

Chapitre VIII

Effet Doppler

A. Exemples

L'effet Doppler acoustique est un changement de la *fréquence* des ondes sonores dont nous avons tous fait l'expérience lorsqu'une ambulance passe devant nous : le son que la sirène produit, assez aigu (hautes fréquences) quand elle se rapproche, devient plus grave (basses fréquences) une fois qu'elle est passée et qu'elle s'éloigne. Il est essentiel de comprendre que ceci n'a rien à voir avec la hausse (resp. la baisse) de l'*intensité* sonore au fur et à mesure que l'ambulance s'approche (resp. s'éloigne).

Ce phénomène a été étudié pour la première fois pour la lumière par Christian Doppler en 1842, dans un article (en français!) intitulé «Sur la lumière colorée des étoiles doubles et de quelques autres astres du ciel». Il y suggérait que la lumière émise par une étoile tournant autour d'une autre paraissait plus bleue (fréquence plus élevée) quand elle se rapprochait et plus rouge (fréquence plus basse) quand elle s'éloignait. Vu les vitesses des étoiles, l'effet est en réalité imperceptible quand on ne décompose pas la lumière de l'étoile en ses différentes fréquences. À l'aide d'un spectroscope, on peut en revanche observer le décalage des raies d'émission ou d'absorption des étoiles, car ces raies sont fines.

Dans le même article, Doppler affirmait que le même effet se produisait pour les sons. Ceci a été vérifié peu après par Christoph Buys Ballot, qui fit jouer une note précise par des musiciens dans un train en mouvement et compara la fréquence perçue à celle de la même note émise au repos.

Pour comprendre ce phénomène, considérons le schéma suivant :

