Université Pierre et Marie Curie. **Unité d'enseignement LP206.**
Année universitaire 2011/2012 **Mathématiques pour physiciens I**

Examen de première session

Durée : 2 h.

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1

Donner la solution générale de l'équation différentielle suivante

$$y'' + y' + 2y = 6x^2 + 1\,. \tag{1}$$

Exercice 2

1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^n \end{array} \right.$.
   a. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.
   b. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, h]$ pour tout $h \in [0, 1[$.
   c. Soit $f(x)$ la limite de $(f_n(x))$ pour tout $x \in [0, 1]$, lorsque $n \to \infty$. La fonction $f : x \mapsto f(x)$ est-elle continue sur $[0, 1]$? Conclure quant à la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, 1]$.
2. Soit (g_n) la suite de fonctions définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g_n : \left\{ \begin{array}{ll} [0, 1] & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto (1-x)x^n \end{array} \right. .$$

   On veut montrer que g_n converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
   a. Soit $\epsilon > 0$. Majorer $|g_n(x)|$ dans l'intervalle $[0, 1-\epsilon]$ en utilisant les résultats précédents.
   b. Majorer également $|g_n(x)|$ dans $]1-\epsilon, 1]$ et en déduire le résultat demandé.
   c. Soit la suite de fonctions dérivées (g_n') sur $[0, 1]$. Donner la limite de $g_n'(x)$ lorsque $n \to \infty$ pour $x \in]0, 1[$, à l'aide du critère de d'Alembert par exemple. En déduire la limite ponctuelle de g_n' sur $[0, 1]$ (c.-à-d. pour la convergence simple), lorsque $n \to \infty$.
   d. Peut-on avoir $(\lim_{n\to\infty} g_n)' = \lim_{n\to\infty}(g_n')$ sur $[0, 1]$?
   e. Le vérifier explicitement en utilisant les résultats précédents.

Exercice 3

1. Sans calculer sa valeur, discuter l'existence de l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{2}$$

2. Montrer que

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2-\sin^2 t}\,. \tag{3}$$

   En déduire la valeur de I. On pourra utiliser le changement de variable $t = \arctan u$, avec $u \in [0, +\infty[$.

Exercice 4

On considère la diffusion de molécules dans un tube de longueur L. L'évolution de la densité de molécules en fonction de la position x et du temps t est donnée, pour tout $t > 0$, par l'équation de la diffusion,

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2}\,, \tag{4}$$

où D (> 0) est le coefficient de diffusion.

On va chercher dans ce problème des solutions correspondant à des fonctions ρ de période L en la variable x :

$$\forall x,\ \forall t \geqslant 0\,, \quad \rho(x+L,t) = \rho(x,t)\,.$$

On suppose que, pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $\rho_t\colon x \mapsto \rho(x,t)$ est de classe C^2 et C^3 par morceaux sur $\mathbb{R}$, et que la fonction $\dot{\rho}_t\colon x \mapsto \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}$ est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. On suppose également que ρ et ses dérivées sont suffisamment régulières par rapport à la variable t pour que le résultat de la question 4 soit justifié.

On souhaite résoudre le problème à l'aide de développements en série de Fourier par rapport à x. Soit donc $\widetilde{\rho_t}$ le développement de ρ :

$$\forall t \geqslant 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \widetilde{\rho_t}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\, e^{inkx},$$

avec $k = 2\pi/L$. *On notera que les coefficients de Fourier $\{c_n(t)\}$ sont calculés pour une valeur de $t \geqslant 0$ donnée et que ρ_t, $\dot{\rho}_t$ et $\widetilde{\rho_t}$ sont des fonctions de x seulement.*

1. Rappeler la formule permettant de calculer les $c_n(t)$ connaissant $\rho(x,t)$, pour $t \geqslant 0$ donné.
2. La fonction ρ_t coïncide-t-elle avec son développement de Fourier $\widetilde{\rho_t}$ (à $t \geqslant 0$ donné) ? Justifier.
3. Peut-on dériver deux fois par rapport à x le développement de Fourier terme à terme ? Justifier. Donner alors les coefficients de Fourier de $\partial^2\rho/\partial x^2$ en termes des $\{c_n(t)\}$.

On souhaite ensuite remplacer l'équation (4) par une équation différentielle reliant la fonction $t \mapsto c_n(t)$ à ses dérivées par rapport à t.

4. Montrer, sans justification rigoureuse, que les coefficients de Fourier de l'application $\dot{\rho}_t$ sont donnés par $\frac{\mathrm{d}c_n}{\mathrm{d}t}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}_*^+$. Cette application coïncide-t-elle avec son développement ?
5. Justifier que l'on peut identifier terme à terme les coefficients de Fourier du membre de gauche et du membre de droite de l'équation (4). Montrer alors que les fonctions $\{t \mapsto c_n(t),\ n \in \mathbb{Z}\}$ satisfont l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}c_n}{\mathrm{d}t} = -Dn^2k^2c_n$.
6. Donner la solution générale de cette équation. De combien de paramètres dépend-elle ? En déduire l'expression de $\rho(x,t)$ en fonction de ces paramètres.

On impose les conditions initiales suivantes en $t = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad \rho(x, t=0) = f(x)\,,$$

où f est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

7. Donner alors la solution $\rho(x,t)$ en termes des coefficients de Fourier exponentiels de f, notés $\{d_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Cette solution est-elle unique ?
8. On suppose désormais que f est la fonction paire, de période L, donnée par $f(x) = \alpha(L/2 - x)$ pour tout $x \in [0,\ L/2]$, avec $\alpha > 0$. Calculer les coefficients de Fourier $\{d_n\}$ associés (on n'oubliera pas de traiter d_0 à part).
9. Donner alors la solution $\rho(x,t)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall t \geqslant 0$.
10. Étudier la limite de la solution pour $t \to +\infty$ en justifiant soigneusement.