

Chapitre II

Généralités sur les ondes

Ce chapitre est consacré aux ondes en général. Les prochains chapitres porteront sur des types particuliers d'ondes.

A. Phénoménologie. Généralités

1. Exemples d'ondes

Étymologiquement, le français « onde » vient du latin *unda* qui signifie « eau mobile », « agitation ». (Le terme d'« onde » est d'ailleurs employé poétiquement pour désigner la mer, toujours en mouvement.)

L'archétype des phénomènes ondulatoires est sans doute justement les vaguelettes à la surface de l'eau. Celles-ci peuvent être engendrées par le jet d'un caillou dans une mare ; elles sont alors circulaires, de centre le point de chute du caillou, et divergent à partir de ce point. À plus grande échelle spatiale, le vent provoque de même l'apparition de houle à la surface de la mer. Selon que le poids ou la tension superficielle est la force dominante de rappel vers l'équilibre, ces ondes surfaciques sont dites « de gravité » ou « de capillarité ». À l'échelle des océans, on a enfin des ondes de marée.

Ces ondes requièrent un support, l'eau, pour exister. D'une manière générale, on qualifie d'**ondes mécaniques** celles qui nécessitent un **milieu matériel**. Nous étudierons d'autres ondes mécaniques dans ce cours, d'ailleurs plus simples, notamment celles parcourant une corde vibrante et les ondes sonores (aussi dites « acoustiques ») dans l'air ou, plus généralement, un gaz quelconque, un liquide ou un solide.

Il existe aussi des ondes qui se propagent sans qu'il soit besoin d'un milieu matériel. Parmi celles-ci, les **ondes électromagnétiques**, dont la lumière visible, nous intéresseront au premier chef. Celles-ci peuvent parcourir le vide et on peut considérer que le milieu qui vibre est le champ électromagnétique lui-même^{*1}.

D'autres ondes sont encore plus abstraites :

- les **ondes gravitationnelles**^{*2}, ébranlements de l'espace-temps (et non d'un milieu contenu dans l'espace-temps) modifiant sa courbure. Ces ondes sont produites par des masses accélérées et se propagent à la vitesse de la lumière.

Leur existence fut prédite par Einstein dès 1916 à l'aide de la théorie de la relativité générale, qu'il avait publiée l'année précédente. Elles ont été observées directement pour la première fois en 2015 (expérience LIGO). L'événement détecté était la fusion, à environ 1,3 milliard d'années-lumière et en quelques dixièmes de seconde, de deux trous noirs d'une trentaine de masses solaires chacun ;

- les **fonctions d'onde** de la mécanique quantique (théorie élaborée dans les années 1920 par Bohr, Schrödinger, Heisenberg, entre autres). Celles-ci permettent de calculer la probabilité de détecter une particule à une certaine position à un instant donné ou, plus généralement, d'observer un système dans tel ou tel état (on parle alors de « vecteur d'état » plutôt que de « fonction d'onde »).

Ces ondes de probabilité sont **immatérielles**^{*3} et permettent d'expliquer pourquoi, selon les circonstances, les particules se manifestent soit comme des ondes soit comme des corpuscules (« dualité onde-corpuscule »).

Les ondes sont donc présentes dans toutes les branches de la physique.

Hors du domaine de la physique, l'influx nerveux parcourant un axone ou la *ola* balayant les tribunes des stades peuvent aussi être traitées comme des ondes. Nous nous en tiendrons dans ce qui suit aux ondes

1. Après que Thomas Young eut montré la nature ondulatoire de la lumière au début du 19^e siècle, on supposa que celle-ci se déplaçait dans un milieu matériel qu'on a appelé « Éther lumineux » et qui aurait pu servir de référentiel absolu de l'espace. Les propriétés de ce milieu requises par diverses observations (très rigide ; partiellement entraîné par les corps au voisinage de ceux-ci ; ne freinant pas leurs déplacements) étaient cependant contradictoires. L'hypothèse de l'Éther fut abandonnée suite à la publication de la théorie de la relativité restreinte (Einstein, 1905), qui concilia la mécanique et l'électromagnétisme en renonçant à l'idée que distances et durées étaient indépendantes du mouvement de l'observateur.

2. À ne pas confondre avec les ondes de gravité à la surface de l'eau mentionnées plus haut.

3. Elles sont d'ailleurs intrinsèquement à valeur complexe, contrairement aux ondes étudiées par la suite : bien que souvent *représentées* par des fonctions à valeurs complexes par commodité, les composantes de ces dernières sont fondamentalement à valeurs réelles. Dans la mécanique ondulatoire de Louis de Broglie, théorie qui préfigura la mécanique quantique et que celle-ci remplaça, une onde *matérielle* était en revanche associée à chaque particule élémentaire.

mécaniques et électromagnétiques.

Une caractéristique fondamentale des ondes est qu'elles peuvent transporter, comme les particules matérielles, de l'énergie, de la quantité de mouvement (via la pression de radiation pour les ondes lumineuses), du moment cinétique et de l'information, mais ceci, contrairement aux particules, sans déplacement global de matière (sauf, bien sûr, pour les « ondes » quantiques).

2. Notion d'onde progressive

Le concept d'onde est délicat à définir de manière générale. Les ondes les plus fondamentales sont des **ondes progressives**. Scales & Snieder (1999 ; *Nature* 401, 739) en ont donné une définition qu'on peut traduire comme ceci :

Une onde progressive est une perturbation (d'un milieu) se propageant de manière ordonnée.

Explicitons les points-clés de cette définition :

- « **perturbation** » : L'état du milieu est modifié par le passage de l'onde, au moins temporairement^{*4}. Le phénomène présente souvent une certaine périodicité, auquel cas on parlera plutôt de « vibration », mais ce n'est pas le cas le plus général ;
- « **qui se propage** » : La perturbation se déplace de proche en proche, par interaction entre points voisins ;
- « **de manière ordonnée** » : Les phénomènes ondulatoires doivent être distingués de ceux de diffusion : ces derniers sont stochastiques, dus à des interactions aléatoires non directionnelles entre points voisins ; en outre, pour la diffusion, la distance parcourue par une perturbation est typiquement proportionnelle à la racine carrée du temps écoulé depuis son apparition, alors qu'elle est proportionnelle au temps pour une onde.
« De manière ordonnée » signifie aussi que la perturbation garde pour l'essentiel sa structure, son profil, au cours de la propagation.

3. Directions de perturbation et de propagation

Pour une onde mécanique progressive, l'onde est dite **longitudinale** si le déplacement du milieu par rapport à son état au repos est parallèle à la direction de propagation de l'onde : c'est en particulier le cas des ondes acoustiques dans un gaz, milieu compressible.

