

Chapitre VII

Ondes électromagnétiques dans le vide

A. Équation des ondes électromagnétiques dans le vide

Rappelons d'abord la forme générale des équations de Maxwell :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (\text{VII.1})$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{VII.2})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (\text{VII.3})$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{VII.4})$$

On déduit de VII.2 et VII.3 que \vec{E} et \vec{B} peuvent s'exprimer en fonction d'un potentiel scalaire V et d'un potentiel vecteur \vec{A} comme ceci :

$$\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (\text{VII.5})$$

$$\vec{B} = \vec{\operatorname{rot}} \vec{A}. \quad (\text{VII.6})$$

Ces équations ne suffisent pas à déterminer V et \vec{A} de manière univoque. Il est possible d'imposer une condition supplémentaire, dite de jauge. La jauge de Lorentz,

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad (\text{VII.7})$$

est particulièrement commode car, dans celle-ci,

$$\square V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (\text{VII.8})$$

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (\text{VII.9})$$

où

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{VII.10})$$

est l'opérateur **d'Alembertien** et $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

On s'intéresse ici aux équations de Maxwell dans le vide, c.-à-d. dans une région où $\rho = 0$ et $\vec{j} = 0$:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (\text{VII.11})$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{VII.12})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (\text{VII.13})$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{VII.14})$$

Prenons le rotationnel de l'équation VII.12. On a

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{a}) = \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}, \quad (\text{VII.15})$$

donc, dans le vide,

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{E}) = -\Delta \vec{E} = -\vec{\operatorname{rot}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\vec{\operatorname{rot}} \vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})}{\partial t}, \quad (\text{VII.16})$$

d'où

$$\square \vec{E} = \vec{0}. \quad (\text{VII.17})$$

De même,

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\Delta \vec{B} = \vec{\text{rot}} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{E})}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial(-\partial \vec{B}/\partial t)}{\partial t}, \quad (\text{VII.18})$$

d'où

$$\square \vec{B} = \vec{0}. \quad (\text{VII.19})$$

Remarquer que \vec{E} et \vec{B} sont découplés dans les équations VII.17 et VII.19.

En jauge de Lorenz, les équations VII.8 et VII.9 donnent également

$$\square V = 0, \quad (\text{VII.20})$$

$$\square \vec{A} = \vec{0} \quad (\text{VII.21})$$

dans le vide.

On obtient dans tous les cas l'équation de d'Alembert décrivant la propagation tridimensionnelle à la vitesse c d'une onde $\psi(\vec{r}, t)$ non atténuée :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0 \quad \text{dans le vide}, \quad (\text{VII.22})$$

où $\psi \in \{\vec{E}, \vec{B}, V, \vec{A}\}$. Cette équation est également valable pour les composantes cartésiennes de \vec{E} , \vec{B} et \vec{A} *1.

La vitesse $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ des ondes électromagnétiques étant égale à la vitesse mesurée pour la lumière visible dans le vide, on peut légitimement supposer que la lumière est une onde électromagnétique. Cette hypothèse a été confirmée par de nombreuses expériences d'interaction de la lumière avec des particules chargées.

B. Ondes planes

1. Ondes planes progressives (OPP)

a. Caractère transverse

Intéressons-nous au cas où ψ est le champ électrique ou le champ magnétique. On a toujours $\text{div} \vec{B} = 0$. Par ailleurs, $\text{div} \vec{E} = 0$ puisqu'on est dans le vide. Pour une onde plane progressive vers les x croissants, c.-à-d. telle que $\vec{E} = \vec{E}(x, t) = \vec{E}(u)$ avec $u = x - ct$, on a

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (\text{VII.23})$$

E_x ne dépend donc pas de x , ni non plus de t puisque, \vec{E} étant fonction de u seulement, on a $\partial E_x/\partial x = -(1/c) \partial E_x/\partial t$.

Dans ce qui suit, nous retranchons aux champs électrique et magnétique l'éventuel terme constant par rapport à t .

Dans le reste de ce chapitre, \vec{E} et \vec{B} ne désignent plus que la partie variable des champs.

Avec cette convention, on a ainsi $E_x = 0$. On obtient le même résultat pour une onde progressant vers les x décroissants, ainsi que pour le champ \vec{B} dans les deux sens.

