

Chapitre VI

Interférences et diffraction

A. Interférences

1. Intensité de la superposition de deux ondes

a. Définition

Considérons deux sources S_1 et S_2 d'ondes de même nature. Soient $\psi_1(M, t)$ et $\psi_2(M, t)$ les champs associés à ces sources en un point M et à un instant t quelconques. Les ondes électromagnétiques ou mécaniques que nous avons étudiées jusqu'à présent obéissent au principe de superposition : le champ total dû aux deux sources est donné par

$$\psi(M, t) = \psi_1(M, t) + \psi_2(M, t). \quad (\text{VI.1})$$

Pour les ondes électromagnétiques, entre autres, on ne perçoit pas directement $\psi(M, t)$ car les fréquences de ces ondes sont bien trop grandes ($\nu \sim 10^{14}$ Hz dans le visible). On peut en revanche mesurer leur intensité lumineuse, qui est proportionnelle à la moyenne temporelle du carré de ψ . Rappelons que la moyenne sur une durée τ autour d'un instant t d'une fonction f du temps est par définition

$$\langle f \rangle(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t'-\tau/2}^{t+\tau/2} f(t') dt'. \quad (\text{VI.2})$$

Cette moyenne est effectuée sur une durée τ bien supérieure à la période $1/\nu$ des ondes sinusoïdales formant ψ_1 et ψ_2 . En pratique, ceci équivaut à faire tendre τ vers l'infini dans l'expression de $\langle f \rangle$, dont le résultat ne dépend ainsi plus de t ni de la borne inférieure dans l'intégrale. On a donc

$$I(M) = C \langle \psi^2 \rangle(M) = C \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tau} \int_{t=-\tau/2}^{\tau/2} \psi^2(M, t) dt \right), \quad (\text{VI.3})$$

où la constante de proportionnalité C est la même pour les champs ψ , ψ_1 et ψ_2 .

Pour des ondes électromagnétiques, en particulier,

$$I(M) = \varepsilon_0 c \langle \vec{E}^2 \rangle(M) = \varepsilon_0 c \left(\langle E_x^2 \rangle[M] + \langle E_y^2 \rangle[M] + \langle E_z^2 \rangle[M] \right) \quad (\text{VI.4})$$

(cf. VII.37). Dans ce qui suit, la valeur précise de C ne nous intéressera pas et on traitera ces ondes comme des ondes scalaires, ce qui revient à négliger la polarisation.

On a donc

$$\begin{aligned} I(M) &= C \langle (\psi_1 + \psi_2)^2 \rangle(M) = C \langle \psi_1^2 \rangle(M) + C \langle \psi_2^2 \rangle(M) + 2C \langle \psi_1 \psi_2 \rangle(M) \\ &= I_1(M) + I_2(M) + 2C \langle \psi_1 \psi_2 \rangle(M). \end{aligned} \quad (\text{VI.5})$$

À cause du terme croisé, on n'a donc pas toujours $I(M) = I_1(M) + I_2(M)$. Ce phénomène porte le nom d'**interférence**.

On a montré au § I.A.4.a que, si ψ_1 et ψ_2 sont des ondes sinusoïdales de pulsations ω_1 et $\omega_2 \neq \omega_1$, alors $\langle \psi_1 \psi_2 \rangle = 0$: il n'y a donc **pas d'interférences entre des ondes monochromatiques de fréquences différentes**.

b. Ondes monochromatiques de même fréquence

α. Calcul en représentation réelle

Intéressons-nous à des ondes sinusoïdales (c.-à-d. monochromatiques dans le cas de la lumière) de même pulsation ω . On a alors

$$\psi_1(M, t) = A_1(M) \cos(\omega t + \varphi_1[M]) \quad \text{et} \quad \psi_2(M, t) = A_2(M) \cos(\omega t + \varphi_2[M]). \quad (\text{VI.6})$$

Comme $\langle \cos^2(\dots) \rangle = 1/2$, on a

$$I_1(M) = C \frac{A_1^2(M)}{2} \quad \text{et} \quad I_2(M) = C \frac{A_2^2(M)}{2}. \quad (\text{VI.7})$$

Calculons maintenant $\langle \psi_1 \psi_2 \rangle(M)$.

$$\langle \psi_1 \psi_2 \rangle(M) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t=-\tau/2}^{\tau/2} \psi_1(M, t) \psi_2(M, t) dt. \quad (\text{VI.8})$$

