# Chapitre III

# Séries

## III.a. Introduction

**Définition 31 (série)**

Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{N}$ dans un $K$-espace vectoriel normé $E$. La *somme partielle*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \tag{1}$$

définit une nouvelle suite, $(S_n)$, notée $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou simplement $\sum u_n$, et appelée *série* de terme général $u_n$, qui à tout $n$ de $\mathbb{N}$ associe $S_n \in E$.

Si cette série converge, on note

$$S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} S_n \tag{2}$$

sa somme. Le *reste* d'ordre $n$, $R_n := S_\infty - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}$, est alors défini et tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Si $E = \mathbb{R}$, on notera parfois de manière abusive $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \pm\infty$ quand $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$. ⌟

Pour une série commençant à $n_0 \geqslant 1$, on notera $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$, ou $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ si $n_0 = 1$.

***Exemple 16 (série géométrique)***

La série de terme général $u_n = a^n$ ($a \in \mathbb{C}$) a des sommes partielles données par

$$S_n = 1 + a + a^2 + \cdots a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \text{ si } a \neq 1. \tag{3}$$

La somme partielle $S_n$ a pour limite $1/(1 - a)$ si $|a| < 1$ (puisqu'alors $a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$).

Elle ne converge pas si $|a| \geqslant 1$ :

- En effet, si $|a| > 1$, $|a|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
- Si $a = 1$, on a $S_n = n + 1$ : la série est évidemment divergente.
- Si $|a| = 1$, mais que $a \neq 1$, on a $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ avec $\theta \neq 0 \pmod{2\,\pi}$, soit $a^{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)\,\theta}$ : $a^{n+1}$ ne converge pas (le point représentatif de $a^{n+1}$ dans le plan complexe tourne sur le cercle de rayon 1 et de centre 0), donc $S_n$ non plus. ⌟

**Théorème 27**

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes,

- $\sum(u_n + v_n)$ converge vers $\sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ ;
- $\forall\ \lambda \in K$, $\sum \lambda\ u_n$ converge vers $\lambda\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. ⌟

**Théorème 28**

Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, $\sum(u_n + v_n)$ est divergente. ⌟

Par contre, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont toutes deux divergentes, $\sum(u_n + v_n)$ peut être convergente ou divergente selon les cas.

Notons que prouver la convergence d'une série est une chose, déterminer sa somme en est une autre. Il s'agit souvent d'une tâche ardue. On verra au chapitre VII et en TD des exemples de séries convergeant vers des valeurs comme $\pi^2/6$, $\pi^2/4$, etc. En voici un autre :

*Exemple 17*
La série
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^k\left(\frac{4}{8\,k+1}-\frac{2}{8\,k+4}-\frac{1}{8\,k+5}-\frac{1}{8\,k+6}\right) \tag{4}$$
converge (démonstration facile) très vite (comme $1/(16^k\,k^2)$) vers... $\pi$. Vérifiez-le avec votre calculette ! ⌟

**Théorème 29 (série télescopique)**
Soient $(u_n)$ une suite et $(v_n)$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.
$(u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge. ⌟

*Preuve*
$\sum_{k=0}^{n} v_k = u_{n+1} - u_0$. ⌟

*Exemple 18 (série harmonique)*
Montrons ainsi que $n \mapsto u_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \ln n$ converge (sa limite est la « constante d'Euler », habituellement notée $\gamma$ et valant $\gamma \approx 0{,}577$).
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \left(-\frac{1}{n+1} + O\left[\frac{1}{(n+1)^2}\right]\right) = O\left(\frac{1}{[n+1]^2}\right).$$
La série $\sum 1/(n+1)^2$ convergeant (cf. ex. 19 et th. 37), $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $u_n$ aussi.
La série harmonique, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1/n$, est donc asymptotiquement équivalente à $\ln n$, c.-à-d. divergente. ⌟

## III.A.1. Modification de la série

**Théorème 30 (regroupement de termes consécutifs)**
Soit $\sum u_n$ une série convergente et $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $\phi(0) = 0$. Notons $v_n = \sum_{k=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} u_k$ un regroupement de termes $u_k$ consécutifs.
La série $\sum v_n$ converge et a la même limite que $\sum u_n$. ⌟

*Remarque*
La convergence de $\sum u_n$ entraîne celle de $\sum v_n$, mais la réciproque est fausse. Par exemple, la série de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente, puisque les sommes partielles oscillent entre $S_{2\,n-1} = -1$ et $S_{2\,n} = 0$, tandis que la série de terme général $v_n = u_{2\,n-1} + u_{2\,n} = 0$, où l'on a regroupé chaque terme d'ordre impair avec le terme consécutif, est évidemment convergente ! ⌟

En général, si on change l'ordre des termes (permutation) ou qu'on les regroupe, on ne peut plus rien affirmer sur la nature (convergente ou divergente) de la série originelle.
Par contre, si on ne modifie, permute ou regroupe qu'un nombre *fini* de termes, on ne change pas la nature de la série, ni, dans le cas d'une permutation ou d'un regroupement, sa limite.

