

# Chapitre I

## GÉNÉRALITÉS

### I.A. Logique, ensembles

L'objet de cette section est d'introduire certaines notations usuelles et de clarifier certaines idées intuitives sur la logique et les ensembles, non de faire un exposé complet et rigoureux des fondements de la logique et de la théorie des ensembles.

#### I.A.1. Connecteurs logiques

##### I.A.1.a. Définitions

La logique classique s'applique à des énoncés, ou *propositions*, pouvant être soit vrais (V), soit faux (F). Elle est donc bien adaptée au raisonnement mathématique.

Considérons des propositions  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{R}$ , etc. On peut les transformer et les combiner à l'aide des divers connecteurs logiques ci-dessous pour construire de nouvelles propositions. Pour déterminer si celles-ci sont vraies ou fausses, il est commode d'établir une *table de vérité* donnant leur valeur de vérité pour chaque combinaison des valeurs de vérité des propositions initiales.

**Négation.** La négation de  $\mathcal{P}$ , notée  $\neg\mathcal{P}$  (on rencontre parfois  $\sim\mathcal{P}$  ou  $\overline{\mathcal{P}}$ ), ce que l'on prononce « non  $\mathcal{P}$  », est vraie si et seulement si («ssi» en abrégé)  $\mathcal{P}$  est fausse. Sa table de vérité est

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$
V	F
F	V

**Conjonction.** La conjonction de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$  (« $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ »), est vraie si et seulement si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont toutes deux vraies. Sa table de vérité est

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

En particulier, la proposition  $\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{P}$  est toujours fausse (*principe de non-contradiction*).

**Disjonction.** La disjonction (inclusive) de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  (« $\mathcal{P}$  ou  $\mathcal{Q}$ »), est vraie si et seulement si l'une au moins des propositions  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  est vraie <sup>\*1</sup>. Sa table de vérité est

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

En particulier,  $\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{P}$  est toujours vraie (*principe du tiers exclu*).

---

1. Rappelons que, en logique comme en français, le «ou» simple est *inclusif*. Pour indiquer un «ou» *exclusif* (parfois noté  $\dot{\vee}$  ou  $\mathcal{W}$ ), c'est-à-dire en excluant le cas où  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont toutes deux vraies, on écrira plutôt « $\mathcal{P}$  ou bien  $\mathcal{Q}$ » ou «soit  $\mathcal{P}$ , soit  $\mathcal{Q}$ ». La locution «et/ou» est à éviter : outre sa lourdeur, elle laisse entendre à tort que le simple «ou» est exclusif.

**Implication.** La proposition  $\mathcal{P} \Rightarrow Q$  (« $\mathcal{P}$  implique  $Q$ » ; aussi notée  $Q \Leftarrow \mathcal{P}$ ) est définie par la table de vérité

$\mathcal{P}$	$Q$	$\mathcal{P} \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si  $\mathcal{P} \Rightarrow Q$  et  $\mathcal{P}$  sont vraies, alors  $Q$  est vraie (*modus ponens* ou *sylogisme*). Remarquer que la proposition  $\mathcal{P} \Rightarrow Q$  est toujours vraie si  $\mathcal{P}$  est fautive <sup>\*2</sup>, mais on ne peut rien en déduire sur la valeur de vérité de  $Q$ .

Au lieu de « $\mathcal{P}$  implique  $Q$ », on dira souvent «si  $\mathcal{P}$ , alors  $Q$ », « $\mathcal{P}$  seulement si  $Q$ » ou « $Q$  si  $\mathcal{P}$ ». Une *condition nécessaire* pour que  $\mathcal{P}$  soit vraie est que  $Q$  soit vraie; une *condition suffisante* pour que  $Q$  soit vraie est que  $\mathcal{P}$  soit vraie.

$\mathcal{P} \not\Rightarrow Q$  signifie  $\neg(\mathcal{P} \Rightarrow Q)$ .