Comme

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}, \quad (\text{VI.9})$$

on a

$$\frac{1}{\tau} \int_{t=-\tau/2}^{\tau/2} \psi_1(M, t) \psi_2(M, t) dt = \frac{A_1(M) A_2(M) B_+(\tau)}{2\tau} + \frac{A_1(M) A_2(M) B_-(\tau)}{2\tau} \quad (\text{VI.10})$$

avec

$$B_+(\tau) = \int_{t=-\tau/2}^{\tau/2} \cos(2\omega t + \varphi_1[M] + \varphi_2[M]) dt, \quad (\text{VI.11})$$

$$B_-(\tau) = \int_{t=-\tau/2}^{\tau/2} \cos(\varphi_1[M] - \varphi_2[M]) dt. \quad (\text{VI.12})$$

L'intégrale $B_+(\tau)$ vaut

$$B_+(\tau) = \left[\frac{\sin(2\omega t + \varphi_1[M] + \varphi_2[M])}{2\omega} \right]_{t=0}^{\tau}, \quad (\text{VI.13})$$

donc, quel que soit τ , $|B_+(\tau)| \leq 1/\omega$. Quand on fait tendre τ vers l'infini dans VI.10 (c.-à-d., en pratique, qu'on prend $\tau \gg \pi/\omega$), le premier terme devient nul.

En revanche,

$$B_-(\tau) = \tau \cos(\varphi_1[M] - \varphi_2[M]), \quad (\text{VI.14})$$

donc

$$\langle \psi_1(M, t) \psi_2(M, t) \rangle = \frac{A_1(M) A_2(M)}{2} \cos(\varphi_1[M] - \varphi_2[M]). \quad (\text{VI.15})$$

En utilisant VI.7, on obtient que

$$2C \langle \psi_1(M, t) \psi_2(M, t) \rangle = 2 \sqrt{I_1(M) I_2(M)} \cos(\varphi_1[M] - \varphi_2[M]), \quad (\text{VI.16})$$

d'où

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2 \sqrt{I_1(M) I_2(M)} \cos(\varphi_1[M] - \varphi_2[M]). \quad (\text{VI.17})$$

L'intensité globale n'est donc pas uniforme.

En particulier, si $I_1 = I_2$,

$$I(M) = 2 I_1(M) (1 + \cos[\varphi_1(M) - \varphi_2(M)]) = 4 I_1(M) \cos^2 \frac{\varphi_1(M) - \varphi_2(M)}{2} \quad (\text{VI.18})$$

car $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$.

β . Interférences constructives et destructives

Dans ce qui suit, nous étudierons les variations de $I(M)$ dans des zones à grande distance des sources. Les ondes peuvent alors être traitées comme des ondes planes et l'on peut négliger les variations d'amplitude de ψ_1 et ψ_2 , donc aussi de $I_1(M)$ et $I_2(M)$, à l'échelle de la zone. L'intensité dépend donc essentiellement du déphasage entre les deux ondes en M .

Si $\varphi_1(M) - \varphi_2(M) = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, ψ_1 et ψ_2 sont **en [conjonction de] phase** au point M : l'intensité est maximale et vaut

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2. \quad (\text{VI.19})$$

Les interférences sont dites **constructives**.

Si $\varphi_1(M) - \varphi_2(M) = (2p+1)\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, ψ_1 et ψ_2 sont **en opposition de phase** au point M : l'intensité est minimale et vaut

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2 \sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2. \quad (\text{VI.20})$$

Les interférences sont dites **destructives**.

Le **contraste** entre les zones brillantes et sombres vaut

$$\Gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}. \quad (\text{VI.21})$$

Il est compris entre 0 et 1. Il est maximal et vaut 1 quand $I_1 = I_2$ et il est minimal quand l'une des intensités I_1 ou I_2 est nulle.

γ. Calcul en représentation complexe

Le calcul effectué ci-dessus en représentation réelle pour des ondes sinusoïdales est assez laborieux dès qu'il y a plus de deux ondes de même fréquence à sommer. Il est alors plus commode de passer en représentation complexe. Rappelons d'abord que la moyenne temporelle d'un produit de deux fonctions f et g sinusoïdales réelles et de même période vaut

$$\langle f(t)g(t) \rangle = \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{f}[t] \underline{g}^*[t]}{2} \right), \quad (\text{VI.22})$$

où \underline{f} et \underline{g} sont les représentations complexes des ondes et « $*$ » désigne le conjugué. Comme

$$\underline{f}(t) \underline{f}^*(t) = |f(t)|^2 \in \mathbb{R}, \quad (\text{VI.23})$$

on obtient en particulier que

$$\langle f^2(t) \rangle = \frac{|f(t)|^2}{2} = \frac{\underline{f}(t) \underline{f}^*(t)}{2}, \quad (\text{VI.24})$$

sans que l'application de la partie réelle soit nécessaire.