**Théorème 31 (supression de termes nuls)**
Soit $\sum u_n$ une série et $(v_n)$ la suite $(u_n)$ à laquelle on a retranché les termes nuls.
La série $\sum v_n$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge. Si $\sum u_n$ a une limite (éventuellement infinie), $\sum v_n$ a la même limite, et inversement. ⌟

## III.A.2. Divergence grossière

On a vu que toute suite convergente est de Cauchy (cf. § II, th. 24). Appliqué à une série, ceci permet de dire que si $\sum u_n$ est convergente, alors
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ (m,\,n) \in \mathbb{N}^2,\ n > m \geqslant N \Longrightarrow \Bigg\|\underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} u_k}_{S_n - S_m}\Bigg\| \leqslant \epsilon.$$
On a en particulier le théorème suivant :

**Théorème 32**
Si $\sum u_n$ est convergente, la suite $(u_n = S_n - S_{n-1})$ tend nécessairement vers 0. Inversement, si $\lim u_n \neq 0$, la série $\sum u_n$ est divergente ; on dit alors qu'elle est *grossièrement divergente*. ⌟

La condition $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ est nécessaire mais *pas suffisante* pour que $\sum u_n$ converge. Nous allons en effet rencontrer de nombreux exemples de séries dont le terme général $u_n$ tend vers zéro quand $n \to \infty$, mais pas assez vite pour assurer la convergence de la série $\sum u_n$. Exemple : la *série harmonique* $\sum 1/n$, dont on a montré qu'elle divergeait.

## III.B. Séries à termes positifs

On suppose dans cette section que $u_n$ est une suite de réels *positifs* (éventuellement à partir d'un ordre fini, ce qui ne modifie rien à la convergence). La suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ (somme partielle) est croissante, donc on a le théorème suivant :

**Théorème 33**
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.
$\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum u_n$ est majorée. Sinon, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$. ⌟

**Théorème 34 (comparaison série-intégrale)**
Soit $f\colon [a, +\infty[ \to \mathbb{R}^+$ une application *décroissante* et $u_n = f(n)$ :

- $\displaystyle\sum u_n$ converge $\iff$ l'intégrale impropre (cf. § V.D.2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ existe ;
- $\displaystyle\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \left(\forall\ n_0 \in \mathbb{N},\ n_0 \geqslant a \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=n_0}^{n} u_k - \int_a^n f\right] \text{ existe et est finie}\right)$. ⌟

***Exemple 19 (Séries de Riemann)***
La série, dite de Riemann, $\sum_{n\geqslant 1}(1/n^\alpha)$ converge si et seulement si l'intégrale[※1] $\int_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe.

$$\int_{t=1}^{x} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln x & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

En faisant tendre $x$ vers l'infini, on constate que l'intégrale ne converge que si $\alpha > 1$, donc

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

⌟

**Théorème 35**
Pour la *comparaison* de séries à termes positifs, nous avons les résultats suivants (les inégalités doivent être valables à partir d'un certain rang) :

1. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$,
   - $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge ;
   - $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge ;
2. Si $0 < a \leqslant u_n/v_n \leqslant b < \infty$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature ;
3. Si $u_n/v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$ (c.-à-d. $u_n \simeq c\ v_n$) avec $c$ fini et $c \neq 0$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature ;
4. - Si $u_{n+1}/u_n \leqslant k < 1$, $\sum u_n$ converge ;
   - Si $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$, $\sum u_n$ diverge ;
5. Si $u_{n+1}/u_n \leqslant v_{n+1}/v_n$, $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge. ⌟

***Preuve***
Les preuves s'établissent par des majorations ou minorations. Intéressons-nous par exemple à la règle 4.
Dans le premier cas, à partir d'un certain rang $p$, $u_n < k^{n-p}\ u_p = v_n$ ; $v_n$ est une suite géométrique de raison $k < 1$, donc $\sum v_n$ est convergente et, par application de la règle 1, $\sum u_n$ aussi.
Dans le deuxième cas, $\forall\ n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$ : $u_n$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge. ⌟

***Exemple 20***
On prend comme référence la série de terme général $v_n = 1/n^\alpha$ : si $0 < a \leqslant n^\alpha\ u_n \leqslant b < \infty$ (th. 35, cas 2) ou si $\lim n^\alpha\ u_n = c \neq 0$ (même th., cas 3), $\sum u_n$ est convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $\alpha \leqslant 1$.

