

Chapitre ÉM-III

Dipôles électrostatiques

A. Potentiel et champ créés par un dipôle

1. Potentiel

Considérons un système de deux charges opposées, $+Q$ et $-Q$, situées respectivement en des points P et N distants de a . Comme nous le verrons au § ÉM-III.B.1.b, un tel système constitue un dipôle électrostatique. Le potentiel créé par ce dipôle en un point M vaut

$$V(M) = V_{-Q}(M) + V_{+Q}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{NM} + \frac{+Q}{PM} \right). \quad (\text{ÉM-III.1})$$

Calculons une approximation de $V(M)$ quand le point M est à grande distance du dipôle. Notons O le milieu de $[NP]$, \vec{u}_z le vecteur unitaire dirigé de N vers P , r la distance OM et θ l'angle entre \vec{u}_z et \vec{OM} . On a

$$(NM)^2 = \vec{NM} \cdot \vec{NM} = (\vec{NO} + \vec{OM}) \cdot (\vec{NO} + \vec{OM}) = (NO)^2 + (OM)^2 + 2\vec{NO} \cdot \vec{OM}. \quad (\text{ÉM-III.2})$$

Or $NO = a/2$, $OM = r$ et

$$\vec{NO} \cdot \vec{OM} = \frac{a}{2} \vec{u}_z \cdot r \vec{u}_r = \frac{ar \cos \theta}{2}. \quad (\text{ÉM-III.3})$$

On a donc

$$\frac{1}{NM} = \frac{1}{\sqrt{a^2/4 + ar \cos \theta + r^2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2}. \quad (\text{ÉM-III.4})$$

Faisons un développement de $1/NM$ au premier ordre en a/r . Pour u au voisinage de 0, $(1+u)^\alpha \approx 1 + \alpha u$, donc, avec $\alpha = -1/2$ et

$$u = \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2}, \quad (\text{ÉM-III.5})$$

on obtient

$$\frac{1}{NM} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a \cos \theta}{2r} \right) \quad \text{pour } r \gg a. \quad (\text{ÉM-III.6})$$

De même, en remplaçant a par $-a$,

$$\frac{1}{PM} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a \cos \theta}{2r} \right) \quad \text{pour } r \gg a, \quad (\text{ÉM-III.7})$$

donc

$$\begin{aligned} V(M) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\left[-Q + \frac{Qa \cos \theta}{2r} \right] + \left[Q + \frac{Qa \cos \theta}{2r} \right] \right) \\ &\approx \frac{Qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } r \gg a. \end{aligned} \quad (\text{ÉM-III.8})$$

Notons

$$\vec{p} = Q\vec{NP} = Qa\vec{u}_z \quad (\text{ÉM-III.9})$$

le **moment dipolaire électrique**. L'unité SI de \vec{p} est le $C \cdot m$, mais on utilise plus souvent le **debye** (symbole « D »), où $1 D = 3,34 \times 10^{-30} C \cdot m$. On peut réécrire le potentiel sous la forme intrinsèque (c.-à-d. indépendante du système de coordonnées)

$$V(M) \approx \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } r \gg a. \quad (\text{ÉM-III.10})$$

2. Champ électrique

Calculons le champ électrique à grande distance à partir de l'expression $\vec{E} = -\text{grad} V$. En coordonnées sphériques,

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{u}_\phi \\ &\approx \frac{Qa}{4\pi \varepsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta).\end{aligned}\quad (\text{ÉM-III.11})$$

(Remarquer qu'on a permuté la dérivation et l'approximation sans le justifier..) Or $\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$, donc

$$\vec{E}(M) \approx \frac{3Qa \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \vec{u}_r - \frac{Qa}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \vec{u}_z, \quad (\text{ÉM-III.12})$$

soit, sous forme intrinsèque,

$$\vec{E}(M) \approx \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \quad \text{pour } r \gg a. \quad (\text{ÉM-III.13})$$

B. Développement multipolaire du potentiel

1. Développement à l'ordre 3 en $1/r$

Considérons maintenant un ensemble de charges Q_1, \dots, Q_n situées aux points K_1, \dots, K_n . Notons (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point K_i dans une base orthonormée directe $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ quelconque et $d_i = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{1/2}$ est la distance OK_i . Calculons le potentiel en un point M à une distance r de O .

Comme précédemment, on peut écrire

$$\begin{aligned}(K_i M)^2 &= \overrightarrow{K_i M} \cdot \overrightarrow{K_i M} = (\overrightarrow{K_i O} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{K_i O} + \overrightarrow{OM}) = (OK_i)^2 + (OM)^2 - 2 \overrightarrow{OK_i} \cdot \overrightarrow{OM} \\ &= d_i^2 + r^2 - 2r d_i \cos \alpha_i,\end{aligned}\quad (\text{ÉM-III.14})$$

où $\alpha_i = \angle(\overrightarrow{OK_i}, \vec{u}_r)$. On a donc

$$\frac{1}{K_i M} = \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{d_i \cos \alpha_i}{r} + \frac{d_i^2}{r^2} \right)^{-1/2}. \quad (\text{ÉM-III.15})$$

