Chapitre VI

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, nous allons combiner plusieurs des notions que nous avons traitées jusqu'à maintenant. Nous considérerons d'abord des suites et des séries de fonctions générales. Nous nous intéresserons ensuite à un cas particulier très utile en physique : les séries entières.

VI.a. Suites de fonctions

VI.a.1. Convergence simple, convergence uniforme

Définition 60

Soient A et B deux ensembles et f_n ($n \in \mathbb{N}$) des fonctions de A dans B (nous supposerons en fait que ce sont des applications dans ce chapitre).

On appelle *suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une application $n \in \mathbb{N} \mapsto f_n \in \mathcal{F}(A, B)$, où $\mathcal{F}(A, B)$ est l'ensemble des fonctions de A dans B. ⌟

Exemples : $x \mapsto f_n(x) = n \sin(x/n)$; $x \mapsto f_n(x) = n \sin x/(1 + n\, x)$.

Définition 61 (convergence simple)

Soient A et B des ensembles, (F, δ) un espace métrique contenant B, $(f_n : A \to B)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A, et f une application de A dans F.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* vers f dans (F, δ) si et seulement si la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B converge vers $f(x)$ dans (F, δ) pour tout x de A. ⌟

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers f sur A si et seulement si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \forall\, x \in A,\ \exists\, N(\epsilon, x) \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N(\epsilon, x) \Longrightarrow \delta(f_n(x), f(x)) \leqslant \epsilon, \tag{1}$$

où l'on a bien souligné que l'entier N dépend a priori de x (et de ϵ).

Cette condition de convergence est parfois trop faible. Par exemple, il n'est pas vrai en général que si les fonctions f_n sont continues et convergent simplement, leur limite f est continue.

Exemple 59

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par $f_n(x) = x^n$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout $x < 1$, $x^n \to 0$, tandis que pour $x = 1$, la valeur limite est 1. La fonction limite f est donc la fonction discontinue qui vaut 0 sur $[0, 1[$ et 1 en 1 (c'est la fonction $\mathrm{E}(x)$ définie p. 41, restreinte à l'intervalle $[0, 1]$). ⌟

En fait, la dépendance de N vis-à-vis de x dans (1) est souvent gênante et on a besoin d'une condition de convergence plus forte (c.-à-d. plus contraignante), où l'on impose à N d'être indépendant de x :

Définition 62 (convergence uniforme)

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *uniformément convergente* vers une fonction f sur A si et seulement si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in A,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow \delta(f_n(x), f(x)) \leqslant \epsilon. \tag{2}$$

On dit alors que f est la *limite uniforme* des f_n. ⌟

Remarque

On a donc convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur A si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in A}\delta(f_n(x),\ f(x))\right) = 0.$$

Théorème 76

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A.

L'inverse est en revanche faux : la convergence simple *n'implique pas* la convergence uniforme ; il faut bien noter et comprendre l'ordre distinct des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ dans les deux conditions (1) et (2) !

Exemple 60

Dans le cas des fonctions $x \mapsto f_n(x) = x^n$ définies sur l'intervalle $[0, 1]$ de l'exemple ci-dessus, la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $x \mapsto f(x) = \mathrm{E}(x)$ n'est pas uniforme, comme on va le montrer ci-après par l'absurde.

Il est instructif de le comprendre autrement. Montrons que $\forall\ a$ fixé, avec $0 \leqslant a < 1$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0, a]$. En effet,

$$\forall\ n \geqslant N,\ \forall\ x \in [0, a],\ |x^n - 0| = x^n \leqslant a^n \leqslant a^N, \tag{3}$$

par des inégalités triviales. Pour assurer que $|x^n - 0| \leqslant \epsilon$, il suffit de choisir N tel que $a^N \leqslant \epsilon$ ou encore, de façon équivalente, $N \geqslant \ln\epsilon/\ln a$, par exemple $N = \mathrm{E}(\ln\epsilon/\ln a) + 1$. Ce choix de N assure bien la convergence uniforme des f_n vers 0 dans l'intervalle $[0, a]$. Mais noter que ce N augmente sans limite quand a s'approche de 1. En conséquence, la convergence uniforme ne peut être maintenue sur tout l'intervalle $[0, 1[$, même ouvert à droite.