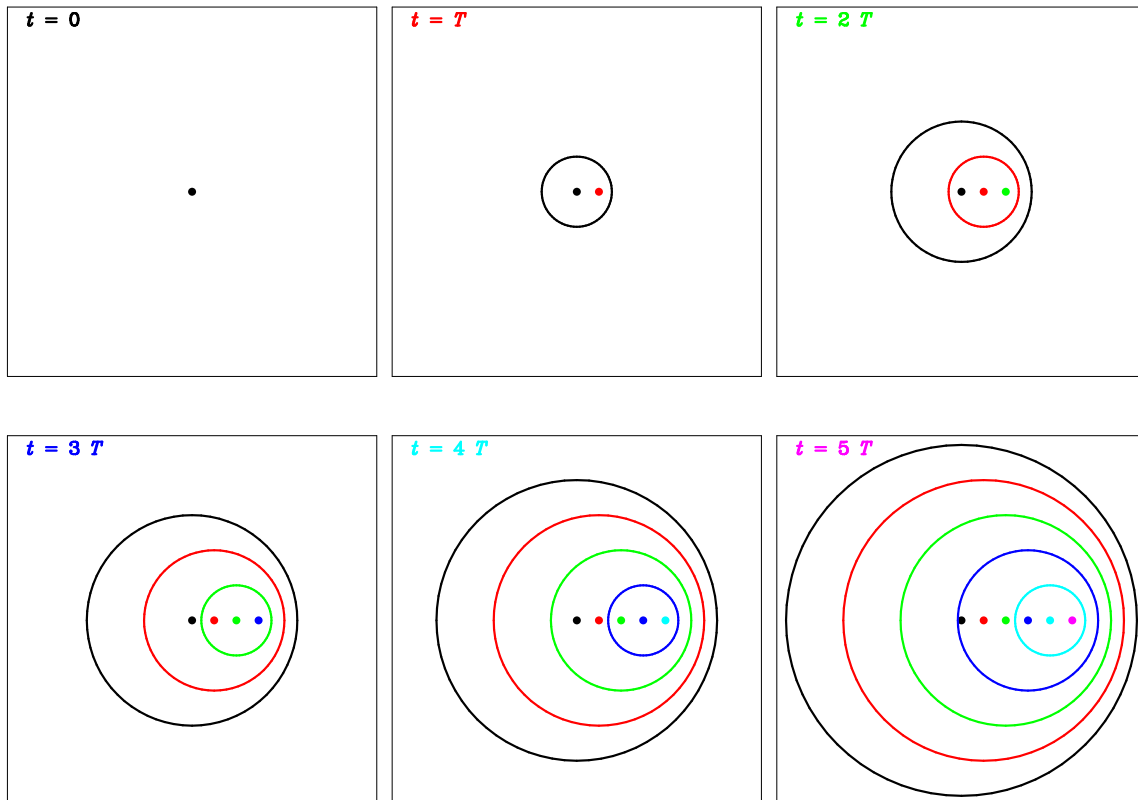


FIGURE VIII.1. – Effet Doppler acoustique pour une source mobile. Cas subsonique.

Dans chaque carré, les points représentent la position de la source à l’instant t indiqué en haut à gauche, ainsi que ses positions aux temps $t' < t$ (voir code couleur); les cercles sont les fronts atteints à l’instant t par les ondes émises aux temps t' .

On considère un milieu matériel dans lequel des ondes peuvent se propager à la célérité c par rapport au milieu. On se place dans le référentiel du milieu et on considère une source ponctuelle isotrope se déplaçant vers la droite à une vitesse $v < c$ en émettant une onde sinusoïdale de fréquence $\nu = 1/T = c/\lambda$. On a représenté à des intervalles T les crêtes de l’onde. Dans le milieu, chaque crête se déplace à la même célérité c dans toutes les directions à partir du point où elle a été émise, point qui se déplace vers la droite. Pour un récepteur immobile par rapport au milieu et situé à droite sur le chemin de la source, les crêtes sont concentrées et l’atteignent avec une période $T' < T$, donc avec une fréquence $\nu' > \nu$ et une longueur d’onde $\lambda' = c/\nu' < \lambda$. Inversement pour un récepteur situé à gauche, les crêtes sont espacées et l’atteignent avec une période $T' > T$, donc une fréquence $\nu' < \nu$ et une longueur d’onde $\lambda' > \lambda$.

Le même phénomène se produit si la source est immobile et que le récepteur se déplace. S’il se dirige vers la source, un plus grand nombre de crêtes viennent à sa rencontre par unité de temps : $\nu' > \nu$. S’il s’en éloigne, les crêtes le rattrapent avec retard : $\nu < \nu'$. Nous établirons dans la section suivante la relation entre ν et ν' dans le cas où la source et le récepteur se déplacent tous deux par rapport au milieu.

Lorsqu’on parle d’**effet Doppler** sans précision, on évoque a priori l’effet observé pour des *ondes sonores*. Celui observé pour des *ondes lumineuses* est en réalité de nature différente et est plutôt appelé effet **Doppler-Fizeau**. Il s’analyse à l’aide de la théorie de la relativité restreinte.

L’effet Doppler[-Fizeau] permet donc de mesurer la vitesse d’un corps émettant une onde de fréquence connue à partir de la fréquence reçue. Il est utilisé avec des ondes électromagnétiques de quelques dizaines de gigahertz dans les radars (micro-ondes, intermédiaires entre l’infrarouge et les ondes radio). L’échographie Doppler utilise des ondes sonores de quelques MHz (ultrasons).

Deux autres phénomènes produisent un changement similaire de la fréquence reçue, bien que leur nature soit fondamentalement différente :

- Le décalage cosmologique vers le rouge des galaxies : plus celles-ci sont loin, plus leur spectre observé est tiré vers les basses fréquences. Ce phénomène est dû à l’expansion de l’Univers et non au mouvement

particulier des galaxies *dans* l'espace (bien que la vitesse propre des galaxies puisse produire un décalage global vers le bleu pour les plus proches) ; la « vitesse » d'expansion cosmologique n'est d'ailleurs pas limitée par la vitesse de la lumière ;

- Le décalage gravitationnel vers le rouge de la lumière émise par une source massive.