Posons $u = -2d_i \cos \alpha_i / r + d_i^2 / r^2$. On a

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + \mathcal{O}(u^3) = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + \mathcal{O}(u^3), \quad (\text{ÉM-III.16})$$

donc

$$\frac{1}{K_i M} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d_i \cos \alpha_i}{r} + \frac{3d_i^2 \cos^2 \alpha_i - d_i^2}{2r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{d_i^3}{r^3}\right) \right). \quad (\text{ÉM-III.17})$$

Finalement, pour tout r ,

$$\begin{aligned}V(M) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{K_i M} \\ &= \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{4\pi \varepsilon_0 r}}_{(\text{terme monopolaire } V_{\text{mon}})} + \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n Q_i d_i \cos \alpha_i}{4\pi \varepsilon_0 r^2}}_{(\text{terme dipolaire } V_{\text{dip}})} + \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n Q_i (3d_i^2 \cos^2 \alpha_i - d_i^2)/2}{4\pi \varepsilon_0 r^3}}_{(\text{terme quadrupolaire})} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)}_{(\text{terme octupolaire, etc.})}\end{aligned}\quad (\text{ÉM-III.18})$$

a. Cas où $Q_{\text{tot}} \neq 0$

Le terme monopolaire (dit aussi « unipolaire ») domine à grande distance si la charge totale $Q_{\text{tot}} := \sum_{i=1}^n Q_i$ est non nulle. C'est simplement le potentiel créé par une charge ponctuelle de valeur Q_{tot} située à l'origine.

b. Cas où $Q_{\text{tot}} = 0$ et $\vec{p} \neq \vec{0}$

Si $Q_{\text{tot}} = 0$, le terme monopolaire est nul. Si, en outre, $\sum_{i=1}^n Q_i \overrightarrow{OK_i} \neq 0$, le terme dipolaire domine à grande distance et on retrouve la même expression que pour un dipôle constitué de deux charges opposées :

$$\begin{aligned} V(M) &\approx V_{\text{dip}}(M) = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i d_i \cos \alpha_i}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \overrightarrow{OK_i} \cdot \vec{u}_r}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } r \gg a, \end{aligned} \quad (\text{ÉM-III.19})$$

où

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n Q_i \overrightarrow{OK_i} \quad (\text{ÉM-III.20})$$

est le **moment dipolaire** de la distribution. Si $Q_{\text{tot}} = 0$ et $\vec{p} = \vec{0}$, alors $V_{\text{mon}} = V_{\text{dip}} = 0$: il faut en ce cas considérer les termes d'ordre supérieur.

Pour $n = 2$ en particulier, en posant $Q = Q_2$ (donc $Q_1 = -Q$), $N = K_1$ et $P = K_2$, on retrouve bien $\vec{p} = Q \overrightarrow{NP}$. Plus généralement, quel que soit le nombre de particules, on appelle **dipôle électrique tout système de charges tel que $Q_{\text{tot}} = 0$ et $\vec{p} \neq \vec{0}$** . Un tel système sera modélisé dans ce qui suit comme un ensemble de deux charges opposées $-Q$ et $+Q$ situées en N et P , où Q est la somme des charges positives, N est le barycentre des particules de charge négative (pondéré par les valeurs de celles-ci), et P celui des particules de charge positive (pondéré par les valeurs de celles-ci).

2. Forme tensorielle du développement multipolaire (hors programme)

Notons v_1, v_2 et v_3 les composantes de \vec{u}_r selon \vec{u}_x, \vec{u}_y et \vec{u}_z . On a

$$d_i \cos \alpha_i = x_i v_1 + y_i v_2 + z_i v_3, \quad (\text{ÉM-III.21})$$

donc le numérateur du terme quadripolaire vaut

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i (3 d_i^2 \cos^2 \alpha_i - d_i^2) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 T_{j,k}^{(2)} v_j v_k, \quad (\text{ÉM-III.22})$$

où

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Q_i (3 x_i^2 - d_i^2) & \sum_{i=1}^n 3 Q_i x_i y_i & \sum_{i=1}^n 3 Q_i x_i z_i \\ \sum_{i=1}^n 3 Q_i y_i x_i & \sum_{i=1}^n Q_i (3 y_i^2 - d_i^2) & \sum_{i=1}^n 3 Q_i y_i z_i \\ \sum_{i=1}^n 3 Q_i z_i x_i & \sum_{i=1}^n 3 Q_i z_i y_i & \sum_{i=1}^n Q_i (3 z_i^2 - d_i^2) \end{pmatrix} \quad (\text{ÉM-III.23})$$

est le **moment quadripolaire**^{*1} de la distribution de charges. Ce moment, représenté ci-dessus sous forme de matrice, est un tenseur d'ordre 2.

Le moment dipolaire est lui un vecteur, c.-à-d. un tenseur d'ordre 1. En effet,

$$\vec{p} \cdot \vec{u}_r = p_x v_1 + p_y v_2 + p_z v_3 = \sum_{j=1}^3 T_j^{(1)} v_j, \quad (\text{ÉM-III.24})$$

avec

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Q_i x_i \\ \sum_{i=1}^n Q_i y_i \\ \sum_{i=1}^n Q_i z_i \end{pmatrix}. \quad (\text{ÉM-III.25})$$

Le **moment monopolaire** est un tenseur d'ordre 0, le scalaire $T^{(0)} = Q_{\text{tot}}$.

