Chapitre VIII

Équations différentielles

VIII.a. Généralités sur les équations différentielles

VIII.a.1. Définitions

On appelle *équation différentielle d'ordre n* une équation reliant une fonction inconnue $y(x)$ et les n premières de ses dérivées, avec éventuellement une dépendance explicite dans la variable x, donc de la forme générale

$$F(y(x),\, y'(x),\, \ldots,\, y^{(n)};\; x) = 0. \tag{1}$$

Une *solution* de cette équation est une fonction $y(x)$ telle que (1) soit satisfaite pour tout x (dans un ensemble de définition donné). Le problème consiste à trouver *la* ou *les* solutions d'une telle équation, éventuellement complétée par des informations supplémentaires, comme on va voir.

Un cas particulier de la forme (1) est celui qui s'écrit

$$y^{(n)} = f(y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)};\; x), \tag{2}$$

c.-à-d. où $y^{(n)}$ a été explicitement exprimée en fonction de y et de ses $n-1$ premières dérivées. La forme (2), bien que moins générale, facilite souvent la discussion de l'existence des solutions et leur construction.

La variable x peut représenter le temps : l'équation régit alors la variation temporelle d'une variable dynamique y (position, température, pression, courant ou charge électrique, nombre de particules, etc.). Mais x peut aussi représenter une variable spatiale ; c'est par exemple le cas des ondes stationnaires dans une corde vibrante : si y désigne le déplacement transverse d'une corde tendue entre deux points d'abscisses $x = 0$ et $x = L$, et vibrant dans le mode de longueur d'onde λ, $y(x)$ obéit à l'équation $y'' + (2\,\pi/\lambda)^2\, y = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant L$.

VIII.a.2. Systèmes d'équations différentielles

Plutôt qu'une équation différentielle sur une fonction inconnue, on peut aussi avoir à traiter des équations différentielles couplées, formant un *système d'équations différentielles*. C'est par exemple le cas pour

$$\begin{aligned}
y_1' &= f_1(y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n;\; x),\\
y_2' &= f_2(y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n;\; x),\\
&\;\vdots\\
y_n' &= f_n(y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n;\; x),
\end{aligned} \tag{3}$$

qui est un système de n équations du premier ordre.

Il est bon d'observer que toute équation différentielle du n-ième ordre de la forme (2) peut se mettre sous la forme d'un système de n équations du premier ordre. Il suffit de définir $y_1 \coloneqq y$, $y_2 \coloneqq y'$, …, $y_n \coloneqq y^{(n-1)}$. On vérifie aisément (par récurrence par exemple) que $y_1' = y_2$, $y_2' = y_3$, …, $y_{n-1}' = y_n$, $y_n' = f(y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n;\; x)$, qui est bien un système de la forme (3).

Un exemple familier qui conduit à un système d'équations différentielles couplées est fourni par le circuit électrique L-C constitué d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C (figure VIII.1a). Rappelons brièvement l'analyse de ce système. La tension aux bornes du condensateur portant une charge Q est $V_C = Q/C$ tandis que celle aux bornes de la bobine est $V_L = L\, \mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, où $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ est l'intensité du courant dans le circuit. En écrivant que $V_C + V_L = 0$,

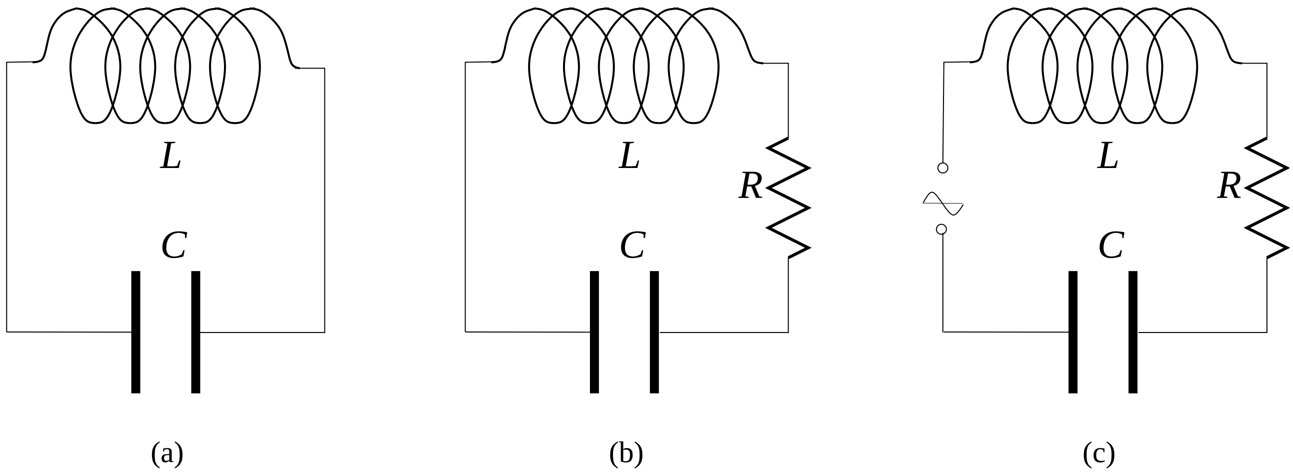

Figure VIII.1. Circuits *L-C* et *R-L-C*, isolés ou couplés à une tension extérieure.

on trouve le système différentiel

$$L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0, \tag{4}$$

$$I - \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{5}$$

En éliminant I entre ces deux équations, on obtient pour Q une équation du second ordre :

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Q}{L\,C} = 0. \tag{6}$$

Quelle équation décrit la situation de la figure VIII.1b, où la bobine a aussi une résistance interne ? Et celle de la figure VIII.1c, où le circuit est couplé à une tension extérieure V_e ?

VIII.b. Conditions initiales. Théorème de Cauchy. Conditions aux limites

VIII.b.1. Existence et unicité des solutions

Considérons un problème de mécanique élémentaire, celui du mouvement d'un point matériel soumis à la seule gravité. Sa coordonnée $z(t)$ verticale le long d'un axe orienté vers le haut satisfait l'équation

$$\ddot{z} = -g, \tag{7}$$

comme conséquence du principe fondamental de la dynamique. Cette équation différentielle se résout par deux *quadratures* (c.-à-d. deux intégrations) successives ; on a d'abord

$$\dot{z}(t) - \dot{z}(0) = -g \int_{t'=0}^{t} \mathrm{d}t' \Longrightarrow \dot{z}(t) = -g\;t + v_0$$

où $v_0 := \dot{z}(0)$ est la vitesse à l'instant $t = 0$. Puis une nouvelle quadrature fournit

$$z(t) - z(0) = \int_{t'=0}^{t} (-g\;t' + v_0)\;\mathrm{d}t' \Longrightarrow z(t) = -\frac{1}{2}\;g\;t^2 + v_0\;t + z_0, \tag{8}$$

où $z_0 := z(0)$ est la position à l'instant $t = 0$. On trouve donc que la solution est complètement déterminée par la donnée de deux constantes, les *conditions initiales*.

Le principe selon lequel la solution d'une équation différentielle *existe et est unique* si on se donne des conditions initiales appropriées est en fait très général.

On admettra le « théorème » ※[1] suivant.

1. Entre guillemets en raison de la formulation excessivement vague que nous en donnons. Des notions de topologie et sur les fonctions de plusieurs variables seraient nécessaires pour en donner un énoncé rigoureux.

Théorème 99 (« théorème » de Cauchy)
Si les valeurs de y et de ses $n-1$ premières dérivées en un point x_0 sont données (notons-les $y(x_0) = a_0$, $y'(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$) et si la fonction $f(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1};\ x)$ est « suffisamment régulière » par rapport aux variables $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x$ dans un « intervalle » ouvert contenant le point $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1};\ x_0)$, alors l'équation

$$y^{(n)} = f(y, y', \ldots, y^{(n-1)};\ x), \tag{9}$$

admet une et une seule solution. ⌟

Les valeurs des $y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$ sont appelées *conditions de Cauchy* (ou conditions initiales). Nous ne préciserons pas ici les conditions exactes de ce théorème. Dans tous les exemples rencontrés dans ce cours, ces conditions seront supposées satisfaites, et, moyennant la donnée des conditions initiales, la solution existera et sera unique.

Cette propriété n'a rien d'évident et on peut construire des exemples d'équations dont la solution n'est pas unique, à conditions initiales fixées. Considérons ainsi l'équation

$$y' = 3\ y^{2/3},$$

avec la condition initiale $y(0) = 0$. On vérifie immédiatement qu'elle admet *deux* solutions, $y(x) = 0$ et $y(x) = x^3$. C'est la singularité de la fonction $y^{2/3}$ (sa non-dérivabilité par rapport à y en $y = 0$) qui est responsable de cette non-unicité.

Noter que ce théorème d'existence et d'unicité ne nous donne pas d'information sur la solution, ni sur la méthode pour la déterminer. De fait, la résolution effective d'une équation différentielle est en général un problème difficile, qui n'admet que rarement une solution explicite en termes de fonctions simples. Il faut bien souvent recourir à des approximations numériques ou analytiques (développement en approximations successives). Dans la suite, nous allons nous borner à considérer des cas suffisamment simples pour être complètement solubles et en même temps suffisamment intéressants pour la physique.