On a $I(M) = C \langle \psi^2(M, t) \rangle$ avec $\psi(M, t) = \psi_1(M, t) + \psi_2(M, t)$. Les champs ψ_1 et ψ_2 étant pour des ondes sinusoïdales de même fréquence,

$$\underline{\psi}_1(M, t) = \underline{A}_1(M) e^{i\omega t} = A_1(M) e^{i(\omega t + \varphi_1[M])}, \quad (\text{VI.25})$$

$$\underline{\psi}_2(M, t) = \underline{A}_2(M) e^{i\omega t} = A_2(M) e^{i(\omega t + \varphi_2[M])}, \quad (\text{VI.26})$$

donc

$$\underline{\psi}(M, t) \underline{\psi}^*(M, t) = (\underline{\psi}_1[M, t] + \underline{\psi}_2[M, t]) (\underline{\psi}_1^*[M, t] + \underline{\psi}_2^*[M, t]) \quad (\text{VI.27})$$

$$= (A_1[M] e^{i\varphi_1[M]} + A_2[M] e^{i\varphi_2[M]}) e^{i\omega t} (A_1[M] e^{-i\varphi_1[M]} + A_2[M] e^{-i\varphi_2[M]}) e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.28})$$

$$= A_1^2(M) + A_2^2(M) + A_1(M) A_2(M) (e^{i[\varphi_1(M) - \varphi_2(M)]} + e^{-i[\varphi_1(M) - \varphi_2(M)]}) \quad (\text{VI.29})$$

$$= A_1^2(M) + A_2^2(M) + 2 A_1(M) A_2(M) \cos(\varphi_1[M] - \varphi_2[M]). \quad (\text{VI.30})$$

On pourra ainsi, d'une manière générale, calculer l'intensité I en un point M de la somme ψ d'un nombre quelconque d'ondes sinusoïdales de même fréquence à l'aide de l'expression

$$I(M) \propto \underline{\psi}(M, t) \underline{\psi}^*(M, t), \quad (\text{VI.31})$$

sans préciser la valeur de la constante de proportionnalité.

2. Application : trous (ou fentes) de Young

On considère une source primaire^{※1} de lumière S , monochromatique de pulsation ω , éclairant deux trous circulaires S_1 et S_2 percés dans une plaque. Ce dispositif porte le nom de **trous de Young**^{※2}. Chacun des deux trous a un diamètre très inférieur à la longueur d'onde de la lumière. La lumière passant par chaque trou est donc fortement diffractée (cf. § VI.B.1) et l'on peut considérer chaque trou comme une source secondaire d'ondes sphériques.

On s'intéresse aux interférences entre les ondes ψ_1 et ψ_2 «émises» par S_1 et S_2 . Dans la zone de recouvrement de ces ondes, on va supposer que l'intensité de chacune des ondes est uniforme (c.-à-d. que l'on est dans le lobe principal de diffraction ; cf. § VI.B.1). On va également négliger la dépendance des amplitudes réelles $A_1(M)$ et $A_2(M)$ par rapport à la position du point M . Cette approximation est correcte à grande distance des sources secondaires car les ondes sont alors quasi planes. On a donc

$$\underline{\psi}_1(M, t) = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1[M])}, \quad (\text{VI.32})$$

$$\underline{\psi}_2(M, t) = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2[M])}. \quad (\text{VI.33})$$

La phase de l'onde ψ_1 en M à l'instant t est la même qu'en S_1 à l'instant $t_1 = t - \tau_1$, où τ_1 est le temps de parcours de S_1 à M . Si, comme on le suppose ici, l'onde ne traverse que le vide ou un milieu dilué tel que l'air entre ces points, sa vitesse de phase est c . On a alors $\tau_1 = r_1/c$, où r_1 est la distance entre S_1 et M , donc

$$\underline{\psi}_1(M, t) = A_1 e^{i(\omega [t - r_1/c] + \varphi_1[S_1])}. \quad (\text{VI.34})$$

1. Au lieu de deux sources primaires, on prend une source primaire donnant naissance à deux sources secondaires. La raison en est qu'il est quasi impossible d'avoir deux sources primaires temporellement **cohérentes**, c.-à-d. dont le déphasage à l'émission reste constant au cours du temps.

2. En pratique, on utilise plutôt des **fentes de Young**, c.-à-d. de fines fentes parallèles. Les ondes sont alors plutôt cylindriques.

De même, en notant r_2 la distance S_2M ,

$$\underline{\psi}_2(M, t) = A_2 e^{i(\omega[t-r_2/c]+\varphi_2[S_2])}. \quad (\text{VI.35})$$

On en déduit que

$$I(M) \propto (\psi_1[M, t] + \psi_2[M, t])(\psi_1[M, t] + \psi_2[M, t])^* \quad (\text{VI.36})$$

$$\propto A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\omega[r_2 - r_1]/c - \delta\varphi), \quad (\text{VI.37})$$

où $\delta\varphi := \varphi_2(S_2) - \varphi_1(S_1)$.