De manière générale, on a

$$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{j_1=1}^3 \cdots \sum_{j_k=1}^3 T_{j_1, \dots, j_k}^{(k)} v_{j_1} \cdots v_{j_k}}{r^k}, \quad (\text{ÉM-III.26})$$

où $T^{(k)}$, le **moment "2^k-polaire"**, est un tenseur d'ordre k .

1. On définit parfois le moment quadripolaire comme le double de $T^{(2)}$.

3. Choix de l'origine

La valeur du potentiel donnée par la somme *infinie* de tous les termes ne dépend évidemment pas de l'origine arbitraire O , quelle que soit la distance r . En revanche, lorsqu'on ne retient que les premiers termes, la somme *tronquée* est une approximation d'autant meilleure du potentiel que r est grand et que l'origine est proche du cœur de la distribution de charges.

Les termes du développement dépendent a priori de l'origine non seulement par leur dénominateur r^k dans ÉM-III.26, mais aussi par leur numérateur, $\sum_{j_1=1}^3 \dots \sum_{j_k=1}^3 T_{j_1, \dots, j_k}^{(k)} v_{j_1} \dots v_{j_k}$. Dans celui-ci, les v_i dépendent peu de l'origine pour peu que celle-ci soit dans la distribution de charges et que M soit loin de celle-ci.

Qu'en est-il pour les moments $T^{(k)}$? On peut montrer que, si $Q_{\text{tot}} = 0$, \vec{p} ne dépend pas du point O choisi pour le calculer. En effet, par rapport à une autre origine O' ,

$$\vec{p}' = \sum_{i=1}^n Q_i \overrightarrow{O'K_i} = \sum_{i=1}^n Q_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OK_i}) = Q_{\text{tot}} \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^n Q_i \overrightarrow{OK_i} = \vec{p}. \quad (\text{ÉM-III.27})$$

[

](Hors programme) Comme pour le moment dipolaire, le moment "2^k-polaire" ne dépend pas de l'origine si tous les moments d'ordre inférieur sont nuls. Montrons-le par exemple pour la composante (1, 1) du moment quadrupolaire. En notant avec un prime les coordonnées par rapport à un point O' de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on a

$$\begin{aligned} T'_{1,1}{}^{(2)} &= \sum_{i=1}^n Q_i (3x_i'^2 - d_i'^2)/2 = \sum_{i=1}^n Q_i (2x_i'^2 - y_i'^2 - z_i'^2)/2 \\ &= \sum_{i=1}^n Q_i (2[x_i^2 - 2x_i x_0 + x_0^2] - [y_i^2 - 2y_i y_0 + y_0^2] - [z_i^2 - 2z_i z_0 + z_0^2])/2 \\ &= \sum_{i=1}^n Q_i (2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2)/2 - 2x_0 \sum_{i=1}^n Q_i x_i + y_0 \sum_{i=1}^n Q_i y_i + z_0 \sum_{i=1}^n Q_i z_i + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \sum_{i=1}^n Q_i \\ &= \sum_{i=1}^n Q_i (2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2)/2 \quad (\text{puisque } T^{(0)} = T^{(1)} = 0) \\ &= \sum_{i=1}^n Q_i (3x_i^2 - d_i^2)/2 = T_{1,1}{}^{(2)}. \end{aligned} \quad (\text{ÉM-III.28})$$

c. Dipôles atomiques et moléculaires

1. Dipôles permanents

Les atomes les plus **électronégatifs**^{*2} d'une molécule attirent les électrons, ce qui rend la molécule **polaire** : celle-ci acquiert un **moment dipolaire permanent** et se comporte comme un solide rigide. La distance NP entre les barycentres des charges négatives et positives étant alors constante, la *norme* de \vec{p} est constante. Le *vecteur* moment dipolaire n'est cependant pas constant car la molécule peut tourner. Si elle est soumise à un champ extérieur, nous verrons qu'elle a tendance à aligner son moment dipolaire dans la direction et le sens de ce champ. De manière générale, on appelle **dipôle électrostatique permanent** (ou **rigide**) toute distribution de charges de charge totale nulle et possédant un moment dipolaire non nul de norme constante.

Un exemple important de dipôle permanent est la molécule d'eau. Celle-ci est globalement neutre mais porte un excès de charge négative $-2q$ sur l'atome d'oxygène et un excès de charge positive q sur chacun des atomes d'hydrogène. En prenant l'atome d'oxygène comme origine et en notant $H_{(1)}$ et $H_{(2)}$ les deux atomes d'hydrogène, on obtient

$$\vec{p} = -2q \overrightarrow{OO} + q \overrightarrow{OH_{(1)}} + q \overrightarrow{OH_{(2)}} = 2q\ell \cos(\theta/2) \vec{u}, \quad (\text{ÉM-III.29})$$

où ℓ est la distance OH , $\theta = \angle(\overrightarrow{OH_{(1)}}, \overrightarrow{OH_{(2)}}) \approx 104^\circ$ et \vec{u} est un vecteur unitaire orienté de O vers le milieu de $H_{(1)}H_{(2)}$.