**Équivalence.** La proposition  $\mathcal{P} \Leftrightarrow Q$  (« $\mathcal{P}$  équivaut à  $Q$ ») est définie par la table de vérité

$\mathcal{P}$	$Q$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Au lieu de « $\mathcal{P}$  équivaut à  $Q$ », on dira souvent que « $\mathcal{P}$  et  $Q$  sont équivalentes» ou encore « $\mathcal{P}$  si et seulement si <sup>\*3</sup>  $Q$ ». Une *condition nécessaire et suffisante* pour que  $\mathcal{P}$  soit vraie est que  $Q$  soit vraie.

$\mathcal{P} \not\Leftrightarrow Q$  signifie  $\neg(\mathcal{P} \Leftrightarrow Q)$ .

**Ordre de priorité.** Par ordre décroissant :  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ . De gauche à droite sinon, sauf pour l'implication et l'équivalence :  $\mathcal{P} \Rightarrow Q \Rightarrow \mathcal{R}$  signifie  $\mathcal{P} \Rightarrow (Q \Rightarrow \mathcal{R})$ .

### I.A.1.b. Propriétés

Voici quelques propriétés essentielles des connecteurs logiques (nous utilisons de manière quelque peu abusive les symboles  $\Rightarrow$  et  $\Leftrightarrow$ , définis en tant que connecteurs logiques, pour indiquer des raisonnements) :

- $\neg(\neg\mathcal{P}) \Leftrightarrow \mathcal{P}$  (*double négation*).
- *Commutativité* de  $\wedge$ ,  $\vee$  et  $\Leftrightarrow$  :  
 $\mathcal{P} \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P} \vee Q \Leftrightarrow Q \vee \mathcal{P}$ .  
 De même,  $(\mathcal{P} \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow \mathcal{P})$ . En revanche,  $(\mathcal{P} \Rightarrow Q) \not\Leftrightarrow (Q \Rightarrow \mathcal{P})$ .
- *L'associativité* de  $\wedge$  et  $\vee$  permet de supprimer des parenthèses :

$$\mathcal{P} \wedge (Q \wedge \mathcal{R}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \wedge Q) \wedge \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} \vee (Q \vee \mathcal{R}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \vee Q) \vee \mathcal{R}.$$

- $(\mathcal{P} \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow \mathcal{P})$ .
- $\mathcal{P} \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(\mathcal{P} \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg\mathcal{P} \vee Q$ .
- *Transitivité* de  $\Rightarrow$  et  $\Leftrightarrow$  :

$$(\mathcal{P} \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow \mathcal{R}) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{P} \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow \mathcal{R}) \Rightarrow (\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{R}).$$

- *Lois de Morgan* :

$$\neg(\mathcal{P} \wedge Q) \Leftrightarrow \neg\mathcal{P} \vee \neg Q \quad \text{et} \quad \neg(\mathcal{P} \vee Q) \Leftrightarrow \neg\mathcal{P} \wedge \neg Q.$$

- *Raisonnement par contraposée* :  $\mathcal{P} \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg\mathcal{P}$ .

- 
2. Considérer  $\mathcal{P} \Rightarrow Q$  comme fautive quand  $\mathcal{P}$  est fautive, que  $Q$  soit vraie ou non, reviendrait à assimiler  $\Rightarrow$  à  $\wedge$ ; la considérer comme fautive quand  $\mathcal{P}$  est fautive et que  $Q$  est vraie, et comme vraie quand  $\mathcal{P}$  est fautive et que  $Q$  est fautive, reviendrait à assimiler  $\Rightarrow$  à  $\Leftrightarrow$ . Une autre justification pour cette convention est qu'elle permet d'identifier  $\mathcal{P} \Leftrightarrow Q$  à  $(\mathcal{P} \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow \mathcal{P})$ .
  3. Remarquer qu'on retrouve ici l'expression «si et seulement si» déjà utilisée plus haut, ce qui peut paraître circulaire. Ceci vaut également pour les autres connecteurs. Il est bien difficile de définir les termes de logique sans faire appel à la logique...