En revanche, si le déplacement du milieu est perpendiculaire à la direction de propagation, l'onde est dite **transversale** : c'est par exemple le cas des ondes parcourant une corde tendue dont on agite une extrémité dans une direction perpendiculaire à la corde au repos ; l'onde se propage le long de la corde, mais le déplacement de tout point de celle-ci est perpendiculaire à la corde, dans un plan contenant les directions de propagation et d'excitation. C'est aussi le cas pour une corde de guitare que l'on pince et que l'on relâche. Pour les ondes de torsion parcourant une échelle de perroquet (ou « machine à ondes de Shive »), le déplacement des points des barreaux est aussi perpendiculaire à la direction de propagation, mais ce déplacement se produit dans un plan perpendiculaire à cette direction ; ce sont des ondes transversales au sens de la définition donnée ci-dessus, mais on réserve parfois l'appellation d'ondes transversales au cas où le déplacement se produit dans un plan contenant la direction de propagation.

Dans le cas des ondes à la surface de l'eau, on n'observe que la variation (verticale) du niveau de l'eau en chaque point et celle-ci est perpendiculaire à la direction de propagation (horizontale) : l'onde paraît donc transversale. En réalité, l'eau étant un fluide incompressible, le mouvement des molécules d'eau ne peut pas être uniquement vertical et l'onde a aussi une composante longitudinale. Les ondes sismiques, c.-à-d. les ondes acoustiques à l'intérieur de la Terre, sont quant à elles des deux types : les ondes P, de pression, sont longitudinales, tandis que les ondes S, de cisaillement, sont transversales (et de célérité inférieure aux ondes P). De même, un ressort hélicoïdal sera parcouru par une onde longitudinale si on le perturbe parallèlement à son axe, mais par une onde transversale si la perturbation est perpendiculaire à l'axe.

Pour caractériser plus complètement une onde transversale, on peut aussi donner sa **polarisation**, c.-à-d. la direction dans laquelle la vibration se produit. Nous étudierons la polarisation des ondes électromagnétiques dans le vide dans un prochain chapitre. Pour celles-ci, il n'y a d'ailleurs pas de déplacement du milieu. On considère à la place le champ électrique (ou magnétique) et ces ondes sont considérées comme transversales car ce champ est perpendiculaire à la direction de propagation.

Une onde n'est pas nécessairement longitudinale, transversale ou une combinaison des deux. Ainsi, en ce qui concerne les fonctions d'onde de la mécanique quantique, de nature scalaire, on ne peut pas définir de direction de la perturbation.

4. Après le passage de l'onde, le milieu retrouve généralement son état antérieur mais ce n'est pas toujours le cas : ainsi, les ondes de densité spirales parcourant les galaxies à disque provoquent l'effondrement de nuages de gaz et la formation d'étoiles en leur sein. Le milieu interstellaire est bien évidemment changé.

B. Description mathématique de la propagation

1. Champ et équation d'onde

L'état du milieu est caractérisé par un **champ** $\psi(\vec{r}, t)$ (ou plusieurs), c.-à-d. une fonction de la position \vec{r} et du temps t . Pour une onde de déformation d'un milieu matériel, le champ d'onde considéré est souvent le déplacement du milieu par rapport à sa position au repos. Ce champ peut être **scalaire**, c'est-à-dire à une seule composante (tenseur d'ordre 0), telle la surpression pour les ondes sonores. Il peut également être **vectériel**, à trois composantes, (tenseur d'ordre 1), comme le champ électrique pour les ondes lumineuses. Nous nous en tiendrons à ces deux cas dans ce qui suit, mais le champ peut aussi être un tenseur d'ordre supérieur ; ainsi, la propagation des ondes gravitationnelles est décrite à l'aide d'un champ tensoriel d'ordre 2.

Nous nous limiterons à l'étude de champs scalaires ou vectoriels dont les composantes sont à **valeur réelle**, ce qui exclut notamment les fonctions d'onde de la mécanique quantique, à valeur complexe.

Des relations entre les différents champs en jeu, on peut déduire une **équation aux dérivées partielles**, c.-à-d. une expression combinant un champ et ses dérivées spatiales et temporelles : l'**équation d'onde**. Par ailleurs, les phénomènes ondulatoires sont provoqués par une excitation du milieu. On écrit classiquement l'équation d'onde en mettant les termes reliés au champ, c.-à-d. à la réponse du milieu, dans le membre de gauche de l'équation et ceux reliés à l'excitation dans le membre de droite. Si l'excitation cesse et qu'on ne s'intéresse qu'à la propagation ultérieure de l'onde, l'équation d'onde est homogène, c.-à-d. avec un second membre nul (à l'instar des oscillations libres décrites par des équations différentielles ordinaires). Exemples : les vaguelettes causées par la chute d'un caillou dans l'eau ; les vibrations d'une corde de guitare pincée puis relâchée, ou d'une corde de piano frappée par le marteau actionné par une touche.

En revanche, si l'excitation est entretenue, prolongée, l'équation d'onde est inhomogène (comme pour les oscillations forcées). Exemples : la houle engendrée par le vent ; les vibrations d'une corde de violon frottée par un archet ; corde de Melde.

Dans le cas des ondes électromagnétiques dans le vide, les équations de Maxwell régissant les champs électrique et magnétique sont linéaires ; l'équation d'onde en résultant est aussi linéaire. Pour les autres phénomènes ondulatoires étudiés dans ce cours, on supposera que **la perturbation est faible**, suffisamment pour qu'on puisse **linéariser** les équations régissant les différents champs, c.-à-d. négliger les termes d'ordre strictement supérieur à 1 dans les développements limités de ces champs par rapport à leur valeur au repos. Avec cette approximation, l'équation d'onde est encore linéaire^{*5}.

Une conséquence fondamentale de cette linéarité est que les solutions d'une équation d'onde homogène (avec un second membre nul),

$$\mathcal{L}(\psi) = 0, \quad \text{où } \mathcal{L} \text{ est un opérateur linéaire agissant sur } \psi, \quad (\text{II.1})$$

obéissent au « **principe** » de **superposition**^{*6} :

Si les fonctions ψ_1 et ψ_2 de \vec{r} et t sont solutions d'une équation d'onde linéaire homogène et que les quantités scalaires λ_1 et λ_2 sont indépendantes de \vec{r} et t , alors la combinaison linéaire $\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2$ est aussi une solution de l'équation.

Si ψ_1 et ψ_2 sont des ondes progressives solutions d'une équation d'onde linéaire homogène, la fonction $\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2$, bien qu'également solution de cette équation d'onde, n'est pas nécessairement une onde progressive. On qualifiera néanmoins d'« onde » toute solution d'une équation d'onde (pas nécessairement linéaire), progressive ou non. Un cas particulier d'ondes non progressives est celui des **ondes stationnaires**, c.-à-d. celles de la forme

$$\psi(\vec{r}, t) = \xi(\vec{r}) \theta(t), \quad (\text{II.2})$$

où la fonction ξ dépend de la position seulement, et la fonction θ du temps uniquement. Un autre cas est celui des **ondes évanescentes**.