On peut faire le même calcul pour le dioxyde de carbone. Cette molécule est globalement neutre mais porte un excès de charge positive sur l'atome de carbone et un excès de charge négative sur chacun des atomes

2. L'**électronégativité** est la capacité qu'a un atome participant à une liaison chimique d'attirer les électrons mis en commun dans cette liaison.

d'oxygène. Contrairement à l'eau, elle est linéaire, donc $\theta = 180^\circ$ et $\vec{p} = \vec{0}$ d'après l'équation ÉM-III.29. (Elle a en revanche un moment quadrupolaire non nul.)

2. Dipôles induits

Dans un champ nul, le nuage électronique d'un atome admet une symétrie sphérique autour du noyau. Lorsque l'atome est plongé dans un champ électrique \vec{E}_{ext} , il est déformé, car chacun de ses Z électrons subit une force $-e\vec{E}_{\text{ext}}$, tandis que le noyau subit une force $Ze\vec{E}_{\text{ext}}$ de sens contraire. Le noyau et les électrons se déplacent en sens opposés jusqu'à ce qu'un équilibre s'établisse entre la force séparatrice exercée par le champ \vec{E}_{ext} et la force attractive d'interaction entre le noyau et les électrons. Le barycentre N du nuage électronique est alors décalé par rapport au barycentre P du noyau : on dit que l'atome a été **polarisé** par le champ et qu'il a acquis un **moment dipolaire induit**. En champ faible, à l'équilibre, ce moment est donné par

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{ext}}, \quad (\text{ÉM-III.30})$$

où \vec{E}_{ext} est le champ électrique, au voisinage du dipôle, dû à des sources extérieures à celui-ci, et où α est une constante positive appelée **polarisabilité**. (Ceci revient à considérer que le dipôle se comporte comme un ressort. Cf. § ÉM-III.D.4.) On appelle **dipôle électrostatique induit** toute distribution de charges possédant un moment dipolaire donné par une relation du type ÉM-III.30.

[

](Hors programme) Les molécules sont également **polarisables**. En champ faible, la relation entre \vec{p} et \vec{E}_{ext} reste linéaire, mais prend la forme plus compliquée suivante lorsque la molécule n'est pas symétrique :

$$\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \quad p_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{i,j} E_j^{\text{ext}}, \quad (\text{ÉM-III.31})$$

où $(\alpha_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2}$ est le **tenseur de polarisabilité**, $\vec{p} = p_1 \vec{u}_x + p_2 \vec{u}_y + p_3 \vec{u}_z$ et $\vec{E}_{\text{ext}} = E_1^{\text{ext}} \vec{u}_x + E_2^{\text{ext}} \vec{u}_y + E_3^{\text{ext}} \vec{u}_z$.

Nous nous restreindrons à la forme ÉM-III.30 dans ce qui suit.

3. Polarisabilité d'un milieu

Lorsqu'il est soumis à un champ extérieur, un milieu contenant n dipôles induits par unité de volume acquiert, en un point M , un moment dipolaire par unité de volume

$$\vec{P}(M) = n \alpha \vec{E}(M). \quad (\text{ÉM-III.32})$$

Noter que \vec{E} comprend non seulement le champ imposé au milieu par les sources extérieures, mais aussi le champ produit par les autres dipôles du milieu.

Un milieu contenant des dipôles permanents \vec{p} acquiert également un moment dipolaire par unité de volume lorsqu'il est soumis à un champ extérieur \vec{E} , car les dipôles tournent pour s'aligner avec le champ (voir § ÉM-III.D.3.a). Cette tendance à l'ordre est contrariée par le désordre dû à l'agitation thermique. Le degré d'ordre du milieu (c.-à-d. d'alignement des dipôles avec le champ) est caractérisé par le rapport $pE/(k_B T)$, où T est la température absolue et k_B est la constante de Boltzmann :

$$\begin{cases} \vec{P} = n p \vec{E}/E & \text{si } pE/(k_B T) \gg 1, \\ \vec{P} = 0 & \text{si } pE/(k_B T) \ll 1. \end{cases} \quad (\text{ÉM-III.33})$$

D. Actions exercées sur un dipôle

1. Résultante des forces extérieures

a. 1^{re} expression

Calculons la résultante des forces extérieures exercées sur un dipôle^{*3} électrostatique $D = \{-Q, Q\}$, où $-Q$ et Q sont en N et P ^{*4} :

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow -Q} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow Q} = -Q \vec{E}_{\text{ext}}(N) + Q \vec{E}_{\text{ext}}(P) = Q (\vec{E}_{\text{ext}}[P] - \vec{E}_{\text{ext}}[N]). \quad (\text{ÉM-III.34})$$

3. Certains auteurs utilisent le terme « dipôle passif » (resp. « dipôle actif ») lorsqu'ils s'intéressent aux actions qu'il subit (resp. exerce).

4. Plus généralement, si $\sum_i Q_i = 0$, le point N est le barycentre des charges négatives, pondéré par les valeurs des charges, P est le barycentre des charges positives, et Q est la somme des charges positives.

