Chapitre I [OÉC-I]

Notions sur les signaux

A. Signaux sinusoïdaux

1. Représentation d'un signal sinusoïdal

a. Représentations réelles

α. Signal scalaire

Un signal sinusoïdal scalaire réel est une fonction f du temps t, à valeur réelle et de la forme

$$\boldsymbol{f(t) = A\cos(\omega\, t + \mathring{\varphi})}, \tag{I.1}$$

où

- A, ω et $\mathring{\varphi}$ sont des réels ne dépendant pas de t (donc des constantes si f n'est fonction que de la seule variable t) ;
- ω (> 0) est la ***pulsation*** (ou ***fréquence angulaire [temporelle]***). Elle est typiquement exprimée en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$;
- A (> 0) est l'***amplitude*** ;
- $\boldsymbol{\varphi(t) := \omega\, t + \mathring{\varphi}}$ est la ***phase*** du signal (typiquement exprimée en rad) ;
- $\mathring{\varphi}$ est la ***phase à l'origine***[※1] ou ***phase initiale***, définie modulo $2\,\pi$.

La ***période [temporelle]***[※2] de f est

$$\boldsymbol{T = \frac{2\,\pi}{\omega}} \tag{I.2}$$

(en s, typiquement). La fréquence [temporelle] correspondante est

$$\boldsymbol{\nu = \frac{1}{T}} \tag{I.3}$$

(en hertz, typiquement, avec $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$). On a donc

$$\boldsymbol{\omega = 2\,\pi\,\nu = \frac{2\,\pi}{T}}. \tag{I.4}$$

Le signal $f(t)$ peut aussi être écrit comme ceci :

- En développant le cosinus, on obtient

$$f(t) = A\cos(\omega\, t + \mathring{\varphi}) = A\cos\mathring{\varphi}\cos(\omega\, t) - A\sin\mathring{\varphi}\sin(\omega\, t), \tag{I.5}$$

  soit

$$\boldsymbol{f(t) = a\cos(\omega\, t) + b\sin(\omega\, t)} \tag{I.6}$$

  avec $a = A\cos\mathring{\varphi} \in \mathbb{R}$ et $b = -A\sin\mathring{\varphi} \in \mathbb{R}$.

  Inversement, si l'on connaît l'expression du signal sous la forme I.6, on peut le réécrire sous la forme I.1. En effet, $A^2 = a^2 + b^2$ et, puisque $A > 0$, on a $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Par ailleurs, il n'existe, modulo $2\,\pi$, qu'une seule valeur de $\mathring{\varphi}$ telle que $\cos\mathring{\varphi} = a/A$ et $\sin\mathring{\varphi} = -b/A$.
- Avec la formule d'Euler, on obtient que

$$f(t) = A\cos(\omega\, t + \mathring{\varphi}) = \frac{A}{2}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\, t + \mathring{\varphi})} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(\omega\, t + \mathring{\varphi})}), \tag{I.7}$$

  soit

$$\boldsymbol{f(t) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\, t} + c^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\, t}}, \tag{I.8}$$

  où $c = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathring{\varphi}}/2 \in \mathbb{C}$ et c^* désigne son conjugué. On a donc $|c| = A/2$ et $\arg c = \mathring{\varphi}$.

---

1. $\mathring{\varphi}$ est parfois appelée le « déphasage », voire la « phase » tout court, mais il vaut mieux réserver la dénomination de « phase » pour $\omega\, t + \mathring{\varphi}$.
2. Il s'agit plus précisément de la ***période fondamentale***, aussi appelée ***période principale***, définie pour tout signal périodique comme la plus petite période strictement positive du signal. Toute autre période du signal est un multiple entier de la période fondamentale.

β. Signal vectoriel

Le signal sinusoïdal peut également être vectoriel réel. Dans ce cas, ce qui vaut pour un signal scalaire f s'applique à chacune des composantes cartésiennes de $\vec{f}$, avec des valeurs a priori différentes pour A et $\mathring{\varphi}$ selon chaque axe, mais une même valeur de ω :

$$\vec{f}(t) = A_x \cos(\omega\, t + \mathring{\varphi}_x)\, \vec{u}_x + A_y \cos(\omega\, t + \mathring{\varphi}_y)\, \vec{u}_y + A_z \cos(\omega\, t + \mathring{\varphi}_z)\, \vec{u}_z. \tag{I.9}$$

b. Représentation complexe

α. Signal scalaire

Il sera également commode d'utiliser la représentation complexe d'un signal sinusoïdal. Posons[※3]

$$\underline{f}(t) = A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\, t + \mathring{\varphi})}. \tag{I.10}$$

Le signal sinusoïdal f réel est relié à $\underline{f}$ par

$$f = \operatorname{Re} \underline{f}. \tag{I.11}$$

La quantité $\underline{f}$ est la ***représentation complexe*** du signal f. On peut réécrire $\underline{f}$ sous la forme

$$\underline{f}(t) = \underline{A}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\, t}, \tag{I.12}$$

où

$$\underline{A} = A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathring{\varphi}} = 2\, c \tag{I.13}$$

est l'***amplitude complexe*** du signal.

