Chapitre OÉC-IV

Réflexion et transmission d'ondes

A. Généralités

Lorsqu'une onde progressive ***incidente*** ψ_{inc} parcourant un milieu n° 1 arrive à une interface avec un milieu n° 2 différent, elle donne naissance à deux ondes progressives :

- une onde ***transmise*** ψ_{tr} dans le milieu n° 2 ;
- une onde ***réfléchie*** $\psi_{\text{réf}}$ dans le milieu n° 1.

Nous allons traiter dans ce qui suit le cas où ψ_{inc} arrive sous incidence normale sur l'interface : ψ_{tr} est alors de même direction et de même sens que ψ_{inc} ; en revanche, $\psi_{\text{réf}}$ est de même direction que ψ_{inc}, mais de sens opposé.

Nous nous intéresserons en particulier à une onde incidente sinusoïdale de pulsation ω. Les ondes réfléchie et transmise sont alors également sinusoïdales de pulsation ω. Les vecteurs d'onde sont cependant différents : si c_1 et c_2 sont les célérités dans les milieux n$^{\text{os}}$ 1 et 2 et que ψ_{inc} se propage selon les x croissants avec un vecteur d'onde

$$\vec{k}_{\text{inc}} = k_1\,\vec{u}_x \quad \text{avec } k_1 = \omega/c_1, \tag{OÉC-IV.1}$$

alors

$$\vec{k}_{\text{tr}} = k_2\,\vec{u}_x \quad \text{avec } k_2 = \omega/c_2, \tag{OÉC-IV.2}$$

et

$$\vec{k}_{\text{réf}} = -k_1\,\vec{u}_x. \tag{OÉC-IV.3}$$

Pour simplifier les calculs, prenons l'interface en $x = 0$. En notation complexe, on a alors

$$\underline{\psi}_{\text{inc}}(x,t) = \underline{A}_{\text{inc}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - k_1\,x)}, \tag{OÉC-IV.4}$$

$$\underline{\psi}_{\text{tr}}(x,t) = \underline{A}_{\text{tr}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - k_2\,x)}, \tag{OÉC-IV.5}$$

$$\underline{\psi}_{\text{réf}}(x,t) = \underline{A}_{\text{réf}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t + k_1\,x)}. \tag{OÉC-IV.6}$$

Cherchons à déterminer l'amplitude relative et le déphasage des ondes transmise et réfléchie par rapport à l'onde incidente. Pour calculer $\underline{A}_{\text{tr}}$ et $\underline{A}_{\text{réf}}$ à partir de $\underline{A}_{\text{inc}}$, il faut imposer deux conditions à l'interface. Nous allons maintenant voir quelles sont ces conditions et quelles sont leurs conséquences pour les ondes sur une corde vibrante et pour les ondes acoustiques dans un tuyau.

B. Corde vibrante

1. Conditions à l'interface

a. 1$^{\text{re}}$ condition

Considérons une corde vibrante tendue constituée de deux tronçons attachés : un milieu de masse linéique μ_1 pour $x < 0$ et un milieu de masse linéique μ_2 pour $x > 0$. Au lieu de ψ, notons y le déplacement transversal. Dans les milieux n° 1 et n° 2, on a

$$\underline{y}_1(x,t) = \underline{y}_{\text{inc}}(x,t) + \underline{y}_{\text{réf}}(x,t), \tag{OÉC-IV.7}$$

$$\underline{y}_2(x,t) = \underline{y}_{\text{tr}}(x,t). \tag{OÉC-IV.8}$$

La première condition est que **la corde est continue à l'interface** (elle ne se rompt pas !)[※1] :

$$y_2(x = 0^+, t) = y_1(x = 0^-, t) \quad \text{pour tout } t. \tag{OÉC-IV.9}$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient que

$$v_{y,2}(x = 0^+, t) = v_{y,1}(x = 0^-, t). \tag{OÉC-IV.10}$$

(Cette opération permet de faire l'analogie avec le cas des tuyaux sonores.) La dérivée par rapport à t correspondant à une multiplication par $\mathrm{i}\,\omega$ en représentation complexe, on en déduit immédiatement que

$$\underline{A}_{\text{inc}} + \underline{A}_{\text{réf}} = \underline{A}_{\text{tr}}. \tag{OÉC-IV.11}$$

b. 2e condition

Pour la deuxième condition, appliquons la relation fondamentale de la dynamique à l'interface. Rappelons que la tension $\vec{F}(x,t)$ a été définie comme la force exercée, à l'instant t, au point d'abscisse x sur la portion de corde située aux abscisses $x' < x$ par la portion située en $x' > x$. L'interface est donc soumise à $\vec{F}(x = 0^+, t)$ et $-\vec{F}(x = 0^-, t)$. Comme sa masse est nulle,

$$0\,\vec{a} = \vec{F}(x = 0^+, t) - \vec{F}(x = 0^-, t) = \vec{F}_2(x = 0^+, t) - \vec{F}_1(x = 0^-, t). \tag{OÉC-IV.12}$$