Si l'équation d'onde est linéaire mais inhomogène (présence d'un terme source dans le second membre),

$$\mathcal{L}(\psi) = f(\vec{r}, t), \quad (\text{II.3})$$

la solution générale de cette équation est de la forme

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_h(\vec{r}, t) + \psi_p(\vec{r}, t), \quad (\text{II.4})$$

où ψ_h est la solution générale ψ_h de l'équation homogène et ψ_p est une solution particulière de l'équation inhomogène. En effet, puisque $\mathcal{L}(\psi_p) = f(\vec{r}, t)$, on a

$$\mathcal{L}(\psi_h) = \mathcal{L}(\psi - \psi_p) = \mathcal{L}(\psi) - \mathcal{L}(\psi_p) = 0. \quad (\text{II.5})$$

5. La non-linéarité est au contraire essentielle pour expliquer le comportement de certaines ondes. C'est notamment le cas des ondes solitaires, appelées aussi « solitons », observées dans le phénomène de mascaret : à l'embouchure de certains fleuves, la marée montante provoque l'apparition d'une onde qui remonte le cours du fleuve.

6. Il s'agit, rappelons-le, d'un théorème. Le terme « principe » ne doit donc pas être pris au sens de postulat (c.-à-d. indémontrable), mais de point fondamental.

Enfin, la forme de l'onde pour un problème donné doit enfin non seulement satisfaire l'équation d'onde mais aussi obéir à des conditions particulières, par exemple la valeur du champ ou de ses dérivées à l'instant initial (conditions initiales) ou en des points aux bornes (conditions aux limites), voire à l'infini (conditions asymptotiques).

2. Propagation non dispersive d'ondes dans un milieu unidimensionnel

a. Ondes progressives

Considérons une onde progressive à une dimension, caractérisée par un champ scalaire ψ , et se propageant selon l'axe x . Supposons que cette onde se propage *sans déformation* à la célérité $c > 0$ ^{*7} vers les x croissants et notons ψ_+ la fonction telle que

$$\psi = \psi_+(x, t), \quad (\text{II.6})$$

où t est le temps.

Le fait que la propagation s'effectue sans déformation signifie que

$$\text{pour tous } (x_1, t_1, x_2, t_2), \quad \psi_+(x_2, t_2) = \psi_+(x_1, t_1) \quad \text{si } x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1), \quad (\text{II.7})$$

puisque $c(t_2 - t_1)$ est la valeur du déplacement à la vitesse c entre t_1 et t_2 . En particulier, $\psi_+(x, t) = \psi_+(u, 0)$ si $x = u + c(t - 0)$, c.-à-d. si $u = x - ct$. Pour une onde scalaire à une dimension se propageant sans déformation vers les x croissants à la célérité c , le champ ne dépend donc que de u , ce que nous noterons abusivement $\psi = \psi_+(u)$.

Pour une onde progressive se propageant sans déformation à la célérité c vers les x décroissants^{*8}, on obtient par le même raisonnement que le champ n'est fonction que de $v = x + ct$: $\psi = \psi_-(v)$.

b. Équation d'onde de d'Alembert

Cherchons maintenant à voir à quelles équations obéissent les fonctions ψ_+ et ψ_- . Ceci nous permettra ultérieurement de détecter immédiatement qu'une équation de la même forme admet des solutions ondulatoires du même type.

Rappelons d'abord comment dériver la composée d'une fonction f de p variables y_1, \dots, y_p . Supposons que chacune des variables y_i s'exprime comme une fonction \tilde{y}_i de q variables x_1, \dots, x_q . Sous certaines conditions de dérivabilité des fonctions f et \tilde{y}_i , conditions toujours réunies en pratique, la fonction composée

$$\tilde{f}: (x_1, \dots, x_q) \mapsto f(\tilde{y}_1[x_1, \dots, x_q], \dots, \tilde{y}_p[x_1, \dots, x_q]) \quad (\text{II.8})$$

est dérivable et ses dérivées par rapport aux variables x_j sont données par

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_q) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_i}(\tilde{y}_1[x_1, \dots, x_q], \dots, \tilde{y}_p[x_1, \dots, x_q]) \frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_q). \quad (\text{II.9})$$

Pour alléger les notations, on écrit souvent de manière abusive, en confondant les fonctions \tilde{f} et f , d'une part, et les fonctions \tilde{y}_i et les variables y_i , d'autre part, que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}. \quad (\text{II.10})$$

Dérivons d'abord ψ_+ par rapport à x et t . La fonction ne dépendant en réalité que de u , on a

$$\frac{\partial \psi_+}{\partial x} = \frac{\partial \psi_+}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \psi_+}{\partial u} \quad (\text{II.11})$$

car $\partial u / \partial x = 1$. De même,

$$\frac{\partial \psi_+}{\partial t} = \frac{\partial \psi_+}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi_+}{\partial u} \quad (\text{II.12})$$

car $\partial u / \partial t = -c$. On a donc

$$\frac{\partial \psi_+}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_+}{\partial t}. \quad (\text{II.13})$$

De même, pour une onde ψ_- se propageant vers les x décroissants et ne dépendant donc que de $v = x + ct$,

7. Il existe plusieurs définitions de la célérité d'une onde. Pour une onde se propageant sans se déformer, ces différentes célérités ont la même valeur.

8. On rencontre parfois les termes « onde progressive » pour celle se propageant vers les x croissants et « onde régressive » pour celle vers les x décroissants. Cette terminologie est à bannir : l'orientation de l'axe est en effet totalement arbitraire. Par ailleurs, il vaut mieux conserver la signification générale du terme « onde progressive » pour l'opposer aux ondes stationnaires.

on a

$$\frac{\partial \psi_-}{\partial x} = + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_-}{\partial t} \quad (\text{II.14})$$

car $\partial v/\partial x = 1$ et $\partial v/\partial t = +c$. Ces équations pour ψ_+ et ψ_- sont distinctes, « à sens unique » chacune. Or dans une corde vibrante ou un tuyau, par exemple, s'il n'y a qu'une seule direction, les deux sens sont possibles.

Essayons donc d'obtenir une équation couvrant les deux sens de propagation. Pour cela, calculons les dérivées secondes de ψ_+ et ψ_- par rapport à x et t . L'onde ψ_+ ne dépend que de u , donc

$$\frac{\partial^2 \psi_+}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_+}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_+}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi_+}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial u^2}. \quad (\text{II.15})$$

De même,

$$\frac{\partial^2 \psi_+}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi_+}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial \psi_+}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(-c \frac{\partial \psi_+}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial u^2}. \quad (\text{II.16})$$

On a donc $\partial^2 \psi_+/\partial x^2 = c^{-2} \partial^2 \psi_+/\partial t^2$. Un calcul similaire donne la même équation pour ψ_- . Quel que soit son sens de propagation, l'onde obéit donc à l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{II.17})$$

dite **équation de d'Alembert**⁹ à une dimension.