B. Relation générale pour l'effet Doppler acoustique

On veut établir la relation entre la fréquence ν d'ondes émises par une source \mathcal{S} et la fréquence ν' perçue par un récepteur \mathcal{R} . On considère pour cela les quatre événements suivants :

- $E_1^{\mathcal{S}}$: émission d'un premier signal ;
- $E_2^{\mathcal{S}}$: émission d'un second signal, très peu de temps après celle du premier ;
- $E_1^{\mathcal{R}}$: réception du premier signal ;
- $E_2^{\mathcal{R}}$: réception du second signal, très peu de temps après celle du premier.

On s'intéresse dans cette section à des ondes mécaniques, sonores typiquement. On suppose que, à la petite déformation près provoquée par le passage de l'onde, les points du milieu dans lequel celle-ci se propage sont fixes les uns par rapport aux autres. Le milieu considéré est homogène et isotrope ; l'onde y a donc une trajectoire rectiligne. (Plus exactement, les rayons d'onde sont rectilignes.)

Notons c la célérité (constante) de l'onde, et \vec{v} et \vec{v}' les vitesses (éventuellement variables) de \mathcal{S} et \mathcal{R} . Ces trois vitesses sont définies par rapport au référentiel \mathcal{K}_0 dans lequel le milieu de propagation est au repos. On les suppose suffisamment faibles devant celle de la lumière pour que la physique newtonienne soit applicable ; en particulier, les distances et les durées entre deux événements sont indépendantes du mouvement de la source et du récepteur.

Notons

- t_1 et S_1 le temps et la position de \mathcal{S} dans \mathcal{K}_0 lors de l'événement $E_1^{\mathcal{S}}$,
- $t_2 = t_1 + dt$ et S_2 ceux de \mathcal{S} lors de $E_2^{\mathcal{S}}$,
- τ_1 et R_1 ceux de \mathcal{R} lors de $E_1^{\mathcal{R}}$,
- $\tau_2 = \tau_1 + d\tau$ et R_2 ceux de \mathcal{R} lors de $E_2^{\mathcal{R}}$.

L'onde se propageant de S_1 à R_1 et de S_2 à R_2 à une vitesse c , on a

$$\tau_1 = t_1 + \frac{S_1 R_1}{c} \quad \text{et} \quad \tau_2 = t_2 + \frac{S_2 R_2}{c}, \quad (\text{VIII.1})$$

d'où

$$d\tau = dt + \frac{S_2 R_2 - S_1 R_1}{c}. \quad (\text{VIII.2})$$

Or

$$\begin{aligned} S_2 R_2 &= \|\overrightarrow{S_2 S_1} + \overrightarrow{S_1 R_1} + \overrightarrow{R_1 R_2}\| = \sqrt{(\overrightarrow{S_2 S_1} + \overrightarrow{S_1 R_1} + \overrightarrow{R_1 R_2}) \cdot (\overrightarrow{S_2 S_1} + \overrightarrow{S_1 R_1} + \overrightarrow{R_1 R_2})} \\ &= \sqrt{S_1 R_1^2 + 2 \overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{S_1 R_1} + 2 \overrightarrow{R_1 R_2} \cdot \overrightarrow{S_1 R_1} + 2 \overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{R_1 R_2} + S_2 S_1^2 + R_1 R_2^2}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.3})$$

Au premier ordre en dt et $d\tau$,

$$\overrightarrow{S_2 S_1} \approx -\vec{v}(t_1) dt \quad \text{et} \quad \overrightarrow{R_1 R_2} \approx \vec{v}'(\tau_1) d\tau. \quad (\text{VIII.4})$$