Exemple 61

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$f_n(x) = \begin{cases}(n-1)\ x & \text{si } x \in [0,\ 1/n],\\ 1 - x & \text{si } x \in [1/n,\ 1].\end{cases} \tag{4}$$

Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$, donc $\lim f_n(0) = 0$. Pour tout $x \neq 0$, il existe un n assez grand à partir duquel $f_n(x) = 1 - x$. La suite converge donc simplement vers la fonction discontinue telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = 1 - x$ si $x \neq 0$, mais la convergence *n'est pas* uniforme.

Exemple 62

Par contre, la suite des fonctions $x \mapsto f_n(x) = n\ \sin(x/n)$ converge uniformément vers $x \mapsto f(x) = x$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

En effet,

$$\left|f_n(x) - x\right| = x - n\ \sin\!\left(\frac{x}{n}\right) = n\ \left(\frac{x}{n} - \sin\!\left(\frac{x}{n}\right)\right) \leqslant \frac{x^3}{6\ n^2} \leqslant \frac{1}{6\ n^2} \tag{5}$$

quel que soit $x \in [0, 1]$. On peut démontrer l'inégalité $\phi(\alpha) := \sin\alpha - \alpha + \alpha^3/6 \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in [0,\ 1/n]$ utilisée dans cet argument en étudiant les fonctions dérivées $\phi'(\alpha)$ et $\phi''(\alpha)$. On peut également utiliser la formule de Taylor-Lagrange : $\sin\alpha = \alpha - \alpha^3/6 + c^5/5!$, où $c \in\ ]0,\ 1/n[$, donc $\sin\alpha - \alpha + \alpha^3/6 \geqslant 0$.

Exercice

Montrer que les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $f_n(x) := \sum_{p=1}^{n} x^p/p!$ et $g_n(x) := (1 + x/n)^n$, convergent pour tout x réel vers la fonction exponentielle, $x \mapsto \mathrm{e}^x$. La convergence est-elle uniforme ?

Théorème 77 (critère de Cauchy uniforme)

Soient A un ensemble, (F, δ) un espace métrique *complet* et $(f_n\colon A \to B \subset F)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.

Il existe une application $f\colon A \to F$ vers laquelle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A si et seulement si

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in A,\ \forall\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ (n \geqslant N,\ p \geqslant N) \Longrightarrow \delta(f_n(x),\ f_p(x)) \leqslant \epsilon.$$

Une des motivations principales de la définition de convergence uniforme est contenue dans le théorème suivant :

Théorème 78 (continuité de la limite uniforme)

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, A une partie de E, B une partie de F, $x_0 \in A$, et $(f_n\colon A \to B)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A convergeant uniformément vers une application $f\colon A \to F$.

Si les f_n sont continues en x_0 (resp. sur A), f est continue en x_0 (resp. sur A).

Preuve
Montrons la continuité de f en tout $x_0 \in A$. Par la convergence uniforme,

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N,\ \forall\, n \geqslant N,\ x \in A \Longrightarrow \delta(f_n(x),\, f(x)) \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Ceci est vrai pour tout $x \in A$, y compris pour x_0, donc

$$\forall\, n \geqslant N,\ \delta(f_n(x_0),\, f(x_0)) \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Choisissons un tel $n \geqslant N$. La continuité de f_n dit que

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \eta,\ \forall\, x \in A,\ d(x_0,\, x) \leqslant \eta \Longrightarrow \delta(f_n(x),\, f_n(x_0)) \leqslant \frac{\epsilon}{3}$$

et l'inégalité triangulaire dit alors que

$$\begin{aligned}\delta(f(x),\, f(x_0)) &\leqslant \delta(f(x),\, f_n(x)) + \delta(f_n(x),\, f_n(x_0)) + \delta(f_n(x_0),\, f(x_0))\\ &\leqslant \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ⌟

VI.A.2. Interversion d'opérations

Les opérations de limite, de sommation infinie, d'intégration et de dérivation ne commutent que sous certaines conditions. Intéressons-nous tout d'abord au cas d'une double limite, plus précisément à l'interversion d'une limite de suite et d'une limite de fonctions.