1. Par analogie avec les séries de Riemann, on pourrait être tenté d'appeler « intégrales de Riemann » les intégrales *impropres* $\int_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$, mais ce terme est déjà préempté pour désigner toute intégrale *définie* (c.-à-d. « propre ») calculée *au sens de Riemann*.

Si $\lim(n^\alpha\, u_n) = 0$, $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$, mais on ne peut pas conclure si $\alpha \leqslant 1$. De même, si $\lim(n^\alpha\, u_n) = \infty$, $\sum u_n$ diverge si $\alpha \leqslant 1$, mais on ne peut pas conclure si $\alpha > 1$.

***Exemple 21 (règle de Cauchy)***

On prend comme référence la série de terme général $v_n = a^n$, qui converge si $a < 1$ et diverge si $a \geqslant 1$. Donc

- si $u_n^{1/n} \geqslant 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.
  En effet, $u_n \geqslant v_n = 1^n$ ; $\sum v_n$ diverge, donc $\sum u_n$ aussi, d'après le th. 35, cas 1, 2e point ;
- si $u_n^{1/n} \leqslant k < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.
  En effet, $u_n \leqslant v_n = k^n$ ; $k < 1$, donc $\sum v_n$ converge, et $\sum u_n$ aussi d'après le th. 35, cas 1, 2e point ;
- si $\lim u_n^{1/n} = \ell$, $\sum u_n$ est divergente si $\ell > 1$ et convergente si $\ell < 1$.
  Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure si $u_n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1^-$ ; dans les autres cas ($u_n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1^+$ ou $u_n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ en oscillant), $\sum u_n$ diverge.

Voici quelques exemples d'application de la règle de Cauchy :

1. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+a}\right)^{n^2}$.
   $u_n^{1/n} = (1 + a/n)^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-a}$ (cf. l'exemple 13 du chapitre II). Si $a > 0$, alors $\mathrm{e}^{-a} < 1$, donc $\sum u_n$ est convergente ; si $a \leqslant 0$, $\sum u_n$ est divergente (puisque $u_n$ ne tend pas vers zéro pour $a = 0$).
2. $u_n = a^n/n!$, avec $a$ un réel donné.
   Pour un entier $m < n$ et supérieur à $|a|$, on a
   $$|u_n| = \frac{1}{m!}\,\frac{|a|^n}{(m+1)\cdots n} < \frac{m^m}{m!}\,\frac{|a|^n}{m^n},$$
   d'où
   $$u_n^{1/n} < \frac{|a|}{m}\left(\frac{m^m}{m!}\right)^{1/n}.$$
   Le terme de doite tendant vers $|a|/m < 1$, il y a convergence quel que soit $a$. On peut en outre montrer que $\ell := \lim u_n^{1/n} = 0$.
   Cette série a pour somme le nombre $\mathrm{e}^a$ (cf. le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$, § VI.c.3).

***Exemple 22 (règle de d'Alembert)***

Si $u_{n+1}/u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, on obtient les mêmes résultats que pour la règle de Cauchy puisque $u_{n+1}/u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \Longrightarrow u_n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ (cf. th. 17). ⌟

**Théorème 36 (règle de Riemann)**

Soit $(u_n) \geqslant 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tels que $n^\alpha\, u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ :

- si $\alpha > 1$ et $\ell \neq +\infty$, $\sum u_n$ converge ;
- si $\alpha \leqslant 1$ et $\ell \neq 0$, $\sum u_n$ diverge. ⌟

**Théorème 37 (étude asymptotique)**

Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs et $\sum u_n$ une série de réels quelconques.