La tension est donc continue à l'interface. En projetant sur les axes x et y, on obtient

$$F_{2,x}(x = 0^+, t) = F_{1,x}(x = 0^-, t), \tag{OÉC-IV.13}$$

$$F_{2,y}(x = 0^+, t) = F_{1,y}(x = 0^-, t). \tag{OÉC-IV.14}$$

Comme $F_y = -Z\,(v_{y,+} - v_{y,-})$ dans chaque milieu (cf. § OÉC-II.A.2), on en déduit que

$$Z_1\,(\underline{A}_{\text{inc}} - \underline{A}_{\text{réf}}) = Z_2\,\underline{A}_{\text{tr}}. \tag{OÉC-IV.15}$$

Remarque : On a $F_y = F_x\,\partial y/\partial x$ et $F_{2,x}(x = 0^+, t) = F_{1,x}(x = 0^-, t)$, donc $(\partial y_2/\partial x)(x = 0^+, t) = (\partial y_1/\partial x)(x = 0^-, t)$. La pente de la corde est donc continue.

2. Coefficients de réflexion et de transmission

a. En déplacement ou vitesse

Notons

$$\boldsymbol{r_y = \frac{\underline{y}_{\text{réf}}(x = 0^-, t)}{\underline{y}_{\text{inc}}(x = 0^-, t)}} = \frac{\underline{v}_{y,\text{réf}}(x = 0^-, t)}{\underline{v}_{y,\text{inc}}(x = 0^-, t)} = \frac{\underline{A}_{\text{réf}}}{\underline{A}_{\text{inc}}} \tag{OÉC-IV.16}$$

et

$$\boldsymbol{\tau_y = \frac{\underline{y}_{\text{tr}}(x = 0^+, t)}{\underline{y}_{\text{inc}}(x = 0^-, t)}} = \frac{\underline{v}_{y,\text{tr}}(x = 0^+, t)}{\underline{v}_{y,\text{inc}}(x = 0^-, t)} = \frac{\underline{A}_{\text{tr}}}{\underline{A}_{\text{inc}}}\,. \tag{OÉC-IV.17}$$

les ***coefficients de réflexion et de transmission en déplacement*** (et en vitesse). On déduit de OÉC-IV.11 et OÉC-IV.15 que

$$r_y = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad \tau_y = \frac{2\,Z_1}{Z_1 + Z_2}\,. \tag{OÉC-IV.18}$$

Sur chacune des deux portions de cordes, $Z = F/c = \sqrt{\mu\,F}$. Comme la tension est la même sur chaque corde, $Z_2/Z_1 = \sqrt{\mu_2/\mu_1}$. Si $\mu_1 = \mu_2$, on a donc $Z_1 = Z_2$, d'où $r_y = 0$ et $\tau_y = 1$: l'onde incidente ne subit aucune réflexion et est intégralement transmise.

Comme Z_1 et Z_2 sont des réels positifs, on a toujours $\tau_y \geqslant 0$, donc $\arg \underline{y}_{\text{tr}}(x = 0^+, t) = \arg \underline{y}_{\text{inc}}(x = 0^-, t)$ (modulo $2\,\pi$) : **l'onde transmise et l'onde incidente sont en phase à l'interface**.

De même, **si $Z_2 \leqslant Z_1$, l'onde réfléchie et l'onde incidente sont en phase à l'interface**, puisqu'on a alors $r_y \geqslant 0$. En revanche, **si $Z_2 > Z_1$, l'onde réfléchie et l'onde incidente sont en opposition de phase à l'interface** : en effet, on a alors $r_y < 0$, donc $\arg \underline{y}_{\text{réf}}(x = 0^-, t) = \arg \underline{y}_{\text{inc}}(x = 0^-, t) + \pi$ (modulo $2\,\pi$).