VIII.B.2. Conditions initiales et conditions aux bords

On a supposé données une ou des conditions initiales sur la fonction cherchée $y(x)$ pour une valeur x_0 donnée. En physique, c'est typiquement le type de données dont on dispose dans un problème de dynamique : par exemple, la vitesse et le position du mobile (deux vecteurs à 3 dimensions s'il s'agit d'un point matériel dans l'espace ordinaire) sont connues à l'« instant initial » ; ou encore, la charge portée par le condensateur et l'intensité circulant dans un circuit *R-L-C* sont connues au temps 0, etc. Mais il existe d'autres types de problèmes où la fonction cherchée est contrainte pour deux valeurs différentes de la variable x. *Le théorème de Cauchy n'est alors pas applicable.*

Exemple 70
Reprenons l'étude du point matériel soumis à la gravité et obéissant à (7). Quelle est sa trajectoire passant par l'origine $z_0 = 0$ au temps $t_0 = 0$ et par la position z_1 au temps t_1 ? Réponse : la loi du mouvement (8) dépend des deux constantes v_0 et z_0 qui sont déterminées par les deux conditions ci-dessus : $z_0 = 0$ et v_0 solution de $-\frac{1}{2}\ g\ t_1^2 + v_0\ t_1 = z_1$. La résolution de cette dernière équation nous indique avec quelle vitesse initiale v_0 le corps doit être mis en mouvement à l'instant $t = 0$ pour atteindre le point z_1 à l'instant requis. La connaissance de z_0 et v_0 détermine complètement la solution. La donnée des *conditions aux limites* $z(0) = z_0$, $z(t_1) = z_1$ a donc suffi ici à déterminer de façon unique la solution de l'équation différentielle. ⌟

Exemple 71
La donnée de conditions aux limites ne conduit pas toujours à un problème bien posé, admettant une solution et une seule. Examinons par exemple le cas de la corde vibrante obéissant à $y'' + k^2\ y = 0$. La corde étant supposée attachée à ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$, son déplacement transverse s'annule en ces deux points. On cherche donc des solutions de l'équation différentielle satisfaisant $y(0) = y(L) = 0$. Puisque la solution la plus générale de l'équation s'écrit

$$y(x) = A\ \cos(k\ x) + B\ \sin(k\ x),$$

la condition $y(0) = 0$ impose que $A = 0$, d'où l'on déduit, grâce à la condition $y(L) = 0$, que $B\ \sin(k\ L) = 0$. Si on écarte la solution triviale $B = 0$ où la corde reste au repos, la deuxième condition impose donc que $k\ L = n\ \pi$, ce qui contraint un coefficient de l'équation différentielle, mais ne détermine pas le coefficient arbitraire restant, B. Physiquement, le « mode » dans lequel la corde peut vibrer (la longueur d'onde de ses oscillations) n'est pas arbitraire, mais est (partiellement) contraint par la géométrie (la longueur de la corde). Dans ce cas, la donnée de deux conditions aux bords ne suffit pas à déterminer uniquement la solution : une condition supplémentaire, par exemple, l'amplitude maximale de la corde est nécessaire pour fixer le coefficient B. ⌟

Exemple 72

Dans une autre classe de problèmes physiques, les conditions aux limites sont remplacées par des *conditions asymptotiques*. C'est le cas de l'équation

$$y'' = k^2\, y \qquad (k > 0),$$

dont la solution la plus générale est

$$y(x) = A\ \mathrm{e}^{k\,x} + B\ \mathrm{e}^{-k\,x}.$$

Supposons qu'on s'intéresse au comportement à grand $x > 0$ de $y(x)$ et que telle ou telle contrainte physique (ou tout simplement le bon sens !) impose à y de rester bornée (c.-à-d. de ne pas tendre vers l'infini) quand x croît. (Nous rencontrerons cette situation dans l'étude de la propagation de la chaleur, cf. TD 5.) Cette condition asymptotique implique que $A = 0$; la solution est donc de la forme $y(x) = B\ \mathrm{e}^{-k\,x}$, ce qu'on peut encore écrire $y(x) = y_0\ \mathrm{e}^{-k\,x}$, où y_0 est la valeur de y en $x = 0$. Dans ce cas, la condition asymptotique plus la condition initiale ou au bord $y(0) = y_0$ déterminent complètement et uniquement la solution. ⌟

VIII.c. Équations différentielles linéaires

VIII.c.1. Propriétés générales

Nous allons nous intéresser tout spécialement à des équations différentielles du n-ième ordre du type

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(x)\ y^{(k)}(x) = \phi(x), \tag{10}$$

ce que nous réécrivons encore sous la forme

$$\mathcal{L}(y[x]) := \left(\sum_{k=0}^{n} C_k[x]\ \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\right) y(x) = \phi(x), \tag{11}$$

où $\phi(x)$ est une fonction donnée, les $C_k(x)$ sont des fonctions données de x, et on cherche à déterminer la fonction inconnue $y(x)$, sujette à n conditions initiales, en $x = 0$ par exemple. La fonction ϕ représente la « source » (une action extérieure) qui « excite » le système représenté par y, et on cherche à calculer la « réponse » y à ϕ.

Le membre de gauche de l'équation ci-dessus a la propriété fondamentale d'être *linéaire* en y : y et ses dérivées n'y apparaissent qu'à la puissance 1. C'est ce que nous avons souligné par la notation $\mathcal{L}$ pour l'*opérateur différentiel* apparaissant au membre de gauche. La propriété de linéarité exprime que pour toute paire de fonctions $(y_1[x],\ y_2[x])$ et pour tous coefficients constants λ_1 et λ_2, éventuellement complexes,

$$\forall\ x, \quad \mathcal{L}(\lambda_1\ y_1[x] + \lambda_2\ y_2[x]) = \lambda_1\ \mathcal{L}(y_1[x]) + \lambda_2\ \mathcal{L}(y_2[x]). \tag{12}$$

Cela a pour conséquence que si les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont solutions de (11) respectivement pour deux « sources » $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$, c.-à-d. $\mathcal{L}(y_1) = \phi_1$, $\mathcal{L}(y_2) = \phi_2$, alors, quelles que soient les *constantes* λ_1 et λ_2, $\lambda_1\ y_1(x) + \lambda_2\ y_2(x)$ est solution de l'équation pour la source $\lambda_1\ \phi_1 + \lambda_2\ \phi_2$, autrement dit $\mathcal{L}(\lambda_1\ y_1[x] + \lambda_2\ y_2[x]) = \lambda_1\ \phi_1(x) + \lambda_2\ \phi_2(x)$. Bien que ce résultat soit aisément démontrable, on l'appelle *principe de superposition*. Nous utiliserons ce « principe » dans la résolution d'équations par décomposition en modes de Fourier (cf. §VIII.c.5.*b*.i).

Avant d'aller plus loin, il convient de souligner que les *systèmes linéaires*, c.-à-d. régis par des équations différentielles linéaires jouent un rôle fondamental en physique et dans toutes les sciences exactes. Nous leur consacrerons le chapitre IX de ce cours.

VIII.c.2. Équations linéaires homogènes, équations linéaires inhomogènes

On appelle équation différentielle linéaire *homogène* une équation du type (11) dans laquelle $\phi(x) = 0$:

$$\mathcal{L}(y_\mathrm{h}[x]) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_k[x]\ \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\right) y_\mathrm{h}(x) = 0. \tag{13}$$

Inversement, on appelle équation différentielle linéaire *inhomogène*, ou *avec second membre*, une équation du type (11) dans laquelle $\phi(x) \neq 0$.

VIII.c.2.*a*. Indépendance linéaire de *n* fonctions

La propriété de linéarité implique qu'étant données deux solutions y_1 et y_2 de l'équation homogène, une combinaison linéaire $y_{\mathrm{h}}(x) = \lambda_1\, y_1(x) + \lambda_2\, y_2(x)$ à coefficients constants est aussi solution. Bien sûr, choisir y_2 proportionnelle à y_1 est possible mais n'apporte aucune information nouvelle. On dira que les deux fonctions y_1 et y_2 sont *linéairement dépendantes* si on peut trouver deux constantes λ_1 et λ_2 non toutes deux nulles telles que *pour tout* x, on ait $\lambda_1\, y_1(x) + \lambda_2\, y_2(x) = 0$. Si cette condition est réalisée, avec par exemple $\lambda_1 \neq 0$, on a

$$\forall\ x \quad \left(\lambda_1\, y_1[x] + \lambda_2\, y_2[x] = 0 \Longrightarrow y_1[x] = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\, y_2[x]\right) \tag{14}$$

et y_1 et y_2 sont proportionnelles. Inversement, on dit que deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont *linéairement indépendantes* si la condition $\lambda_1\, y_1(x) + \lambda_2\, y_2(x) = 0$ est impossible à réaliser avec deux constantes λ_1 et λ_2 non nulles.