- Si $\sum v_n$ converge,
  $$u_n = O(v_n) \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge et } \sum_{k=n}^{\infty} u_k = O\Big(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\Big) \text{ quand } n \to \infty.$$
  On obtient la même chose en remplaçant « $= O(\ldots)$ » par « $= o(\ldots)$ » ou « $\simeq$ » à gauche et à droite de « $\Longrightarrow$ »[※2].
- Si $\sum v_n$ diverge,
  $$u_n = O(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = O\Big(\sum_{k=0}^{n} v_k\Big) \text{ quand } n \to \infty.$$

2. Noter que le résultat est sur le *reste* de la série, $\sum_{k=n}^{\infty}$, pas sur la somme des $n$ premiers termes.

On obtient la même chose en remplaçant « $= O(\ldots)$ » par « $= o(\ldots)$ » ou « $\simeq$ » à gauche et à droite de « $\Longrightarrow$ » ※3.

En outre, si $u_n \simeq v_n$, la série $\sum u_n$ diverge. ⌟

***Récapitulatif***

Pour décider de la convergence ou de la divergence d'une série **à termes positifs**,

- vérifier que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Sinon, $\sum u_n$ est grossièrement divergente ;
- chercher un équivalent plus simple de $u_n$ ;
- majorer par une série convergente ou minorer par une série divergente ;
- comparer à une série connue ($\sum n^{-\alpha}$, $\sum a^n\ldots$). ⌟

## III.c. Convergence absolue, semi-convergence

**Définition 32 (convergence absolue)**

Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum \|u_n\|$ converge. ⌟

En utilisant le critère de Cauchy et l'inégalité triangulaire, on montre qu'une série absolument convergente est aussi convergente tout court :

**Théorème 38**

Soit $\sum u_n$ une série dans un espace vectoriel normé complet $E$.

$$\sum \|u_n\| \text{ convergente} \Longrightarrow \sum u_n \text{ convergente et } \left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|. \tag{5}$$

⌟

***Preuve***

Si $\sum \|u_n\|$ est convergente, elle est de Cauchy :

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^2\ p \geqslant n \geqslant N \Longrightarrow \left|\sum_{k=0}^{p} \|u_k\| - \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|\right| := \sum_{k=n+1}^{p} \|u_k\| \leqslant \epsilon.$$

Or $\left\|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \|u_k\|$, donc $\left\|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right\| \leqslant \epsilon$ : la série $\sum u_n$ est donc de Cauchy dans $E$. L'espace $E$ étant complet, $\sum u_n$ converge. ⌟

*La réciproque est fausse.*

On déduit du théorème ci-dessus le corollaire suivant :

**Théorème 39**

Les résultats du théorème 37 sont encore valables si les $u_n$ appartiennent à un espace vectoriel normé complet $E$. ⌟

**Définition 33 (semi-convergence)**

Une série convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente. ⌟

***Exemple 23***

$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}/n\right)$ est finie (et vaut $\ln 2$ ; voir TD), tandis que la série harmonique $\sum 1/n$ est divergente. ⌟

Évidemment, les séries à termes positifs convergentes sont aussi absolument convergentes.

### III.c.1. Convergence commutative

Une propriété remarquable des séries absolument convergentes est qu'on a maintenant le droit de changer l'ordre des termes :

3. Noter que le résultat est cette fois-ci sur la somme des $n$ premiers termes, pas sur le reste (qui n'est d'ailleurs pas défini pour $v_n$ puisque que $\sum v_n$ diverge).

**Théorème 40 (convergence commutative)**
Soient $E$ un espace vectoriel normé complet et $\sum u_n$ une série absolument convergente.
Quelle que soit la permutation $\sigma$ de $\mathbb{N}$ (c.-à-d. la bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. ⌟

*Preuve (hors programme)*
**Absolue convergence de $\sum u_{\sigma(n)}$.** Soit $N = \max_{k\in[\![0,\, n]\!]} \sigma(k)$. Puisque $\sigma$ est une bijection et que $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $\sigma(k) \in [\![0, N]\!]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \|u_{\sigma(k)}\| \leqslant \sum_{k=0}^{N} \|u_k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|.$$

Cette dernière somme existe car $\sum u_n$ est absolument convergente. La série $\sum \|u_{\sigma(n)}\|$ est une série à termes positifs majorée, donc convergente. La série $\sum u_{\sigma(n)}$ est donc absolument convergente.