Pour une onde plane progressive vers les x croissants, $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$, donc

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{u}_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{u}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \vec{u}_y - \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{u}_z \quad (\text{VII.24})$$

d'après l'équation VII.12. Or $\partial/\partial x = \partial/\partial u$ et $\partial/\partial t = -c \partial/\partial u$, donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial u} &= -c \frac{\partial B_y}{\partial u}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial u} &= c \frac{\partial B_z}{\partial u}. \end{aligned} \quad (\text{VII.25})$$

1. Attention, ce n'est pas vrai pour les composantes cylindriques car $\Delta \vec{f} \neq \Delta f_\rho \vec{u}_\rho + \Delta f_\phi \vec{u}_\phi + \Delta f_z \vec{u}_z$. Idem pour les composantes sphériques.

En intégrant la première équation de VII.25 par rapport à u , on obtient

$$E_z = -c B_y + K, \quad (\text{VII.26})$$

où K est une constante. En moyennant sur le temps, on obtient que $\langle E_z \rangle = -c \langle B_y \rangle + K$, soit $K = 0$ puisque, les composantes stationnaires ayant été déjà retranchées à E_z et B_y , on a $\langle E_z \rangle = \langle B_y \rangle = 0$. On a ainsi, en appliquant le même raisonnement à la deuxième équation de VII.25,

$$\begin{aligned} E_z &= -c B_y, \\ E_y &= c B_z, \end{aligned} \quad (\text{VII.27})$$

soit

$$\vec{E} = -c \vec{u}_x \times \vec{B} \quad (\text{VII.28})$$

et

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_x \times \vec{E}. \quad (\text{VII.29})$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} d'une onde plane progressive n'ont donc pas de composante (variable) dans la direction de propagation : les ondes électromagnétiques sont **transverses**, c.-à-d. que les champs \vec{E} et \vec{B} sont normaux à la direction de propagation.

Pour une onde plane progressive selon $+\vec{n}$, ils obéissent aux relations

$$\vec{E} = -c \vec{n} \times \vec{B} \quad (\text{VII.30})$$

et

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E}. \quad (\text{VII.31})$$

Les vecteurs \vec{n} , \vec{E} et \vec{B} forment donc un trièdre rectangle direct et

$$\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|. \quad (\text{VII.32})$$

b. Intensité d'une onde électromagnétique

D'après le théorème de Poynting, une densité d'énergie

$$u_{EB} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\text{VII.33})$$

et une densité de flux d'énergie donnée par le vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (\text{VII.34})$$

peuvent être associées au champ électromagnétique.

L'**intensité** d'une onde électromagnétique est définie comme la moyenne temporelle de la norme de la densité du flux d'énergie du champ associé à cette onde :

$$I_{\text{OEM}} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle. \quad (\text{VII.35})$$

Pour une onde plane progressive selon $+\vec{n}$,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n}, \quad (\text{VII.36})$$

donc

$$I_{\text{OEM}} = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle. \quad (\text{VII.37})$$

c. Vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique dans le vide

La densité d'énergie du champ associé à l'onde est

$$u_{EB} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (\text{VII.38})$$

On vérifie que, pendant une durée dt , l'énergie de l'onde traversant une surface $d\vec{S}$, qui vaut

$$\vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt,$$

est égale à l'énergie présente dans le volume

$$d\tau = d\vec{S} \cdot c dt \vec{n}, \quad (\text{VII.39})$$

c.-à-d.

$$u_{EB} d\tau.$$

Cela signifie que cette énergie se propage bien à la vitesse $c\vec{n}$ de l'onde et a traversé la surface $d\vec{S}$ pendant dt .

2. Ondes planes progressives monochromatiques (OPPM)

a. Opérateurs vectoriels et représentation complexe

Pour un champ $\psi(\vec{r}, t)$ scalaire (V) ou vectoriel (\vec{E} , \vec{B} ou \vec{A}) décrivant une OPPM de pulsation ω se propageant à la célérité c vers $+\vec{n}$, sa représentation complexe est

$$\underline{\psi}(\vec{r}, t) = \underline{A} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (\text{VII.40})$$

avec

$$\underline{A} = A e^{i\phi} \quad \text{et} \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}. \quad (\text{VII.41})$$