Connaissant $\underline{A}$ ou $\underline{f}(t)$, on remonte aisément à A et $\mathring{\varphi}$:

$$A = |\underline{A}| = |\underline{f}(t)| = \sqrt{\underline{A}\, \underline{A}^*} = \sqrt{\underline{f}(t)\, \underline{f}^*(t)} \tag{I.14}$$

et $\mathring{\varphi} = \arg \underline{A}$ est l'unique valeur, modulo $2\,\pi$, telle que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathring{\varphi}} = \underline{A}/|\underline{A}|. \tag{I.15}$$

La dérivée première de $\underline{f}$ par rapport à t est

$$\frac{\mathrm{d}\underline{f}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\, \omega\, \underline{f} \tag{I.16}$$

et sa dérivée seconde vaut

$$\frac{\mathrm{d}^2 \underline{f}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\, \underline{f}. \tag{I.17}$$

Un des intérêts de la notation complexe est que, lorsqu'on se restreint à des combinaisons linéaires de $\underline{f}$ et de ses dérivées, le facteur « $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\, t}$ » apparaît dans tous les termes et peut donc être simplifié. Si la combinaison linéaire forme une équation différentielle dépendant du temps, on obtient après simplification une équation algébrique indépendante du temps.

Par ailleurs, toute équation prenant la forme d'une combinaison linéaire à coefficients réels des représentations réelles peut être réécrite comme la même combinaison linéaire des représentations complexes. En effet, si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $f_k(t) = \operatorname{Re} \underline{f_k}(t)$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, f_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \operatorname{Re} \underline{f_k}(t) = \operatorname{Re}\!\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda\, \underline{f_k}[t]\right). \tag{I.18}$$

β. Signal vectoriel

L'expression I.12 vaut également pour un signal sinusoïdal vectoriel réel, sous la forme synthétique

$$\underline{\vec{f}}(t) = \underline{\vec{A}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\, t}. \tag{I.19}$$

On a de même

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\vec{f}}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\, \omega\, \underline{\vec{f}}. \tag{I.20}$$

3. On peut tout aussi bien poser $\underline{f}(t) = A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(-\omega\, t + \mathring{\varphi}')}$. Les facteurs « $\mathrm{i}\,\omega$ » ci-dessous doivent alors être remplacés par leurs opposés.

2. Puissance d'un signal sinusoïdal

a. Cas scalaire

α. Puissance instantanée

La ***puissance instantanée*** $\mathcal{P}(t)$ d'un signal caractérisé par une fonction scalaire f du temps peut dans la plupart des cas s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{\mathcal{P}(t) = f(t)\, f'(t)}, \tag{I.21}$$

où f' est également une fonction caractérisant le signal (le symbole « $'$ » ne désigne pas la dérivée de f dans ce qui suit).

Typiquement, $f' \propto f$ ou bien $f' \propto \mathrm{d}f/\mathrm{d}t$. Par exemple, la puissance électrique reçue par un dipôle électrocinétique (résistor, bobine, condensateur…) est $\mathcal{P}(t) = I(t)\,U(t)$, où $I(t)$ et $U(t)$ sont respectivement l'intensité électrique du courant parcourant le composant et $U(t)$ est la tension électrique à ses bornes :

- pour un résistor de résistance R, on peut prendre $f(t) = I(t)$ et $f'(t) = U(t) = R\,I(t)$ (ou bien $f(t) = U(t)$ et $f'(t) = I(t) = U(t)/R$) ;
- pour une bobine d'inductance L, $f(t) = I(t)$ et $f'(t) = U(t) = L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$;
- pour un condensateur de capacité C, $f(t) = U(t)$ et $f'(t) = C\,\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$.

Si f est une fonction sinusoïdale, f' est typiquement une fonction sinusoïdale de même pulsation, mais déphasée par rapport à f et d'amplitude proportionnelle à celle de f. Pour $f(t) = A\cos(\omega\,t + \mathring{\varphi})$, on a alors

$$f'(t) = \beta\,A\cos(\omega\,t + \mathring{\varphi} + \gamma) = A'\cos(\omega\,t + \mathring{\varphi}'), \tag{I.22}$$

avec $A' = \beta\,A$ et $\mathring{\varphi}' = \mathring{\varphi} + \gamma$ et $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ des constantes.

Si x et y sont des nombres complexes,

$$\operatorname{Re} x \operatorname{Re} y \neq \operatorname{Re}(x\,y) \tag{I.23}$$

(sauf si $\operatorname{Im} x = 0$ ou $\operatorname{Im} y = 0$). On ne peut donc en général écrire $\mathcal{P}(t) = \operatorname{Re}\underline{\mathcal{P}}(t)$ avec $\underline{\mathcal{P}}(t) = \underline{f}(t)\,\underline{f}'(t)$ et il faut repasser par la représentation réelle :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t) &= A\,A'\cos(\omega\,t + \mathring{\varphi})\cos(\omega\,t + \mathring{\varphi}')\\ &= \frac{A\,A'}{2}\cos(2\,\omega\,t + \mathring{\varphi} + \mathring{\varphi}') + \frac{A\,A'}{2}\cos(\mathring{\varphi} - \mathring{\varphi}')\end{aligned} \tag{I.24}$$

car $\cos x \cos y = (\cos[x+y] + \cos[x-y])/2$. La puissance instantanée est donc de pulsation $2\,\omega$ (et non ω) et oscille avec une amplitude $A\,A'/2$ autour d'une valeur non nécessairement nulle, $A\,A'\cos(\mathring{\varphi} - \mathring{\varphi}')/2$.