La définition suivante généralise ces notions :

Définition 79 (indépendance linéaire)
n fonctions $y_1, \ldots, y_n$ sont *linéairement indépendantes* (ou encore, « constituent une *famille libre* ») si on ne peut pas trouver n constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non toutes nulles telles que $\forall\ x,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i(x) = 0$ ou, de manière équivalente, si

$$(\forall\ x, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i(x) = 0) \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0. \tag{15}$$

Dans le cas contraire, les fonctions sont *linéairement dépendantes* (ou encore, « constituent une *famille liée* »). ⌟

(Si les fonctions sont linéairement dépendantes, on peut toujours exprimer l'une de ces fonctions comme combinaison linéaire des $n-1$ autres.) Par exemple, on démontre que les fonctions $x \mapsto \cos(\omega_i\, x)$ et $x \mapsto \sin(\omega_i\, x)$, pour tout ensemble de n nombres positifs ω_i distincts, sont linéairement indépendantes ; de même pour les fonctions $x \mapsto \exp(k_i\, x)$, pour tout ensemble de n nombres k_i réels ou complexes distincts, sont linéairement indépendantes.

Exercice
En appliquant le critère ci-dessus, démontrer que les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{k\,x}$ et $x \mapsto x\ \mathrm{e}^{k\,x}$ sont linéairement indépendantes.

Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,x}$, $x \mapsto \cos(k\ x)$ et $x \mapsto \sin(k\ x)$ sont-elles indépendantes ? (Ici, on admet dans (15) des coefficients λ_i complexes.) ⌟

Exercice
Montrer que deux fonctions dérivables y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si leur *wronskien* $W(y_1, y_2) := y_1'\, y_2 - y_2'\, y_1$ n'est pas identiquement nul (c.-à-d. nul pour tout x).

Plus généralement, on définit le wronskien de n fonctions y_i ($i \in [\![1, n]\!]$) supposées $(n-1)$ fois dérivables comme le *déterminant* (cf. cours d'algèbre)

$$W(x) = \operatorname{dét}\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \ldots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Si les fonctions y_i sont linéairement dépendantes, il existe n constantes non toutes nulles λ_i telles que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i(x) = 0$, et cette relation est aussi vérifiée par les dérivées successives des y_i, donc $\forall\ p \in [\![0, n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i^{(p)}(x) = 0$. Les n colonnes du déterminant sont donc linéairement dépendantes et le déterminant $W(x)$ est nul pour tout x. Inversement, il suffit que le wronskien $W(x)$ soit non nul en un point x_0 pour qu'on puisse conclure que les fonctions y_i sont linéairement *indépendantes*. L'étude du wronskien offre donc un moyen pratique d'étudier l'indépendance linéaire de n fonctions. ⌟

VIII.c.2.*b*. Théorèmes

Ces notions étant acquises, on peut démontrer deux théorèmes fondamentaux sur les équations différentielles linéaires.

Théorème 100 (équations homogènes)
Si les fonctions C_k ($k \in [\![0, n]\!]$) sont continues dans un même intervalle I, avec C_n ne s'annulant pas dans cet intervalle, il existe n solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle homogène (13) dans

I, y_i ($i \in [\![1, n]\!]$), et la solution la plus générale est une combinaison linéaire à coefficients constants arbitraires de ces n fonctions : $y_{\text{h}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; y_i(x)$. En outre, il existe une unique solution de (13) satisfaisant à des conditions initiales $y_{\text{h}}(x_0) = a_0$, $y'_{\text{h}}(x_0) = a_1$, …, $y_{\text{h}}^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, avec $x_0 \in I$. ⌟

Les solutions de l'équation homogène constituent donc un espace vectoriel de dimension n dont les y_i sont une base.

Théorème 101 (équations inhomogènes)

Avec les mêmes hypothèses sur les fonctions C_k qu'au théorème 100, et ϕ étant supposée en outre continue dans I, la solution générale dans I de l'équation inhomogène (11) est la somme $y(x) = y_{\text{p}}(x) + y_{\text{h}}(x)$ d'une solution particulière y_{p} de (11) et de la solution générale y_{h} de l'équation homogène (13). Il existe une unique solution de (11) satisfaisant à des conditions initiales $y(x_0) = a_0$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, avec $x_0 \in I$. ⌟

L'existence de n solutions indépendantes de (13) selon le théorème 100 n'est pas aisée à démontrer et nous l'admettrons en général ; nous en donnerons une ébauche de preuve pour des coefficients constants au VIII.c.4.*a*.

Le théorème 101, lui, se démontre aisément : supposons que $y_{\text{p}}(x)$ soit une solution particulière de (11). Alors, pour toute autre solution $y(x)$ de (11), en soustrayant membre à membre les deux équations différentielles satisfaites par $y(x)$ et par $y_{\text{p}}(x)$, on trouve que la différence $y_{\text{h}}(x) = y(x) - y_{\text{p}}(x)$ est une solution de l'équation *homogène* : en invoquant alors le théorème 100, on montre que la solution générale y de (11) est la somme d'une solution particulière y_{p} et d'une solution quelconque (« générale ») y_{h} de (13). La réciproque est évidente : on obtient bien une solution de (11) en ajoutant à la solution particulière $y_{\text{p}}(x)$ une solution quelconque de l'équation homogène. Noter que, là encore, ces théorèmes énoncent l'existence et l'unicité de solutions sans nous dire comment les construire…

VIII.c.3. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients variables

VIII.c.3.*a*. Équation homogène

Pour toute équation linéaire homogène du premier ordre, écrite comme

$$y'(x) + q(x)\; y(x) = 0, \tag{17}$$

la solution générale s'obtient facilement par une quadrature, c.-à-d. à l'aide d'un calcul de primitive de $q(x)$ ※2 :

$$y(x) = A \exp\!\left(-\int^{x} q[x']\, \mathrm{d}x'\right). \tag{18}$$

VIII.c.3.*b*. Équation inhomogène

Dans le cas d'une équation du premier ordre, il existe une méthode générale pour construire une solution particulière de l'équation inhomogène, la *méthode de variation de la constante*. Considérons une équation de la forme

$$y'(x) + q(x)\; y(x) = \phi(x). \tag{19}$$

L'équation *homogène* admet selon la discussion précédente la solution générale $y(x) = A \exp\!\left(-\int^{x} q[x']\, \mathrm{d}x'\right)$, où A est une *constante*. Cherchons une solution de l'équation *inhomogène* (19) de la forme

$$y(x) = A(x) \exp\!\left(-\int^{x} q[x']\, \mathrm{d}x'\right),$$

où $A(x)$ est désormais une *fonction*. La dérivée de y est

$$\begin{aligned} y'(x) &= A'(x) \exp\!\left(-\int^{x} q[x']\, \mathrm{d}x'\right) + A(x)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\!\left(-\int^{x} q[x']\, \mathrm{d}x'\right) \\ &= A'(x) \exp\!\left(-\int^{x} q[x']\, \mathrm{d}x'\right) + A(x)\, \frac{\mathrm{d}\left(-\int^{x} q[x']\, \mathrm{d}x'\right)}{\mathrm{d}x} \exp\!\left(-\int^{x} q[x']\, \mathrm{d}x'\right) \\ &= A'(x) \exp\!\left(-\int^{x} q[x']\, \mathrm{d}x'\right) - A(x)\, q(x) \exp\!\left(-\int^{x} q[x']\, \mathrm{d}x'\right). \end{aligned}$$

2. La définition à une constante additive près de la primitive de $q(x)$ introduit-elle un arbitraire ?

En reportant dans (19), on trouve

$$(A'[x] - A[x]\, q[x] + A[x]\, q[x]) \exp\left(-\int^x q[x']\, \mathrm{d}x'\right) = \phi(x),$$

soit

$$A'(x) = \exp\left(\int^x q[x']\, \mathrm{d}x'\right) \phi(x),$$

et le problème de trouver une solution particulière est donc réduit au calcul d'une primitive de la fonction $\exp\left(\int^x q[x']\, \mathrm{d}x'\right) \phi(x)$.

VIII.c.4. Équations linéaires homogènes à coefficients constants

VIII.c.4.*a*. Résolution de l'équation homogène

Considérons maintenant un cas particulièrement important d'équations différentielles linéaires homogènes, celui où les coefficients C_k de l'équation sont des constantes :

$$\sum_{k=0}^{n} C_k\, y^{(k)}(x) = 0. \tag{20}$$

Cherchons des solutions de forme exponentielle, $y(x) = \mathrm{e}^{\alpha\, x}$, où α peut être *a priori* réel ou complexe. Une telle fonction est effectivement solution à condition que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_k\, \alpha^k\right) \mathrm{e}^{\alpha\, x} = 0,$$

et donc que α satisfasse l'équation polynomiale, dite *équation caractéristique*,

$$\sum_{k=0}^{n} C_k\, \alpha^k = 0. \tag{21}$$

Or le théorème fondamental de l'algèbre énonce que tout polynôme $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} C_k\, \alpha^k$ de degré n admet n *racines*, réelles ou complexes, qui sont les n solutions de l'équation $P(\alpha) = 0$. Si nous supposons d'abord que ces n racines α_i ($i = 1, \ldots, n$) sont distinctes, nous avons trouvé n solutions $\mathrm{e}^{\alpha_i\, x}$, et ces n fonctions sont bien linéairement indépendantes, selon une remarque faite plus haut. Donc, dans ce cas, nous savons construire explicitement une base de n solutions, dont toute autre solution est une combinaison linéaire.