La dérivée de $\underline{\psi}$ par rapport à x est

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial x} = -i \frac{\partial(\vec{k} \cdot \vec{r})}{\partial x} \underline{\psi} = -i k_x \underline{\psi}. \quad (\text{VII.42})$$

Plus généralement, si $\underline{\psi}$ est une onde scalaire ou l'une des composantes cartésiennes d'une onde vectorielle,

$$\overrightarrow{\text{grad}} \underline{\psi} = -i \vec{k} \underline{\psi}. \quad (\text{VII.43})$$

Pour une onde vectorielle $\underline{\vec{\psi}}$,

$$\text{div} \underline{\vec{\psi}} = -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{\psi}} \quad (\text{VII.44})$$

et

$$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{\psi}} = -i \vec{k} \times \underline{\vec{\psi}}. \quad (\text{VII.45})$$

Que la fonction soit scalaire ou vectorielle, son laplacien est donné par

$$\Delta \underline{\psi} = -k^2 \underline{\psi}. \quad (\text{VII.46})$$

Un des intérêts de la notation complexe est que, lorsqu'on se restreint à des combinaisons linéaires de dérivées de $\underline{\psi}$, le facteur $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ apparaît dans tous les termes et peut donc être simplifié.

b. Application aux OPPM dans le vide

Pour une OPPM dans le vide, les équations de Maxwell dans le vide (VII.11 à VII.14) prennent la forme suivante :

$$-i \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0, \quad (\text{VII.47})$$

$$-i \vec{k} \times \underline{\vec{E}} = -i \omega \underline{\vec{B}}, \quad (\text{VII.48})$$

$$-i \vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0, \quad (\text{VII.49})$$

$$-i \vec{k} \times \underline{\vec{B}} = i \omega \varepsilon_0 \mu_0 \underline{\vec{E}}. \quad (\text{VII.50})$$

De VII.47 et VII.49, on déduit immédiatement que $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ sont perpendiculaires à \vec{k} . De VII.48 et VII.50, on déduit également que $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ sont perpendiculaires l'un à l'autre (et on retrouve qu'ils sont orthogonaux à \vec{k}).

À partir de ces équations, on trouve aussi que

$$-i \vec{k} \times (\vec{k} \times \underline{\vec{E}}) = -i \omega \vec{k} \times \underline{\vec{B}} = \omega i \omega \varepsilon_0 \mu_0 \underline{\vec{E}}. \quad (\text{VII.51})$$

Comme $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$,

$$-\vec{k} \times (\vec{k} \times \underline{\vec{E}}) = -\vec{k}(\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}) + \underline{\vec{E}}(\vec{k} \cdot \vec{k}) = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \underline{\vec{E}}. \quad (\text{VII.52})$$

Les vecteurs \vec{k} et \vec{E} étant perpendiculaires d'après ce qui précède, on obtient finalement, en simplifiant par \vec{E} , la relation de dispersion

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \quad (\text{VII.53})$$

et on retrouve l'expression de la vitesse de phase des ondes électromagnétiques dans le vide,

$$c := \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (\text{VII.54})$$

3. Polarisation des ondes électromagnétiques

a. Cas d'une OPPM

Considérons une OPPM se propageant selon $+\vec{u}_x$. On a alors, avec $k := \|\vec{k}\|$,

$$\begin{cases} E_x = 0, \\ E_y = \mathcal{A}_y \cos(\omega t - kx + \phi_y), \\ E_z = \mathcal{A}_z \cos(\omega t - kx + \phi_z). \end{cases} \quad (\text{VII.55})$$

En posant

$$\phi_0 = \phi_y - \phi_z, \quad (\text{VII.56})$$

on obtient

$$\frac{E_z}{\mathcal{A}_z} = \cos(\omega t - kx + \phi_y - \phi_0) = \cos(\omega t - kx + \phi_y) \cos \phi_0 + \sin(\omega t - kx + \phi_y) \sin \phi_0, \quad (\text{VII.57})$$

d'où

$$\frac{E_z}{\mathcal{A}_z} - \frac{E_y}{\mathcal{A}_y} \cos \phi_0 = \sin(\omega t - kx + \phi_y) \sin \phi_0. \quad (\text{VII.58})$$