β. Puissance moyenne

Bien souvent, la fréquence d'un signal sinusoïdal est trop élevée pour qu'on puisse percevoir ou mesurer sa variation dans le temps. Les détecteurs (biologiques ou artificiels) sont cependant sensibles, non pas à la moyenne temporelle du signal (d'ailleurs nulle s'il est sinusoïdal), mais à sa ***puissance moyenne***. Celle-ci est définie de manière générale par [※4]

$$\boldsymbol{\langle\mathcal{P}\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{t=-\tau/2}^{\tau/2}\mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t}. \tag{I.25}$$

Pour un signal périodique de période fondamentale T, on peut également calculer $\langle\mathcal{P}\rangle$ en faisant la moyenne de $\mathcal{P}$ sur n'importe quel intervalle de longueur égale à l'une des périodes non nulles du signal : pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et pour tout t_0,

$$\boldsymbol{\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{q\,T}\int_{t=t_0}^{t_0+q\,T}\mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t}. \tag{I.26}$$

On s'intéresse ici à un signal sinusoïdal scalaire de pulsation $\omega \neq 0$ [※5]. On a alors

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\frac{A\,A'\,I_1(\tau)}{2\,\tau} + \lim_{\tau\to\infty}\frac{A\,A'\,I_2(\tau)}{2\,\tau} \tag{I.27}$$

avec

$$\begin{aligned}I_1(\tau) &= \int_{t=-\tau/2}^{\tau/2}\cos(2\,\omega\,t + \mathring{\varphi} + \mathring{\varphi}')\,\mathrm{d}t,\\ I_2(\tau) &= \int_{t=-\tau/2}^{\tau/2}\cos(\mathring{\varphi} - \mathring{\varphi}')\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{I.28}$$

4. Dans cette intégrale, les bornes $-\tau/2$ et $\tau/2$ peuvent être remplacées par $t_0 - \tau/2$ et $t_0 + \tau/2$, où t_0 est quelconque : la valeur de $\langle\mathcal{P}\rangle$ ne dépend pas de celle de t_0.
5. Si $\omega = 0$, on peut prendre $\mathring{\varphi} = \mathring{\varphi}' = 0$ et A et A' réels de signes quelconques. Alors $\langle\mathcal{P}\rangle = A\,A'$.

Or

$$I_1(\tau) = \frac{1}{2\,\omega}\left[\sin(2\,\omega\,t + \mathring{\varphi} + \mathring{\varphi}')\right]_{t=-\tau/2}^{\tau/2},$$
$$I_2(\tau) = \tau\cos(\mathring{\varphi} - \mathring{\varphi}'). \tag{I.29}$$

On a $|I_1(\tau)| \leqslant 1/\omega$ puisque la fonction sin est bornée par 1, donc $\lim_{\tau\to\infty} I_1(\tau)/\tau = 0$ et

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{A\,A'}{2}\cos(\mathring{\varphi} - \mathring{\varphi}') = \frac{\beta\,A^2}{2}\cos\gamma. \tag{I.30}$$

En particulier,

$$\boldsymbol{\langle\cos^2\rangle = \langle\sin^2\rangle = \frac{1}{2}}. \tag{I.31}$$

En écrivant f et f' sous les formes

$$f(t) = a\cos(\omega\,t) + b\sin(\omega\,t) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t} + c^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,t},$$
$$f'(t) = a'\cos(\omega\,t) + b'\sin(\omega\,t) = c'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t} + c'^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,t}, \tag{I.32}$$

on a également

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{a\,a' + b\,b'}{2} = c\,c'^* + c^*\,c' = 2\,\mathrm{Re}(c\,c'^*). \tag{I.33}$$

Contrairement à la puissance instantanée, la puissance moyenne s'exprime avantageusement avec la notation complexe : on a

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \mathrm{Re}\Big(\frac{A\,A'}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\mathring{\varphi}-\mathring{\varphi}')}\Big) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\Big([A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathring{\varphi}}]\,[A'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathring{\varphi}'}]\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\underline{A}\,\underline{A}'^*) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\Big(\underline{f}[t]\,\underline{f}'^*[t]\Big), \tag{I.34}$$

soit

$$\boldsymbol{\langle\mathcal{P}\rangle = \mathrm{Re}\langle\underline{\mathcal{P}}\rangle} \tag{I.35}$$

avec

$$\boldsymbol{\langle\underline{\mathcal{P}}\rangle := \frac{\underline{f}(t)\,\underline{f}'^*(t)}{2} = \frac{\underline{A}\,\underline{A}'^*}{2}} = 2\,c\,c'^*. \tag{I.36}$$

En introduisant l'***impédance complexe***

$$\boldsymbol{Z := \frac{\underline{f}'(t)}{\underline{f}(t)}} = \beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma}, \tag{I.37}$$

on peut également écrire

$$\langle\underline{\mathcal{P}}\rangle = Z^*\,\underline{f}\,\underline{f}^* = Z^*\,|\underline{f}|^2, \tag{I.38}$$

soit

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \mathrm{Re}\,Z\,|\underline{f}|^2. \tag{I.39}$$