Lorsque $\mu_2 \gg \mu_1$, $r_y \approx -1$ et $\tau_y \approx 0$. La corde no 2 ayant une grande inertie, on retrouve naturellement le même résultat que si la corde no 1 était fixée en $x = 0$ (cf. § OÉC-II.C.1) : à l'onde incidente s'ajoute une onde réfléchie de même amplitude, mais déphasée de π à l'extrémité ; c'est la superposition de ces deux ondes progressives de sens contraires qui forme une onde stationnaire.

1. On rappelle que l'on utilise les notations suivantes : pour n'importe quelle fonction f de x,

$$f(x^+) := \lim_{x' \to x\,;\; x' > x} f(x') \quad \text{et} \quad f(x^-) := \lim_{x' \to x\,;\; x' < x} f(x').$$

b. En puissance

Les puissances transportées, dans le sens de propagation de chacune, par les ondes incidente, réfléchie et transmise valent $\mathcal{P}_{\mathrm{inc}} = Z_1\,v_{y,\mathrm{inc}}^2$, $\mathcal{P}_{\mathrm{réf}} = Z_1\,v_{y,\mathrm{réf}}^2$ et $\mathcal{P}_{\mathrm{tr}} = Z_2\,v_{y,\mathrm{tr}}^2$. Les ***coefficients de réflexion et de transmission en puissance*** sont définis par

$$\boldsymbol{r_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{réf}}(x = 0^-, t)}{\mathcal{P}_{\mathrm{inc}}(x = 0^-, t)}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{tr}}(x = 0^+, t)}{\mathcal{P}_{\mathrm{inc}}(x = 0^-, t)}}. \tag{OÉC-IV.19}$$

Attention, la puissance instantanée étant définie à partir d'un produit de fonctions réelles ($\mathcal{P} = (Z\,v) \times v$), on ne peut pas écrire $\underline{\mathcal{P}} = Z\,\underline{v}^2$ car on aurait alors $\mathcal{P} \neq \mathrm{Re}\,\underline{\mathcal{P}}$ (cf. § OÉC-III.G.3). En revanche, comme $\underline{v}_{y,\mathrm{réf}}(x = 0^-, t) = r_y\,\underline{v}_{y,\mathrm{inc}}(x = 0^-, t)$ et que r_y est un nombre réel, on a $v_{y,\mathrm{réf}}(x = 0^-, t) = r_y\,v_{y,\mathrm{inc}}(x = 0^-, t)$, donc

$$r_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{réf}}(x = 0^-, t)}{\mathcal{P}_{\mathrm{inc}}(x = 0^-, t)} = \frac{Z_1\,v_{y,\mathrm{réf}}^2(x = 0^-, t)}{Z_1\,v_{y,\mathrm{inc}}^2(x = 0^-, t)} = r_y^2. \tag{OÉC-IV.20}$$

Le nombre τ_y étant aussi un réel, le même raisonnement s'applique à $v_{y,\mathrm{tr}}(x = 0^+, t)$ et $v_{y,\mathrm{inc}}(x = 0^-, t)$, donc

$$\tau_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{tr}}(x = 0^+, t)}{\mathcal{P}_{\mathrm{inc}}(x = 0^-, t)} = \frac{Z_2\,v_{y,\mathrm{tr}}^2(x = 0^+, t)}{Z_1\,v_{y,\mathrm{inc}}^2(x = 0^-, t)} = \frac{Z_2}{Z_1}\,\tau_y^2. \tag{OÉC-IV.21}$$

Remarquer que

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{P}} + \tau_{\mathcal{P}} &= \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 + \frac{Z_2}{Z_1}\left(\frac{2\,Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 = \frac{(Z_1^2 - 2\,Z_1\,Z_2 + Z_2^2) + (Z_2/Z_1)\,(4\,Z_1^2)}{(Z_1 + Z_2)^2} \\ &= \frac{(Z_1^2 - 2\,Z_1\,Z_2 + Z_2^2) + 4\,Z_1\,Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{Z_1^2 + 2\,Z_1\,Z_2 + Z_2^2}{(Z_1 + Z_2)^2}, \end{aligned} \tag{OÉC-IV.22}$$

soit

$$\boldsymbol{r_{\mathcal{P}} + \tau_{\mathcal{P}} = 1}. \tag{OÉC-IV.23}$$

Il y a donc bien **conservation de l'énergie** : l'onde incidente donne naissance aux ondes réfléchie et transmise et toute son énergie se retrouve dans celles-ci.