Par ailleurs,

$$\frac{E_y}{\mathcal{A}_y} \sin \phi_0 = \cos(\omega t - kx + \phi_y) \sin \phi_0. \quad (\text{VII.59})$$

En faisant la somme des carrés des deux dernières équations, on obtient

$$\left(\frac{E_y}{\mathcal{A}_y}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{\mathcal{A}_z}\right)^2 - 2 \frac{E_y}{\mathcal{A}_y} \frac{E_z}{\mathcal{A}_z} \cos \phi_0 = \sin^2 \phi_0. \quad (\text{VII.60})$$

Étudions d'abord les deux cas les plus simples : la **polarisation rectiligne** (ou **linéaire**) et la **polarisation circulaire**.

a. Polarisation rectiligne

Si $\phi_0 \in \{0, \pi\}$ (modulo 2π), alors $\sin \phi_0 = 0$ et $\cos \phi_0 = \pm 1 =: s$, donc

$$\left(\frac{E_y}{\mathcal{A}_y}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{\mathcal{A}_z}\right)^2 - 2s \frac{E_y}{\mathcal{A}_y} \frac{E_z}{\mathcal{A}_z} = \left(\frac{E_y}{\mathcal{A}_y} - s \frac{E_z}{\mathcal{A}_z}\right)^2 = 0, \quad (\text{VII.61})$$

soit la relation linéaire

$$E_z = \frac{s \mathcal{A}_z}{\mathcal{A}_y} E_y. \quad (\text{VII.62})$$

Le vecteur \vec{E} oscille donc dans le plan (\vec{u}_x, \vec{v}) , où \vec{v} fait un angle (orienté par \vec{u}_x)

$$\theta = \arctan \frac{s \mathcal{A}_z}{\mathcal{A}_y} \quad (\text{VII.63})$$

avec \vec{u}_y . On dit que la **polarisation**^{*2} de \vec{E} ^{*3} est **rectiligne** (ou **linéaire**) selon \vec{v} .

β. Polarisation circulaire

Si $\mathcal{A}_y = \mathcal{A}_z$ et $\phi_0 = \pm\pi/2$ (modulo π),

$$E_z = \mathcal{A}_z \cos(\omega t - kx + \phi_y \mp \pi/2) = \pm \mathcal{A}_y \sin(\omega t - kx + \phi_y). \quad (\text{VII.64})$$

2. La polarisation d'une onde ne doit pas être confondue avec la polarisation d'un dipôle.

3. Rappelons que \vec{B} fait un angle (orienté par \vec{u}_x) de $+\pi/2$ avec \vec{E} .

À x fixé, le vecteur (E_y, E_z) décrit en fonction de t un cercle dans le sens trigonométrique autour de $+\vec{u}_x$ si $\phi_0 = +\pi/2$ et dans le sens horaire si $\phi_0 = -\pi/2$. La polarisation est qualifiée de **circulaire gauche** dans le premier cas et de **circulaire droite** dans le deuxième cas.

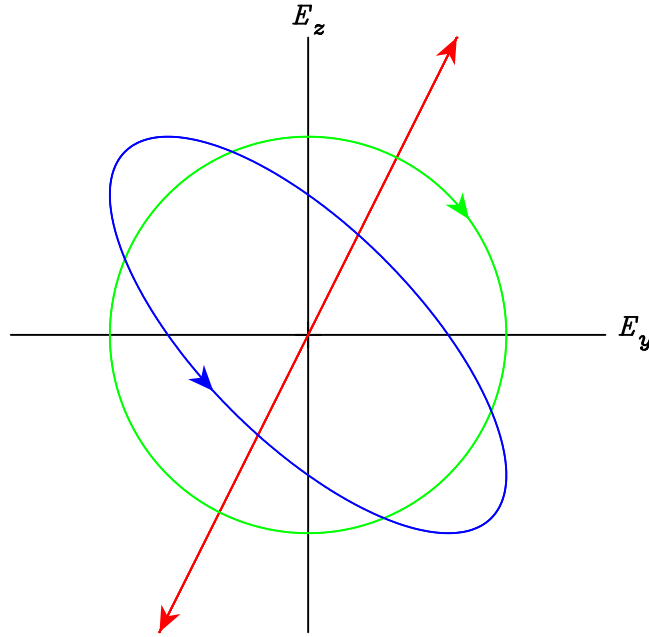


FIGURE VII.1. – Évolution en fonction du temps du champ \vec{E} d'une OPPM à une position fixée ; l'onde se propage vers l'observateur. Rouge : polarisation rectiligne. Vert : polarisation circulaire droite. Bleu : polarisation elliptique gauche.