Plus généralement, on peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 102

Soit $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} C_k\, \alpha^k$. Notons $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ses p racines et $m_i \in \mathbb{N}$ leur multiplicité. (On a donc $P(\alpha) = C_n \prod_{i=1}^{p} (\alpha - \alpha_i)^{m_i}$ et $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$.)

Les fonctions $x^j\, \mathrm{e}^{\alpha_i\, x}$, où $j \in [\![0, m_i - 1]\!]$, constituent une base de l'espace des solutions de (20). ⌟

À titre d'exemple, montrons dans le cas où la racine α_i est double que $x\, \mathrm{e}^{\alpha_i\, x}$ est également une solution de l'équation différentielle. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k\, \frac{\mathrm{d}^k \mathrm{e}^{\alpha\, x}}{\mathrm{d}x^k}\right) = \sum_{k=0}^{n} C_k\, \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\alpha\, x})}{\mathrm{d}\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{n} C_k\, \frac{\mathrm{d}^k (x\, \mathrm{e}^{\alpha\, x})}{\mathrm{d}x^k}.$$

Or, si α_i est double, $P(\alpha) = (\alpha - \alpha_i)^2\, Q(\alpha)$, où Q est un polynôme.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\alpha} = 2\, (\alpha - \alpha_i)\, Q(\alpha) + (\alpha - \alpha_i)^2\, \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha},$$

donc $(\mathrm{d}P/\mathrm{d}\alpha)_{\alpha = \alpha_i} = 0$. Comme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k\, \frac{\mathrm{d}^k \mathrm{e}^{\alpha\, x}}{\mathrm{d}x^k}\right) = \frac{\mathrm{d}(P\, \mathrm{e}^{\alpha\, x})}{\mathrm{d}\alpha} = \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\alpha} + x\, P[\alpha]\right) \mathrm{e}^{\alpha\, x}$$

s'annule en $\alpha = \alpha_i$, on en déduit que $x\, \mathrm{e}^{\alpha_i\, x}$ est bien une solution.

Ce résultat se généralise sans difficulté au cas où la multiplicité de α_i est $m_i > 2$ en utilisant la formule de Leibniz,

$$\frac{\mathrm{d}^p (f\, g)}{\mathrm{d}x^p} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \frac{\mathrm{d}^j f}{\mathrm{d}x^j}\, \frac{\mathrm{d}^{p-j} g}{\mathrm{d}x^{p-j}}.$$

VIII.c.4.*b*. Équation du second ordre à coefficients constants

Examinons plus en détail le cas de l'équation du second ordre, que nous retrouverons au chapitre IX dans différents contextes physiques. Réécrivons-la sous la forme

$$a\ y''(x) + b\ y'(x) + c\ y(x) = 0, \tag{22}$$

où a, b, c et y sont réels et $a \neq 0$. Son équation caractéristique est

$$a\ \alpha^2 + b\ \alpha + c = 0. \tag{23}$$

La solution de (23) dépend du signe de $\Delta := b^2 - 4\ a\ c$:

- Si $\Delta > 0$, les racines $\alpha_\pm$ sont réelles et distinctes :

  $$\alpha_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\ a}$$

  et les deux fonctions $e^{\alpha_\pm x}$ forment une base de solutions, ce qui veut dire que la solution générale de (22) est

  $$y(x) = A_+\ e^{\alpha_+ x} + A_-\ e^{\alpha_- x}, \tag{24}$$

  avec deux constantes arbitraires $A_\pm$ fixées par les conditions initiales.
- Si $\Delta < 0$, les racines sont complexes conjuguées et distinctes :

  $$\alpha_\pm = \frac{-b \pm \mathrm{i}\ \sqrt{-\Delta}}{2\ a}.$$

  Comme base de solutions, on peut choisir soit les deux exponentielles oscillantes $e^{\alpha_\pm x}$, soit

  $$\cos\!\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\ a}\ x\right) \exp\!\left(\frac{-b\ x}{2\ a}\right) \quad \text{et} \quad \sin\!\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\ a}\ x\right) \exp\!\left(\frac{-b\ x}{2\ a}\right).$$

  La solution générale de l'équation (22) peut donc s'écrire sous différentes formes équivalentes :

  $$y(x) = B_+\ e^{\alpha_+ x} + B_-\ e^{\alpha_- x}, \tag{25}$$

  $$\text{ou encore} \quad y(x) = \left(A_1 \cos\!\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\ a}\ x\right] + A_2 \sin\!\left[\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\ a}\ x\right]\right) \exp\!\left(\frac{-b\ x}{2\ a}\right), \tag{26}$$

  $$\text{ou encore} \quad y(x) = A \cos\!\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\ a}\ x + \varphi\right) \exp\!\left(\frac{-b\ x}{2\ a}\right) \tag{27}$$

  avec des paires de constantes (B_+, B_-), (A_1, A_2) ou (A, φ). Sous la première forme, B_+ et B_- doivent être des complexes conjugués pour que $y(x)$ soit réel : $B_+ = B_-^*$.
- Si $\Delta = 0$, la racine $\alpha_0 = -b/(2\ a)$ est double et on vérifie immédiatement que

  $$e^{\alpha_0 x} \quad \text{et} \quad x\ e^{\alpha_0 x}$$

  sont deux solutions, donc que la solution générale de l'équation (22) s'écrit

  $$y(x) = (A_0\ x + B_0)\ e^{\alpha_0 x} \tag{28}$$

  avec deux constantes A_0 et B_0.

Dans tous les cas, on a trouvé une solution générale dépendant de *deux* constantes réelles (puisque $\operatorname{Re} B_+ = \operatorname{Re} B_-$ et $\operatorname{Im} B_+ = -\operatorname{Im} B_-$ dans la première expression du cas $\Delta < 0$). Ces deux constantes sont déterminées de façon unique par *deux* conditions initiales, par exemple la donnée de $y(x_0)$ et $y'(x_0)$.

VIII.c.5. Équations linéaires inhomogènes à coefficients constants

Pour une équation linéaire à coefficients constants, on sait donc de façon générale construire les n solutions indépendantes du théorème 100 et résoudre complètement l'équation homogène. En ce qui concerne l'équation inhomogène à coefficients constants, sa solution repose sur la connaissance d'*une* solution particulière, selon le théorème 101.

VIII.c.5.*a*. Second membre constant

Un cas évident est celui où $\phi(x)$ est constante. Dans ce cas, $y(x) = \phi/C_0$ est une solution particulière.

VIII.c.5.*b*. Second membre périodique

VIII.c.5.*b*.i. Découplage des modes de Fourier

On considère l'équation différentielle du n-ième ordre à coefficients C_k constants

$$\mathcal{L}(y[x]) := \sum_{k=0}^{n} C_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} y(x) = \phi(x), \tag{29}$$

où $\phi(x)$ est une fonction périodique de x, de période T, supposée satisfaire les hypothèses du théorème de Dirichlet. On peut alors représenter ϕ par son développement de Fourier,

$$\phi(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \omega\, j\, x}, \tag{30}$$

où $\omega = 2\,\pi/T$. Cherchons une solution particulière $y_{\mathrm{p}}(x)$ T-périodique et supposons-la également développable en série de Fourier :

$$y_{\mathrm{p}}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_j \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, j\, \omega\, x}. \tag{31}$$

Si l'on suppose $y_{\mathrm{p}}(x)$ suffisamment régulière (cf. VII.E.1), on peut dériver terme à terme le développement de $y_{\mathrm{p}}(x)$, et comme dériver k fois revient à multiplier le j-ième « mode » (la j-ième composante de Fourier) par $(\mathrm{i}\; j\; \omega)^k$,

$$y_{\mathrm{p}}^{(k)}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_j \, (\mathrm{i}\; j\; \omega)^k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, j\, \omega\, x}.$$

La propriété de linéarité implique que l'action de $\mathcal{L}$ sur les différents modes de $y_{\mathrm{p}}(x)$ s'écrit

$$\mathcal{L}(y_{\mathrm{p}}[x]) = \sum_j \sum_{k=0}^{n} C_k \, (\mathrm{i}\; j\; \omega)^k \, y_j \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, j\, \omega\, x} \tag{32}$$

et qu'on obtient *une solution particulière* de (29) en sommant une solution pour chacun des modes,

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \, (\mathrm{i}\; j\; \omega)^k \, y_j = \phi_j,$$

soit

$$y_j = \frac{\phi_j}{\sum_{k=0}^{n} C_k \, (\mathrm{i}\; j\; \omega)^k} \quad \text{et} \quad y_{\mathrm{p}}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_j}{\sum_{k=0}^{n} C_k \, (\mathrm{i}\; j\; \omega)^k} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, j\, \omega\, x}. \tag{33}$$

Le j-ième mode de y_{p} ne « répond » qu'au j-ième mode de ϕ. On dit qu'il y a « découplage » des différents modes de Fourier. L'ensemble $\{Z_j\}$ des coefficients de proportionnalité entre le j-ième mode ϕ_j de la source et le j-ième mode de la réponse y_j,

$$Z_j = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} C_k \, (\mathrm{i}\; j\; \omega)^k}, \tag{34}$$

constitue ce qu'on appelle la *susceptibilité* du système.