Inversement, montrons que les seules solutions de l'équation de d'Alembert sont de la forme $\psi = \psi_+ + \psi_-$. Réécrivons l'équation pour une solution générale ψ en fonction de u et v au lieu de x et t ¹⁰. On a $\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = 1$, donc

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \right) \psi = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad (\text{II.18})$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}. \quad (\text{II.19})$$

De même, $\partial u/\partial t = -c$ et $\partial v/\partial t = c$, donc

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial u} + c \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad (\text{II.20})$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(-c \frac{\partial \psi}{\partial u} + c \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}. \quad (\text{II.21})$$

On obtient donc

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0. \quad (\text{II.22})$$

En intégrant $\partial^2 \psi/(\partial u \partial v) = \partial(\partial \psi/\partial v)/\partial u$ par rapport à u , on obtient que $\partial \psi/\partial v$ ne dépend pas de u (puisque sa dérivée par rapport à u est nulle), soit

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = g(v). \quad (\text{II.23})$$

En intégrant $\partial \psi/\partial v$ par rapport à v , on obtient que

$$\psi(x, t) = F(u) + G(v) = F(x - ct) + G(x + ct), \quad (\text{II.24})$$

où $G(v) = \int^v g(v') dv'$, c.-à-d. le résultat voulu en identifiant ψ_+ à F et ψ_- à G .

L'équation de d'Alembert étant linéaire, elle est également valable pour n'importe quelle combinaison linéaire de deux solutions ψ_1 et ψ_2 , $\psi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2$, où α_1 et α_2 sont indépendantes de la position et du temps. Ce principe de superposition vaut entre autres pour des ondes progressives de sens différents, $\psi_1 = \psi_+$ et $\psi_2 = \psi_-$.

Nous verrons que, en conséquence de ce principe, l'équation de d'Alembert admet, outre des ondes progressives dans l'un ou l'autre sens, des solutions non progressives, les ondes stationnaires, de la forme $\psi(x, t) = \xi(x) \theta(t)$.

9. L'équation de d'Alembert est l'équation d'onde qui intervient dans la plupart des problèmes que nous traiterons, mais ce n'est pas la seule. Ainsi, les fonctions d'onde de la mécanique quantique sont régies par l'équation de Schrödinger, bien différente.

10. Plus rigoureusement, il faudrait distinguer les fonctions $(x, t) \mapsto \psi(x, t)$ et $(u, v) \mapsto \psi(x[u, v], t[u, v])$.

c. Ondes progressives sinusoïdales

α. Propriétés d'une onde sinusoïdale

Parmi toutes les solutions en ondes progressives selon $\pm \vec{u}_x$ d'une équation d'onde (celle de d'Alembert ou une autre), les **ondes sinusoïdales** par rapport au temps (appelées aussi **harmoniques**, notamment en acoustique, et **monochromatiques**, en optique) nous intéresseront particulièrement. La forme d'une telle onde est

$$\psi(x, t) = A(x) \cos(\omega[x]t + \tilde{\varphi}[x]). \quad (\text{II.25})$$

S'il s'agit d'une onde progressive vers les x croissants satisfaisant l'équation de d'Alembert, $\psi(x, t) = \psi_+(x - ct)$: x ne peut donc apparaître isolément, mais seulement dans la combinaison $x - ct$, ou, de manière équivalente, $t - x/c$. On a donc alors

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega [t - x/c] + \hat{\varphi}). \quad (\text{II.26})$$

De même, s'il s'agit d'une onde progressive sinusoïdale vers les x décroissants, donc de la forme $\psi(x, t) = \psi_-(x + ct)$, alors

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega [t + x/c] + \hat{\varphi}). \quad (\text{II.27})$$

Dans les deux cas^{*11}, on peut écrire

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - k_x x + \hat{\varphi}), \quad (\text{II.28})$$

où

- $\vec{k} = k_x \vec{u}_x$ est le **vecteur d'onde**. Sa direction et son sens sont ceux de la propagation de l'onde ;
 - $k := \|\vec{k}\| = |k_x|$ est le **nombre d'onde** [angulaire] (en $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$) : $k_x = +k$ si l'onde se propage selon $+\vec{u}_x$ et $k_x = -k$ si c'est selon $-\vec{u}_x$;
 - $\varphi(x, t) := \omega t - k_x x + \hat{\varphi}$ est la **phase** de l'onde et $\hat{\varphi}$ est la **phase à l'origine des temps et de l'espace** ;
 - A et ω sont l'amplitude et la pulsation, déjà définies pour un signal fonction du temps seulement.
- Pour que II.28 soit solution de l'équation de d'Alembert à une dimension, on doit avoir

$$|k_x| = \frac{\omega}{c}. \quad (\text{II.29})$$

(On peut vérifier que l'équation de d'Alembert impose la relation $\omega^2 = k_x^2/c^2$.) D'une manière générale, la relation entre le vecteur d'onde et la pulsation imposée par une équation d'onde quelconque à ses solutions sinusoïdales en temps s'appelle une **relation de dispersion**.

La fonction ψ est ici scalaire. Pour une fonction vectorielle, ψ représentera n'importe laquelle de ses composantes cartésiennes (avec des valeurs différentes a priori pour A et $\hat{\varphi}$ selon chaque axe).

ψ peut être réécrit en fonction de la **longueur d'onde** λ (c.-à-d. la période spatiale, en m), ainsi que de la fréquence ou de la période [temporelles] (déjà définies pour un signal ne dépendant que du temps). On a^{*12}

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (\text{II.30})$$

β. Représentation complexe

Pour étudier les ondes sinusoïdales, il est commode d'utiliser la notation complexe. Posons^{*13}

$$\underline{\psi}(\vec{r}, t) = A e^{i(\omega t - k_x x + \hat{\varphi})}. \quad (\text{II.31})$$

L'onde progressive sinusoïdale ψ est reliée à $\underline{\psi}$ par

$$\psi = \text{Re } \underline{\psi}. \quad (\text{II.32})$$

On peut réécrire $\underline{\psi}$ sous la forme

$$\underline{\psi}(x, t) = \underline{A} e^{i(\omega t - k_x x)}, \quad (\text{II.33})$$

où

$$\underline{A} = A e^{i\hat{\varphi}}. \quad (\text{II.34})$$

est l'amplitude complexe.

11. On pourrait aussi écrire $\psi(x, t) = A \cos(k_x x - \omega t + \hat{\varphi}')$ avec $\hat{\varphi}' = -\hat{\varphi}$, ou encore $\psi(x, t) = A \sin(\omega t - k_x x + \hat{\varphi}'')$ avec $\hat{\varphi}'' = \hat{\varphi} + \pi/2$.

12. Attention, le nombre d'onde(s) [linéaire] est parfois défini comme $1/\lambda$, c.-à-d. la fréquence spatiale.

13. On peut tout aussi bien poser $\underline{\psi}(\vec{r}, t) = A e^{i(k_x x - \omega t + \hat{\varphi})}$. Les facteurs « i » et « $i k_x$ » ci-dessous doivent alors être remplacés par leurs opposés.