Exemple 63
Considérons la suite des fonctions f_n définies par

$$f_n(x) = \mathrm{th}(n\ x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\,n\,x}}{1 + \mathrm{e}^{-2\,n\,x}},$$

et étudions sa limite quand $x \to 0$ et $n \to \infty$. Nous avons $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$, donc

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl(\lim_{x\to 0} f_n(x)\Bigr) = 0,$$

tandis que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \operatorname{sgn} x$ (la « fonction saut » ; voir figure VI.1) :

$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr)$$

n'est donc pas définie. ⌟

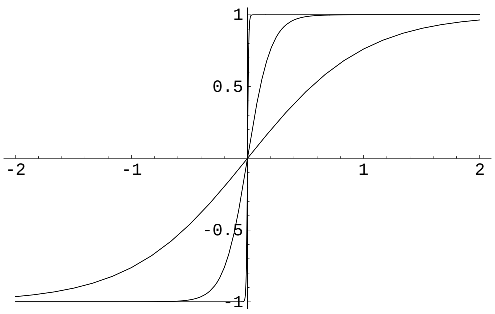

Figure VI.1. La fonction th(n x) pour n = 1, 5 et 100.

Cette situation se rencontre aussi en physique. C'est ainsi qu'en mécanique statistique, où l'on s'intéresse aux propriétés de systèmes constitués d'un grand nombre d'éléments, il faut faire attention à l'ordre des limites. Considérons par exemple la question de l'*aimantation spontanée* d'un ferromagnétique. Un système de N moments magnétiques m_i est soumis à un champ magnétique h, qui tend à aligner ces moments et conduit à l'apparition d'une aimantation moyenne $M(h, N) = \sum m_i / N$. L'aimantation spontanée est la limite de cette aimantation quand $h \to 0$. On démontre qu'à N fini, $\lim_{h\to 0} M = 0$, tandis que certains systèmes sont tels que $\lim_{N\to\infty} M(h, N)$ existe et demeure finie quand $h \to 0$.

En fait, bien sûr, un nombre d'atomes, de particules, etc., n'est jamais strictement infini, mais seulement colossalement grand, de l'ordre du nombre d'Avogadro $\mathcal{N} \approx 6 \times 10^{23}$. Dans l'exemple précédent, il faut donc comprendre que N est si grand que les quantités physiques envisagées ne diffèrent de celles pour N infini que dans des intervalles de valeur des variables (ici le champ) extrêmement faibles. La fonction de la figure VI.1 en donne un exemple : l'intervalle où la fonction diffère de la fonction saut est de l'ordre de $|\Delta x| \approx 1/N$.

Après ce contre-exemple, donnons quelques théorèmes énonçant des conditions suffisantes pour intervertir des opérations :

Théorème 79 (double limite)

Soient (E, d) un espace métrique, A une partie de E, $a \in \mathrm{adh}_{(E,\, d)} A$, B une partie d'un espace métrique *complet* (F, δ), $(f_n\colon A \to B)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A, et $f\colon A \to F$ une application.

Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur A et si la fonction $f_n(x)$ converge vers l'élément $\phi_n \in F$ quand $x \to a$, alors

- $\lim_{n\to\infty} \phi_n$ existe (dans F) ;
- $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (dans F) ; et
- $$\lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to a} f_n(x)\Big) = \lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big).$$

⌟

Théorème 80 (dérivation)

Les fonctions f_n sont ici définies et dérivables sur un intervalle I. F est en outre supposé *complet*.

Si la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en un point $x_0 \in I$ et si la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément* sur I, alors

- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f dérivable sur I ;
- cette convergence est uniforme sur tout intervalle fermé $[a, b] \subset I$;
- $$\lim_{n\to\infty} f_n' = \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)' \; (= f').$$

⌟

Remarque

La condition de convergence uniforme est sur (f_n'), pas (f_n). ⌟

Théorème 81 (intégration)

Les fonctions f_n sont ici définies et continues sur un intervalle $[a, b]$. F est en outre supposé *complet*.