γ . Polarisation elliptique

Si $\phi_0 \notin \{0, \pi\}$ (modulo 2π), on reconnaît (?) dans VII.60 l'équation d'une ellipse. En effet, l'équation d'une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe $b \leq a$ selon des vecteurs orthogonaux \vec{u}_Y et \vec{u}_Z est

$$\frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1. \quad (\text{VII.65})$$

Si les vecteurs unitaires \vec{u}_Y et \vec{u}_Z sont les images de \vec{u}_y et \vec{u}_z par une rotation d'axe \vec{u}_x et d'angle $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ et que Y et Z sont les composantes de \vec{E} dans (\vec{u}_Y, \vec{u}_Z) (c.-à-d. $Y\vec{u}_Y + Z\vec{u}_Z = E_y\vec{u}_y + E_z\vec{u}_z$),

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta E_y + \sin \theta E_z \\ -\sin \theta E_y + \cos \theta E_z \end{bmatrix}, \quad (\text{VII.66})$$

où «^T» désigne la transposée de la matrice. On obtient donc

$$E_y^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) + E_z^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2} \right) - 2 E_y E_z \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) = 1. \quad (\text{VII.67})$$

En identifiant les termes dans VII.60 et VII.67, on obtient

$$\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} = \frac{1}{A_y^2 \sin^2 \phi_0}, \quad (\text{VII.68})$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2} = \frac{1}{A_z^2 \sin^2 \phi_0}, \quad (\text{VII.69})$$

$$\sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{\cos \phi_0}{A_y A_z \sin^2 \phi_0}. \quad (\text{VII.70})$$

La polarisation est dite **elliptique**. Le cas de la polarisation rectiligne correspond à une ellipse dégénérée : le demi-petit axe est nul et l'ellipse se réduit à un segment de longueur $2a$ faisant un angle θ avec \vec{u}_y .

Cherchons les caractéristiques de cette ellipse. En ajoutant VII.68 et VII.69, on a

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{A_y^2} + \frac{1}{A_z^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \phi_0} := \alpha. \quad (\text{VII.71})$$

La différence VII.69 – VII.68 donne

$$\cos(2\theta) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) = \left(\frac{1}{\mathcal{A}_z^2} - \frac{1}{\mathcal{A}_y^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \phi_0} := \beta. \quad (\text{VII.72})$$

L'équation VII.70 peut être réécrite

$$\sin(2\theta) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{2 \cos \phi_0}{\mathcal{A}_y \mathcal{A}_z \sin^2 \phi_0} := \gamma. \quad (\text{VII.73})$$

La combinaison VII.72² + VII.73² donne

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \quad (\text{VII.74})$$

(la solution négative est exclue car $b \leq a$), d'où, en faisant la somme et la différence de VII.71 et VII.74,

$$a = \sqrt{\frac{2}{\alpha - \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}}, \quad (\text{VII.75})$$

$$b = \sqrt{\frac{2}{\alpha + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}}. \quad (\text{VII.76})$$

La polarisation elliptique devient circulaire lorsque le demi-grand axe a et le demi-petit axe b sont égaux, c.-à-d. quand $\beta = \gamma = 0$. On a alors $\mathcal{A}_y = \mathcal{A}_z$ et $\phi_0 = \pm\pi/2$ (modulo π). On retrouve le cas étudié précédemment.

Les équations VII.72 et VII.73 permettent de déterminer θ . On peut écrire que

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{\gamma}{\beta} \quad (\text{modulo } \pi/2) \quad (\text{VII.77})$$

et ne retenir que la solution dans $]-\pi/2, \pi/2]$ qui soit du signe de γ (les signes de $\sin(2\theta)$ et γ sont identiques d'après VII.73). On peut aussi écrire directement que^{*4}

$$\theta = \arctan \frac{\gamma}{\beta + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}. \quad (\text{VII.78})$$