- $\mathcal{P} \implies (Q \implies R) \iff (\mathcal{P} \wedge Q) \implies R$ . Comme cette relation ne paraît pas évidente, montrons-la à l'aide d'une table de vérité :

$\mathcal{P}$	$Q$	$R$	$Q \implies R$	$\mathcal{P} \implies (Q \implies R)$	$\mathcal{P} \wedge Q$	$(\mathcal{P} \wedge Q) \implies R$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

On constate que les colonnes 5 et 7 contiennent des V et des F sur les mêmes lignes, d'où l'équivalence demandée.

Traduite en français, la relation est beaucoup plus naturelle : « si  $\mathcal{P}$  est vraie, alors {si  $Q$  est en plus vraie, alors  $R$  est vraie} » a le même sens que « si  $\mathcal{P}$  et  $Q$  sont toutes deux vraies, alors  $R$  est vraie ».

- $(\mathcal{P} \implies (Q \implies R)) \implies ((\mathcal{P} \implies Q) \implies (\mathcal{P} \implies R))$ .
- $(\mathcal{P} \implies Q) \implies ((Q \implies R) \implies (\mathcal{P} \implies R))$ .
- $\mathcal{P} \vee Q \implies R \iff (\mathcal{P} \implies R) \wedge (Q \implies R)$  et  $\mathcal{P} \wedge Q \implies R \iff (\mathcal{P} \implies R) \vee (Q \implies R)$ .
- $\mathcal{P} \implies (Q \wedge R) \iff (\mathcal{P} \implies Q) \wedge (\mathcal{P} \implies R)$  et  $\mathcal{P} \implies (Q \vee R) \iff (\mathcal{P} \implies Q) \vee (\mathcal{P} \implies R)$ .
- *Raisonnement par l'absurde* :  $(\neg \mathcal{P} \implies (Q \wedge \neg Q)) \implies \mathcal{P}$ . Avec des mots, si  $\neg \mathcal{P}$  implique à la fois une proposition  $Q$  et son contraire,  $\neg \mathcal{P}$  est fausse, donc  $\mathcal{P}$  est vraie.

## I.A.2. Quantificateurs

### I.A.2.a. Définitions

**Quantificateur universel.**  $\forall x, \mathcal{P}(x)$  : quel que soit  $x$  (on dit aussi « pour tout  $x$  »), la proposition  $\mathcal{P}$  est vérifiée pour  $x$ .

**Quantificateur existentiel.**  $\exists x, \mathcal{P}(x)$  : il existe [au moins] un  $x$  tel que la proposition  $\mathcal{P}$  soit vérifiée pour  $x$ .

On utilise aussi souvent le quantificateur dérivé  $\exists!$  :  $\exists! x, \mathcal{P}(x)$  signifie « Il existe un *unique*  $x$  [« il existe un et un seul  $x$  »] vérifiant la proposition  $\mathcal{P}$  », c.-à-d.

$$\exists x, \mathcal{P}(x) \wedge \forall y, y \neq x \implies \neg \mathcal{P}(y).$$

**Portée d'un quantificateur.** En l'absence de parenthèses, nous adoptons la convention que tout ce qui est à droite d'une virgule suivant une variable quantifiée constitue un bloc. L'expression précédente se lit donc

$$\exists x, (\mathcal{P}(x) \wedge (\forall y, (y \neq x \implies \neg \mathcal{P}(y))))).$$

### I.A.2.b. Propriétés

- $(\forall x, \mathcal{P}(x)) \implies (\exists x, \mathcal{P}(x))$ , mais pas l'inverse.
- Soit  $\mathcal{P}$  une propriété dépendant de deux variables. On a

$$(\exists x, \exists y, \mathcal{P}(x, y)) \iff (\exists y, \exists x, \mathcal{P}(x, y))$$

et

$$(\forall x, \forall y, \mathcal{P}(x, y)) \iff (\forall y, \forall x, \mathcal{P}(x, y)).$$

En revanche,

$$(\exists x, \forall y, \mathcal{P}(x, y)) \not\iff (\forall y, \exists x, \mathcal{P}(x, y)).$$

(Dans le membre de droite,  $x$  dépend de  $y$  : on pourrait écrire  $\forall y, \exists x(y), \mathcal{P}(x, y)$ . En revanche, dans le membre de gauche, le même  $x$  doit convenir, quel que soit  $y$ .)