Si \vec{E}_{ext} est uniforme, $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = \vec{0}$. Même quand ce n'est pas le cas, la force extérieure sur un dipôle est faible, car le champ varie peu à l'échelle de celui-ci. On peut donc se contenter d'évaluer la résultante à l'aide d'un développement limité au 1^{er} ordre.

Notons C un point caractéristique du dipôle, par exemple le milieu de $[NP]$. Un développement limité au 1^{er} ordre de la composante selon x de \vec{E}_{ext} donne

$$E_x^{\text{ext}}(P) \approx E_x^{\text{ext}}(C) + \left(\frac{\partial E_x^{\text{ext}}}{\partial x} \right)_C (x_P - x_C) + \left(\frac{\partial E_x^{\text{ext}}}{\partial y} \right)_C (y_P - y_C) + \left(\frac{\partial E_x^{\text{ext}}}{\partial z} \right)_C (z_P - z_C), \quad (\text{ÉM-III.35})$$

et de même pour N au lieu de P , donc

$$\begin{aligned} (F_{\text{ext} \rightarrow D})_x &= Q \left(\frac{\partial E_x^{\text{ext}}}{\partial x} \right)_C (x_P - x_N) + Q \left(\frac{\partial E_x^{\text{ext}}}{\partial y} \right)_C (y_P - y_N) + Q \left(\frac{\partial E_x^{\text{ext}}}{\partial z} \right)_C (z_P - z_N) \\ &= \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right)_C E_x^{\text{ext}} = ([\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}] E_x^{\text{ext}})(C). \end{aligned} \quad (\text{ÉM-III.36})$$

De même pour E_y et E_z au lieu de E_x , donc

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = ([\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}] E_x^{\text{ext}})(C) \vec{u}_x + ([\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}] E_y^{\text{ext}})(C) \vec{u}_y + ([\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}] E_z^{\text{ext}})(C) \vec{u}_z, \quad (\text{ÉM-III.37})$$

soit

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = ([\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}] \vec{E}_{\text{ext}})(C). \quad (\text{ÉM-III.38})$$

Interprétation de l'expression ÉM-III.38. Pour appliquer correctement cette relation, il faut noter que $r \mapsto \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r})$ représente une fonction donnant le champ électrique (créé par les charges extérieures au dipôle) en un point M quelconque de vecteur position \vec{r} . De manière plus explicite,

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = ([\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}}] \vec{E}_{\text{ext}})(\vec{r} = \vec{R}), \quad (\text{ÉM-III.39})$$

où \vec{R} est le vecteur position de C , et le « \vec{r} » en indice du gradient indique que les dérivées partielles dans celui-ci sont calculées par rapport aux coordonnées de M .

Une autre expression est parfois implicitement utilisée pour calculer la force sur un dipôle D :

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} \stackrel{??}{=} (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{R}}) \vec{E}_{\text{ext}}^D, \quad (\text{ÉM-III.40})$$

où $\vec{R} \mapsto \vec{E}_{\text{ext}}^D(\vec{R})$ est une fonction donnant le champ à l'emplacement du dipôle, et les dérivées sont calculées par rapport à la position de D . Cette expression est fautive si la fonction \vec{E}_{ext} dépend non seulement de \vec{r} mais aussi de \vec{R} . C'est notamment le cas si le champ est produit en tout ou partie par des dipôles induits par D . ■

b. 2^e expression

L'expression ÉM-III.38 est valable même en champ variable. Dans un champ stationnaire, on peut la réécrire sous une forme souvent plus commode. En effet, pour toutes fonctions \vec{f} et \vec{g} de la position,

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{f} \cdot \vec{g}) = \vec{f} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{g} + (\vec{f} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{g} + \vec{g} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{f} + (\vec{g} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{f}. \quad (\text{ÉM-III.41})$$

En l'appliquant à $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r})$ et $\vec{g}(\vec{r}) = \vec{p}$, on obtient que

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}) = \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) \times \overrightarrow{\text{rot}}_{\vec{r}} \vec{p} + (\vec{E}_{\text{ext}}[\vec{r}] \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}}) \vec{p} + \vec{p} \times \overrightarrow{\text{rot}}_{\vec{r}} \vec{E}_{\text{ext}} + (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}}) \vec{E}_{\text{ext}}. \quad (\text{ÉM-III.42})$$

Les trois premiers termes du membre de droite sont nuls : les deux premiers car \vec{p} ne dépend pas de la position d'un point M quelconque ; le troisième car $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ en électrostatique.

On a donc

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = (\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}}[\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}])(C) \quad \text{en électrostatique.} \quad (\text{ÉM-III.43})$$

Interprétation de l'expression ÉM-III.43. Avec les notations plus explicites de l'équation ÉM-III.39,

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = (\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}}[\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}])(\vec{r} = \vec{R}). \quad (\text{ÉM-III.44})$$

L'expression ÉM-III.43 est parfois mal comprise comme signifiant que

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} \stackrel{??}{=} \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{R}}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}^D). \quad (\text{ÉM-III.45})$$

Même si le champ en un point M quelconque ne dépend pas de la position de D (voir la remarque suivant l'équation ÉM-III.40), cette relation est fautive si le dipôle est induit, car \vec{p} dépend alors de \vec{R} . ■