VIII.c.5.*b*.ii. Filtre *R-C*

À titre d'exemple, considérons le circuit électrique représenté sur la figure VIII.2.

Soit V_{e} le signal d'entrée (tension entre A et B), V_{s} le signal de sortie (entre C et D). On a $V_A - V_C = R\, i = R\, \dot{q}$, $V_{\mathrm{s}} = V_C - V_D = V_C - V_B = q/C$ et $V_{\mathrm{e}} = V_A - V_B = R\, \dot{q} + q/C$. Si le signal d'entrée $V_{\mathrm{e}}(t)$ est donné, le signal de sortie $V_{\mathrm{s}}(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$R\; C\; \dot{V}_{\mathrm{s}}(t) + V_{\mathrm{s}}(t) = V_{\mathrm{e}}(t). \tag{35}$$

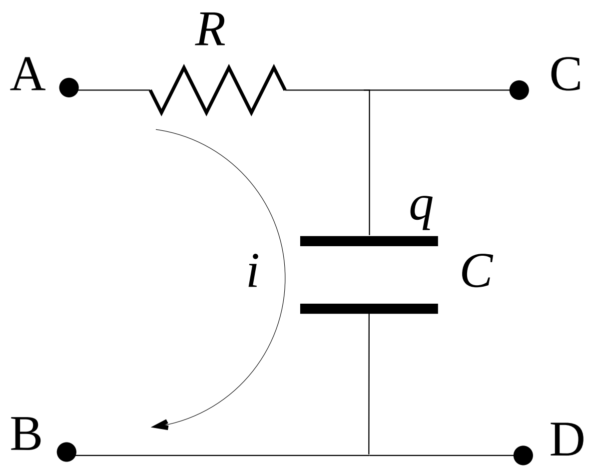

Figure VIII.2. Filtre R-C.

Si $V_\mathrm{e}(t)$ est un signal périodique de période $T = 2\,\pi/\omega$, on introduit sa série de Fourier, $\widetilde{V_\mathrm{e}}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} V_j\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, j\, \omega\, t}$, et on procède comme au § VIII.c.5.*b*.i. Pour chaque mode $V_j\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, j\, \omega\, t}$, on cherche une solution particulière de (35) de la forme $Z_j\, V_j\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, j\, \omega\, t}$, d'où $(\mathrm{i}\, R\, C\, j\, \omega + 1)\, Z_j = 1$, soit

$$Z_j = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\, R\, C\, j\, \omega} = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\, j\, \omega/\omega_0}, \tag{36}$$

avec $\omega_0 := 1/(R\, C)$ (qui a bien la dimension d'une fréquence). La solution particulière de (35) qu'on vient de construire,

$$V_{\mathrm{s,\,p}}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} Z_j\, V_j\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, j\, \omega\, t}, \tag{37}$$

est la transformée du signal d'entrée $V_\mathrm{e}(t)$ par le circuit ou « filtre » R-C.

Remarques

Si $\omega \gg \omega_0$ et donc que le signal d'entrée est à haute fréquence (par rapport à la fréquence caractéristique ω_0 du circuit), on a $Z_j \approx \omega_0/(\mathrm{i}\, j\, \omega)$ si $|j| \geqslant 1$. Si $V_0 = 0$ (signal d'entrée nul en moyenne), le circuit R-C a alors pour effet d'*intégrer* le signal d'entrée (à la multiplication par un facteur ω_0 près) :

$$V_{\mathrm{s,\,p}}(t) \approx \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{\mathrm{i}\, j\, \omega}\, V_j\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, j\, \omega\, t} = \omega_0 \int^t V_\mathrm{e}(t')\, \mathrm{d}t', \tag{38}$$

(où $\int^t V_\mathrm{e}(t')\, \mathrm{d}t'$ est une certaine primitive de $V_\mathrm{e}(t)$). Il est donc légitime d'appeler ce filtre R-C un *intégrateur*.

Si par contre $\omega \ll \omega_0$, pour les petites valeurs de j (pour j tel que $j\, \omega \ll \omega_0$), on a $Z_j \approx 1$: le signal de sortie $V_{\mathrm{s,\,p}}$ aux basses fréquences ne diffère guère de celui d'entrée V_e. On dit alors que le circuit R-C est un *filtre passe-bas*. ⌟

VIII.c.5.*b*.ii.*α*. Signal d'entrée en créneaux : solution particulière pour $\omega \gg \omega_0$

Prenons un cas concret, celui d'un signal d'entrée donné par la « fonction créneau » V_e^cr, de période T, valant $-V$ sur $[0,\, T/2[$ et $+V$ sur $[T/2,\, T[$, étudiée à de petites modifications de notations près au § VII.E.2. Sa série de Fourier s'écrit

$$\widetilde{V_\mathrm{e}^\mathrm{cr}}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-4\, V}{\pi\, (2\, j + 1)} \sin([2\, j + 1]\, \omega\, t). \tag{39}$$

(En fait, il n'y a convergence de $\widetilde{V_\mathrm{e}^\mathrm{cr}}$ vers V_e^cr qu'aux points autres que les points de discontinuité.)

Si $\omega \gg \omega_0$, le filtre transforme ce signal d'entrée de moyenne nulle en

$$V_{\mathrm{s,\,p}}^\mathrm{cr}(t) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4\, \omega_0\, V}{\pi\, \omega\, (2\, j + 1)^2} \cos([2\, j + 1]\, \omega\, t), \tag{40}$$

qui doit donc être la série de Fourier d'une primitive de $\omega_0\ V_{\mathrm{e}}^{\mathrm{cr}}(t)$, c.-à-d. la série de Fourier d'une fonction continue et linéaire par morceaux. Cette fonction vaut $K - V\ \omega_0\ t$ sur $[0, T/2[$ et (par continuité en $T/2$) $K + V\ \omega_0\ (t - T)$ sur $[T/2, T[$, où K est une constante. C'est une « fonction triangle » (du type de celle étudiée au TD 4, à de petits changements de variable et de période près, et à une constante additive près). En $t = 0$, $V_{\mathrm{s,\ p}}^{\mathrm{cr}}(0) = K$, donc

$$K = \frac{4\ \omega_0\ V}{\pi\ \omega} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ j+1)^2} = \frac{4\ \omega_0\ V}{\pi\ \omega}\ \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi\ \omega_0}{2\ \omega}\ V = \frac{T\ \omega_0}{4}\ V.$$

VIII.c.5.*b*.ii.β. Signal d'entrée en créneaux : solution générale

Selon la théorie générale des équations différentielles linéaires, à la solution particulière $V_{\mathrm{s,\ p}}(t)$ de (37), on doit ajouter la solution générale de l'équation homogène, $\dot{V}_{\mathrm{s,\ h}} + \omega_0\ V_{\mathrm{s,\ h}} = 0$, soit $V_{\mathrm{s,\ h}}(t) = \lambda\ \mathrm{e}^{-\omega_0\ t}$. La solution générale de (35) est donc $V_{\mathrm{s}}(t) = V_{\mathrm{s,\ p}}(t) + \lambda\ \mathrm{e}^{-\omega_0\ t}$, avec λ une constante déterminée par les conditions initiales. Mais le deuxième terme s'atténue très rapidement, avec une échelle de temps caractéristique $\tau = 1/\omega_0$: au bout de ce temps τ, la fonction $V_{\mathrm{s,\ h}}(t)$ a décru d'un facteur e ; au bout de $2\ \tau$, elle a décru de e^2, etc. On conçoit donc qu'après un *régime transitoire* durant quelques τ, $V_{\mathrm{s,\ h}}(t)$ devient négligeable devant la solution périodique $V_{\mathrm{s,\ p}}^{\mathrm{cr}}(t)$: on entre alors dans le *régime permanent* du système.