3. Signal vectoriel

Dans le cas d'un signal caractérisé par une fonction vectorielle $\vec{f}$ du temps, la puissance instantanée peut dans la plupart des cas s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{\mathcal{P}(t) = \vec{f}(t)\cdot\vec{f}'(t)}, \tag{I.40}$$

où $\vec{f}'$ est également une fonction caractérisant le signal. Si $\vec{f}$ et $\vec{f}'$ sont toutes deux sinusoïdales de pulsation ω, la puissance moyenne s'écrit à l'aide de leurs représentations complexes $\underline{\vec{f}}(t) = \underline{\vec{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}$ et $\underline{\vec{f}}'(t) = \underline{\vec{A}}'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}$ sous la forme I.35, avec

$$\boldsymbol{\langle\underline{\mathcal{P}}\rangle = \frac{\underline{\vec{f}}(t)\cdot\underline{\vec{f}}'^*(t)}{2} = \frac{\underline{\vec{A}}\cdot\underline{\vec{A}}'^*}{2}}. \tag{I.41}$$

4. Somme de signaux sinusoïdaux de *même pulsation*

a. Amplitude et phase initiale globales

Une somme de fonctions sinusoïdales f_k de même pulsation ω est elle-même une fonction sinusoïdale de pulsation ω. La représentation complexe permet de déterminer facilement l'amplitude et la phase initiale du signal global f. En effet, si

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t) \qquad \text{avec } f_k(t) = A_k \cos(\omega\, t + \mathring{\varphi}_k), \tag{I.42}$$

alors

$$\underline{f}(t) = \sum_{k=1}^{n} \underline{f_k}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\, t + \mathring{\varphi}_k)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\, t} \sum_{k=1}^{n} \underline{A}_k, \tag{I.43}$$

où $\underline{A}_k = A_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathring{\varphi}_k}$. On a donc

$$\boldsymbol{\underline{f}(t) = \underline{A}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\, t}} \quad \text{avec } \boldsymbol{\underline{A} := \sum_{k=1}^{n} \underline{A}_k}. \tag{I.44}$$

Or $\underline{A} = |\underline{A}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg \underline{A}}$, donc

$$f(t) = \operatorname{Re} \underline{f}(t) = A \cos(\omega\, t + \mathring{\varphi}) \tag{I.45}$$

avec $A = |\underline{A}| = \sqrt{\underline{A}\, \underline{A}^*}$ et $\mathring{\varphi} = \arg \underline{A}$.

b. Puissance globale

Reprenons le signal $f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$ étudié ci-dessus. La puissance instantanée du signal total est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) = f(t)\, f'(t) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(t) \times \sum_{\ell=1}^{n} f'_\ell(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\ell=1;\\ \ell=k}}^{n} f_k(t)\, f'_\ell(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\ell=1;\\ \ell\neq k}}^{n} f_k(t)\, f'_\ell(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f_k(t)\, f'_k(t)}_{=\mathcal{P}_k(t)} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\ell=1;\\ \ell\neq k}}^{n} \underbrace{f_k(t)\, f'_\ell(t)}_{\text{terme croisé}}. \end{aligned} \tag{I.46}$$

La première somme n'est autre que la somme des puissances instantanées de chaque signal, $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}_k(t)$. À cause des termes croisés $(k;\ell)_{\ell\neq k}$ de la deuxième somme, en général[※6],

$$\boldsymbol{\mathcal{P}(t) \not\equiv \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}_k(t)} \tag{I.47}$$

pour des signaux de *même pulsation*.

De même pour la puissance moyenne, lorsque le signal total est la somme de signaux sinusoïdaux de *même pulsation*,

$$\boldsymbol{\langle \mathcal{P} \rangle \not\equiv \sum_{k=1}^{n} \langle \mathcal{P}_k \rangle} \tag{I.48}$$

en général. C'est l'origine du phénomène d'***interférences***. Celui-ci se produit quand les signaux sont ***cohérents*** les uns avec les autres, c.-à-d. quand, pour chaque paire de signaux, l'écart de phase entre eux est indépendant du temps.

Interférences constructives et destructives

Considérons en particulier le cas de la somme de deux signaux. Les constantes β et γ ayant la même valeur pour chaque signal,

$$\begin{aligned} f(t) &= A_1 \cos(\omega\, t + \mathring{\varphi}_1) + A_2 \cos(\omega\, t + \mathring{\varphi}_2), \\ f'(t) &= \beta\, A_1 \cos(\omega\, t + \mathring{\varphi}_1 + \gamma) + \beta\, A_2 \cos(\omega\, t + \mathring{\varphi}_2 + \gamma). \end{aligned} \tag{I.49}$$

6. Le symbole « $\not\equiv$ » est utilisé ici pour indiquer qu'il peut y avoir égalité entre les deux membres dans certains cas, mais pas d'une manière générale.