Les termes $\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{R_1 R_2}$, $S_2 S_1^2$ et $R_1 R_2^2$ sont ainsi en $dt d\tau$, dt^2 et $d\tau^2$, respectivement, donc d'ordre 2 et négligeables devant le terme d'ordre 0 ($S_1 R_1^2$) et les termes d'ordre 1 ($\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{S_1 R_1}$ et $\overrightarrow{R_1 R_2} \cdot \overrightarrow{S_1 R_1}$; en dt et $d\tau$ respectivement). Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_2 R_2 &\approx \sqrt{S_1 R_1^2 + 2 \overrightarrow{S_1 R_1} \cdot (\vec{v}' d\tau - \vec{v} dt)} \\ &= S_1 R_1 \sqrt{1 + \frac{2}{S_1 R_1} \frac{\overrightarrow{S_1 R_1}}{S_1 R_1} \cdot (\vec{v}' d\tau - \vec{v} dt)} \\ &\approx S_1 R_1 \left(1 + \frac{1}{S_1 R_1} \vec{u} \cdot [\vec{v}' d\tau - \vec{v} dt] \right), \end{aligned} \quad (\text{VIII.5})$$

où l'on a posé

$$\vec{u} := \frac{\overrightarrow{S_1 R_1}}{S_1 R_1} \quad (\text{VIII.6})$$

et effectué un développement limité au premier ordre de $\sqrt{1+x}$.

On a donc

$$S_2 R_2 - S_1 R_1 = \vec{u} \cdot (\vec{v}' d\tau - \vec{v} dt), \quad (\text{VIII.7})$$

soit

$$d\tau = dt + \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}'}{c} d\tau - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c} dt. \quad (\text{VIII.8})$$

Finalement,

$$d\tau = dt \frac{1 - \vec{u} \cdot \vec{v}/c}{1 - \vec{u} \cdot \vec{v}'/c}. \quad (\text{VIII.9})$$

Remarque. — Le fait que $dt \neq d\tau$ n'est pas contradictoire avec ce qui était dit dans le deuxième paragraphe sur l'indépendance des durées vis à vis du mouvement en physique newtonienne, car l'émission et la réception d'un même signal correspondent à des événements différents.

Pour un signal périodique émis à la fréquence $\nu = 1/T$ et reçu à la fréquence $\nu' = 1/T'$, si les périodes T et T' sont petites, on obtient avec $dt \approx T = 1/\nu$ et $d\tau \approx T' = 1/\nu'$ que

$$\nu' = \nu \frac{1 - \vec{u} \cdot \vec{v}'/c}{1 - \vec{u} \cdot \vec{v}/c}. \quad (\text{VIII.10})$$

Attention, dans cette formule, \vec{v} est prise à t_1 et \vec{v}' à τ_1 . Quant à \vec{u} , il dépend de t_1 et de τ_1 .

On peut se souvenir de la relation VIII.10 à l'aide du moyen mnémotechnique suivant : en divisant par ν , la fréquence ν et la vitesse \vec{v} apparaissent au même niveau, et de même pour ν' et \vec{v}' ; quant au signe « - », on peut noter que \vec{u} est orienté de \mathcal{S} vers \mathcal{R} , en sens inverse de l'ordre alphabétique A... RS... Z.

Notons que, dans cette expression, la source et le récepteur jouent des rôles dissymétriques. On obtient néanmoins une expression symétrique dans la limite des faibles vitesses (\vec{v} et \vec{v}' toutes deux $\ll c$). On a alors

$$\nu' \approx \nu (1 - \vec{u} \cdot \vec{v}'/c) (1 + \vec{u} \cdot \vec{v}/c) \approx \nu (1 - \vec{u} \cdot [\vec{v}' - \vec{v}]/c) = \nu (1 - v_r/c), \quad (\text{VIII.11})$$

où $v_r = \vec{u} \cdot (\vec{v}' - \vec{v})$ est la vitesse radiale relative entre le récepteur et la source, positive s'ils s'éloignent et négative s'ils se rapprochent.

c. Cas supersonique

Intéressons-nous maintenant au cas où le récepteur est immobile et la source a une vitesse v par rapport au milieu supérieure à la célérité c de l'onde sonore (on dit alors qu'elle va à Mach > 1 , le nombre de Mach

étant le rapport v/c). On obtient alors le schéma suivant :