C. Tuyaux sonores

1. Conditions à l'interface

a. 1re condition

Considérons deux tuyaux rectilignes de section constante, raccordés selon leur axe en $x = 0$. Notons S_i la section de chacun des tuyaux, ρ_i la masse volumique du fluide que chacun contient et χ_i la compressibilité de ce fluide, avec $i = 1$ pour le tuyau en $x \leqslant 0$ et $i = 2$ pour l'autre. L'essentiel du traitement est analogue à celui effectué pour la corde vibrante.

La première condition de continuité est la **conservation du débit volumique** D **à l'interface** :

$$D_1(x = 0^-, t) = D_2(x = 0^+, t), \tag{OÉC-IV.24}$$

où, dans chaque zone, le ***débit volumique*** est défini par

$$\boldsymbol{D = S\,v} = S\,(v_+ + v_-). \tag{OÉC-IV.25}$$

Pour le montrer, considérons un petit volume de part et d'autre de l'interface, compris au repos entre x_1 (< 0) et x_2 (> 0) et entre $x_1 + \psi_1(x_1, t)$ et $x_2 + \psi_2(x_2, t)$ lorsqu'il est perturbé. (On choisit x_1 et x_2 très proches de l'interface mais tels que, pour tout t, on ait $x_1 + \psi_1(x_1, t) < 0$ et $x_2 + \psi_2(x_2, t) > 0$.) La mesure du volume vaut $V = -S_1\,x_1 + S_2\,x_2$ au repos et $V' = -S_1\,(x_1 + \psi_1[x_1, t]) + S_2\,(x_2 + \psi_2[x_2, t])$ lorsqu'il est perturbé. Les déplacements ψ_1 et ψ_2 étant très faibles ($\sim 10^{-10}$ m ; cf. § OÉC-II.B.4) devant la longueur d'onde des ondes parcourant les tuyaux ($\lambda = 0{,}77$ m pour le *la* de la troisième octave), on peut traiter le volume comme quasi incompressible au voisinage de l'interface[※2], c.-à-d. $V' = V$. Il en résulte que $S_1\,\psi_1 = S_2\,\psi_2$. En dérivant par rapport au temps, on obtient la conservation du début volumique.

On en déduit immédiatement que

$$\underline{A}'_{\mathrm{inc}} + \underline{A}'_{\mathrm{réf}} = \underline{A}'_{\mathrm{tr}}, \tag{OÉC-IV.26}$$

où

$$\underline{A}' = \mathrm{i}\,\omega\,S\,\underline{A} \tag{OÉC-IV.27}$$

est l'amplitude complexe du débit volumique et $\underline{A}$ est celle du déplacement longitudinal.

2. Le fluide n'est bien sûr pas incompressible à plus grande échelle, sinon il ne pourrait y avoir d'ondes acoustiques !

b. 2ᵉ condition

La deuxième condition est l'**égalité des surpressions de part et d'autre de l'interface**. En effet, un élément de surface $\mathrm{d}S$ de l'interface est soumis aux forces $p_1(x = 0^-, t)\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_x$ et $-p_2(x = 0^+, t)\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_x$. Comme l'interface est de masse nulle, il résulte de la relation fondamentale de la dynamique que

$$0\,\vec{a} = p_1(x = 0^-, t)\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_x - p_2(x = 0^+, t)\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_x \qquad \text{(OÉC-IV.28)}$$

et donc, en retranchant la pression au repos, que

$$\delta p_1(x = 0^-, t) = \delta p_2(x = 0^+, t). \qquad \text{(OÉC-IV.29)}$$

Par ailleurs, dans chaque tuyau,

$$\delta p = z\,(v_+ - v_-) = \zeta\,(D_+ - D_-), \qquad \text{(OÉC-IV.30)}$$

où

$$\boldsymbol{\zeta := z/S} \qquad \text{(OÉC-IV.31)}$$

porte le nom d'***impédance hydraulique***, $z = Z/S$ est l'impédance caractéristique du tuyau (cf. § OÉC-II.ʙ.3) et $Z = S/(\chi\,c)$ est l'impédance du tuyau. On en déduit que

$$\zeta_1\,(\underline{A}'_{\text{inc}} - \underline{A}'_{\text{réf}}) = \zeta_2\,\underline{A}'_{\text{tr}}. \qquad \text{(OÉC-IV.32)}$$

2. Coefficients de réflexion et de transmission

a. En débit volumique

Les deux conditions obtenues pour les tuyaux sont très semblables à celles utilisées pour les cordes. On peut donc réutiliser les résultats démontrés pour ces dernières en faisant les substitutions

$$v_y \to D, \quad F_y \to \delta p, \quad \underline{A} \to \underline{A}', \quad Z \to \zeta. \qquad \text{(OÉC-IV.33)}$$