La quantité $\delta r = r_2 - r_1$ porte le nom de **différence de marche**³. En introduisant le nombre d'onde dans le vide, $k = \omega/c$, on obtient que

$$I(M) \propto A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(k \delta r - \delta\varphi). \quad (\text{VI.38})$$

Pour calculer δr , introduisons le repère cartésien $O'xyz$ défini comme suit :

- O' est le milieu du segment S_1S_2 ;
- \vec{u}_x est un vecteur unitaire dirigé de S_2 vers S_1 ;
- les vecteurs $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ forment une base orthonormée directe telle que la plaque est dans le plan $O'xy$ et $z(S) < z(O')$.

Étudions les interférences sur un écran parallèle à la plaque et situé à une distance D de celle-ci. Notons O l'intersection de $O'z$ et de l'écran, a la distance S_1S_2 et (x, y, z) les coordonnées d'un point M de l'écran dans le repère $Oxyz$. On a alors

$$r_1 = \sqrt{(x - a/2)^2 + y^2 + D^2} \quad \text{et} \quad r_2 = \sqrt{(x + a/2)^2 + y^2 + D^2}. \quad (\text{VI.39})$$

Supposons a, x et y négligeables devant D . En faisant un développement limité au premier ordre en $1/D$, on obtient

$$r_1 = D \sqrt{1 + \frac{(x - a/2)^2 + y^2}{D^2}} \approx D \left(1 + \frac{x^2 - ax + a^2/4 + y^2}{2D^2} \right). \quad (\text{VI.40})$$

De même,

$$r_2 \approx D \left(1 + \frac{x^2 + ax + a^2/4 + y^2}{2D^2} \right), \quad (\text{VI.41})$$

donc

$$\delta r = r_2 - r_1 \approx \frac{ax}{D}. \quad (\text{VI.42})$$

Supposons dans un premier temps que S est équidistante de S_1 et S_2 : les ondes émises par S sont donc en phase au niveau de S_1 et S_2 (du moins, si elles se sont propagées entre-temps dans le même milieu), c.-à-d. $\delta\varphi = 0$.

L'intensité est maximale quand $k \delta r = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, c.-à-d., en introduisant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, quand

$$\delta r = p\lambda. \quad (\text{VI.43})$$

Les ondes issues de S_1 et S_2 sont alors en phase. Comme $\delta r \approx ax/D$, on a alors sur l'écran

$$x = x_p^b := \frac{p\lambda D}{a}. \quad (\text{VI.44})$$

Sur l'écran, au voisinage de O , ce résultat est indépendant de y : on obtient donc un trait parallèle à Oy pour chaque valeur de p . Ce trait est appelé une **frange brillante** et l'entier p est son **ordre**, la valeur $p = 0$ étant par définition celle pour laquelle les distances r_1 et r_2 sont égales (ou, plus généralement, pour laquelle les chemins optiques $\widehat{SS_1M}$ et $\widehat{SS_2M}$ sont égaux ; cf. § VI.A.3). L'écart entre deux franges brillantes voisines est une constante i appelée **interfrange**. On a

$$i = x_{p+1}^b - x_p^b = \frac{(p+1)\lambda D}{a} - \frac{p\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{a}. \quad (\text{VI.45})$$

On a donc $x_p^b = pi$.

L'intensité est minimale quand $k \delta r = (2p+1)\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, c.-à-d. quand les ondes issues de S_1 et S_2 sont en opposition de phase. Sur l'écran, on a alors

$$x = x_p^s := (p + 1/2)i. \quad (\text{VI.46})$$

On obtient ainsi une **frange sombre** à mi-chemin entre les franges brillantes situées en x_p^b et x_{p+1}^b . On observe

3. L'ordre de S_1 et S_2 dans la définition de δr est arbitraire car la fonction cosinus est paire, mais si on les permute, il faut aussi le faire pour $\varphi_1(S_1)$ et $\varphi_2(S_2)$ dans la définition de $\delta\varphi$.

donc une alternance de franges brillantes et sombres séparées de $i/2$. Cette figure porte le nom de **figure d'interférences**.

Si on s'intéresse à tout l'espace $z > 0$ et non plus seulement au plan $z = D$ au voisinage de O , l'ensemble des points tels que $\delta r = c^{\text{te}}$ dessine un hyperboloïde de révolution d'axe S_1S_2 , c.-à-d. la surface engendrée par la rotation d'une hyperbole d'axe focal S_1S_2 autour de cet axe. L'intersection de cet hyperboloïde avec le plan $z = D$ forme une autre hyperbole. Les franges sont les portions d'hyperbole au voisinage de l'axe Ox .