Soit $x_0 \in [a, b]$. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors

- f admet une primitive sur $[a, b]$;
- $$\forall\, x \in [a, b], \quad \lim_{n\to\infty}\Big(\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_{x_0}^{x}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t\ ;$$
- cette convergence est uniforme. ⌟

Preuve

Les (f_n) étant continues et convergeant uniformément vers f, f est continue, donc admet une primitive ; les (f_n) aussi d'après l'hypothèse de continuité.

Soit $g(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $g_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ ces primitives. Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $g_n(x_0) = 0$, la suite $(g_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers zéro !). On peut donc appliquer le théorème sur la dérivation en remplaçant f_n' par f_n et f_n par g_n. ⌟

Remarque

Si les f_n sont seulement intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$ (pas nécessairement continues), f est intégrable au sens de Riemann et

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_{a}^{b} f_n(t)\,\mathrm{d}t\Big) = \int_{a}^{b}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t.$$

⌟

VI.B. Séries de fonctions

Définition 63

Soient A et B deux ensembles, F un espace vectoriel contenant B et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans B.

On appelle série de fonctions $\sum f_n$ la suite $n \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k \in \mathcal{F}(A, F)$. ⌟

Les considérations concernant les suites de fonctions s'appliquent aux séries de fonctions $\sum f_n$. On définit pour elles les notions de convergence simple et de convergence uniforme de la même façon qu'on l'a fait pour les suites de fonctions, en les appliquant aux sommes partielles $S_n \colon n \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k$ et en remplaçant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\sum f_n$ et $\lim_{n\to\infty}$ par $\sum^{\infty}$, en particulier $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ par $S := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Les théorèmes relatifs aux suites de fonctions se transposent donc sans difficulté au cas des séries de fonctions. Par exemple, si les f_n sont des fonctions continues, la suite des sommes partielles $\sum f_n$ l'est aussi ; si $\sum f_n$ converge uniformément vers S, la fonction S est donc continue. De même pour les théorèmes d'interversion de $\sum_{n=0}^{\infty}$ avec $\lim_{x\to a}$, la dérivation et l'intégration puisque ces opérations sont linéaires.

Définition 64 (convergence normale)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur A. On dit que $\sum f_n$ est *normalement convergente* sur A si il existe une suite (u_n) de réels positifs tels que $\forall\ x \in A$, $\|f_n(x)\| \leqslant u_n$ et $\sum u_n$ soit convergente. ⌟

$\sum f_n$ est donc normalement convergente sur A si $\sum \sup_{x\in A} \|f_n(x)\|$ est convergente.

Le théorème suivant permet souvent de démontrer la convergence uniforme d'une série de fonctions.

Théorème 82 (critère de Weierstrass)

Soit F un espace vectoriel normé complet.

Si $\sum f_n$ est normalement convergente sur A, $\sum f_n$ est uniformément convergente sur A. ⌟

La réciproque est fausse.

Preuve

Il suffit de montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est uniformément de Cauchy. $\sum u_n$ est convergente, donc de Cauchy, c.-à-d. que

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall\ (n, p) \in \mathbb{N}^2, (p > n \geqslant N) \Longrightarrow \Big|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\Big| = \sum_{k=n+1}^{p} u_k \leqslant \epsilon.$$

Or, $\forall\ x \in A$,

$$\|S_n(x) - S_p(x)\| = \Big\|\sum_{k=n+1}^{p} f_k(x)\Big\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \|f_k(x)\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} u_k \leqslant \epsilon.$$

⌟

VI.C. Séries entières

VI.C.1. Convergence d'une série entière

Définition 65

On pose ici $0^0 := 1$.

Une série de fonctions de la forme $(z \mapsto \sum a_n\, z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où les a_n et z sont réels ou complexes, est appelée une *série entière*. ⌟

Définition 66

On appelle *domaine de convergence* l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}\ (\text{ou } \mathbb{R}) \mid \sum a_n\, z^n \text{ converge}\}$.