2. Moment total des forces extérieures

Calculons de même le moment par rapport à C des forces extérieures sur le système. On a

$$\begin{aligned}\vec{I}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(C)} &= \vec{I}_{\text{ext} \rightarrow -Q}^{(C)} + \vec{I}_{\text{ext} \rightarrow Q}^{(C)} = \vec{CN} \times \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow -Q} + \vec{CP} \times \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow Q} \\ &\approx \vec{CN} \times (-Q) \vec{E}_{\text{ext}}(C) + \vec{CP} \times Q \vec{E}_{\text{ext}}(C) = Q(\vec{NC} + \vec{NP}) \times \vec{E}(C),\end{aligned}\quad (\text{ÉM-III.46})$$

soit

$$\vec{I}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(C)} = \vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}(C). \quad (\text{ÉM-III.47})$$

Le moment par rapport à un point A quelconque vaut

$$\vec{I}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(A)} = \vec{AC} \times \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} + \vec{I}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(C)}. \quad (\text{ÉM-III.48})$$

Si \vec{E}_{ext} est uniforme, $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = \vec{0}$, donc, quel que soit A , $\vec{I}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(A)} = \vec{I}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(C)}$.

3. Cas d'un dipôle permanent

a. Équilibre et stabilité

Un dipôle permanent se comportant comme un solide rigide, il est à l'équilibre si $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = \vec{0}$ (donc si \vec{E}_{ext} est uniforme) et si $\vec{I}_{\text{ext} \rightarrow D} = \vec{0}$, c.-à-d. si \vec{p} est parallèle à \vec{E}_{ext} . Il y a donc deux orientations d'équilibre : \vec{p} orienté selon $+\vec{E}$ (vecteurs « co-parallèles ») ; \vec{p} orienté selon $-\vec{E}$ (vecteurs « anti-parallèles »). Or lorsque le dipôle est écarté de l'équilibre, le moment des forces le ramène vers $+\vec{E}$: l'équilibre n'est donc stable que lorsque \vec{p} est orienté selon $+\vec{E}$.

Si le champ est stationnaire (indépendant du temps), le dipôle a un mouvement d'oscillation libre ou plus généralement de précession autour de son orientation stable ; en présence de dissipation, ce mouvement s'amortit et le dipôle s'aligne selon $+\vec{E}$ au bout de quelques τ , où τ est le temps de relaxation. Si le champ est rapidement variable, le dipôle subit une oscillation forcée et peine à suivre l'orientation du champ, ce qui chauffe le milieu environnant. C'est le principe du four à micro-ondes, dans lequel les dipôles sont les molécules d'eau contenues dans les aliments.

b. Énergie potentielle

Distinguons le dipôle D et les sources « extérieures » avec lesquelles il interagit. L'énergie potentielle de l'ensemble est

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(D \cup \text{ext}) = \mathcal{E}_p^{\text{int}}(D) + \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\text{ext}) + \mathcal{E}_p(D \leftrightarrow \text{ext}). \quad (\text{ÉM-III.49})$$

Si $\partial V / \partial t = 0$, l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle D et l'extérieur vaut

$$\mathcal{E}_p(D \leftrightarrow \text{ext}) = \mathcal{E}_p(+Q \leftrightarrow \text{ext}) + \mathcal{E}_p(-Q \leftrightarrow \text{ext}) = (+Q) V_{\text{ext}}(P) + (-Q) V_{\text{ext}}(N), \quad (\text{ÉM-III.50})$$

où V_{ext} est le potentiel produit par les sources extérieures. Comme $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$,

$$V_{\text{ext}}(P) \approx V_{\text{ext}}(C) + (-\vec{E}_{\text{ext}}(C) \cdot \vec{CP}) \quad (\text{ÉM-III.51})$$

au 1^{er} ordre, et de même pour $V_{\text{ext}}(N)$, donc

$$\mathcal{E}_p(D \leftrightarrow \text{ext}) = \mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D) = -\vec{E}_{\text{ext}}(C) \cdot (Q \vec{CP} - Q \vec{CN}) = -\vec{E}_{\text{ext}}(C) \cdot Q \vec{NP}, \quad (\text{ÉM-III.52})$$

soit

$$\mathcal{E}_p(D \leftrightarrow \text{ext}) = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}(C) \quad (\text{ÉM-III.53})$$

dans un champ extérieur stationnaire.

Remarquer que $\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D)$ est extrémale quand \vec{p} et \vec{E} sont alignés. On retrouve donc les deux orientations d'équilibre déjà obtenues à partir du moment. Le minimum de \mathcal{E}_p étant atteint quand \vec{p} est selon $+\vec{E}$, il s'agit bien de l'orientation stable.

Pour un dipôle permanent, $PN = c^{\text{te}}$. Or le travail des forces intérieures à un solide rigide est nul, donc $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(D) = \mathcal{E}_p(D \leftrightarrow D) = c^{\text{te}}$ et on peut supprimer ce terme puisque l'énergie potentielle est de toute façon définie à une constante près.