On a déjà vu que

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = i\omega \underline{\psi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\psi}. \quad (\text{II.35})$$

De même, en dérivant par rapport à x , on obtient

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial x} = -i \frac{\partial(k_x x)}{\partial x} \underline{\psi} = -ik_x \underline{\psi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} = -k_x^2 \underline{\psi}. \quad (\text{II.36})$$

Un des intérêts de la notation complexe est que, lorsqu'on se restreint à des combinaisons linéaires de $\underline{\psi}$ et de ses dérivées, le facteur « $e^{i(\omega t - k_x x)}$ » apparaît dans tous les termes et peut donc être simplifié.

d. Ondes stationnaires

L'équation de d'Alembert admet aussi des solutions en ondes stationnaires (donc non progressives), c.-à-d. de la forme $\psi(x, t) = \xi(x) \theta(t)$ en représentation réelle¹⁴.

Cherchons quelles contraintes l'équation impose sur les fonctions ξ et θ . On a $\partial^2 \psi / \partial x^2 = \xi''(x) \theta(t)$ et $\partial^2 \psi / \partial t^2 = \xi(x) \theta''(t)$, donc en se plaçant dans un voisinage de x et t où ξ et θ ne s'annulent pas, on obtient

$$c^2 \frac{\xi''(x)}{\xi(x)} = \frac{\theta''(t)}{\theta(t)}. \quad (\text{II.37})$$

Le terme de gauche ne peut dépendre que de x , or il est égal au terme de droite qui ne dépend que de t : les deux termes ne dépendent donc ni de x ni de t mais sont égaux à une constante K .

Si $K > 0$, $\theta''(t) - K\theta(t) = 0$ et $\theta(t) = \alpha e^{\sqrt{K}t} + \beta e^{-\sqrt{K}t}$. Le premier terme de la somme tend rapidement vers l'infini si $\alpha \neq 0$; il n'est donc pas physique. Quant au deuxième terme, il tend rapidement vers 0 et ne présente donc guère d'intérêt.

Le cas $K < 0$ est plus intéressant. Posons $\omega^2 = -K$. On a alors $\theta''(t) + \omega^2 \theta(t) = 0$, soit $\theta(t) = \alpha \cos(\omega t + \gamma)$. De même, $\xi''(x) + (\omega^2/c^2) \xi(x) = 0$, soit $\xi(x) = \beta \cos(\omega x/c + \delta)$, donc

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \alpha \beta \cos(\omega t + \gamma) \cos(\omega x/c + \delta) \\ &= \frac{\alpha \beta}{2} \cos(\omega [t - x/c] + \gamma - \delta) + \frac{\alpha \beta}{2} \cos(\omega [t + x/c] + \gamma + \delta). \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

Le premier terme correspond à une onde progressive sinusoïdale vers les x croissants et le deuxième à une onde progressive sinusoïdale vers les x décroissants. Leur somme donne néanmoins une onde stationnaire. Remarquer que ces deux ondes ont la même pulsation, la même célérité et la même amplitude. Ce phénomène se produit notamment lorsqu'une onde se réfléchit sur un obstacle.

3. Équations d'ondes et ondes sinusoïdales

a. Paquet d'ondes

Les ondes sinusoïdales sont simples mais elles ne sont pas physiques car elles sont infiniment étendues dans le temps et l'espace. Elles ne peuvent de ce fait transmettre d'information puisque une information nouvelle correspond à un changement dans le signal. On peut néanmoins les combiner pour construire des ondes ayant un sens physique.

En effet, la représentation complexe que nous venons de voir pour des ondes sinusoïdales solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension peut être généralisée à des ondes quasi quelconques.

Pour une onde, dont le champ ψ dépend non seulement du temps t mais aussi de la position \vec{r} , les amplitudes (réelle ou complexe) et phases à l'origine des modes sinusoïdaux (par rapport au temps) de la décomposition spectrale ne sont plus des constantes, mais deviennent des fonctions de \vec{r} . L'onde générale peut donc être décrite comme une somme continue ou discrète d'ondes sinusoïdales (temporellement)¹⁵ :

$$\psi(\vec{r}, t) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\psi}(\vec{r}, \omega)}{2\pi} e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{II.39})$$

Pour une onde dont le champ est à valeur réelle,

$$\psi(\vec{r}, t) = \text{Re} \underline{\psi}(\vec{r}, t) \quad (\text{II.40})$$

14. Nous verrons plus loin qu'une onde progressive réelle de la forme $\psi(x, t) = A \cos(\omega t - k_x x)$ peut être représentée par une onde complexe de la forme $\underline{\psi}(x, t) = A e^{i(\omega t - k_x x)}$. Certes, $\underline{\psi}(x, t) = (A e^{i\omega t}) \times e^{-ik_x x}$, mais on ne peut pas écrire $\psi(x, t)$ sous la forme $f(x)g(t)$ car, d'une manière générale, la partie réelle d'un produit de nombres complexes n'est pas égale au produit de leurs parties réelles.

15. Nous singularisons le temps par rapport à la position pour deux raisons : d'abord, parce que la position est caractérisée par trois coordonnées et que, d'une manière générale, il n'y a pas de raison de privilégier l'une d'entre elles par rapport aux autres ; ensuite, parce que l'on s'intéressera à des moyennes temporelles et non spatiales de la puissance.

avec

$$\underline{\psi}(\vec{r}, t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \underline{\alpha}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (\text{II.41})$$

où

$$\underline{\alpha}(\vec{r}, \omega) = \frac{\hat{\psi}(\vec{r}, \omega)}{\pi} \quad (\text{II.42})$$

est l'amplitude complexe en \vec{r} de l'onde sinusoïdale de pulsation ω . Posons

$$\alpha(\vec{r}, \omega) = |\underline{\alpha}(\vec{r}, \omega)| \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}(\vec{r}, \omega) = \arg \underline{\alpha}(\vec{r}, \omega). \quad (\text{II.43})$$

On a alors

$$\underline{\psi}(\vec{r}, t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \alpha(\vec{r}, \omega) e^{i(\omega t + \tilde{\varphi}(\vec{r}, \omega))} d\omega, \quad (\text{II.44})$$

où le réel positif $\alpha(\vec{r}, \omega)$ est l'amplitude réelle en \vec{r} de l'onde sinusoïdale de pulsation ω et $\varphi(\vec{r}, t, \omega) = \omega t + \tilde{\varphi}(\vec{r}, \omega)$ est sa phase en \vec{r} à l'instant t . L'expression II.41 définit un **paquet d'ondes** (ou **train d'ondes**). Contrairement aux ondes sinusoïdales, un paquet d'ondes peut représenter une onde physique. En effet, son extension spatiale et son extension temporelle peuvent être finies.

b. Phase et dispersion

Dans ce qui suit, on étudiera essentiellement des ondes au voisinage de points à grande distance r des sources des ondes. Pour des ondes sinusoïdales de longueur d'onde λ , on aura donc $r \gg \lambda$. Leur amplitude étant alors quasi constante sur une distance de quelques λ , on s'intéressera plutôt aux variations de la phase.

α. Surface d'onde, rayon d'onde

Pour une onde sinusoïdale se propageant dans l'espace à trois dimensions, l'ensemble des points possédant la même phase à un instant donné constitue une surface, la **surface d'onde** (ou encore le **front d'onde**). On appelle **ondes planes** les ondes pour lesquelles la surface d'onde est un plan et **ondes sphériques** celles pour lesquelles c'est une sphère.