Si $\delta\varphi \neq 0$, par exemple parce que S n'est pas équidistante de S_1 et S_2 ou parce que des milieux différents sont traversés entre la source primaire et les sources secondaires, on obtient la frange brillante d'ordre p pour

$$k \delta r - \delta\varphi = 2p\pi, \quad (\text{VI.47})$$

avec δr toujours donné par ax/D . On a donc

$$x_p^b = \left(p + \frac{\delta\varphi}{2\pi} \right) i. \quad (\text{VI.48})$$

On obtient donc la même figure d'interférences, avec la même interfrange, mais décalée de $i\delta\varphi/(2\pi)$ selon l'axe Ox .

3. Chemin optique

Le calcul précédent s'applique au cas où la vitesse de phase de l'onde, c_{ph} , est égale à la vitesse de la lumière dans le vide, c . De manière plus générale, la vitesse de phase en un point P du milieu traversé vaut

$$c_{\text{ph}}(P) = c/n(P), \quad (\text{VI.49})$$

où $n(P)$ est l'indice optique du milieu en P .

Soit $d\ell(P)$ un élément de longueur, au voisinage d'un point P , du chemin parcouru par l'onde ψ_1 pour aller de S_1 à M . Le temps pour parcourir $d\ell$ est

$$d\tau = d\ell/c_{\text{ph}}(P) = n(P) d\ell/c, \quad (\text{VI.50})$$

donc le temps mis par l'onde pour aller de S_1 à M est désormais

$$\tau_1 = \int_{P=S_1}^M n(P) d\ell/c. \quad (\text{VI.51})$$

Il suffit donc de remplacer, dans la différence de marche $\delta r = r_2 - r_1$, la distance euclidienne r_1 par le **chemin optique** de S_1 à M ,

$$\tilde{r}_1 := \int_{P=S_1}^M n(P) d\ell, \quad (\text{VI.52})$$

et de remplacer de même r_2 par le chemin optique \tilde{r}_2 de S_2 à M .

4. Autres dispositifs interférentiels. Réflexion sur un miroir

Il existe de nombreux dispositifs permettant de créer des interférences, par exemple celui des miroirs de Lloyd, dans lequel une onde réfléchiée par un miroir éclairé sous incidence quasi rasante interfère avec l'onde directe. Dans tous les cas où l'onde est réfléchiée de l'air sur un milieu d'indice optique $n > 1$, il faut rajouter un déphasage de π après la réflexion (pour une raison analogue à celle expliquant que $r_y < 0$ pour les ondes sur une corde vibrante quand $Z_1 < Z_2$; cf. § V.B.2.a).

B. Notions sur la diffraction

Une onde passant à proximité d'un obstacle, par exemple à travers une ouverture dans un écran, ne se propage pas en ligne droite mais est éparpillée dans toutes les directions vers l'avant. Pour calculer l'intensité en fonction de la direction, on utilise le **principe de Huygens** : Selon celui-ci, **chaque point d'un front d'onde se comporte comme une source secondaire d'ondes sphériques dans le sens de la propagation**. L'interférence entre ces ondes secondaires constitue le phénomène de **diffraction**. La formulation de ce principe a été précisée par Fresnel et a reçu une justification théorique suite aux travaux de Kirchhoff.

Le calcul de l'intensité de l'onde diffractée est complexe. Il peut se faire analytiquement, sous certaines approximations dans deux cas extrêmes :

- le cas de la **diffraction de Fresnel**, au voisinage de l'obstacle ;
- le cas de la **diffraction de Fraunhofer**, à grande distance de l'obstacle.

Nous nous placerons dans ce dernier cas dans ce qui suit.

1. Diffraction par une fente rectangulaire

Considérons une fente F rectangulaire de côtés b_x et b_y dans un plan Oxy et éclairons-la avec une onde plane progressive monochromatique arrivant sous incidence normale. La phase de cette onde est alors la même en tout point de l'ouverture, qui constitue donc un front d'onde. Chacun des points de ce front d'onde est, d'après le principe de Huygens, la source d'ondes secondaires sphériques. À grande distance de la source (devant b_x et b_y), l'amplitude de ces ondes secondaires est semblable. En revanche, elles sont déphasées.