Dans le cas où ω est quelconque, le calcul du développement en série de Fourier de $V_{\mathrm{s,\ p}}$ pour un circuit *R-C* soumis à une tension V_{e} en créneau ne mène pas à une expression de $V_{\mathrm{s,\ p}}$ sur $\mathbb{R}$ aussi simple que dans les cas $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$. Il est plus simple de déterminer la restriction de V_{s} à chaque intervalle où V_{e} est constante et de recoller les morceaux. On doit donc résoudre l'équation

$$\omega_0^{-1}\ \dot{V}_{\mathrm{s}} + V_{\mathrm{s}} = \begin{cases} -V & \text{si } t \in [j\ T, (j+1/2)\ T[, & (41a) \\ +V & \text{si } t \in [(j+1/2)\ T, (j+1)\ T[. & (41b) \end{cases}$$

Dans chacun de ces intervalles, la solution est de la forme « solution particulière de l'équation inhomogène + solution générale de l'équation homogène » :

$$V_{\mathrm{s}}(t) = \begin{cases} A_j\ \mathrm{e}^{-\omega_0\ t} - V & \text{si } t \in [j\ T, (j+1/2)\ T[, & (42a) \\ B_j\ \mathrm{e}^{-\omega_0\ t} + V & \text{si } t \in [(j+1/2)\ T, (j+1)\ T[. & (42b) \end{cases}$$

Le coefficient A_0 est fixé par la condition initiale. Les autres coefficients B_j et A_j sont déterminés en imposant la continuité de la charge q, donc de $V_{\mathrm{s}}(t)$, à la fin de chaque demi-période, en $t = (j+1/2)\ T$ ou $t = j\ T$.

Prenons par exemple $V_{\mathrm{s}}(0) = V$. On obtient immédiatement $A_0 = 2\ V$. La continuité entre les expressions (42a) et (42b) à l'instant $t = T/2 = \pi/\omega$ donne

$$B_0\ \mathrm{e}^{-\omega_0\ \pi/\omega} = 2\ V\ (1 - \mathrm{e}^{-\omega_0\ \pi/\omega}).$$

Notons $\varepsilon := \mathrm{e}^{-\omega_0\ \pi/\omega}$. On vérifie par récurrence que

$$A_j = 2\ V\ (1 - \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} - \cdots + \varepsilon^{-2\ j}) = 2\ V\ \frac{1 + \varepsilon^{-2\ j-1}}{1 + \varepsilon^{-1}}, \tag{43}$$

$$B_j = 2\ V\ (1 - \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} - \cdots - \varepsilon^{-2\ j-1}) = 2\ V\ \frac{1 - \varepsilon^{-2\ j-2}}{1 + \varepsilon^{-1}} \tag{44}$$

et donc

$$V_{\mathrm{s}}([j+1/2]\ T) = -V + A_j\ \varepsilon^{2\ j+1} = -V + 2\ V\ \frac{\varepsilon + \varepsilon^{2\ j+2}}{1+\varepsilon} = -V\ \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\ j+2}), \tag{45}$$

$$V_{\mathrm{s}}([j+1]\ T) = V + B_j\ \varepsilon^{2\ j+2} = -V + 2\ V\ \frac{-\varepsilon + \varepsilon^{2\ j+3}}{1+\varepsilon} = V\ \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\ j+3}). \tag{46}$$

$0 < \varepsilon < 1$, donc $\lim_{j\to\infty} O(\varepsilon^{2\ j+2}) = \lim_{j\to\infty} O(\varepsilon^{2\ j+3}) = 0$. Pour $j \gg 1$, on voit que V_{s} prend aux demi-périodes la valeur $\pm V_\infty$, où

$$V_\infty = V\ \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Le système est alors sorti du régime transitoire mentionné plus haut et est dans un régime permanent périodique où le condensateur se charge et se décharge, avec une tension à ses bornes oscillant entre les valeurs $\pm V_\infty$.

Examinons les deux cas limites où ω_0/ω est petit ou grand :

1. $\omega/\omega_0 \gg 1$, c.-à-d. que l'on excite le filtre à de hautes fréquences par rapport à ω_0. D'une part, le régime transitoire dure assez longtemps, car ε est proche de 1. De l'autre, on peut approximer la fonction $V_{\mathrm{s}}(t)$ par une fonction linéaire par morceaux, et on retrouve notre fonction triangle et le circuit intégrateur.
2. $\omega/\omega_0 \ll 1$, le régime transitoire est beaucoup plus bref, car $\varepsilon \ll 1$. Dans la limite $\omega/\omega_0 \to 0$, on retrouve une fonction créneau pour $V_{\mathrm{s}}(t)$: le filtre à basse fréquence est presque « transparent » ; c'est un filtre passe-bas. Noter que les discontinuités de la fonction créneau ont été adoucies : la fonction $V_{\mathrm{s}}(t)$ est continue.

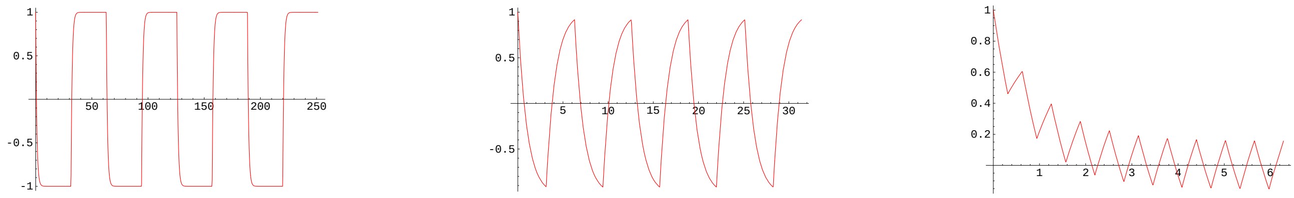

Figure VIII.3. Courbe $V_s(t)$ pour $\omega/\omega_0 = 0{,}1$, 1, 10. On a pris $V = 1$, $\omega_0 = 1$.

Exercice

(À résoudre par exemple à l'aide de Mathematica.)

Quel est l'effet d'une condition initiale $V(0)$ différente de celle choisie plus haut ? Par exemple, si $V_s(0) = V/2$, ou $V_s(0) = -V$, tracer la courbe de $V_s(t)$ pour $\omega/\omega_0 = 0{,}1$, 1, 10. Montrer qu'au bout d'un temps fini, qui dépend de ω/ω_0, les courbes reproduisent celles de la figure VIII.3. ⌟

VIII.D. Systèmes d'équations différentielles linéaires

Comme on l'a déjà fait remarquer, les équations différentielles peuvent se présenter sous forme de systèmes d'équations différentielles couplées portant sur différentes fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Le cas de systèmes d'équations couplées linéaires est particulièrement intéressant.

Considérons par exemple le système linéaire de deux équations du premier ordre

$$y_1' = a\ y_1 + b\ y_2, \tag{47}$$
$$y_2' = c\ y_1 + d\ y_2, \tag{48}$$

où a, b, c et d sont des constantes.

1. En dérivant la première équation par rapport à x et en y reportant l'expression de y_2' donnée par la seconde, (c.-à-d. en *éliminant* y_2' entre ces deux équations), on obtient la paire d'équations

$$y_1'' = a\ y_1' + b\ (c\ y_1 + d\ y_2), \tag{49}$$
$$y_1' = a\ y_1 + b\ y_2. \tag{50}$$

Entre ces deux équations, on peut cette fois éliminer y_2, ce qui conduit à

$$y_1'' = (a + d)\ y_1' + (b\ c - a\ d)\ y_1. \tag{51}$$

Cette dernière équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, qui tombe donc sous le coup de l'analyse menée plus haut : la solution générale en $y_1(x)$ (et de même en $y_2(x)$) est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles $e^{\alpha_1 x}$ et $e^{\alpha_2 x}$, où α_1 et α_2 sont solutions de l'équation

$$\alpha^2 - (a + d)\ \alpha + (a\ d - b\ c) = 0. \tag{52}$$

En résumé, le système de deux équations linéaires du premier ordre à coefficients constants (47) est donc équivalent à une équation linéaire du second ordre.

2. Discutons maintenant une autre méthode : en effectuant des combinaisons linéaires des deux équations de (47) avec des coefficients λ et μ quelconques, on trouve que

$$(\lambda\ y_1 + \mu\ y_2)' = (a\ \lambda + c\ \mu)\ y_1 + (b\ \lambda + d\ \mu)\ y_2. \tag{53}$$

Supposons qu'on sache trouver λ et μ tels que

$$a\ \lambda + c\ \mu = \alpha\ \lambda \tag{54}$$
$$b\ \lambda + d\ \mu = \alpha\ \mu, \tag{55}$$

pour un certain nombre α. Alors, en reportant (54) dans (53), on voit que l'équation (53) est une équation différentielle linéaire du premier ordre particulièrement simple pour la fonction $y := \lambda\ y_1 + \mu\ y_2$,

$$y' = \alpha\ y, \tag{56}$$

ce qui s'intègre immédiatement en $y = C\ e^{\alpha x}$. Or le système (54), qui est un système d'équations algébriques du premier degré à deux variables, se résout aisément. En éliminant par exemple μ entre les deux équations, on trouve que

$$c\ \mu = (\alpha - a)\ \lambda \quad \text{et} \quad ([d - \alpha]\ [a - \alpha] - b\ c)\ \lambda = 0. \tag{57}$$

Cette dernière équation n'admet de solution non nulle en λ que si α satisfait l'équation du second degré

$$(d - \alpha)\ (a - \alpha) - b\ c = 0. \tag{58}$$

Supposons les racines distinctes : il existe donc deux valeurs de α, donc aussi deux paires (λ, μ) (à un facteur global près) remplissant les conditions ci-dessus, c.-à-d. conduisant à une équation du type (56) pour la combinaison linéaire correspondante. Chacune de ces deux combinaisons linéaires est appelée un *mode propre* du système initial (47). Par les combinaisons algébriques que nous avons effectuées, nous avons donc réduit le système initial, équivalent à une équation du second ordre selon la discussion du point 1 ci-dessus, à la solution de deux équations du premier ordre découplées. On note que les deux approches ont en commun de faire jouer un rôle central à l'équation « caractéristique » (52)-(58).