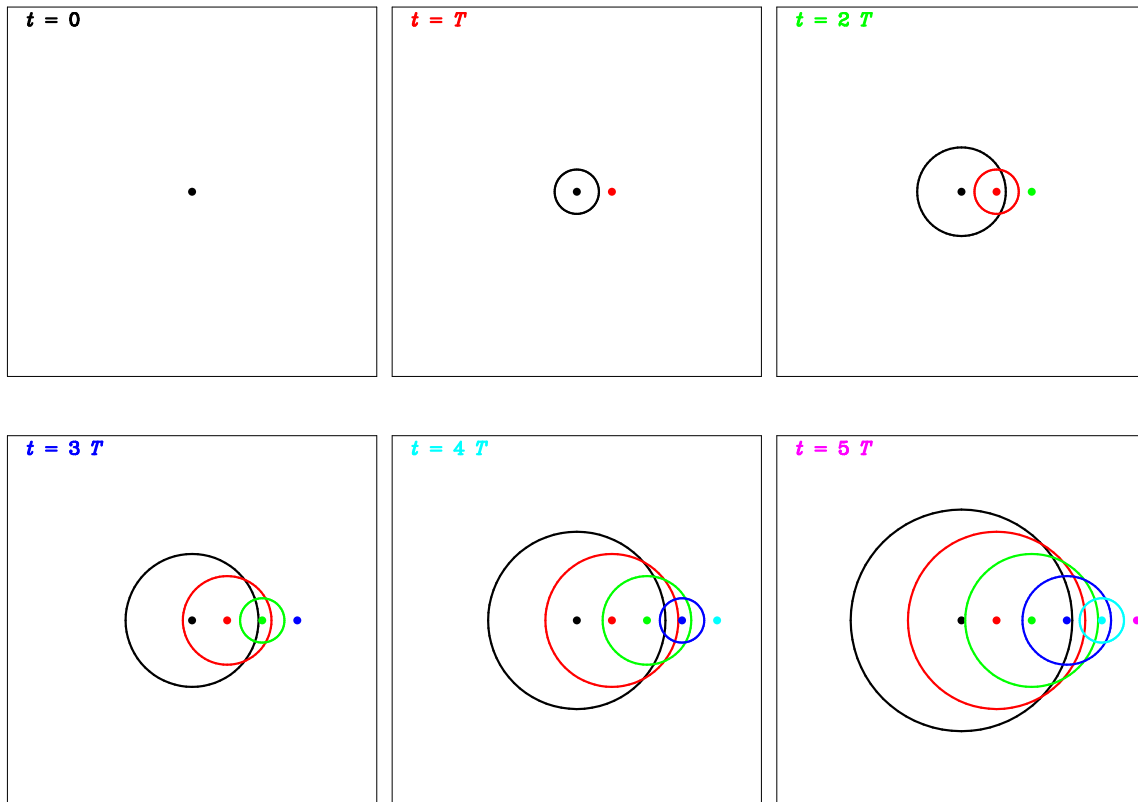


FIGURE VIII.2. – Effet Doppler acoustique pour une source mobile. Cas supersonique. Voir la figure VIII.1 pour la légende.

Les crêtes émises périodiquement dessinent un cône, dit « cône de Mach ». Un récepteur situé sur le chemin de la source (à droite sur le schéma) reçoit les crêtes dans le désordre : la notion de fréquence reçue n'est donc plus pertinente. L'équation VIII.10 donne d'ailleurs une valeur négative pour ν' .

Si la source est immobile et que le récepteur s'en éloigne à une vitesse v' supérieure à c , on obtient également une valeur négative d'après l'équation VIII.10. En réalité, dans ce cas, les ondes sonores émises par la source n'atteignent jamais le récepteur ! Dans la première relation VIII.1 entre t_1 et τ_1 , le temps τ_1 est dans le membre de gauche mais aussi, via R_1 , dans le membre de droite. Or, dans le cas considéré ici, cette équation n'admet pas de solution τ_1 pour t_1 donné.

D. Effet Doppler-Fizeau (hors programme)

Dans la relation établie pour l'effet Doppler acoustique interviennent les vitesses de la source et du récepteur par rapport au milieu matériel, lequel joue donc le rôle d'un référentiel naturel, « absolu ».