**Égalité des limites.** Posons $p = \max_{k\in[\![0,\, n]\!]} \sigma^{\langle -1\rangle}(k)$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\sigma^{\langle -1\rangle}(k) \in [\![0, p]\!]$, donc $[\![0, n]\!] \subset \sigma([\![0, p]\!])$. Comme $\operatorname{card}([\![0, n]\!]) = n + 1$ et $\operatorname{card}(\sigma([\![0, p]\!])) = p + 1$ (puisque $\sigma$ est une bijection), on a $p \geqslant n$.
Soit $A = \sigma([\![0, p]\!]) \setminus [\![0, n]\!]$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p} u_{\sigma(k)} = \sum_{k\in A} u_k$$

et

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p} u_{\sigma(k)}\right\| \leqslant \sum_{k\in A} \|u_k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|,$$

puisque $A \subset [\![n + 1, +\infty[\![$ et que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|$ existe.
Quand $n \to \infty$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to\infty]{} S_\infty$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ; $p$ tend également vers $\infty$, car $p \geqslant n$, donc $\sum_{k=0}^{p} u_{\sigma(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} S_\infty$. ⌟

Inversement, si $E$ est de dimension finie, la convergence commutative implique la convergence absolue.
Il est en général incorrect de modifier l'ordre des termes d'une série non absolument convergente. Cela risque de modifier non seulement la somme mais même la nature de la série.

*Exemple 24*
Soit $u_n = (-1)^{n+1}/\sqrt{n}$. La série $\sum u_n$ est convergente (cf. § III.D) mais pas absolument convergente (cf. th. 19). Réarrangeons les termes selon l'ordre $\ldots$, $u_{4\,p-3}$, $u_{4\,p-1}$, $u_{2\,p}$, $\ldots$ et supposons la nouvelle série convergente. On a alors le droit de regrouper les termes consécutifs. La série de terme général $u'_p = u_{4\,p-3} + u_{4\,p-1} + u_{2\,p}$ est équivalente à la série à termes positifs $p \mapsto 2/\sqrt{4\,p} - 1/\sqrt{2\,p} = (1 - 1/\sqrt{2})/\sqrt{p}$. D'après la règle de Riemann avec $\alpha = 1/2$, cette dernière diverge, donc $\sum u'_p$ aussi, contrairement à l'hypothèse. ⌟

On peut même montrer que si une série de réels est semi-convergente, on peut toujours trouver une permutation $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de ses termes telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers n'importe quel réel ou tende vers $\pm\infty$ (théorème de réarrangement de Riemann).
Il est également incorrect de remplacer le terme général de la série par un terme équivalent. Si $u_n \simeq v_n$ et que $\sum \|v_n\|$ ne converge pas, $\sum u_n$ n'est pas nécessairement de même nature que $\sum v_n$ !

## III.c.2. Produit de Cauchy

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ des suites de réels ou de complexes. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ (donc fini), le produit des sommes partielles jusqu'à l'ordre $p$ vaut

$$\left(\sum_{n=0}^{p} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{p} v_n\right) = \sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{p} u_i\, v_j\right).$$

Numérotons de $i = 0$ à $p$ (resp. de $j = 0$ à $p$) les lignes (resp. les colonnes) d'un tableau carré de taille $p + 1$ et disposons chaque $u_i\, v_j$ sur la ligne n° $i$ et dans la colonne n° $j$ : $(\sum_{n=0}^{p} u_n)\,(\sum_{n=0}^{p} v_n)$ est la somme de toutes les cases du tableau.
On obtient le même total en sommant sur les diagonales ascendantes du tableau. Notons de $n = 0$ à $2\,p$ ces diagonales. Pour $n \leqslant p$, la somme des termes sur la diagonale n° $n$ vaut $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$, donc la somme sur les $p + 1$ premières diagonales vaut $\sum_{n=0}^{p} w_n$.
Le théorème suivant étend ce résultat aux sommes infinies sous certaines conditions :

**Théorème 41 (produit de Cauchy)**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites dans $E = \mathbb{K}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = u_0\, v_n + \cdots + u_n\, v_0$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

La série $\sum w_n$ porte le nom de produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. ⌟

***Remarque***

On peut même montrer (théorème de Mertens) que si une seule des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est absolument convergente (l'autre étant simplement convergente), alors $\sum w_n$ est convergente (mais pas absolument a priori) et a pour limite $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)\ (\sum_{n=0}^{\infty} v_n)$. ⌟

## III.d. Séries alternées. Théorème d'Abel

**Définition 34**

Une série de réels est *alternée* si son terme général a un signe qui change selon que $n$ est pair ou impair. ⌟

***Exemple 25***

Si les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont telles que $u_n = (-1)^n\ |u_n|$ et $v_n = (-1)^{n+1}\ |v_n|$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont alternées. ⌟

**Théorème 42 (critère de Leibniz)**

Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0, alors $\sum u_n$ est convergente, $|S_\infty - S_n| \leqslant |u_{n+1}|$ et $S_\infty - S_n$ est du signe de $u_{n+1}$. ⌟

***Preuve***

Supposons que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{2\,n} \geqslant 0$ et $u_{2\,n+1} \leqslant 0$ (sinon, raisonner sur $v_n = -u_n$).

