

Examen du 7 janvier 2011

Première session

Durée : deux heures

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1

1. Soit $r(x)$ la quantité définie par

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + r(x) \quad (1)$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de $r(x)$.

2. Donner l'expression (sans symboles d'intégration) du terme S_n défini par

$$\int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = S_n + \int_{x=0}^1 r(x) dx.$$

3. Prouver les inégalités

$$0 \leq \int_{x=0}^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+1}.$$

4. Montrer que la série

$$S_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

converge et calculer sa limite.

Exercice 2

On considère un disque D , horizontal et parfaitement lisse, tournant à une vitesse angulaire ω constante autour d'un point O fixe dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. À l'instant $t = 0$, une personne immobile sur le disque dépose un palet P sur D (c.-à-d. que la vitesse initiale de P par rapport à D est nulle). Le palet glisse sans frottement sur D et décrit donc un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre.

L'objet du problème est de déterminer le mouvement de P dans le référentiel du disque. La position du palet à un instant t quelconque est représentée par ses coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ fixe par rapport à D .

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique appliquée au palet dans le référentiel non galiléen du disque, on peut montrer que le mouvement de P est déterminé par les équations

$$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

et

$$\ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y = 0. \quad (3)$$

1. On pose $z(t) = x(t) + i y(t)$.

Écrire une équation différentielle (notée (4)) en $z(t)$.

- Montrer que la solution générale de (4) est de la forme $z(t) = (\lambda + \mu t) e^{-i\omega t}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
- Le palet est déposé à l'instant initial au point de coordonnées $(x(0) = \xi, y(0) = 0)$.
Calculer $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice 3

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction impaire définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, \pi/2]$ et ayant la propriété $f(x + \pi) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Dessiner la restriction de f à l'intervalle $x \in [-\pi, \pi]$.
Donner une expression pour $f(x)$ valable pour $x \in [\pi/2, \pi]$.
Déterminer la plus petite période de f .
- Calculer les coefficients de Fourier a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que les coefficients de Fourier b_n peuvent s'écrire

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot (1 - [-1]^n) \int_{x=0}^{\pi/2} x \sin(n x) dx.$$

- Donner l'expression explicite des coefficients b_n .
- Écrire le développement en série de Fourier \tilde{f} de f .
Sur quel domaine \tilde{f} converge-t-elle? Et sur quel domaine converge-t-elle vers f ? (Justifier les réponses.)
- Calculer

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

- Calculer

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Exercice 4

- Rappeler le développement en série entière de $\cos x$ et $\operatorname{ch} x$, ainsi que leur rayon de convergence.
- Trouver les solutions développables en série entière (c.-à-d. de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$) satisfaisant

$$4x y'' + 2y' - y = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 1$$

(on définira les coefficients a_n par récurrence).

Préciser leur domaine de validité.

- Vérifier que $a_n = 1/(2n)!$ si $n \geq 1$.

En déduire l'expression des solutions trouvées à la question précédente en termes de fonctions simples.