Pour des ondes électromagnétiques dans le vide, il n'y a pas de milieu matériel, donc pas de référentiel absolu. Les seules vitesses qui peuvent intervenir sont donc la vitesse de la lumière dans le vide, qui, elle, est absolue car indépendante du référentiel (galiléen), et la vitesse relative du récepteur par rapport à la source. Le récepteur et la source doivent donc jouer des rôles symétriques, ce qui n'est pas le cas pour l'effet Doppler acoustique. L'établissement de la relation entre ν et ν' nécessite de faire appel à la relativité restreinte et sort du cadre de ce cours.

a. Cas général

Pour des ondes lumineuses se propageant dans le vide, il n'y a pas de milieu matériel, donc pas de référentiel privilégié comme \mathcal{K}_0 pour les ondes mécaniques. En revanche, la vitesse de ces ondes a la même valeur c dans tout référentiel galiléen.

Notons \mathcal{K} le référentiel galiléen dans lequel la source S est au repos lors de l'émission du premier signal,

\mathcal{K}' le référentiel galiléen dans lequel le récepteur \mathcal{R} est au repos lors de la détection de ce signal, \vec{V} la vitesse de \mathcal{K}' par rapport à \mathcal{K} et $\vec{V}' (= -\vec{V})$ la vitesse de \mathcal{K} par rapport à \mathcal{K}' . Posons également $V = \|\vec{V}\| = \|\vec{V}'\|$.

Choisissons un repère K fixe dans \mathcal{K} , d'origine O quelconque, et une horloge fixe dans \mathcal{K} donnant le temps t dans ce référentiel. De même, choisissons un repère K' fixe dans \mathcal{K}' et une horloge fixe dans \mathcal{K}' donnant le temps t' dans ce référentiel, de telle sorte que $O' = O$ à $t = 0$ et que $t' = 0$ lors de cet événement.

On a $E_1^S \equiv (S_1, t_1)_{\mathcal{K}} \equiv (S'_1, t'_1)_{\mathcal{K}'}$, où « \equiv » signifie «correspond à», le premier terme de chaque parenthèse est la position de l'événement, le deuxième terme l'instant auquel il se produit et l'indice précise le référentiel dans lequel cette position et cet instant sont donnés. De même, $E_2^S \equiv (S_2, t_2)_{\mathcal{K}} \equiv (S'_2, t'_2)_{\mathcal{K}'}$, $E_1^R \equiv (R_1, \tau_1)_{\mathcal{K}} \equiv (R'_1, \tau'_1)_{\mathcal{K}'}$, $E_2^R \equiv (R_2, \tau_2)_{\mathcal{K}} \equiv (R'_2, \tau'_2)_{\mathcal{K}'}$. Enfin, $\vec{v}_{\mathcal{R}/\mathcal{K}}(\tau_1) = \vec{V}$, $\vec{v}_{\mathcal{S}/\mathcal{K}'}(t'_1) = \vec{V}'$ et, par définition de \mathcal{K} et \mathcal{K}' , $\vec{v}_{\mathcal{S}/\mathcal{K}}(t_1) = \vec{v}_{\mathcal{R}/\mathcal{K}'}(\tau'_1) = \vec{0}$.

On a

$$\tau'_1 = t'_1 + \frac{S'_1 R'_1}{c} \quad \text{et} \quad \tau'_2 = t'_2 + \frac{S'_2 R'_2}{c}. \quad (\text{VIII.12})$$

Or

$$S'_2 R'_2 = \sqrt{S'_2 R'_2 \cdot S'_2 R'_2} = \sqrt{(S'_2 S'_1 + S'_1 R'_1 + R'_1 R'_2) \cdot (S'_2 S'_1 + S'_1 R'_1 + R'_1 R'_2)}. \quad (\text{VIII.13})$$