La courbe perpendiculaire en chaque point à la surface d'onde (donc tangente en chaque point à la vitesse de phase et au vecteur d'onde) constitue un **rayon d'onde**. Les rayons sont des droites parallèles pour des ondes planes et des droites passant par le centre des sphères pour des ondes sphériques.

Dans le cas de la lumière, on parle plus spécifiquement de **rayon lumineux**. Cette notion permet de faire le lien entre l'optique physique, dite aussi ondulatoire, qui nous intéresse dans ce cours, et l'optique géométrique, qui en est un cas particulier plus simple à traiter.

β. Vecteur d'onde et nombre d'onde

On définit de manière générale le **vecteur d'onde** en \vec{r} de la composante de pulsation ω par

$$\vec{k}(\vec{r}, \omega) = -\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} \varphi(\vec{r}, \omega) = -\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} \tilde{\varphi}(\vec{r}, \omega) = -\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \vec{u}_z. \quad (\text{II.45})$$

Sa norme $k(\vec{r}, \omega)$ est le **nombre d'onde**. La relation entre le vecteur d'onde (ou le nombre d'onde) et la pulsation porte le nom de **relation de dispersion**.

Dans le cas particulier d'une onde de la forme $A e^{i(\omega[t-x/c] + \tilde{\varphi})}$, on retrouve que

$$\vec{k} = -\frac{\partial(\omega[t-x/c] + \tilde{\varphi})}{\partial x} \vec{u}_x = \frac{\omega}{c} \vec{u}_x. \quad (\text{II.46})$$

De même, pour une onde de la forme $A e^{i\omega([t+x/c] + \tilde{\varphi})}$, on a $\vec{k} = -(\omega/c) \vec{u}_x$.

γ. Vitesse de phase

On appelle **vitesse de phase** la vitesse \vec{c}_{ph} à laquelle la phase $\varphi(\vec{r}, t) = \omega t + \tilde{\varphi}(\vec{r}, \omega)$ se propage se propage dans la direction \vec{k} . C'est donc la vitesse à laquelle le front d'onde avance.

La phase en $\vec{r} + d\vec{r}$ à l'instant $t + dt$ est donnée par

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) = \varphi(\vec{r}, t) + \omega dt + \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} \tilde{\varphi} \cdot d\vec{r}. \quad (\text{II.47})$$

Le point en $\vec{r} + d\vec{r}$ a la même phase à $t + dt$ qu'en \vec{r} à t si

$$\omega dt + \vec{k} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (\text{II.48})$$

La vitesse de phase vaut

$$\vec{c}_{\text{ph}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{II.49})$$

avec $d\vec{r} = dr \vec{k}/k$, donc

$$\vec{c}_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k^2} \vec{k} \quad \text{et} \quad c_{\text{ph}} := \|\vec{c}_{\text{ph}}\| = \frac{\omega}{k}. \quad (\text{II.50})$$

Lorsque c_{ph} dépend de ω , le paquet d'onde s'étale au cours de la propagation : on dit qu'il se **disperse**.

Pour une onde sinusoïdale décrite par l'équation de d'Alembert, $\omega = kc$, donc $c_{\text{ph}}(\omega) = c$, indépendamment de la valeur de ω : cette équation décrit donc des ondes se propageant de manière non dispersive.

Dans le vide, les ondes électromagnétiques (dont la lumière visible) ne se dispersent pas et c_{ph} vaut $c_0 = 299\,792\,458$ m/s. Dans un milieu transparent, $c_{\text{ph}} = c_0/n(\omega)$, où $n(\omega)$ est l'**indice optique** (ou **de réfraction**) du milieu. L'indice vaut 1 par définition dans le vide. Il est très légèrement supérieur à 1 dans l'air et prend respectivement des valeurs de l'ordre de 1,33 et de 1,5 dans l'eau et le verre aux longueurs d'onde visibles ; ces trois milieux sont dispersifs et $n(\omega)$ croît avec ω .

δ. Vecteur d'onde complexe (hors programme)

Pour décrire l'atténuation d'une onde par un milieu, notamment par absorption dans celui-ci, on utilise parfois un vecteur d'onde complexe. En effet, si une onde sinusoïdale se propage de la position \vec{r}_0 jusqu'à la position \vec{r} , on peut écrire

$$\underline{\psi}(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) e^{i(\omega t + \tilde{\varphi}(\vec{r}))} = A(\vec{r}_0) e^{i(\omega t + \tilde{\varphi}(\vec{r}) + \tilde{\varphi}'(\vec{r}))} \quad (\text{II.51})$$

où $\tilde{\varphi}'(\vec{r})$ est un nombre réel défini par

$$\tilde{\varphi}'(\vec{r}) = -\ln \frac{A(\vec{r})}{A(\vec{r}_0)}. \quad (\text{II.52})$$

On définit alors un vecteur d'onde complexe par la relation

$$\vec{k}(\vec{r}, \omega) = -\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} \tilde{\varphi}(\vec{r}, \omega) = \vec{k}(\vec{r}, \omega) + i \vec{k}'(\vec{r}, \omega) \quad (\text{II.53})$$

avec

$$\underline{\tilde{\varphi}}(\vec{r}, \omega) = \tilde{\varphi}(\vec{r}, \omega) + i \tilde{\varphi}'(\vec{r}, \omega). \quad (\text{II.54})$$

Ce formalisme est notamment utilisé pour étudier la pénétration des ondes électromagnétiques dans un conducteur (effet de peau).

On peut définir un indice de réfraction complexe pour le milieu, mais la vitesse de phase, c.-à-d. de propagation de la phase, doit être calculée uniquement à partir de la partie réelle du vecteur d'ondes : $c_{\text{ph}} = \omega / \text{Re} k$.

On peut même avoir un vecteur d'onde purement imaginaire. L'"onde" est alors dite **évanescence** et ne se propage en réalité pas.

