Examen du 13 janvier 2010

Première session

Durée : deux heures

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1. Intégrales impropres (≈ 9 points)

Soit la fonction

$$f : u \mapsto f(u) = \sqrt{\frac{\cos u}{\tan u}},$$

définie pour $0 < u < \pi/2$.

1. Quelle est la limite de f quand u tend vers $\pi/2$?
2. Donner un équivalent asymptotique de f quand u tend vers 0.
3. On considère l'intégrale impropre $\int_{u=0}^{\pi/2} f(u)\,\mathrm{d}u$. Est-elle convergente (justifiez) ?
   Si oui, calculer sa valeur (on pourra soit faire un changement de variable, soit réécrire f sous la forme d'une dérivée reconnaissable).

Exercice 2. Équation différentielle linéaire (≈ 14 points)

On veut résoudre l'équation

$$x^2\, y'' - 2\, y = 3\, x^2. \tag{1}$$

1. Quelle est la nature de cette équation ? (Soyez précis.)
2. On cherche des solutions de la forme $y_\alpha(x) = x^\alpha$ de l'équation homogène. Déterminer les valeurs possibles de α et en déduire la solution générale de l'équation homogène.
3. Trouver une solution particulière de (1) de la forme $y_\beta(x) = \beta(x)\, x^2$, où $\beta(x)$ est une fonction de x ; on aura intérêt à développer au préalable $\left(x^4\, \beta'(x)\right)'$.
4. En déduire la solution générale de (1).

Exercice 3. Équation différentielle à variables séparées (≈ 14 points)

On se place dans un référentiel, supposé galiléen, où le Soleil (S, de masse M) est fixe. À l'instant $t = 0$, un corps C, de masse $m \ll M$, est lâché sans vitesse à une distance r_0 de S ; il décrit ensuite un mouvement radial vers S.

Notons $r(t)$ la distance entre C et S à un instant t quelconque, $v(t)$ la vitesse de C, et G la constante de gravitation. Le système $\{C, S\}$ peut être considéré comme isolé : son énergie,

$$E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 - \frac{G\, M\, m}{r},$$

reste donc constante au cours du temps.

1. Écrire, à l'aide de la conservation de l'énergie, l'équation différentielle en $r(t)$ décrivant le mouvement de C.
2. *a*. Préciser, sans calculs, le signe de $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$.
   b. Réécrire l'équation différentielle obtenue à la question 1 sous forme d'une équation à variables séparées.

3. On note τ le temps mis par C pour atteindre S. Écrire τ sous forme d'une intégrale d'une fonction de r.
4. Calculer τ à l'aide du changement de variable $r \mapsto u$, où $r = r_0 \cos^2 u$.
5. **Question facultative.**
   La période de révolution d'un corps décrivant une ellipse de demi-grand axe a et de foyer S est $T = 2\,\pi\,\sqrt{a^3/(G\,M)}$. En déduire à nouveau l'expression de τ.

Exercice 4. Séries de Fourier (≈ 23 points)

A. Questions préliminaires

1. On considère l'intégrale

$$I_p(n) = \int_{-\pi}^{\pi} x^p \cos(n\,x)\,\mathrm{d}x,$$

   où $n > 0$ et $p \geqslant 0$ sont entiers et p est pair.
   Exprimer $I_p(n)$ en fonction de $I_{p-2}(n)$.
   Calculer $I_0(n)$ et en déduire $I_2(n)$ et $I_4(n)$.
2. Rappeler l'expression, en termes de cosinus et de sinus, du développement en série de Fourier $\widetilde{f}$ d'une fonction f de période $2\,\pi$, ainsi que celle des coefficients a_n et b_n correspondants.

B. Calcul de séries

Soit la fonction f définie pour $x \in\,]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2 + C\,x^4$, où C est une constante réelle, et étendue par $2\,\pi$-périodicité en dehors de cet intervalle.

3. Calculer les coefficients a_n et b_n du développement en série de Fourier de f.
4. On souhaite que les coefficients de Fourier décroissent comme $O(1/n^4)$ pour $n \gg 1$. Quelle valeur faut-il alors choisir pour C ?

■

On utilise désormais la valeur de C trouvée à la question 4.
On a donc

$$a_0 = \frac{7\,\pi^2}{15} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{24 \times (-1)^n}{\pi^2\,n^4} \quad \text{pour } n > 0.$$

5. Dessiner schématiquement le graphe de $f(x)$ pour $x \in\,]-3\,\pi, 3\,\pi[$.
6. Écrire explicitement le développement en série de Fourier $\widetilde{f}$ de f.
   Le développement converge-t-il vers f en tout point (justifiez) ?
7. **Question facultative.**
   Donner la valeur de l'entier r pour que l'affirmation suivante soit vraie : « La dérivée d'ordre $r-1$, $f^{(r-1)}$, est une fonction continue sur l'axe réel, tandis que $f^{(r)}$ présente des discontinuités ».
8. Calculer la somme

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

9. **Question facultative.**
   Calculer la somme

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}.$$

10. En utilisant l'égalité de Parseval-Bessel, que l'on rappellera, calculer la somme

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}.$$