3. Ceci se généralise à des systèmes impliquant plus de fonctions ou des équations d'ordres plus élevés. Réécrivons le système linéaire (47) sous une forme matricielle :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Y = A\ Y, \tag{59}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Supposons maintenant que la matrice A puisse se diagonaliser par un changement de base $A = P\ D\ P^{-1}$, où $P^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{smallmatrix}\right)$ est une matrice 2×2 indépendante de x, $D = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{smallmatrix}\right)$ une matrice diagonale, et α_1 et α_2 sont les *valeurs propres* de A. En posant $Z = P^{-1}\ Y = \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1\ y_1 + \mu_1\ y_2 \\ \lambda_2\ y_1 + \mu_2\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$, on a, en multipliant à gauche les deux membres de l'équation matricielle (59) par P^{-1},

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Z = D\ Z,$$

soit

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

c.-à-d. deux équations découplées :

$$z_1' = \alpha_1\ z_1 \qquad \text{et} \qquad z_2' = \alpha_2\ z_2. \tag{61}$$

La démarche reproduit celle suivie au point 2. Les valeurs propres α_1 et α_2 sont les racines de l'équation (58) ; la matrice est diagonalisable, donc P existe et est inversible, car les deux racines sont distinctes ; et les combinaisons z_1 et z_2 sont les deux « modes propres » définis en 2.

L'avantage de cette méthode matricielle est sa puissance et sa généralité. Elle s'étend sans difficulté à des systèmes d'équations différentielles de dimension ou d'ordre plus élevés.

Rappel

Soient A une matrice carrée de taille $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients quelconques dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I_n la matrice identité. Un scalaire α est une *valeur propre* de A s'il existe un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ non nul, appelé *vecteur propre*, tel que $A\ X = \alpha\ X$, ou encore $(A - \alpha\ I_n)\ X = 0$.

Remarquons que si $X_{i,\,1}$ et $X_{i,\,2}$ sont deux vecteurs propres pour la même valeur propre α_i, toute combinaison linéaire $\lambda_1\ X_{i,\,1} + \lambda_2\ X_{i,\,2}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ est encore un vecteur propre pour α_i. Les vecteurs propres associés à la valeur propre α_i constituent donc un sous-espace vectoriel, E_i, de $\mathbb{K}^n$.

Si $A - \alpha\ I_n$ est inversible, la seule solution de l'équation $(A - \alpha\ I_n)\ X = 0$ est le vecteur nul. Pour que A admette des vecteurs propres pour un certain α, il faut donc que $A - \alpha\ I_n$ ne soit pas inversible, c.-à-d. que $\text{dét}(A - \alpha\ I_n) = 0$. Or $\text{dét}(A - \alpha\ I_n)$ est un polynôme d'ordre n en la variable α. Il admet donc au plus n racines. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(k \leqslant n)$ les racines et $m_1, \ldots, m_k$ leurs multiplicités $(m_1 + \cdots + m_k = n)$.

Le sous-espace propre E_i est au moins de dimension 1 puisque le vecteur nul n'est pas un vecteur propre par définition. On peut en fait montrer que $\dim E_i \in [\![1, m_i]\!]$. Si $\forall\ i \in [\![1, k]\!]$, $\dim E_i = m_i$ [※3], la matrice A est diagonalisable, c.-à-d. qu'on peut l'écrire sous la forme $A = P\ D\ P^{-1}$.

3. C'est notamment le cas si toutes les racines sont distinctes, puisqu'on a alors $1 \leqslant \dim E_i \leqslant m_i = 1$, $\forall\ i$.

Si A est diagonalisable, choisissons, pour chaque valeur propre, m_i vecteurs propres linéairement indépendants $X_{i,\,j}$ ($j \in [\![1,\, m_i]\!]$) dans E_i. On peut alors écrire D et P de la manière suivante :

$$D = \begin{pmatrix}
\alpha_1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \alpha_1 & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & \alpha_k & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & & & \cdots & 0 & \alpha_k
\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{matrix} X_{1,\,1} & \cdots & X_{1,\,m_1} & \cdots\cdots & X_{k,\,1} & \cdots & X_{k,\,m_k} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
P = & \begin{pmatrix}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$\lrcorner$

Exemple 73

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A - \alpha\, I_2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 3 \\ 1 & -1-\alpha \end{pmatrix},$$

donc dét$(A - \alpha\, I_2) = \alpha^2 - 4$: A a deux valeurs propres distinctes, $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = -2$. $X_1 = (3,\, 1)$ et $X_2 = (-1,\, 1)$ sont des vecteurs propres respectivement associés à α_1 et α_2. On a donc

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

et l'on vérifie sans difficulté que $A = P\, D\, P^{-1}$. $\lrcorner$

VIII.E. Autres méthodes de résolution d'équations différentielles

VIII.E.1. Intégrales premières

Il existe des situations où l'on peut réduire l'ordre de l'équation différentielle en effectuant explicitement une intégration. Considérons par exemple un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m fixée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable de longueur ℓ. Le pendule oscille dans un plan vertical. Il effectue son mouvement sous la seule action de son poids, $\vec{P} = -m\, g\, \widehat{z}$, où $\widehat{z}$ désigne un vecteur unitaire vertical ascendant, et de la tension $\vec{T}$ du fil. D'après la relation fondamentale de la dynamique, $m\, \vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{T} - m\, g\, \widehat{z}$. En projetant la tension inconnue $\vec{T}$ sur une direction tangente à la trajectoire circulaire, on obtient

$$m\, \ell\, \ddot{\theta} = -m\, g\, \sin\theta. \tag{62}$$

Multiplions cette équation par $\dot{\theta}$ et reconnaissons dans $\ddot{\theta}\, \dot{\theta}$ la dérivée par rapport au temps de $\frac{1}{2}\, \dot{\theta}^2$ et dans $-\dot{\theta}\, \sin\theta$ celle de $\cos\theta$. L'équation (62) s'écrit donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\, \ell\, m\, \dot{\theta}^2 - g\, m\, \cos\theta\right) = 0, \tag{63}$$

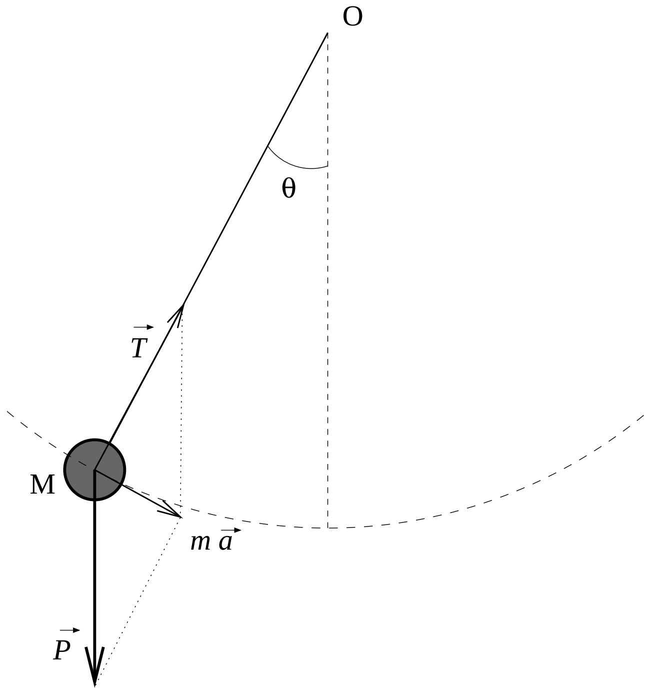

Figure VIII.4. Pendule simple.

qui s'intègre en

$$\frac{1}{2}\, m\, \ell\, \dot{\theta}^2 = m\, g\, (\cos\theta - \cos\theta_{\mathrm{m}}), \tag{64}$$

où θ_{m} est une constante d'intégration que l'on peut choisir dans $[0, \pi]$. Pour $\theta = \pm\theta_{\mathrm{m}}$, le membre de droite s'annule, donc celui de gauche aussi : la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ s'annule alors, donc θ_{m} est l'amplitude d'oscillation du pendule.

Réécrivons l'équation précédente (multipliée par ℓ) sous la forme

$$\frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, \dot{\theta}^2 - m\, g\, \ell\, \cos\theta = -m\, g\, \ell\, \cos\theta_{\mathrm{m}} := E, \tag{65}$$

avec E indépendante du temps. Sur le plan mathématique, nous avons réduit notre équation de départ du second ordre (62) à une équation du premier ordre, ce qui est un progrès substantiel. Sur le plan physique, ce que cette « constante du mouvement » (ou « intégrale première » de l'équation initiale) exprime est bien sûr la loi de conservation de l'énergie interne du système isolé {Terre, pendule} (ou, de manière équivalente, de l'énergie mécanique du pendule) : $\frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, \dot{\theta}^2$ est l'énergie cinétique et $-m\, g\, \ell\, \cos\theta$ l'énergie potentielle.