- Les expressions quantifiées se nient comme ceci :

$$\neg(\forall x, \mathcal{P}(x)) \iff \exists x, \neg \mathcal{P}(x).$$

$$\neg(\exists x, \mathcal{P}(x)) \iff \forall x, \neg \mathcal{P}(x).$$

- On a

$$(\forall x, \mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)) \iff (\forall x, \mathcal{P}(x)) \wedge (\forall x, \mathcal{Q}(x)) \quad \text{et} \quad (\exists x, \mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)) \iff (\exists x, \mathcal{P}(x)) \vee (\exists x, \mathcal{Q}(x)).$$

En revanche,

$$(\forall x, \mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)) \not\iff (\forall x, \mathcal{P}(x)) \vee (\forall x, \mathcal{Q}(x)) \quad \text{et} \quad (\exists x, \mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)) \not\iff (\exists x, \mathcal{P}(x)) \wedge (\exists x, \mathcal{Q}(x)).$$

### I.A.3. Ensembles

#### I.A.3.a. Définitions

**Ensemble, élément, appartenance.** Un ensemble est une collection d'éléments <sup>§4</sup>.

Soit  $A$  un ensemble. Si un élément  $x$  appartient à  $A$ , on dit que « $x$  est élément de  $A$ » et on note ceci  $x \in A$  (ou  $A \ni x$ ). La propriété  $\neg(x \in A)$  est notée  $x \notin A$ .

La notation  $\forall x \in A, \mathcal{P}(x)$  signifie  $\forall x, x \in A \implies \mathcal{P}(x)$ . De même,  $\exists x \in A, \mathcal{P}(x)$  signifie  $\exists x, x \in A \wedge \mathcal{P}(x)$ . On en déduit que

$$\neg(\forall x \in A, \mathcal{P}(x)) \iff \exists x \in A, \neg\mathcal{P}(x)$$

et

$$\neg(\exists x \in A, \mathcal{P}(x)) \iff \forall x \in A, \neg\mathcal{P}(x).$$

**Cardinal.** Le cardinal de  $A$ , noté  $\text{card } A$  ou  $\#A$ , est le nombre d'éléments de  $A$  si l'ensemble est fini <sup>§5</sup>.

**Inclusion.** Soit  $B$  un autre ensemble. On dit que « $A$  est inclus dans  $B$ », ou que « $A$  est un sous-ensemble, une partie de  $B$ », et on note ceci  $A \subset B$  <sup>§6</sup> (ou  $B \supset A$ , « $B$  contient  $A$ »), si tout élément de  $A$  appartient à  $B$  :

$$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B.$$

Ne pas confondre  $A \in B$  et  $A \subset B$ .

**Définition en extension.** On note  $\{a, b, \dots\}$  l'ensemble formé par les éléments  $a, b$ , etc. On parle de *paire* pour un ensemble de deux éléments. L'ordre des éléments est indifférent.

**Définition en compréhension.** On note  $\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$  l'ensemble des  $x$  tels que la proposition  $\mathcal{P}(x)$  est vraie.

La notation  $\{x \in A \mid \mathcal{P}(x)\}$  signifie  $\{x \mid x \in A \wedge \mathcal{P}(x)\}$ .

**Ensemble vide.** L'ensemble vide, noté  $\emptyset$  ou parfois  $\{\}$ , est un ensemble ne comprenant aucun élément.

**Union.** L'union de  $A$  et  $B$ ,  $A \cup B$  (« $A$  union  $B$ »), est l'ensemble défini par <sup>§7</sup>

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

**Intersection.** L'intersection de  $A$  et  $B$ ,  $A \cap B$  (« $A$  inter  $B$ »), est l'ensemble défini par

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Si  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A$  et  $B$  sont *disjoints*.