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{S'_1 S'_2} \approx \vec{v}_{\mathcal{S}/\mathcal{K}'}(t'_1) dt' = \vec{V}' dt' \quad \text{et} \quad \overrightarrow{R'_1 R'_2} \approx \vec{v}_{\mathcal{R}/\mathcal{K}'}(\tau'_1) d\tau' = \vec{0}, \quad (\text{VIII.14})$$

donc

$$\begin{aligned} S'_2 R'_2 &= \sqrt{(S'_1 R'_1 - \vec{V}' dt') \cdot (S'_1 R'_1 - \vec{V}' dt')} \\ &= S'_1 R'_1 \sqrt{1 - 2 \frac{\overrightarrow{S'_1 R'_1} \cdot \vec{V}' dt'}{S'_1 R'_1{}^2} + \frac{V^2 dt'^2}{S'_1 R'_1{}^2}} \\ &\approx S'_1 R'_1 - \frac{\overrightarrow{S'_1 R'_1} \cdot \vec{V}' dt'}{S'_1 R'_1} \end{aligned} \quad (\text{VIII.15})$$

et

$$c d\tau' - c dt' = S'_2 R'_2 - S'_1 R'_1 = -\frac{\overrightarrow{S'_1 R'_1} \cdot \vec{V}' dt'}{S'_1 R'_1}. \quad (\text{VIII.16})$$

Ainsi,

$$d\tau' = \left(1 - \frac{\overrightarrow{S'_1 R'_1} \cdot \vec{V}'}{S'_1 R'_1 c} \right) dt'. \quad (\text{VIII.17})$$

Pour tout événement $E \equiv (P, t)_{\mathcal{K}} \equiv (P', t')_{\mathcal{K}'}$, la transformation de Lorentz pour le temps est

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{V} \cdot \overrightarrow{OP}}{c^2} \right) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (\text{VIII.18})$$

donc

$$dt' = t'_2 - t'_1 = \gamma (t_2 - t_1) - \gamma \frac{\vec{V}}{c^2} \cdot (\overrightarrow{OS_2} - \overrightarrow{OS_1}) = \gamma dt \quad (\text{VIII.19})$$

puisque

$$\overrightarrow{OS_2} - \overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{S_1 S_2} \approx \vec{v}_{\mathcal{S}/\mathcal{K}}(t_1) dt = \vec{0}. \quad (\text{VIII.20})$$

Soient $\vec{u}' = -\overrightarrow{S'_1 R'_1} / S'_1 R'_1$ le vecteur unitaire orienté de R'_1 vers S'_1 , et θ' l'angle entre \vec{u}' et \vec{V}' . On a

$$d\tau' = \gamma \left(1 + \frac{V \cos \theta'}{c} \right) dt, \quad (\text{VIII.21})$$

où $V \cos \theta' = \vec{u}' \cdot \vec{V}'$ est la vitesse radiale de \mathcal{S} par rapport à \mathcal{R}^{*1} . En termes de fréquences,

$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma (1 + V \cos \theta' / c)}. \quad (\text{VIII.22})$$

1. Plus précisément, il s'agit de la vitesse de \mathcal{S} à l'instant t'_1 par rapport au référentiel galiléen \mathcal{K}' lié à \mathcal{R} à l'instant τ'_1 , projetée selon $\overrightarrow{R'_1 S'_1}$.

b. Cas particulier

Dans le cas particulier où la vitesse relative v_r du récepteur par rapport à la source est parallèle à l'axe passant par eux, c.-à-d. que la vitesse de la source est radiale dans le référentiel du récepteur (et inversement), on a

$$v' = v \sqrt{\frac{1 - v_r/c}{1 + v_r/c}}, \quad (\text{VIII.23})$$

où $v_r = +V$ si la source et le récepteur s'éloignent et $v_r = -V$ sinon.

Pour $v_r \ll c$, on retrouve la même approximation que pour l'effet Doppler acoustique, car $1/(1+x) \approx 1-x$ pour $|x| \ll 1$:

$$v' \approx v \sqrt{(1 - v_r/c)(1 - v_r/c)} \approx v(1 - v_r/c). \quad (\text{VIII.24})$$