VIII.E.2. Équations à variables séparées

On appelle *équation à variables séparées* une équation différentielle du premier ordre $F(y, y', x) = 0$ qui peut se mettre sous la forme $f(y)\, \mathrm{d}y = g(x)\, \mathrm{d}x$ et donc s'intégrer en

$$\int^y f(y')\, \mathrm{d}y' = \int^x g(x')\, \mathrm{d}x' + \text{constante}. \tag{66}$$

Exemple 74

Montrer que l'équation $\dot{x} = -\alpha^2 - x^2$ est à variables séparées. En chercher les solutions. ⌟

Exemple 75

On suppose qu'un corps en chute libre est freiné par une force proportionnelle au carré de sa vitesse (parachute). Montrer que son équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{z} = k\, \dot{z}^2 - g$$

et que l'équation différentielle satisfaite par $\dot{z}$ ressemble beaucoup à celle de l'exemple précédent. ⌟

Exemple 76
Examinons l'équation du pendule simple que nous avons obtenue au paragraphe précédent,

$$\frac{1}{2}\,\ell\,\dot\theta^2 = g\,(\cos\theta - \cos\theta_{\mathrm{m}}). \tag{67}$$

Puisque $|\theta| \leqslant \theta_{\mathrm{m}}$, le signe du membre de droite est bien positif. Cette équation se réécrit

$$\frac{|\mathrm{d}\theta|}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\mathrm{m}}}} = \sqrt{\frac{2\,g}{\ell}}\,\mathrm{d}t,$$

où toute la dépendance dans la variable θ a été mise au membre de gauche, toute celle en t (ici triviale) au membre de droite. Comme au paragraphe précédent, supposons le pendule lâché à l'instant $t = 0$ avec une vitesse nulle d'un angle $\theta = -\theta_{\mathrm{m}} \leqslant 0$. Dans la première demi-oscillation du pendule, θ croît, donc $\mathrm{d}\theta \geqslant 0$. On peut résoudre l'équation en intégrant chaque membre :

$$\int_{\theta'=-\theta_{\mathrm{m}}}^{\theta} \frac{\mathrm{d}\theta'}{\sqrt{\cos\theta' - \cos\theta_{\mathrm{m}}}} = \sqrt{\frac{2\,g}{\ell}}\,t. \tag{68}$$

Il reste à calculer effectivement l'intégrale du membre de gauche et à en extraire la fonction cherchée $\theta(t)$. Cette intégration mène à des fonctions non élémentaires, dites fonctions elliptiques, et nous ne la poursuivrons pas ici. ⌟

VIII.E.3. Changement de variable

Dans certains cas, une équation linéaire à coefficients non constants peut se ramener, grâce à un changement de variable, à une équation à coefficients constants, qu'on sait résoudre assez aisément. C'est par exemple le cas des équations dites d'Euler, $\sum_{k=0}^{n} C_k\,x^k\,y^{(k)}(x) = 0$, étudiées pour $x > 0$, avec les C_k constants. Il suffit de poser $y(x) = z(t)$, avec $t = \ln x$.

Illustrons ceci avec l'équation $C_0\,y(x) + C_1\,x\,y'(x) + C_2\,x^2\,y''(x) = 0$. Notons avec un point les dérivées par rapport à t. On a

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot z}{x}$$

et

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}(\dot z/x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\dot z}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{x} + \dot z\,\frac{\mathrm{d}(1/x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\dot z}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{x} + \dot z\,\frac{-1}{x^2} = \frac{\ddot z - \dot z}{x^2},$$

soit, finalement, l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$C_0\,z(t) + (C_1 - C_2)\,\dot z + C_2\,\ddot z = 0.$$

VIII.E.4. Changement de la fonction inconnue

Il existe de nombreux cas où un changement judicieux de la fonction inconnue, solution cherchée de l'équation différentielle, simplifie considérablement la discussion. Il s'agit donc, étant donnée une équation différentielle satisfaite par une fonction $y(x)$, d'écrire et d'étudier l'équation différentielle qui en résulte pour la nouvelle fonction $z(x) = F(y[x])$.

Étudions par exemple l'équation de Riccati,

$$y' + a(x)\,y^2 + b(x)\,y + c(x) = 0. \tag{69}$$

Supposons qu'on connaisse une solution $y_0(x)$ et posons

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$$

avec une nouvelle fonction inconnue $z(x)$. En reportant cette expression dans (69) et en utilisant le fait que $y_0(x)$ satisfait elle-même (69), on obtient

$$-\frac{z'}{z^2} + a\left(2\,\frac{y_0}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{b}{z} = 0$$

(toutes les dépendances en x sont sous-entendues), soit l'équation *linéaire*

$$-z' + a\,(2\,y_0\,z + 1) + b\,z = 0, \tag{70}$$

à laquelle on applique les théorèmes et méthodes du § VIII.c.

Un autre exemple, celui de l'équation de Bernoulli, sera étudié en TD.

VIII.E.5. Résolution d'une équation différentielle par une série entière

Considérons, à titre d'exemple, le cas de l'équation d'Airy,

$$f''(x) = x\ f(x) \tag{71}$$

et cherchons-en une solution sous forme d'une série entière,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n,$$

où $x \in\ ]-R, R[$ et R est le rayon de convergence (à déterminer) de la série.

En dérivant terme à terme et en insérant dans (71), on trouve

$$2\ a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} ([n+1]\ [n+2]\ a_{n+2} - a_{n-1})\ x^n = 0,$$

soit, en identifiant à zéro le coefficient de chaque terme x^n,

$$a_2 = 0 \quad \text{et} \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)\ (n+2)} \ \text{pour } n \geqslant 1.$$

Par récurrence, on en déduit que $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{3\,k} = \frac{a_0}{\prod_{j=1}^{k} (3\ j-1)\ (3\ j)}, \qquad a_{3\,k+1} = \frac{a_1}{\prod_{j=1}^{k} (3\ j)\ (3\ j+1)} \quad \text{et} \quad a_{3\,k-1} = 0.$$

On a donc $f(x) = a_0\ (1 + f_0(x^3)) + a_1\ x\ (1 + f_1(x^3))$, avec

$$f_0 \colon x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\prod_{j=1}^{k} (3\ j-1)\ (3\ j)} \quad \text{et} \quad f_1 \colon x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\prod_{j=1}^{k} (3\ j)\ (3\ j+1)}.$$

Comme

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1/\prod_{j=1}^{k+1} (3\ j-1)\ (3\ j)}{1/\prod_{j=1}^{k} (3\ j-1)\ (3\ j)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(3\ k+2)\ (3\ k+3)} = 0,$$

le rayon de la série entière $f_0(x)$ est infini d'après la règle de d'Alembert ; de même pour $f_1(x)$. L'expression de f en fonction de f_0 et f_1 est donc valable pour tout x réel. Les paramètres a_0 et a_1 sont déterminés grâce aux conditions initiales : $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

On peut réécrire la solution sous la forme $f(x) = \lambda_1\ \mathrm{Ai}\,x + \lambda_2\ \mathrm{Bi}\,x$, où les *fonctions d'Airy*, $\mathrm{Ai}\,x$ et $\mathrm{Bi}\,x$, sont distinguées par leur comportement à l'infini : $\mathrm{Ai}\,x \to 0$ et $\mathrm{Bi}\,x \to \infty$. Elles interviennent dans des problèmes de physique, telle la description quantitative de l'arc-en-ciel…

Inversement, connaître l'équation différentielle satisfaite par la somme d'une série entière permet parfois de calculer cette somme. Considérons par exemple la somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^k \left(\frac{4}{8\ k+1} - \frac{2}{8\ k+4} - \frac{1}{8\ k+5} - \frac{1}{8\ k+6}\right). \tag{72}$$

On démontre aisément qu'elle est convergente (le vérifier !). Pour calculer sa somme, construisons la série entière

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^8}{16}\right)^k \left(\frac{4\ x}{8\ k+1} - \frac{2\ x^4}{8\ k+4} - \frac{x^5}{8\ k+5} - \frac{x^6}{8\ k+6}\right). \tag{73}$$

Vérifier les points suivants :

1. la série converge pour $|x| < \sqrt{2}$;
2. la fonction $S(x)$ satisfait
$$S'(x) = \frac{4 - 2\ x^3 - x^4 - x^5}{1 - x^8/16}$$
et $S(0) = 0$;
3. la fonction
$$\varphi(x) := -4\ \arctan(1-x) + 2\ \ln(2-x^2) - 2\ \ln(x^2 - 2\ x + 2)$$
satisfait $\phi'(x) = S'(x)$ et $\varphi(0) = -\pi$.

En conclure que $S(x) = \varphi(x) + \pi$, donc que la somme (72) cherchée est $S(1) = \varphi(1) + \pi = \pi$. On pourra utiliser un logiciel de calcul formel comme Mathematica pour vérifier le point 3.