**Différence, complémentaire.** La différence de  $A$  et  $B$ ,  $A \setminus B$  (« $A$  moins  $B$ »), est définie par

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Si  $B \subset A$ , la notation  $\complement_A B$  (complémentaire de  $B$  dans  $A$ ) est aussi utilisée. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble  $A$  dans lequel le complémentaire est pris, on peut écrire  $\complement B$ .

4. Certaines propriétés particulières sont requises pour qu'une collection d'éléments puisse être qualifiée d'ensemble; elles seront toujours vérifiées dans ce cours. Ces propriétés évitent des paradoxes, tel que celui de l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes : appartient-il à lui-même ou non? Dans les deux cas, on arrive à une contradiction : un tel ensemble n'est donc pas définissable.

5. Nous ne nous en servons pas, mais on peut aussi définir le cardinal d'un ensemble infini, ce qui permet notamment de comparer de tels ensembles. Ainsi, le cardinal de  $\mathbb{N}$ , noté  $\aleph_0$ , est plus grand que celui de tout ensemble fini, mais est égal à celui de  $\mathbb{Q}$  car on peut construire une bijection de l'un vers l'autre, bien que  $\mathbb{N}$  soit un sous-ensemble strict de  $\mathbb{Q}$ . En revanche,  $\text{card } \mathbb{N}$  est strictement inférieur à  $\text{card } \mathbb{R}$ ,  $2^{\aleph_0}$ .

6. Dans l'usage français, « $A \subset B$ » désigne une inclusion large, c.-à-d. qu'on peut avoir  $A = B$ ; l'inclusion stricte, excluant le cas  $A = B$  (on dit alors que  $A$  est un sous-ensemble *propre* ou *strict* de  $B$ ), peut être notée  $A \subsetneq B$ . De manière générale, en français, les expressions doivent être comprises au sens large : «inférieur» (parfois *not greater than* en anglais) veut dire «inférieur ou égal», pas «strictement inférieur» (ang. *less than*); un nombre «positif» (ang. *non-negative*) peut être nul, alors que l'anglais *positive* désigne souvent un nombre strictement positif; de même, une fonction «croissante» (ang. *non-decreasing*) ou «monotone» peut être constante sur certains intervalles.

En matière d'inclusion, les notations anglaises sont plus cohérentes avec celles employées pour les inégalités : « $A \subset B$ » désigne une inclusion stricte (cf. « $<$ ») et « $A \subseteq B$ » l'inclusion large (cf. « $\leq$ »).

7. La notation  $a := b$  signifie que l'entité  $a$  est définie par l'expression  $b$  ( $a$  est égale par définition à  $b$ ).

**Multiplet, produit cartésien.** Soient  $n$  ensembles  $E_1, \dots, E_n$ . Le multiplet, ou  $n$ -uplet, (*couple* si  $n = 2$ ) formé par les éléments  $a_1, \dots, a_n$  appartenant respectivement aux ensembles  $E_1, \dots, E_n$  est noté  $(a_1, \dots, a_n)$ .

On appelle produit cartésien de  $E_1, \dots, E_n$  l'ensemble noté  $E_1 \times \dots \times E_n$  (ou  $E^n$  si  $E_1 = \dots = E_n = E$ ) défini par

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in E_1 \wedge \dots \wedge a_n \in E_n\}.$$

Bien distinguer  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $\{a_1, \dots, a_n\}$  : le premier est un *élément* de  $E_1 \times \dots \times E_n$ , le second un *ensemble* inclus dans  $E_1 \cup \dots \cup E_n$ . Le nombre et l'ordre des éléments comptent dans  $(a_1, \dots, a_n)$  :

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i = b_i.$$

**Ordre de priorité.** Par ordre décroissant :  $\setminus, \cap, \cup, \subset$ . De gauche à droite sinon.

### I.A.3.b. Propriétés

- Pour tout ensemble  $A$ ,  $\emptyset \subset A$ . (Ne pas écrire  $\emptyset \in A$ .)
- $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$ .
- Soit  $C$  un troisième ensemble :  $A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C$  (transitivité).
- $A \cap \emptyset = \emptyset$  et  $A \cup \emptyset = A$ .
- $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$ .
- $A \cup B = B \cup A$  et  $A \cap B = B \cap A$ .
- L'associativité de  $\cup$  et  $\cap$  permet de supprimer des parenthèses :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \quad \text{et} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  et  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
- $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$  et  $A \setminus (B \cap C) = A \setminus B \cup A \setminus C$ .
- $B \subset C \iff A \setminus C \subset A \setminus B$ .