On appelle *rayon de convergence* l'élément R de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ défini par $R = \sup\{r \geqslant 0 \mid \sum(|a_n|\, r^n) \text{ converge}\}$. ⌟

Attention, la définition de R ne dit pas que $\sum(|a_n|\, R^n)$ converge.

Théorème 83

Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence R :

- $\forall\ z, |z| < R \Longrightarrow \sum a_n\, z^n$ converge absolument ;
- $\forall\ z, |z| > R \Longrightarrow \sum a_n\, z^n$ diverge.

Le disque *ouvert* de centre 0 et de rayon R ($\{z \in \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R} \mid |z| < R\}$) porte le nom de *disque de convergence*.

$\sum a_n z^n$ converge *normalement* sur tout disque *fermé* de rayon $r < R$ et de centre 0, c.-à-d. sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{R} \mid |z| \leqslant r\}$. ⌟

Si z est réel, le disque de convergence se réduit à l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

Théorème 84

Si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors $R = 1/\ell$ (règle de Cauchy).
De même, si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ (règle de d'Alembert). ⌟

Exemple 64

Quelques exemples de séries entières réelles :

1. On a vu ci-dessus que $\sum x^n/n!$ est convergente pour tout réel x, puisque $\ell = 0$;
2. À l'inverse, pour $\sum x^n\, n!$, on a $\ell = \infty$, donc la série ne converge qu'en 0 ;
3. $\sum (x/r)^n$, $r \neq 0$. On a $\ell = 1/r$, donc un rayon de convergence $R = r$. Pour $|x| = r$, la série ne converge en aucun point (puisque le terme d'ordre n ne s'annule pas) ;
4. Pour $\sum x^n/n$, $R = 1$. Dans ce cas, on connaît déjà la nature de la série quand $|x| = R$. En $x = 1$, la série diverge ; en $x = -1$, elle converge (cf. séries alternées) vers $\ln 2$;
5. Pour $\sum x^n/n^2$, $R = 1$. Pour $x = \pm 1$, il y a convergence absolue ;
6. Pour $\sum n\, x^n$, $R = 1$. La série diverge pour $x = \pm 1$. ⌟

Il ressort de cette série d'exemples que le comportement sur le bord de l'intervalle de convergence est une question délicate, à étudier avec soin.

Théorème 85

Une série entière est continue en tout point de son disque de convergence. ⌟

Preuve

Les fonctions $z \mapsto z^n$ sont continues sur C, donc les sommes partielles $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k$ aussi. Pour tout z tel que $|z| < R$, il existe r tel que $|z| < r < R$. Or $\sum a_n z^n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur tout disque fermé de rayon $r < R$. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ est donc continue en z. ⌟

Posons $x = z$ et supposons x et les a_n réels[※1]. En intégrant terme à terme la série $\sum a_n t^n$ de 0 à x, ce qui ne pose pas de problème si $|x| < R$ puisque $\sum a_n t^n$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $[-r, r] \ni x$ si $r < R$, on obtient le résultat suivant :

Théorème 86

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon R et $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

La série entière $\sum (a_n/(n+1))\, x^{n+1}$ converge pour $|x| < R$ vers $\int_0^x S(t)\, \mathrm{d}t$; son rayon de convergence est R. ⌟

De même, pour la dérivation :

Théorème 87

La série entière $\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n\, x^{n-1}$ converge pour $|x| < R$ vers $S'(x)$; son rayon de convergence est R. ⌟

Exemple 65

En intégrant terme à terme entre 0 et x la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, qui converge vers $1/(1+x)$ pour $x \in]-1, 1[$, on obtient

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \tag{6}$$

qui converge pour $|x| < 1$. Pour $x = 1$, la série converge encore (voir TD). On a donc $1 - 1/2 + 1/3 - \cdots = \ln 2$. ⌟

1. Les résultats sur l'intégration et la dérivation de séries entières réelles sont applicables aux séries complexes, mais les concepts d'intégrale et de dérivation complexes sont hors programme.