ε. Vitesse de groupe (hors programme)

Considérons une onde constituée de deux ondes sinusoïdales de même amplitude mais de pulsations légèrement différentes, $\omega_1 = \omega - \Delta\omega$ et $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$, avec $\Delta\omega \ll \omega$, et de nombres d'onde proches, $k_1 = k_x - \Delta k_x$ et $k_2 = k_x + \Delta k_x$.

$$\begin{aligned} \psi &= A \cos(\omega_1 t - k_1 x + \dot{\varphi}_1) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x + \dot{\varphi}_2) \\ &= 2A \cos\left(\frac{[\omega_1 + \omega_2] t - [k_1 + k_2] x + [\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2]}{2}\right) \cos\left(\frac{[\omega_1 - \omega_2] t - [k_1 - k_2] x + [\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2]}{2}\right) \\ &= 2A \cos\left(\omega t - k_x x + \frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2}\right) \cos\left(-\Delta\omega t + \Delta k_x x + \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

On obtient le produit de deux termes sinusoïdaux : le premier, la **porteuse**, se propage à la vitesse de phase ω/k_x ; le second, l'**enveloppe**, module le premier avec une période supérieure ; il se propage à la vitesse $\Delta\omega/\Delta k_x$. Cette dernière s'appelle la **vitesse de groupe** et est définie plus généralement par^{*16}

$$\vec{c}_{\text{gr}} = \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{k}} \omega = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \vec{u}_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \vec{u}_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \vec{u}_z. \quad (\text{II.56})$$

16. Si un vecteur d'onde complexe est utilisé, \vec{k} est sa partie réelle dans l'expression de la vitesse de groupe.

Dans un milieu isotrope, ω ne dépend de \vec{k} que par sa norme, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, donc

$$\vec{c}_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} \left(\frac{\partial k}{\partial k_x} \vec{u}_x + \frac{\partial k}{\partial k_y} \vec{u}_y + \frac{\partial k}{\partial k_z} \vec{u}_z \right) = \frac{d\omega}{dk} \frac{\vec{k}}{k}, \quad (\text{II.57})$$

d'où

$$c_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (\text{II.58})$$

Pour les ondes électromagnétiques dans le vide, $c_{\text{gr}} = c_0$ pour toute valeur de ω . Dans un milieu dispersif, généralement, $c_{\text{ph}}(\omega) \neq c_{\text{gr}}(\omega)$.

La vitesse de groupe correspond généralement à la vitesse de propagation du signal et de l'énergie.

c. Solutions d'une équation d'ondes linéaire. Équation de Helmholtz (hors programme)

L'équation de d'Alembert est une équation d'ondes particulière : elle est non dispersive, c.-à-d. que toutes les ondes progressives qui en sont solution ont la même célérité. De manière un peu plus générale, hors des sources, les ondes peuvent assez souvent être décrites par des équations de la forme

$$\Lambda(\psi) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{II.59})$$

où \vec{r} est la position, Λ est un opérateur linéaire à valeur réelle, ne dépendant que de \vec{r} et agissant sur ψ .

Dans ces conditions (et sous réserve que ψ soit bien défini), ψ satisfait aussi II.59. Comme les opérateurs Λ et $\partial^2/\partial t^2$ sont linéaires et que les fonctions $t \mapsto \underline{\alpha}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t}$ sont linéairement indépendantes, chacune d'entre elles satisfait également II.59. Pour chaque valeur de ω , on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda(\underline{\alpha}[\vec{r}, \omega] e^{i\omega t}) - \frac{\partial^2(\underline{\alpha}[\vec{r}, \omega] e^{i\omega t})}{\partial t^2} \\ &= (\Lambda[\underline{\alpha}(\vec{r}, \omega)] + \omega^2 \underline{\alpha}[\vec{r}, \omega]) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

soit

$$\Lambda(\underline{\alpha}[\vec{r}, \omega]) + \omega^2 \underline{\alpha}(\vec{r}, \omega). \quad (\text{II.61})$$

Cette équation, dans laquelle le temps a disparu, porte le nom d'**équation de Helmholtz**.

Application à l'équation de d'Alembert à une dimension

Dans le cas de l'équation de d'Alembert à une dimension, ψ ne dépend que de x et t , donc $\underline{\alpha}$ n'est fonction que de x et ω . Par ailleurs, $\Lambda = c^2 \partial^2/\partial x^2$, donc $\underline{\alpha}$ obéit à l'équation^{*17}

$$c^2 \frac{\partial^2 \underline{\alpha}}{\partial x^2} + \omega^2 \underline{\alpha}(x, \omega) = 0 \quad (\text{II.62})$$

(oscillateur harmonique libre sans frottement). La solution générale est de la forme

$$\underline{\alpha}(x, \omega) = \underline{\alpha}_-(\omega) e^{i\omega x/c} + \underline{\alpha}_+(\omega) e^{-i\omega x/c}, \quad (\text{II.63})$$

où $\underline{\alpha}_-$ et $\underline{\alpha}_+$ sont des nombres complexes ne dépendant que de ω . On a donc

$$\underline{\psi}(x, t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \underline{\alpha}_-(\omega) e^{i\omega(t+x/c)} d\omega + \int_{\omega=0}^{\infty} \underline{\alpha}_+(\omega) e^{i\omega(t-x/c)} d\omega. \quad (\text{II.64})$$

La première (resp. seconde) intégrale correspond à une onde progressive se propageant à la célérité c vers les x croissants (resp. décroissants). On retrouve donc le résultat II.24, mais sous forme d'une somme d'ondes sinusoïdales.

17. On pourrait même prendre $\psi(x, t) = \underline{\alpha}(x, \omega) e^{i\omega(x)t}$. Les fonctions $t \mapsto t^j e^{i\omega(x)t}$ (avec $j \in \mathbb{N}$) étant linéairement indépendantes, on montre sans difficulté en appliquant l'équation de d'Alembert à $\underline{\psi}(x, t)$ pour tout t que ω ne dépend pas de x .

4. Équation de d'Alembert à trois dimensions

a. Forme de l'équation

À trois dimensions, l'équation de d'Alembert pour un champ scalaire se généralise sous la forme suivante :

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{II.65})$$

où Δ est l'opérateur **laplacien scalaire**, donné en coordonnées cartésiennes par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{II.66})$$

L'équation à une dimension est clairement un cas particulier dans le cas où $\partial^2\psi/\partial y^2 = \partial^2\psi/\partial z^2 = 0$.

Pour un champ vectoriel,

$$\vec{\Delta}\vec{\psi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \quad (\text{II.67})$$

où

$$\vec{\Delta}\vec{\psi} = \Delta\psi_x \vec{u}_x + \Delta\psi_y \vec{u}_y + \Delta\psi_z \vec{u}_z \quad (\text{II.68})$$

est l'opérateur **laplacien vectoriel**. Chacune des composantes *cartésiennes* de $\vec{\psi}$ obéit donc à II.65.

Parmi toutes les formes possibles solutions de l'équation de d'Alembert scalaire à trois dimensions, deux présentent un intérêt particulier : les ondes planes et les ondes sphériques.

b. Solutions en ondes planes

On connaît déjà les solutions de II.65 dans le cas où ψ ne dépend ni de y ni de z . On a alors

$$\psi = \psi_+(x - ct) + \psi_-(x + ct). \quad (\text{II.69})$$

L'ensemble des points à une même abscisse x constituant un plan perpendiculaire à l'axe des x , les solutions ψ_+ et ψ_- correspondent à des **ondes planes progressives** se propageant à la vitesse c , respectivement vers les x croissants et vers les x décroissants.

Plus généralement, pour une onde plane se propageant dans la direction indiquée par le vecteur unitaire \vec{n} ,

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_+(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) + \psi_-(\vec{n} \cdot \vec{r} + ct), \quad (\text{II.70})$$

où ψ_+ correspond à une onde progressive se propageant selon $+\vec{n}$ et ψ_- à une onde progressive se propageant selon $-\vec{n}$. L'ensemble des points pour lesquels $\vec{n} \cdot \vec{r}$ constitue un plan perpendiculaire à \vec{n} .