Si les sources extérieures sont immobiles les unes par rapport aux autres, $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\text{ext}) = \mathcal{E}_p(\text{ext} \leftrightarrow \text{ext}) = c^{\text{te}}$, terme qu'on peut omettre car constant.

c. Excursion en mécanique du solide (hors programme)

La position de chacun des points d'un solide est déterminée si l'on connaît la position d'un de ces points, par exemple C , et l'orientation du solide. Cette dernière est caractérisée par trois angles, les angles d'Euler ϑ , φ et ψ . Un dipôle permanent se comportant comme un solide, son énergie potentielle $\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D) = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}(C)$ dépend des positions des sources extérieures et de C via $\vec{E}_{\text{ext}}(C)$, et de l'orientation du dipôle par l'intermédiaire de \vec{p} . Pour cette dernière, deux angles suffisent : l'angle ϑ entre \vec{p} et \vec{u}_z , et l'angle φ entre \vec{u}_x et la projection de \vec{p} sur le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_y) . (L'angle ψ correspondrait à la rotation de la molécule autour de l'axe (C, \vec{p}) .)

On a donc

$$d\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D) = \underbrace{d_{\text{ext}}\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D)}_{-dW(\vec{F}_{D \rightarrow \text{ext}})} + \underbrace{d_{\vec{R}}\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D) + d_{(\vartheta, \varphi)}\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D)}_{-dW(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D})}, \quad (\text{ÉM-III.54})$$

où l'on a noté d_{ext} (resp. $d_{\vec{R}}$, $d_{(\vartheta, \varphi)}$) une différenciation par rapport aux positions des sources extérieures^{*5} (resp. à la position de C , à l'orientation du dipôle), et

$$d_{\text{ext}}\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D) = -\vec{p} \cdot d_{\text{ext}}\vec{E}(C), \quad (\text{ÉM-III.55})$$

$$d_{\vec{R}}\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D) = -\vec{p} \cdot d_{\vec{R}}\vec{E}(C), \quad (\text{ÉM-III.56})$$

$$d_{(\vartheta, \varphi)}\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D) = -\vec{E}(C) \cdot d\vec{p}. \quad (\text{ÉM-III.57})$$

Vérifions, à partir des expressions obtenues pour $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D}$ et $\vec{\Gamma}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(C)}$ que l'on a bien

$$-dW(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D}) = \vec{p} \cdot d_{\vec{R}}\vec{E}(C) + \vec{E}(C) \cdot d\vec{p}. \quad (\text{ÉM-III.58})$$

Le travail des forces exercées sur un solide \mathcal{S} pendant une durée dt infinitésimale est

$$dW = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} \cdot d\vec{r}(M) + \vec{\Gamma}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}}^{(M)} \cdot d\vec{\alpha}, \quad (\text{ÉM-III.59})$$

où M est un point quelconque du solide, $d\vec{r}(M)$ le déplacement élémentaire de M par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{K} , et $d\vec{\alpha} := d\alpha \vec{u}$ ^{*6} représente une rotation du solide par rapport à \mathcal{K} d'un angle infinitésimal $d\alpha$ autour de l'axe \vec{u} . (En termes de vitesse angulaire instantanée de rotation $\vec{\omega}_{\mathcal{K}'/\mathcal{K}}$, par rapport à \mathcal{K} , du référentiel \mathcal{K}' dans lequel le dipôle est fixe, $d\vec{\alpha} = \vec{\omega}_{\mathcal{K}'/\mathcal{K}}(t) dt$.) Pour le dipôle, avec $M = C$, on a

$$dW(\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D}) = ([\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}]\vec{E}_{\text{ext}}) \cdot d\vec{R} + (\vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}) \cdot d\vec{\alpha}. \quad (\text{ÉM-III.60})$$

Vérifions d'abord que $(\vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}) \cdot d\vec{\alpha} = d\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$ Pour tous référentiels \mathcal{K} et \mathcal{K}' et toute fonction vectorielle \vec{f} ,

$$\left(\frac{d\vec{f}}{dt} \right)_{/\mathcal{K}} = \left(\frac{d\vec{f}}{dt} \right)_{/\mathcal{K}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{K}'/\mathcal{K}} \times \vec{f}, \quad (\text{ÉM-III.61})$$

donc

$$(d\vec{f})_{/\mathcal{K}} = (d\vec{f})_{/\mathcal{K}'} + d\vec{\alpha} \times \vec{f}. \quad (\text{ÉM-III.62})$$

Le moment dipolaire est permanent, c.-à-d. fixe dans le référentiel \mathcal{K}' du dipôle, donc $(d\vec{p})_{/\mathcal{K}'} = \vec{0}$. En omettant l'indice « $/\mathcal{K}$ » pour le référentiel galiléen, on obtient

$$d\vec{p} = d\vec{\alpha} \times \vec{p}, \quad (\text{ÉM-III.63})$$

soit, en utilisant l'invariance du produit mixte par permutation circulaire,

$$(\vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}) \cdot d\vec{\alpha} = (d\vec{\alpha} \times \vec{p}) \cdot \vec{E}_{\text{ext}} = d\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}. \quad (\text{ÉM-III.64})$$

Montrons maintenant que $([\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}]\vec{E}_{\text{ext}}) \cdot d\vec{R} = \vec{p} \cdot d\vec{E}_{\text{ext}}$. Pour un dipôle rigide, en électrostatique,

$$([\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}]\vec{E}_{\text{ext}}) \cdot d\vec{R} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}) \cdot d\vec{R} = d_{\vec{R}}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}). \quad (\text{ÉM-III.65})$$

Puisque \vec{p} ne dépend pas de \vec{R} ,

$$d_{\vec{R}}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}) = \vec{p} \cdot d\vec{E}_{\text{ext}}(C). \quad (\text{ÉM-III.66})$$

On obtient finalement

$$dW = \vec{p} \cdot d\vec{E}_{\text{ext}}(C) + \vec{E}_{\text{ext}}(C) \cdot d\vec{p} = d(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}) = -d\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D) \quad (\text{ÉM-III.67})$$

avec $\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D) = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$.