Cherchons en particulier à calculer l'intensité sur un écran parallèle au plan de la fente et situé à une distance D de celle-ci. Le champ total complexe en un point M de l'écran est donné par

$$\underline{\psi}(M, t) \propto \iint_{M' \in F} e^{i(\omega t - k M'M)} dS, \quad (\text{VI.53})$$

où M' balaie la surface de la fente et dS est un élément de surface autour de M' . Notons O' le centre de la fente, \vec{u}_x (resp. \vec{u}_y) un vecteur unitaire parallèle au côté b_x (resp. b_y) de la fente, \vec{u}_z un vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la fente et dirigé de celle-ci vers l'écran, O le point de l'écran à l'intersection avec $O'z$, x et y les coordonnées de M dans la base $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et x' et y' celles de M' dans la base $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On a

$$M'M = \sqrt{D^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{D^2 + x^2 + y^2} \sqrt{1 - 2 \frac{x x' + y y'}{D^2 + x^2 + y^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{D^2 + x^2 + y^2}}. \quad (\text{VI.54})$$

Pour M voisin de O , on a $(|x|; |y|) \ll D$. La fente étant étroite, on peut également négliger le terme en $x'^2 + y'^2$, donc

$$M'M \approx D \sqrt{1 - 2 \frac{x x' + y y'}{D^2}} \approx D - \frac{x x' + y y'}{D}. \quad (\text{VI.55})$$

Comme $dS = dx' dy'$, on a

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(M, t) &\propto e^{i(\omega t - kD)} \left(\int_{x'=-b_x/2}^{b_x/2} e^{i k x x'/D} dx' \right) \int_{y'=-b_y/2}^{b_y/2} e^{i k y y'/D} dy' \\ &= e^{i(\omega t - kD)} \frac{e^{i k x b_x/(2D)} - e^{-i k x b_x/(2D)}}{i k x/D} \frac{e^{i k y b_y/(2D)} - e^{-i k y b_y/(2D)}}{i k y/D} \\ &= b_x b_y e^{i(\omega t - kD)} \frac{\sin(k x b_x/[2D])}{k x b_x/(2D)} \frac{\sin(k y b_y/[2D])}{k y b_y/(2D)}. \end{aligned} \quad (\text{VI.56})$$

On peut réécrire ce résultat à l'aide de la fonction **sinus cardinal**, définie par

$$\text{sinc}: u \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } u = 0, \\ \sin u/u & \text{si } u \neq 0. \end{cases} \quad (\text{VI.57})$$

Cette fonction possède les propriétés suivantes :

- elle est continue car $\lim_{u \rightarrow 0; u \neq 0} \sin u/u = 1$;
- elle atteint son maximum en $u = 0$;
- elle s'annule en $u = p\pi$ pour $p \in \mathbb{Z}^*$;
- sa valeur absolue décroît en oscillant quand $|u|$ croît.

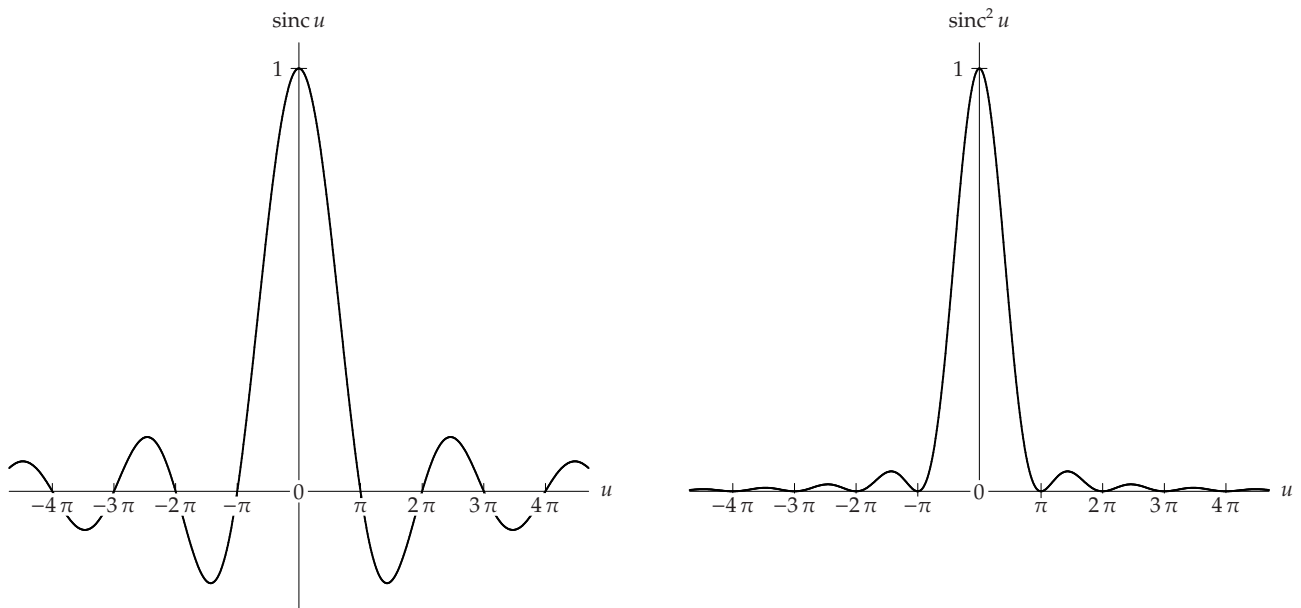


FIGURE VI.1. – Fonctions $u \mapsto \text{sinc } u$ (à gauche) et $u \mapsto \text{sinc}^2 u$ (à droite).