Noter le parallélisme entre les notations logiques et ensemblistes :  $\neg$  correspond à  $\complement$ ,  $\wedge$  à  $\cap$ ,  $\vee$  à  $\cup$ ,  $\implies$  à  $\subset$ , et  $\iff$  à « $=$ ». Par exemple,

$$A \subset B \iff \forall x, x \in A \implies x \in B.$$

## I.B. Ensembles de nombres

### I.B.1. Notations

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  : ensemble des nombres entiers naturels (non strictement négatifs).

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  : ensemble des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs).

$\mathbb{Q}$  : ensemble des nombres rationnels, c.-à-d. des fractions  $a/b$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

$\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels (ou «*droite réelle*»).

$\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{K}$  :  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Si  $E$  est un ensemble de nombres,

- $E^+ = \{x \in E \mid x \geq 0\}$ ,
- $E^- = \{x \in E \mid x \leq 0\}$ ,
- $E^* = \{x \in E \mid x \neq 0\}$ .

### I.B.2. Intervalles

#### Définition 1 (intervalle)

Un intervalle d'un ensemble  $E$  muni d'une relation d'ordre  $\leq$  est une partie  $I$  de  $E$  telle que  $\forall (y, z) \in I^2, \forall x \in \mathbb{R}, y \leq x \leq z \implies x \in I$ . ┘

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \leq b$ . Les seuls intervalles de  $\mathbb{R}$  sont

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  (intervalle fermé ou *segment*; ensemble  $\{a\}$  si  $a = b$ );
- $]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  (intervalle ouvert; ensemble vide si  $a = b$ ) <sup>8</sup>;
- $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  (intervalle semi-ouvert à gauche);
- $[a, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  (intervalle semi-ouvert à droite);
- $] -\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ ;
- $] -\infty, b[ := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ ;
- $[a, +\infty[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ ;
- $]a, +\infty[ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ ;
- $] -\infty, +\infty[ := \mathbb{R}$ .

Si  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ , on notera  $\llbracket a, b \rrbracket$  l'intervalle entier  $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ . De même pour  $\llbracket a, +\infty \llbracket$  et  $\llbracket -\infty, b \rrbracket$ .

### I.B.3. Droite réelle achevée

La notation  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  sera utilisée pour simplifier l'écriture des résultats sur les limites.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ . Les intervalles définis sur  $\mathbb{R}$  sont des intervalles de  $\overline{\mathbb{R}}$  en prenant  $a$  et  $b$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . En particulier,  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ .

L'addition et la multiplication définies dans  $\mathbb{R}$  (et donc aussi la soustraction et la division) peuvent être *partiellement* étendues à  $\overline{\mathbb{R}}$ .

#### Définition 2 (opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$ )

- $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  

$$+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad -\infty + x = x + (-\infty) = -\infty ;$$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  

$$(+\infty) \times x = x \times (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad (-\infty) \times x = x \times (-\infty) = -\infty ;$$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}$ ,  

$$(+\infty) \times x = x \times (+\infty) = -\infty \quad \text{et} \quad (-\infty) \times x = x \times (-\infty) = +\infty ;$$
- $$+\infty + (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad -\infty + (-\infty) = -\infty ;$$
- $$(+\infty) \times (+\infty) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad (+\infty) \times (-\infty) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty. \quad \square$$

L'extension n'est que partielle car aucun sens satisfaisant ne peut être donné à des expressions telles que  $\infty - \infty$  ou  $0 \times \infty$ .

### I.B.4. Nombres complexes

#### I.B.5. Représentation cartésienne

On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  muni de l'addition et de la multiplication définies ci-dessous. Soit  $z = (x, y)$  un nombre complexe : les réels  $x$  et  $y$  sont la *partie réelle* et la *partie imaginaire* de  $z$ ; on les note  $\text{Re } z$  et  $\text{Im } z$ .