δ. Sens de rotation de \vec{E}

La polarisation est dite *gauche* si, en un point donné, l'extrémité de \vec{E} décrit au cours du temps une ellipse dans le sens trigonométrique défini par le vecteur d'onde, c.-à-d. quand on regarde l'onde venant vers soi; elle est dite *droite* si \vec{E} tourne dans le sens horaire.^{*5}

Pour déterminer le sens de la polarisation, on peut calculer le vecteur $\vec{E} \times \partial \vec{E} / \partial t$. En effet, si la polarisation est gauche, alors $\vec{E}(t) \times \vec{E}(t + dt)$ est selon $+\vec{u}_x$ pour un intervalle de temps infinitésimal positif dt . Or

$$\vec{E}(t) \times \vec{E}(t + dt) \approx \vec{E}(t) \times \left(\vec{E}(t) + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dt \right) = \vec{E}(t) \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dt. \quad (\text{VII.79})$$

Comme $dt > 0$, si le vecteur $\vec{E} \times \partial \vec{E} / \partial t$ est selon $+\vec{u}_x$, la polarisation est gauche; s'il est selon $-\vec{u}_x$, elle est

4. De manière générale, si $\rho \cos \phi = A$ et $\rho \sin \phi = B$, avec $\rho > 0$ et $\phi \in]-\pi, \pi]$, alors $\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$ et

$$\rho + \rho \cos \phi = 2\rho \cos^2(\phi/2) = A + \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Par ailleurs, $B = 2\rho \cos(\phi/2) \sin(\phi/2)$, donc, si $(A, B) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\phi}{2} = \arctan \frac{B}{A + \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

La solution modulo π n'est pas à considérer car $\phi/2$ est nécessairement dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2] = \arctan(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$. On applique ici cette méthode avec $A = \beta$, $B = \gamma$ et $\phi = 2\theta$.

5. La convention opposée, définie à partir de la source de l'onde plutôt que de l'observateur, est utilisée dans certaines branches de la physique. La convention adoptée ici est cohérente avec celle appliquée en chimie : pour un observateur recevant de la lumière polarisée ayant traversé une substance, cette substance est « dextrogyre » (des mots latins *dexter*, c.-à-d. « droite », et *gyrare*, « tourner ») si elle fait tourner le plan de polarisation de la lumière vers la droite; elle est « lévogyre » (du latin *laevus*, « gauche ») si elle le fait tourner vers la gauche.

droite.

$$\begin{aligned}
 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{A}_y \cos(\omega t - kx + \phi_y) \\ \mathcal{A}_z \cos(\omega t - kx + \phi_z) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \mathcal{A}_y \sin(\omega t - kx + \phi_y) \\ -\omega \mathcal{A}_z \sin(\omega t - kx + \phi_z) \end{bmatrix} \\
 &= -\omega \mathcal{A}_y \mathcal{A}_z (\cos[\omega t - kx + \phi_y] \sin[\omega t - kx + \phi_z] \\
 &\quad - \sin[\omega t - kx + \phi_y] \cos[\omega t - kx + \phi_z]) \vec{u}_x \\
 &= -\omega \mathcal{A}_y \mathcal{A}_z \sin(\phi_z - \phi_y) \vec{u}_x = \omega \mathcal{A}_y \mathcal{A}_z \sin \phi_0 \vec{u}_x.
 \end{aligned} \tag{VII.80}$$

La polarisation est donc elliptique droite si $\phi_0 \in]-\pi, 0[$ et gauche si $\phi_0 \in]0, \pi[$.

b. Cas général

La lumière naturelle n'est pas polarisée car elle est émise par de nombreuses sources incohérentes, notamment les atomes de la photosphère solaire lorsqu'ils se déséxcitent. Certains phénomènes (réflexion sur une surface, traversée d'un filtre polariseur ou d'un cristal biréfringent, laser...) permettent néanmoins d'obtenir de la lumière partiellement ou totalement polarisée.

Un filtre polariseur linéaire projette ainsi le champ électrique sur une direction particulière. Un autre filtre polariseur linéaire, l'analyseur, faisant un angle θ avec le premier et recevant du premier une lumière d'intensité I_0 laisse passer une lumière d'intensité

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta \quad (\text{loi de Malus}). \tag{VII.81}$$

La lumière reflétée par une vitre transparente étant partiellement polarisée, un filtre polariseur permet de l'atténuer et de mieux voir à travers la vitre.