On a ainsi

$$\underline{\psi}(M, t) \propto e^{i(\omega t - kD)} \text{sinc}\left(\frac{kx b_x}{2D}\right) \text{sinc}\left(\frac{ky b_y}{2D}\right) \quad (\text{VI.58})$$

et

$$I(M) \propto \underline{\psi}(M, t) \underline{\psi}^*(M, t) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{kx b_x}{2D}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{ky b_y}{2D}\right) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{\pi x b_x}{\lambda D}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi y b_y}{\lambda D}\right). \quad (\text{VI.59})$$

On obtient donc selon l'axe Ox une **tache principale** brillante de largeur $2\lambda D/b_x$ (entre $p = -1$ et $p = +1$) et, de part et d'autre, une série de **taches latérales** de moins en moins brillantes de largeur $\lambda D/b_x$ (entre $\pm p$ et $\pm(p + 1)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$)⁴. Il en est de même selon l'axe Oy en fonction de b_y .

Remarque. La dimension des taches parallèlement à Oy étant inversement proportionnelle à b_y , on peut remplacer les trous d'Young S_1 et S_2 considérés précédemment (§ VI.A.2) par des fentes parallèles fines ($b_x \ll b_y$). Ceci permet de limiter la diffraction selon l'axe y et de laisser passer plus de lumière que par des trous. ■

On peut aussi exprimer l'intensité en fonction de l'angle θ_x (resp. θ_y) entre $O'O$ et la projection de M sur Ox (resp. Oy). Comme $(x; y) \ll D$, on a $\theta_x \approx x/D$ et $\theta_y \approx y/D$, donc

$$I(M) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \theta_x b_x}{\lambda}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \theta_y b_y}{\lambda}\right). \quad (\text{VI.60})$$

2. Diffraction par un trou circulaire

Un calcul analogue peut être fait pour un trou circulaire de rayon R . Le résultat, qui fait intervenir une fonction de Bessel, montre que la figure de diffraction est constituée d'un disque intense, appelé **tache d'Airy**, et d'anneaux concentriques d'intensité bien plus faible et décroissant avec la distance au centre du disque. Le rayon angulaire θ_A de la tache d'Airy est donné par

$$\theta_A = 0,61 \frac{\lambda}{R}. \quad (\text{VI.61})$$

Un télescope dont l'ouverture est de rayon R et observant à la longueur d'onde λ ne peut donc pas distinguer des objets dont l'écart angulaire est inférieur (en gros ; une valeur plus précise est donnée par le critère de Rayleigh) à θ_A ; pour accroître la résolution angulaire, donc faire décroître θ_A , il faut augmenter R ou diminuer λ .

En particulier, (hormis pour le soleil) le disque sous lequel apparaît une étoile observée au télescope n'est pas la surface physique de l'étoile (sa photosphère) mais la tache d'Airy : le rayon angulaire réel de l'étoile est en effet bien trop faible par rapport à θ_A .

4. Les taches de diffraction sont sur l'écran, donc à deux dimensions. Leurs équivalents à trois dimensions s'appellent des **lobes** de diffraction.

3. Réseaux de diffraction

Une onde traversant du verre rayé est également diffractée. En gravant des stries parallèles très fines et rapprochées sur une plaque de verre, on crée ainsi un **réseau de diffraction**^{*5}. Éclairons sous incidence normale N stries d'un tel réseau, séparées chacune d'une distance b de ses voisines immédiates, avec une onde plane monochromatique. Chacune des stries se comporte comme une source secondaire d'ondes cylindriques. L'interférence de ces dernières crée la figure de diffraction du réseau. En un point à grande distance du réseau et faisant un angle θ avec la normale au réseau, les ondes provenant de deux stries contiguës sont séparées par une différence de marche $\delta r = b \sin \theta$. En notant $\underline{\psi}_1(M, t)$ la valeur du champ en M de l'onde émise par la strie n° 1, on trouve que le champ de l'onde émise par la strie n° n vaut

$$\underline{\psi}_n(M, t) = e^{-(n-1)ik\delta r} \underline{\psi}_1(M, t). \quad (\text{VI.62})$$