On montre sans difficulté que

$$S_{2\,n-1} \leqslant S_{2\,n+1} \leqslant S_{2\,n} \leqslant S_{2\,n-2}.$$

(Par exemple,

$$S_{2\,n} = S_{2\,n-2} + \underbrace{u_{2\,n} + u_{2\,n-1}}_{\leqslant 0},$$

donc $S_{2\,n} \leqslant S_{2\,n-2}$.)

La suite de terme général $v_n = S_{2\,n+1}$ est croissante, celle de terme général $w_n = S_{2\,n}$ est décroissante. Comme $v_n - w_n = S_{2\,n+1} - S_{2\,n} = u_{2\,n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent et ont même limite, $S_\infty$, (cf. th. des suites adjascentes).

Pour les mêmes raisons, on a $\forall\ (p,\, n) \in \mathbb{N}^2$, $v_p \leqslant S_\infty \leqslant w_n$, soit en particulier $S_{2\,n-1} \leqslant S_{2\,n+1} \leqslant S_\infty \leqslant S_{2\,n}$. En retranchant soit $S_{2\,n-1}$, soit $S_{2\,n}$, on obtient $0 \leqslant S_\infty - S_{2\,n-1} \leqslant u_{2\,n}$ et $u_{2\,n+1} \leqslant S_\infty - S_{2\,n} \leqslant 0$ : pour tout $n$, $|S_\infty - S_n| \leqslant |u_{n+1}|$ et $S_\infty - S_n$ est du même signe que $u_{n+1}$. ⌟

***Remarque***

Les conditions « $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ » et « $u_n$ est décroissante » sont indépendantes. Exemple : la suite définie par $u_{2\,n} = 1/n$ et $u_{2\,n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tend vers 0 mais n'est pas décroissante $(u_{2\,n} > u_{2\,n+1})$. ⌟

***Exemple 26***

Les séries de terme général $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ et $v_n = (-1)^n/n$ sont convergentes (mais pas absolument convergentes). ⌟

**Théorème 43 (Abel)**

Soient $b_n \geqslant 0$ une suite décroissante et tendant vers 0, et $a_n$ une suite de signe quelconque telle que $|a_0 + \cdots + a_n| \leqslant A$ pour tout $n$.

La série $\sum a_n\, b_n$ est convergente et $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, b_n| \leqslant A\ b_0$. ⌟

***Preuve***

Soit $A_n = a_0 + \cdots + a_n$.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\ b_k = a_0\ b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k\ (A_k - A_{k-1}) = A_0\ b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k\ A_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}\ A_k = A_n\ b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k\ (b_k - b_{k+1}).$$

D'après les hypothèses du théorème, $|A_k\ (b_k - b_{k+1})| \leqslant A\ (b_k - b_{k+1})$. Or $\sum(b_k - b_{k+1})$ converge puisque $b_k$ converge (cf. th. 29). La série $\sum A_k\ (b_k - b_{k+1})$ est donc (absolument) convergente. Comme $A_n\ b_n$ tend vers zéro, la série $\sum a_k\ b_k$ converge.

Par ailleurs,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\ b_k\right| \leqslant |A_n\ b_n| + \sum_{k=0}^{n-1} \left|A_n\ (b_k - b_{k+1})\right| \leqslant A\ b_n + A\ \sum_{k=0}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) = A\ (b_n + (b_0 - b_n)) = A\ b_0.$$

$\lrcorner$

On retrouve aisément à l'aide de ce théorème le premier résultat du critère de Leibniz. Il suffit de poser $b_n = |u_n|$, $a_n = (-1)^n$ (ou $(-1)^{n+1}$). $(b_n)$ est bien une suite de réels positifs décroissante, tendant vers 0 et $|A_n| \leqslant 1$, donc $\sum(-1)^n\ |u_n|$ converge.

On verra une application du théorème d'Abel aux séries de Fourier (cf. chapitre VII).