Pour une onde plane progressive sinusoïdale se propageant dans la direction et le sens indiqués par un vecteur unitaire \vec{n} ,

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi), \quad (\text{II.71})$$

où

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}. \quad (\text{II.72})$$

La vitesse de phase vaut donc

$$\vec{c}_{\text{ph}} = \omega \frac{\vec{k}}{k^2} = c \vec{n}. \quad (\text{II.73})$$

c. Solutions en ondes sphériques

Une autre solution intéressante de l'équation de d'Alembert est constituée par les ondes sphériques. Celles-ci correspondent notamment à l'émission isotrope par une source ponctuelle. Pour une onde scalaire, le champ ne dépend alors plus que de la distance r à la position O de la source. En coordonnées sphériques,

$$\Delta\psi(r, t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \partial\psi/\partial r)}{\partial r} \quad (\text{II.74})$$

en raison de l'isotropie. On a donc

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \partial\psi/\partial r)}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{II.75})$$

Or

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \partial\psi/\partial r)}{\partial r} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2}, \quad (\text{II.76})$$

donc

$$\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\psi)}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{II.77})$$

La fonction $r\psi(\vec{r}, t)$ obéit à la même équation qu'une onde plane, donc

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{f_+(r - ct)}{r} + \frac{f_-(r + ct)}{r}. \quad (\text{II.78})$$

Le premier terme du membre de droite correspond à une onde divergente émise par une source située en O . Le deuxième terme est une onde convergeant vers O ; il est généralement nul, sauf disposition artificielle, par exemple si la source est entourée par un miroir sphérique qui renvoie vers elle la lumière qu'elle a émise.

Pour une onde vectorielle longitudinale sphérique, $\vec{\psi} = \psi(r, t) \vec{u}_r$, et on a de même^{*18}

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \left(\frac{f_+[r - ct]}{r} + \frac{f_-[r + ct]}{r} \right) \vec{u}_r. \quad (\text{II.79})$$

Le champ ψ (ou $\vec{\psi}$) décroît en $1/r$. Cette atténuation n'est en rien due à une absorption par le milieu : elle est purement géométrique et est parfois qualifiée de **dilution**. Cette décroissance avec la distance rappelle celle du champ gravitationnel ou électrostatique créés par une masse ou une charge ponctuelle, mais ceux-ci sont en $1/r^2$. En réalité, c'est l'intensité (énergétique) de l'onde, définie (à une constante multiplicative près) comme la moyenne temporelle du carré de ψ qui est en $1/r^2$ pour une onde sphérique. Cette intensité correspond à la moyenne temporelle de la puissance reçue par unité de surface. En l'absence d'absorption, la puissance traversant une surface sphérique centrée sur la source est donc indépendante du rayon de la sphère.

Pour une onde sphérique sinusoidale émise par une source en O ,

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \phi) \quad (\text{II.80})$$

avec $k = \omega/c$. En tout point,

$$\vec{k}(\vec{r}) = k \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{c}_{\text{ph}}(\vec{r}) = c \vec{u}_r. \quad (\text{II.81})$$

À grande distance de la source, l'onde sphérique peut être assimilée à une onde plane : en effet, les variations de l'amplitude A/r seront négligeables sur une distance de quelques longueurs d'onde devant celles de la phase $\omega t - kr + \phi$.

d. Ondes circulaires (hors programme)

L'équation de d'Alembert à deux dimensions admet des solutions analogues aux ondes à une dimension ou aux ondes planes à trois dimensions.

En revanche, les ondes circulaires (donc se propageant dans un plan), c.-à-d. dont le champ ne dépend à un instant t que de la distance ρ à un point, n'ont pas de forme aussi simple que pour les ondes sphériques. Pour un champ $\psi(\rho, t)$, le laplacien se réduit à

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \partial\psi/\partial\rho)}{\partial\rho} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho}. \quad (\text{II.82})$$

En particulier, pour une onde circulaire sinusoidale, de la forme $\underline{\psi}(\rho, t) = f(\rho) e^{i\omega t}$ en représentation complexe, on obtient

$$\rho \frac{d^2f}{d\rho^2} + \frac{df}{d\rho} + \frac{\omega^2}{c^2} f(\rho) = 0. \quad (\text{II.83})$$

La solution générale de cette équation est de la forme

$$f(\rho) = \alpha_1 H_0^{(1)}(\omega \rho/c) + \alpha_2 H_0^{(2)}(\omega \rho/c), \quad (\text{II.84})$$

où α_1 et α_2 sont des constantes fixées par les conditions particulières et $H_0^{(1)}$ et $H_0^{(2)}$ sont des fonctions de Hankel (des fonctions spéciales construites à partir d'autres fonctions spéciales, les fonctions de Bessel). À grande distance ($\omega \rho/c \gg 1$),

$$H_0^{(1)}(\omega \rho/c) \propto e^{i\omega \rho/c} / \sqrt{\rho} \quad \text{et} \quad H_0^{(2)}(\omega \rho/c) \propto e^{-i\omega \rho/c} / \sqrt{\rho}, \quad (\text{II.85})$$

18. Une onde vectorielle transverse dont la norme du champ ne dépendrait spatialement que de r ne peut en revanche exister : c'est une conséquence du théorème de la boule chevelue, selon lequel on ne peut peigner (en les aplatissant contre la surface) les cheveux couvrant uniformément une boule sans créer d'épi quelque part. Il n'existe donc pas de source ponctuelle d'ondes électromagnétiques ; la source la plus élémentaire de ces ondes est un dipôle. Celui-ci introduisant une direction privilégiée, la propagation ne peut pas être isotrope.

donc

$$\underline{\psi}(\rho, t) \approx \alpha_1 \frac{e^{i\omega(t+\rho/c)}}{\sqrt{\rho}} + \alpha_2 \frac{e^{i\omega(t-\rho/c)}}{\sqrt{\rho}}, \quad (\text{II.86})$$

où l'on reconnaît la somme d'une onde sinusoïdale se propageant vers les ρ décroissants et d'une onde sinusoïdale vers les ρ croissants, toutes deux à la vitesse de phase c .

Pour une onde non sinusoïdale, si les termes de pulsation $\omega \gg c/\rho$ sont négligeables à une distance ρ , on a de même

$$\psi(\rho, t) \approx \frac{f_-(\rho + ct)}{\sqrt{\rho}} + \frac{f_+(\rho - ct)}{\sqrt{\rho}}, \quad (\text{II.87})$$

où le premier terme correspond à une onde progressive se propageant à la célérité c vers la source ponctuelle et le deuxième à une onde progressive s'éloignant à la même célérité. À courte distance du point, la vitesse de phase dépend de ω et chacune de ces ondes progressives se disperse.

Ce qui précède vaut évidemment aussi pour les solutions cylindriques (ne dépendant que de la distance ρ à un axe) de l'équation de d'Alembert à trois dimensions.