On a donc

$$\mathcal{P}(t) = \beta A_1^2 \cos(\omega t + \mathring{\varphi}_1)\cos(\omega t + \mathring{\varphi}_1 + \gamma) + \beta A_2^2 \cos(\omega t + \mathring{\varphi}_2)\cos(\omega t + \mathring{\varphi}_2 + \gamma) + \beta A_1 A_2 \Big(\cos[\omega t + \mathring{\varphi}_1]\cos[\omega t + \mathring{\varphi}_2 + \gamma] + \cos[\omega t + \mathring{\varphi}_1 + \gamma]\cos[\omega t + \mathring{\varphi}_2]\Big), \tag{I.50}$$

d'où

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\beta A_1^2}{2}\cos\gamma + \frac{\beta A_2^2}{2}\cos\gamma + \beta A_1 A_2 \cos\gamma \cos(\mathring{\varphi}_1 - \mathring{\varphi}_2). \tag{I.51}$$

Pour simplifier, supposons $\cos\gamma \geqslant 0$. On a alors $\langle\mathcal{P}\rangle \geqslant 0$ et de même pour $\langle\mathcal{P}_1\rangle$ et $\langle\mathcal{P}_2\rangle$, donc

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \langle\mathcal{P}_1\rangle + \langle\mathcal{P}_2\rangle + 2\sqrt{\langle\mathcal{P}_1\rangle\langle\mathcal{P}_2\rangle}\cos(\mathring{\varphi}_1 - \mathring{\varphi}_2). \tag{I.52}$$

Cas particuliers :

- si $\mathring{\varphi}_1 - \mathring{\varphi}_2 = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, les signaux f_1 et f_2 sont ***en [conjonction de] phase***. Alors $\langle\mathcal{P}\rangle = (\sqrt{\langle\mathcal{P}_1\rangle} + \sqrt{\langle\mathcal{P}_2\rangle})^2 \geqslant \langle\mathcal{P}_1\rangle + \langle\mathcal{P}_2\rangle$: les signaux ***interfèrent constructivement*** car leurs amplitudes ($\propto \sqrt{\langle\mathcal{P}_k\rangle}$) s'ajoutent ;
- si $\mathring{\varphi}_1 - \mathring{\varphi}_2 = 2p\pi + \pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, les signaux sont ***en opposition de phase***. Alors $\langle\mathcal{P}\rangle = (\sqrt{\langle\mathcal{P}_1\rangle} - \sqrt{\langle\mathcal{P}_2\rangle})^2 \leqslant |\langle\mathcal{P}_1\rangle - \langle\mathcal{P}_2\rangle|$: les signaux ***interfèrent destructivement*** car leurs amplitudes s'opposent ;
- si $\mathring{\varphi}_1 - \mathring{\varphi}_2 = p\pi + \pi/2$ avec $p \in \mathbb{Z}$, les signaux sont ***en quadrature de phase***. Alors $\langle\mathcal{P}\rangle = \langle\mathcal{P}_1\rangle + \langle\mathcal{P}_2\rangle$: la moyenne du terme croisé (1; 2) est nulle et il n'y a pas d'interférences.

Remarque

Pour un signal vectoriel, la puissance est égale à la somme des puissances des composantes selon chaque axe : il n'y a pas d'interférences entre composantes orthogonales !

5. Somme de signaux sinusoïdaux de *pulsations différentes*

a. Puissance globale

Si $f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$, avec des fonctions f_k sinusoïdales et de pulsations toutes différentes les unes des autres, la moyenne temporelle de chacun des termes croisés dans I.46 est nulle. En effet, en adaptant le calcul I.24, on obtient

$$\langle f_k f'_\ell\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\frac{A_k A'_\ell I_1(\tau)}{2\tau} + \lim_{\tau\to\infty}\frac{A_k A'_\ell I_2(\tau)}{2\tau} \tag{I.53}$$

avec

$$I_1(\tau) = \int_{t=-\tau/2}^{\tau/2} \cos\Big([\omega_k + \omega_\ell]t + \mathring{\varphi}_k + \mathring{\varphi}'_\ell\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega_k + \omega_\ell}\Big[\sin\Big([\omega_k + \omega_\ell]t + \mathring{\varphi}_k + \mathring{\varphi}'_\ell\Big)\Big]_{t=-\tau/2}^{\tau/2},$$

$$I_2(\tau) = \int_{t=-\tau/2}^{\tau/2} \cos\Big([\omega_k - \omega_\ell]t + \mathring{\varphi}_k - \mathring{\varphi}'_\ell\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega_k - \omega_\ell}\Big[\sin\Big([\omega_k - \omega_\ell]t + \mathring{\varphi}_k - \mathring{\varphi}'_\ell\Big)\Big]_{t=-\tau/2}^{\tau/2}. \tag{I.54}$$

Comme précédemment, $I_1(\tau)$ est bornée, mais, cette fois-ci, $I_2(\tau)$ l'est aussi puisque $\omega_k \neq \omega_\ell$. On a donc $\lim_{\tau\to\infty} I_1(\tau)/\tau = \lim_{\tau\to\infty} I_2(\tau)/\tau = 0$, d'où

$$\langle f_k f'_\ell\rangle = 0. \tag{I.55}$$

Finalement,

$$\boldsymbol{\langle\mathcal{P}\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle\mathcal{P}_k\rangle} \tag{I.56}$$

pour des *pulsations toutes différentes*. Les termes d'interférences disparaissent car les signaux sont ***incohérents***.