VI.c.2. Séries de Taylor

On peut donc dériver terme à terme une série entière à l'intérieur de son disque de convergence (pour x réel, $|x| < R$), puis dériver à nouveau, etc. On obtient

$$\forall\ x \in\ ]-R,\ R[,\quad S^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k\ (k-1)\cdots(k-n+1)\ a_k\ x^{k-n}.$$

En particulier,

$$S^{(n)}(0) = n\ (n-1)\cdots(n-n+1)\ a_n\ x^{n-n} = n!\ a_n.$$

Pour tout $x \in\ ]-R,\ R[$, une série entière s'identifie donc à son développement en *série de Taylor(-Mac-Laurin)*,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!}\ x^n. \tag{7}$$

Remarquer qu'il s'agit d'un développement *illimité*.

Soit f une fonction de la variable réelle x, indéfiniment dérivable au voisinage de 0. On peut écrire *formellement* son développement en série de Taylor,

$$f(0) + x\ f'(0) + \frac{x^2}{2}\ f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\ f^{(n)}(0) + \cdots\ . \tag{8}$$

Deux questions se posent alors :

1. Cette série entière converge-t-elle sur un certain domaine ?
2. Si oui, sa somme vaut-elle $f(x)$ sur tout ou partie de ce domaine ?

Nous ne poursuivrons pas plus loin la discussion de ce problème important, qui prend tout son sens avec l'étude du comportement de la série et des singularités de la fonction pour des valeurs complexes de la variable x.

Insistons seulement sur le caractère nécessaire de l'existence (et donc de la continuité) de toutes les dérivées de f en 0 (f doit être de classe C^∞). Par exemple, les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ ne sont pas développables en série de Taylor au voisinage de 0.

Inversement, le développement de Taylor de f peut avoir un rayon de convergence non nul mais ne pas représenter la fonction f. Considérons la fonction définie par $f(0) = 0$, $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$. Comme e^{-1/x^2} tend vers zéro plus vite que toute puissance de x, c.-à-d. $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-1/x^2}/x^p = 0$ pour tout p, la fonction f est continue et indéfiniment dérivable en 0 et toutes ses dérivées y sont nulles ! Il est clair que son développement de Taylor ($\sum 0 \times x^n$) est convergent vers 0 pour toute valeur de x, mais que ce développement ne converge nulle part vers $f(x)$ sauf en $x = 0$. Cela est dû au comportement très singulier de la fonction en 0. Pour le voir, effectuons une petite incursion dans le plan complexe : pour $x = \mathrm{i}\ t$, la fonction vaut e^{1/t^2}, qui explose au voisinage de 0 (on parle de singularité essentielle) !

VI.c.3. Séries entières usuelles

- $\forall\ z \in \mathbb{C},\quad \exp z = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$
- $\forall\ z \in \mathbb{C},\quad \cos z = \sum_0^{\infty} (-1)^n\ \frac{z^{2\,n}}{(2\,n)!}.$
- $\forall\ z \in \mathbb{C},\quad \sin z = \sum_0^{\infty} (-1)^n\ \frac{z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$
- $\forall\ z \in \mathbb{C},\quad \mathrm{ch}\, z = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2\,n}}{(2\,n)!}.$
- $\forall\ z \in \mathbb{C},\quad \mathrm{sh}\, z = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$
- $\forall\ z \in \mathbb{C},\quad |z| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{1+z} = \sum_0^{\infty} (-1)^n\ z^n.$
- $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad |x| < 1 \Longrightarrow \ln(1+z) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1}\ \frac{x^n}{n};$ ce développement est également valable en $x = 1$.

- $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad |x| < 1 \Longrightarrow \arctan x = \sum_0^\infty (-1)^n\, \dfrac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}$; ce développement est également valable en $x = 1$.
- $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad |x| < 1 \Longrightarrow \operatorname{argth} x = \sum_0^\infty \dfrac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}$.
- $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\quad |x| < 1 \Longrightarrow (1+x)^\alpha = \sum_0^\infty C_\alpha^n\, x^n$,

  où $C_\alpha^n = \alpha\,\big(\alpha-1\big)\cdots\big(\alpha-(n-2)\big)\,\big(\alpha-(n-1)\big)/n!$ si $n \neq 0$ et $C_\alpha^0 = 1$.