5. On suppose que celles-ci sont indépendantes de celle de C . Plus rigoureusement, il faudrait introduire les notions de déplacement et de travail virtuels.

6. Attention, $d\vec{\alpha}$ n'est pas une variation infinitésimale d'un vecteur $\vec{\alpha}$, mais une quantité vectorielle infinitésimale.

Expression de $d\vec{\alpha}$

\vec{p} ne dépend que de l'orientation du dipôle. On peut écrire $\vec{p} = p\vec{k}(\vartheta, \varphi)$, où \vec{k} est un vecteur unitaire de colatitude ϑ et de longitude φ . On a

$$d\vec{p} = p d\vec{k} = p \left(\frac{\partial \vec{k}}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi} d\varphi \right) = p (\vec{u}_\vartheta d\vartheta + \vec{u}_\varphi \sin \vartheta d\varphi). \quad (\text{ÉM-III.68})$$

La base $(\vec{k}, \vec{u}_\vartheta, \vec{u}_\varphi)$ est orthonormée directe, donc

$$d\vec{p} = d\vec{\alpha} \times \vec{p} \quad (\text{ÉM-III.69})$$

avec

$$d\vec{\alpha} = -\sin \vartheta d\varphi \vec{u}_\vartheta + d\vartheta \vec{u}_\varphi. \quad (\text{ÉM-III.70})$$

Calcul de $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D}$ et $\vec{\Gamma}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(C)}$ à partir de $\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D)$

L'énergie potentielle dépend des coordonnées (x, y, z) de C par l'intermédiaire de $\vec{E}_{\text{ext}}(C)$ et de la direction (ϑ, φ) de \vec{p} . On a

$$d\mathcal{E}_p = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} dz}_{\vec{p} \cdot d\vec{E}_{\text{ext}} = -\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} \cdot d\vec{R}} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \varphi} d\varphi}_{\vec{E}_{\text{ext}} \cdot d\vec{p} = -\vec{\Gamma}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(C)} \cdot d\vec{\alpha}}. \quad (\text{ÉM-III.71})$$

L'identification des termes de la première accolade donne $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = -\overrightarrow{\text{grad}}_R \mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D)$ (ce qui n'était pas complètement évident car D n'est pas un point matériel). Celle des termes de la deuxième accolade donne l'expression du moment en fonction de l'énergie potentielle :

$$\vec{\Gamma}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(C)} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D)}{\partial \varphi} \vec{u}_\vartheta - \frac{\partial \mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D)}{\partial \vartheta} \vec{u}_\varphi. \quad (\text{ÉM-III.72})$$

4. Cas d'un dipôle induit

Considérons un dipôle induit tel que $\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{ext}}(C)$. On a

$$-d\mathcal{E}_p^{\text{int}}(D) = \vec{F}_{-Q \rightarrow +Q} \cdot d\vec{OP} + \vec{F}_{+Q \rightarrow -Q} \cdot d\vec{ON} = \vec{F}_{-Q \rightarrow +Q} \cdot d\vec{OP} - \vec{F}_{-Q \rightarrow +Q} \cdot d\vec{ON} = \vec{F}_{-Q \rightarrow +Q} \cdot d\vec{NP}. \quad (\text{ÉM-III.73})$$

Déterminons l'expression de $\vec{F}_{-Q \rightarrow +Q}$ en considérant un dipôle à l'équilibre. La charge $+Q$ est soumise à la force exercée par le champ extérieur et à celle due à $-Q$. Si elle est à l'équilibre, $\vec{F}_{-Q \rightarrow +Q} + Q \vec{E}_{\text{ext}}(P) = \vec{0}$. Or $\vec{E}_{\text{ext}}(P) \approx \vec{E}_{\text{ext}}(C)$, donc

$$\vec{F}_{-Q \rightarrow +Q} = -Q \vec{E}_{\text{ext}}(C) = -\frac{Q^2}{\alpha} \vec{NP}. \quad (\text{ÉM-III.74})$$

Le dipôle se comporte donc comme un ressort de raideur $k = Q^2/\alpha$ et de longueur à vide nulle, d'où

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(D) = \frac{1}{2} k (NP)^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\alpha} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}(C)}{2}. \quad (\text{ÉM-III.75})$$

Le calcul effectué au § ÉM-III.D.3.b pour $\mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D)$ étant indépendant de la nature du dipôle,

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}}(D) + \mathcal{E}_p^{\text{ext}}(D) = -\frac{\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}(C)}{2}. \quad (\text{ÉM-III.76})$$