b. Pulsations proches : phénomène de battement (hors programme)

Considérons la somme de deux signaux sinusoïdaux de pulsations ω_1 et ω_2 ($< \omega_1$) distinctes mais proches. Pour simplifier, supposons-les d'abord de même amplitude A_1. Posons $\omega_+ = (\omega_1 + \omega_2)/2$ et $\omega_- = (\omega_1 - \omega_2)/2 \ll \omega_+$. On a alors

$$f(t) = A_1\cos(\omega_1 + \mathring{\varphi}_1) + A_1\cos(\omega_2 + \mathring{\varphi}_2). \tag{I.57}$$

Puisque

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{I.58}$$

on a

$$f(t) = 2A_1\cos\Big(\omega_+ t + \frac{\mathring{\varphi}_1 + \mathring{\varphi}_2}{2}\Big)\cos\Big(\omega_- t + \frac{\mathring{\varphi}_1 - \mathring{\varphi}_2}{2}\Big). \tag{I.59}$$

Le premier cosinus, de pulsation ω_+ et de période $T_+ = 2\pi/\omega_+$, s'appelle la ***porteuse*** du signal total. Le deuxième cosinus, de pulsation $\omega_- \ll \omega_+$, donc de période $T_- = 2\pi/\omega_- \gg T_+$, s'appelle l'***enveloppe*** du signal total. Le signal de la porteuse est donc ***modulé*** par celui de l'enveloppe.

Pour des signaux sonores sinusoïdaux simultanés, la variation temporelle des signaux f_1 et f_2 n'est pas perceptible à l'oreille (sauf si la fréquence est très basse), donc celle de la porteuse non plus. En revanche, la variation temporelle de l'enveloppe s'entend et l'on perçoit le signal total comme un signal de pulsation ω_+ dont l'amplitude varie avec une période T_-. Ce phénomène porte le nom de ***battement*** et cause une sensation de dissonance ; il est utilisé pour accorder les cordes d'instruments tels que les violons.

Remarque

Si les amplitudes A_1 et A_2 des deux signaux sont différentes, on obtient avec la relation

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \tag{I.60}$$

que

$$\begin{aligned} f(t) &= A_1\cos(\omega_1\,t+\mathring{\varphi}_1) + A_2\cos(\omega_2\,t+\mathring{\varphi}_2) \\ &= \frac{A_1+A_2}{2}\Big(\cos[\omega_1\,t+\mathring{\varphi}_1] + \cos[\omega_2\,t+\mathring{\varphi}_2]\Big) \\ &\quad + \frac{A_1-A_2}{2}\Big(\cos[\omega_1\,t+\mathring{\varphi}_1] - \cos[\omega_2\,t+\mathring{\varphi}_2]\Big) \\ &= (A_1+A_2)\cos\Big(\omega_+\,t+\frac{\mathring{\varphi}_1+\mathring{\varphi}_2}{2}\Big)\cos\Big(\omega_-\,t+\frac{\mathring{\varphi}_1-\mathring{\varphi}_2}{2}\Big) \\ &\quad + (A_2-A_1)\sin\Big(\omega_+\,t+\frac{\mathring{\varphi}_1+\mathring{\varphi}_2}{2}\Big)\sin\Big(\omega_-\,t+\frac{\mathring{\varphi}_1-\mathring{\varphi}_2}{2}\Big). \end{aligned} \tag{I.61}$$

Le premier terme correspond à un battement d'amplitude $A_1 + A_2$, le second à un battement d'amplitude $|A_2 - A_1|$. Le battement résultant est moins net que dans le cas où $A_1 = A_2$ étudié plus haut.

B. Signaux quelconques

L'intérêt de considérer les signaux sinusoïdaux est que, sous certaines conditions, tout signal peut s'écrire sous la forme d'une somme discrète (éventuellement infinie, c.-à-d. une série) ou continue (c.-à-d. une intégrale) de signaux sinusoïdaux. Les signaux sinusoïdaux de pulsations différentes étant linéairement indépendants ※[7], toute relation linéaire régissant le signal total vaudra également séparément pour chacune de ses composantes sinusoïdales.

1. Cas particulier des signaux périodiques

a. Décomposition spectrale

Intéressons-nous à un fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique. Soit T la période fondamentale de f et $\boldsymbol{\omega_1 = 2\pi/T}$ la pulsation correspondante.

Si f est suffisamment régulière, on a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_n\,t} \tag{I.62}$$

avec $\boldsymbol{\omega_n = n\,\omega_1}$ et

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_n\,t}\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C}. \tag{I.63}$$

Cette somme s'appelle la ***série de Fourier*** de f.