Le champ total vaut donc

$$\underline{\psi}(M, t) = \sum_{n=1}^N e^{-(n-1)ik\delta r} \underline{\psi}_1(M, t) = \sum_{n'=0}^{N-1} e^{-n'ik\delta r} \underline{\psi}_1(M, t), \quad (\text{VI.63})$$

avec $n' := n - 1$. On reconnaît dans cette expression la somme des termes d'une suite géométrique, donc

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(M, t) &= \frac{1 - e^{-Nik\delta r}}{1 - e^{-ik\delta r}} \underline{\psi}_1(M, t) \\ &= \frac{e^{-Nik\delta r/2}}{e^{-ik\delta r/2}} \frac{e^{Nik\delta r/2} - e^{-Nik\delta r/2}}{e^{ik\delta r/2} - e^{-ik\delta r/2}} \underline{\psi}_1(M, t) \\ &= e^{-(N-1)ik\delta r/2} \frac{\sin(Nk\delta r/2)}{\sin(k\delta r/2)} \underline{\psi}_1(M, t). \end{aligned} \quad (\text{VI.64})$$

L'intensité totale est donnée par

$$I(M) = C \underline{\psi}(M, t) \underline{\psi}^*(M, t) = I_1(M) \frac{\sin^2(Nk\delta r/2)}{\sin^2(k\delta r/2)}, \quad (\text{VI.65})$$

où $I_1(M)$ est l'intensité de l'onde transmise par une seule strie. L'intensité totale s'annule pour $Nk\delta r/2 = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ sauf si $\sin(k\delta r/2)$ s'annule aussi, c.-à-d. si $p/N \in \mathbb{Z}$.

On a ainsi des **maximums principaux** pour $k\delta r/2 = q\pi$ avec $q \in \mathbb{Z}$, c.-à-d. pour $kb \sin \theta_q/2 = q\pi$ ou encore $\sin \theta_q = q\lambda/b$. Pour calculer leur intensité, posons $u = k\delta r/2 - q\pi$:

$$\lim_{k\delta r/2 \rightarrow q\pi} \frac{\sin^2(Nk\delta r/2)}{\sin^2(k\delta r/2)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2(Nu + Nq\pi)}{\sin^2(u + q\pi)} = \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin[Nu]}{\sin u} \right)^2. \quad (\text{VI.66})$$

Or

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(Nu)}{\sin u} = N \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin[Nu]}{Nu} \frac{u}{\sin u} \right) = N \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin[Nu]}{Nu} \right) \Big/ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = N. \quad (\text{VI.67})$$

Les maximums principaux sont donc d'intensité $N^2 I_1(M)$. Ce sont les points où les ondes émises par les N stries sont en phase, donc interfèrent constructivement. Chacun de ces maximums est entouré de deux minimums situés en $\sin \theta_q^\pm = (q \pm 1/N)\lambda/b$. Leur largeur vaut donc $\Delta(\sin \theta_q) = 2\lambda/(Nb)$.

Deux maximums principaux adjacents sont séparés par $N - 1$ minimums. Ces minimums cernent $N - 2$ **maximums secondaires**, deux fois moins larges que les maximums principaux et d'intensité négligeable

5. C'est l'appellation consacrée, bien que le calcul ci-dessous relève plutôt du formalisme des interférences.

devant ceux-ci dès que N est suffisamment grand.

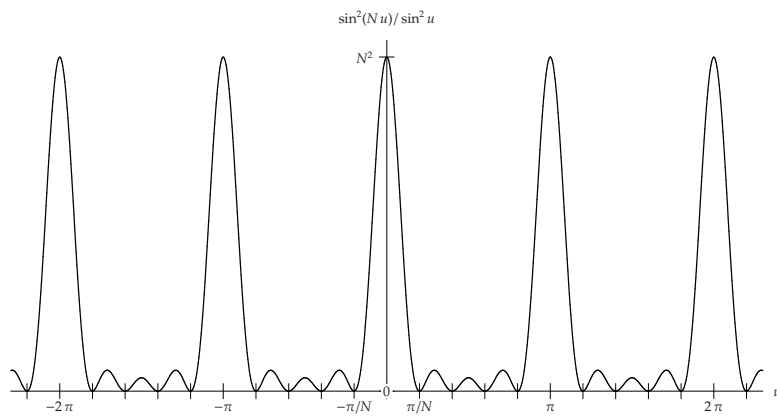


FIGURE VI.2. – Fonction $u \mapsto \sin^2(Nu)/\sin^2 u$ (représentation pour $N = 5$).