On déduit immédiatement les coefficients de réflexion et de transmission en débit volumique :

$$r_D = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2} \quad \text{et} \quad \tau_D = \frac{2\,\zeta_1}{\zeta_1 + \zeta_2}. \qquad \text{(OÉC-IV.34)}$$

Le cas où $S_2 \ll S_1$ correspond à une **extrémité fermée d'un tuyau** (cf. § OÉC-II.c.2.*a* et § OÉC-II.c.2.*b*). Comme $\zeta = 1/(\chi\,c\,S)$, on a $\zeta_2 \gg \zeta_1$, donc $\tau_D \approx 0$ et $r_D \approx -1$: l'onde incidente n'est pas transmise et l'onde réfléchie est de même amplitude que l'onde incidente pour le débit volumique et le déplacement, mais en opposition de phase à une extrémité fermée ; c'est la superposition de ces deux ondes progressives de sens contraires qui forme une onde stationnaire.

b. En surpression

Comme, d'après l'équation OÉC-IV.30, $\delta p_{\text{inc}} = \zeta_1\,D_{\text{inc}}$, $\delta p_{\text{réf}} = -\zeta_1\,D_{\text{inc}}$ et $\delta p_{\text{tr}} = \zeta_2\,D_{\text{tr}}$, les coefficients de réflexion et de transmission en surpression valent

$$r_{\delta p} = -r_D \quad \text{et} \quad \tau_{\delta p} = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\,\tau_D = \frac{2\,\zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}. \qquad \text{(OÉC-IV.35)}$$

Le cas où $S_2 \gg S_1$ correspond à une **extrémité ouverte d'un tuyau** (cf. § OÉC-II.c.2.*b* et § OÉC-II.c.2.*c*), par exemple le pavillon débouchant sur l'air libre d'un instrument à vent. On a alors $\zeta_2 \ll \zeta_1$, donc $\tau_{\delta p} \approx 0$: la surpression δp_2 dans le milieu nº 2 est donc négligeable. La surpression étant une fonction continue en $x = 0$, on a $\delta p_1(x = 0^-, t) \approx 0$ si $S_2 \gg S_1$; on prouve ainsi, comme on l'avait énoncé au § OÉC-II.c.2.*b*, que la surpression est négligeable à l'extrémité ouverte d'un tuyau. Par ailleurs, $r_{\delta p} \approx -1$: l'onde réfléchie est donc de même amplitude que l'onde incidente pour la surpression, mais en opposition de phase à une extrémité ouverte ; c'est la superposition de ces deux ondes progressives de sens contraires qui forme une onde stationnaire.

c. En puissance

La puissance transportée dans le sens des x croissants par une onde acoustique dans un tuyau est $\mathcal{P} = Z\,(v_+^2 - v_-^2) = \zeta\,(D_+^2 - D_-^2)$. Avec les mêmes substitutions que précédemment, on obtient donc les coefficients de réflexion et de transmission en puissance pour les tuyaux :

$$r_{\mathcal{P}} = \frac{\zeta_1\,D_{\text{réf}}^2(x = 0^-, t)}{\zeta_1\,D_{\text{inc}}^2(x = 0^-, t)} = r_D^2 \qquad \text{(OÉC-IV.36)}$$

et

$$\tau_{\mathcal{P}} = \frac{\zeta_2\, D_{\mathrm{tr}}^2(x = 0^+, t)}{\zeta_1\, D_{\mathrm{inc}}^2(x = 0^-, t)} = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\, \tau_D^2. \tag{OÉC-IV.37}$$

Comme $r_{\mathcal{P}} + \tau_{\mathcal{P}} = 1$, on retrouve bien la conservation de l'énergie.

Remarque. On aurait pu remplacer l'une des deux conditions de continuité énoncées pour les cordes et les tuyaux par la condition de conservation de l'énergie ※[3]. ■

3. Lorsque l'on étudie le choc élastique frontal d'une particule contre une particule immobile, on obtient d'ailleurs des relations entre les vitesses algébriques de ces particules avant et après la collision semblables à OÉC-IV.18 et OÉC-IV.34. Les deux conditions utilisées sont alors la conservation de la quantité de mouvement totale et la conservation de l'énergie cinétique totale. Les masses des particules jouent le même rôle que les impédances.