Pour f à valeur réelle, on a $c_{-n} = c_n^*$. On peut alors réécrire $f(t)$ sous la forme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \tag{I.64}$$

7. Ils sont même orthogonaux pour un produit scalaire dont l'expression est directement reliée à la définition de l'énergie totale ou de la puissance moyenne du signal. Chacune des composantes sinusoïdales du signal total est donc la projection orthogonale de celui-ci sur celles-là.

avec,

$$\text{pour } n = 0, \quad f_0(t) = c_0 = \frac{a_0}{2}\ ;$$
$$\text{pour } n \geqslant 1, \quad f_n(t) = c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,\omega\,t} + c_n^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,\omega\,t} = a_n \cos(\omega_n\,t) + b_n \sin(\omega_n\,t) \tag{I.65}$$

et

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} f(t)\cos(\omega_n\,t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T} f(t)\sin(\omega_n\,t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}. \tag{I.66}$$

Les coefficients a_n, b_n et c_n sont les ***coefficients de Fourier*** de f et l'ensemble des coefficients (a_n, b_n) ou c_n s'appelle le ***spectre de Fourier*** de f.

La somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ s'appelle la ***décomposition spectrale*** de f. Chacun des termes $f_n(t)$ est un ***mode propre*** de f. Pour des modes dont la fréquence est un multiple entier d'une certaine fréquence, on parle d'***harmoniques*** (nom masculin !) ; l'harmonique pour $n = 1$ est le ***fondamental***. On peut bien sûr écrire les modes propres sous la forme

$$f_n(t) = A_n \cos(\omega_n\,t + \mathring{\varphi}_n) \tag{I.67}$$

avec $A_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 1$. Pour $n = 0$, on peut choisir $\mathring{\varphi}_0 = 0$; on a alors $A_0 = c_0 = a_0/2$, qui peut être négatif.

Pour f à valeur réelle, on a donc $f = \operatorname{Re} \underline{f}$ avec

$$\boldsymbol{\underline{f}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \underline{A}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_n\,t}}, \tag{I.68}$$

où $\underline{A}_0 = A_0 = c_0$ et, pour $n \geqslant 1$, $\underline{A}_n = A_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathring{\varphi}_n} = 2\,c_n$.

b. Puissance moyenne

Soient f et f' deux fonctions à valeurs réelles, périodiques de même période. D'après le théorème de Parseval-Bessel, si la puissance instantanée est donnée par $\mathcal{P}(t) = f(t)\,f'(t)$, la puissance moyenne du signal vaut

$$\boldsymbol{\langle\mathcal{P}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\mathcal{P}_n\rangle} \tag{I.69}$$

où $\langle\mathcal{P}_n\rangle$ est la puissance moyenne du mode sinusoïdal nº n, que l'on sait déja calculer :

$$\langle\mathcal{P}_0\rangle = c_0\,c_0' = A_0\,A_0' \quad (\text{avec la convention } \mathring{\varphi}_0 = \mathring{\varphi}_0' = 0)\ ;$$
$$\langle\mathcal{P}_n\rangle = \operatorname{Re}\langle\underline{\mathcal{P}}_n\rangle \quad \text{pour } n \geqslant 1, \quad \text{avec } \langle\underline{\mathcal{P}}_n\rangle = 2\,c_n\,c_n'^* = \frac{\underline{A}_n\,\underline{A}_n'^*}{2}\,. \tag{I.70}$$

La puissance moyenne d'un signal périodique est donc égale à la somme des puissances moyennes de tous les modes le composant.

2. Cas général

a. Décomposition spectrale

Sous certaines conditions que nous supposerons réunies, on définit, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, la ***transformée de Fourier*** $\hat{f}$ d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par l'expression [※8]

$$\hat{f}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t. \tag{I.71}$$

L'objet noté « $\hat{f}$ » n'est pas nécessairement une fonction au sens usuel, mais est plus généralement une distribution. L'ensemble des valeurs de $\hat{f}(\omega)$ est le ***spectre de Fourier*** de f.

Si la fonction f est suffisamment régulière, elle est donnée, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par la ***transformée de Fourier inverse*** [※9] :

$$f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\omega)}{2\,\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}\,\mathrm{d}\omega. \tag{I.72}$$

8. Il existe d'autres conventions pour définir la transformée de Fourier et son inverse.
9. Pour avoir une expression de la transformée de Fourier inverse symétrique de celle de la tranformée directe, sans facteur $1/(2\,\pi)$, il suffit de les écrire en fonction de la fréquence ν au lieu de ω.

Dans le cas d'une fonction périodique, l'intégrale se réduit à une somme discrète et on retrouve la série de Fourier donnée dans I.62.

Pour f à valeur réelle, $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$. En posant $\underline{\alpha}(\omega) = \hat{f}(\omega)/\pi$ si $\omega > 0$ et $\underline{\alpha}(0) = \hat{f}(0)/(2\,\pi)$, on peut écrire que $f = \operatorname{Re} \underline{f}$ avec

$$\boldsymbol{\underline{f}(t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \underline{\alpha}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}\,\mathrm{d}\omega}. \tag{I.73}$$

Cette « représentation complexe » de f porte le nom de ***signal analytique*** associé à f. La décomposition spectrale de f dans les modes sinusoïdaux prend donc la forme d'une intégrale et non plus d'une somme discrète.

