle. \tag{III.70}$$
En effet, $\langle v \rangle = 0$ pour une onde puisque le déplacement du milieu est borné.

La relation III.48 devient alors

$$\delta p = -\frac{1}{\chi}\operatorname{div}\vec{\psi} \tag{III.75}$$

et la relation fondamentale de la dynamique (III.40) prend la forme

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\delta p, \tag{III.76}$$

où

$$\vec{v} = \frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t}. \tag{III.77}$$

En négligeant le terme advectif $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$ dans III.38, on obtient

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\delta p = \rho_0 \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \tag{III.78}$$

$$= \rho_0 \frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2}. \tag{III.79}$$

Supposons ρ_0 et χ constantes. En prenant la divergence de III.79, on obtient que

$$\rho_0 \operatorname{div}\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} = -\Delta\delta p, \tag{III.80}$$

puisque $\operatorname{div}\overrightarrow{\mathrm{grad}} = \Delta$. En intervertissant la dérivée spatiale div et la dérivée temporelle $\partial^2/\partial t^2$, on a finalement

$$\Delta\delta p - \chi\,\rho_0 \frac{\partial^2\delta p}{\partial t^2} = 0. \tag{III.81}$$

La surpression obéit donc à l'équation de d'Alembert à trois dimensions pour la célérité

$$c = \frac{1}{\sqrt{\chi\,\rho_0}}. \tag{III.82}$$

Le déplacement $\vec{\psi}$ et la vitesse vibrationnelle $\vec{v}$ obéissent en revanche à une équation plus compliquée (voir ci-dessous).

b. Ondes sphériques

L'équation III.81 admet des solutions sphériques de la forme

$$\delta p(r,t) = \frac{f_+(r - c\,t)}{r} + \frac{f_-(r + c\,t)}{r}. \tag{III.83}$$

Pour une source ponctuelle isotrope, la solution se réduit à

$$\delta p(r,t) = \frac{f_+(r - c\,t)}{r}. \tag{III.84}$$

Déterminons maintenant la vitesse vibrationnelle. Les ondes acoustiques étant longitudinales, $\vec{v}(\vec{r},t) = v(r,t)\,\vec{u}_r$ pour une onde sphérique et la relation III.78 prend la forme

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial\delta p}{\partial r}. \tag{III.85}$$

En raison du facteur $1/r$ dans l'expression de δp, la vitesse vibrationnelle n'obéit pas à l'équation de d'Alembert car elle est somme d'un terme en $1/r^2$ et d'un terme en $1/r$. À grande distance, le premier est négligeable et l'on obtient à nouveau que

$$\delta p(r,t) \approx z\,v(r,t). \tag{III.86}$$

La puissance traversant une portion de surface sphérique d'aire S située à la distance r de la source est donc

$$\mathcal{P}(r,t) = \delta p(r,t)\,S\,v(r,t) = z\,v^2(r,t)\,S = \frac{(\delta p)^2(r,t)}{z}\,S. \tag{III.87}$$

Pour une surface vue sous un angle solide Ω, $S = \Omega\,r^2$, donc

$$\mathcal{P} = \frac{f_+^2(r - c\,t)}{z}\,\Omega. \tag{III.88}$$

En particulier, pour une onde sinusoïdale,

$$\delta p(r,t) = \frac{a}{r}\cos(\omega\,t - k\,r + \mathring{\varphi}). \tag{III.89}$$

Avec $I = \langle\mathcal{P}\rangle/S$, on obtient que

$$I = \frac{a^2\,\omega^2}{2\,z\,r^2}. \tag{III.90}$$

L'intensité varie donc comme l'inverse du carré de la distance.