b. Énergie et puissance moyenne

La quantité

$$\mathcal{E}(\tau) = \int_{t=-\tau/2}^{\tau/2} \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t \tag{I.74}$$

est l'énergie du signal sur l'intervalle $[-\tau/2, \tau/2]$. Si $\mathcal{E}_{\text{tot}} := \lim_{\tau\to\infty} \mathcal{E}(\tau)$ converge vers un nombre réel, le signal est dit ***d'énergie [totale] finie***. Pour une puissance instantanée donnée par $\mathcal{P}(t) = f(t)\,f'(t)$, avec f et f' à valeurs réelles, on a alors

$$\boldsymbol{\mathcal{E}_{\text{tot}} = \int_{\omega=0}^{\infty} D_{\mathcal{E}}(\omega)\,\mathrm{d}\omega}, \tag{I.75}$$

avec

$$\begin{cases} D_{\mathcal{E}}(0) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{\hat{f}[0]\,\hat{f}'^*[0]}{2\,\pi}\right), \\ D_{\mathcal{E}}(\omega) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{\hat{f}[\omega]\,\hat{f}'^*[\omega]}{\pi}\right) \quad \text{si } \omega > 0. \end{cases} \tag{I.76}$$

d'après le théorème de Parseval-Plancherel. La quantité $D_{\mathcal{E}}(\omega)$ s'appelle la ***densité spectrale d'énergie***.

Si $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ diverge (ce qui se produit pour un signal périodique), on peut considérer la puissance moyenne,

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\mathcal{E}(\tau)}{\tau} \tag{I.77}$$

si cette limite converge vers une valeur réelle. Le signal est alors dit ***de puissance [moyenne] finie***. En posant

$$f_\tau(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [-\tau/2, \tau/2], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{I.78}$$

et en définissant de même f'_τ à partir de f', on peut écrire

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{t=-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_{t=-\infty}^{\infty} f_\tau(t)\,f'_\tau(t)\,\mathrm{d}t. \tag{I.79}$$

En notant $\hat{f}_\tau$ et $\hat{f}'_\tau$ les transformées de Fourier de f_τ et f'_τ et en appliquant le théorème de Parseval-Plancherel, on en déduit que

$$\boldsymbol{\langle\mathcal{P}\rangle = \int_{\omega=0}^{\infty} D_{\mathcal{P}}(\omega)\,\mathrm{d}\omega}, \tag{I.80}$$

avec

$$\begin{cases} D_{\mathcal{P}}(0) = \operatorname{Re}\left(\lim\limits_{\tau\to\infty} \dfrac{\hat{f}[0]\,\hat{f}'^*[0]}{2\,\pi\,\tau}\right), \\ D_{\mathcal{P}}(\omega) = \operatorname{Re}\left(\lim\limits_{\tau\to\infty} \dfrac{\hat{f}[\omega]\,\hat{f}'^*[\omega]}{\pi\,\tau}\right) \quad \text{si } \omega > 0. \end{cases} \tag{I.81}$$

Dans le cas d'un signal périodique, on retrouve le résultat I.69. La quantité $D_{\mathcal{P}}(\omega)$ s'appelle la ***densité spectrale de puissance***.

3. Relation d'indétermination. Analyse temps-fréquence

Un signal sinusoïdal a une fréquence bien définie (ν_0) et son spectre de Fourier se réduit aux fréquences $\pm\nu_0$. En revanche, son extension est infinie dans le passé et le futur : il n'est donc pas physique. Inversement, un signal concentré en temps (p. ex. une brève impulsion) est très étendu en fréquence, c.-à-d. que son spectre de Fourier couvre un large intervalle.

On peut montrer que, quel que soit le signal, les extensions σ_t et σ_ω du signal en temps et en pulsation (il s'agit plus précisément d'écarts-types) obéissent à la ***relation d'indétermination*** ※[10]

$$\sigma_t\,\sigma_\omega \geqslant \frac{1}{2}. \tag{I.82}$$

(L'égalité est obtenue pour un signal temporel gaussien, dont la transformée de Fourier est également une gaussienne.)

La transformation de Fourier convertit une représentation du signal purement temporelle (en t) en représentation purement fréquentielle (en ν ou, de manière équivalente, en ω). C'est un outil puissant qui possède de nombreuses bonnes propriétés mathématiques, mais qui requiert de connaître le signal de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, ce qui est évidemment impossible en pratique et ne correspond pas à notre expérience courante de la notion de fréquence.

Ainsi, lorsque nous écoutons une mélodie, nous percevons une succession (aspect temporel) de notes de différentes hauteurs (aspect fréquentiel) : notre système auditif effectue une ***analyse temps-fréquence***. Ceci revient en gros à déterminer la transformée de Fourier du signal au fur et à mesure, non pas de $t = -\infty$ à $+\infty$ mais sur une fenêtre temporelle glissante ; la largeur de la fenêtre étant finie, les fréquences perçues dans le signal au fil du temps ne sont alors pas parfaitement déterminées, d'après la relation d'indétermination I.82.

De même, l'intensité acoustique à un instant t est équivalente (à un facteur près) à la puissance du signal sonore moyennée sur un intervalle de durée finie autour de t (sans « $\lim_{\tau\to\infty}$ »). (Des outils plus performants qu'une transformation de Fourier sur une fenêtre glissante sont utilisés en traitement du signal, par exemple la transformation de Gabor ou les ondelettes.)

10. Une relation analogue apparaît également en mécanique quantique sous le nom de « principe d'incertitude ».