Par définition, si  $z' = (x', y')$  est un autre nombre complexe,

$$z + z' = (x + x', y + y')$$

et <sup>9</sup>

$$z \times z' = (x \times x' - y \times y', x \times y' + x' \times y).$$

Les symboles d'opération définis à gauche du signe  $=$  agissent sur des nombres complexes; ceux utilisés à droite sont l'addition et la multiplication usuelles dans  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble  $\mathbb{R}$  s'identifie à l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire nulle. En effet, si  $y = y' = 0$ , on a  $z + z' = (x + x', 0)$  et  $z \times z' = (x \times x', 0)$ . On peut donc sans danger écrire  $(x, 0) = x$  et utiliser les mêmes symboles pour les opérations entre complexes que pour celles entre réels.

8. Dans l'usage anglais, l'intervalle ouvert  $]a, b[$  est noté  $(a, b)$ , au risque d'une confusion avec le couple  $(a, b)$ ; les intervalles semi-ouverts  $]a, b]$  et  $[a, b[$  sont respectivement notés  $(a, b]$  et  $[a, b)$ .

9. La multiplication entre deux quantités peut également être notée  $x \cdot x'$  ou  $x \times x'$ , sauf si  $x$  et  $x'$  sont des valeurs numériques.

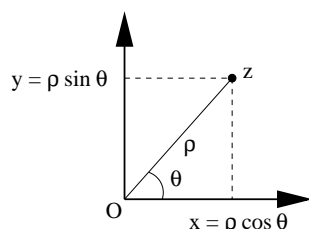


Figure I.1. Interprétation géométrique d'un nombre complexe.

Avec ces opérations,  $\mathbb{C}$  possède comme  $\mathbb{R}$  les propriétés suivantes : commutativité, associativité, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, mêmes éléments neutres ( $(0, 0) = 0$  pour l'addition et  $(1, 0) = 1$  pour la multiplication). En revanche, la relation d'ordre  $\leq$  n'est pas bien définie sur  $\mathbb{C}$  <sup>\*10</sup> :  $z = z'$  et  $z \neq z'$  ont un sens, mais pas  $z \leq z'$ ,  $z > z'$ , etc.

Soit  $i := (0, 1)$ . On a  $z = (x, y) = (x, 0) + i \times (y, 0)$ . On peut donc écrire  $z = x + i y$ . Par ailleurs,  $i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$ . On retrouve bien, en utilisant la règle de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, que

$$z z' = (x + i y) \times (x' + i y') = x x' + i x y' + i y x' + i^2 y y' = (x x' - y y') + i \times (x y' + x' y).$$

Tout  $z$  a un opposé,  $-z = -x + i \times (-y)$ . On peut donc définir la soustraction entre complexes par  $z - z' := z + (-z')$  <sup>\*11</sup>. En particulier,  $-z = -x - i y$ .

De même, tout  $z \in \mathbb{C}^*$  a un inverse,

$$z^{-1} = \frac{x - i y}{x^2 + y^2}.$$

On peut donc définir la division de  $z \in \mathbb{C}$  par  $z' \in \mathbb{C}^*$  :  $z/z' := z z'^{-1}$ . En particulier,  $z^{-1} = 1/z$ .

### I.B.6. Représentation polaire

En étendant à  $\mathbb{C}$  les définitions usuelles de l'exponentielle dans  $\mathbb{R}$ , tout  $z \in \mathbb{C}$  peut s'écrire  $z = \rho e^{i\theta}$ , où  $\rho \in \mathbb{R}^+$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\theta$  est défini à un multiple entier de  $2\pi$  près. Le réel  $\rho$  est le *module* de  $z$ , noté  $|z|$ . Si  $|z| \neq 0$ , l'unique  $\theta$  dans  $]-\pi, \pi]$  est l'*argument* principal de  $z$ ,  $\arg z$ . On a  $x = \rho \cos \theta$  et  $y = \rho \sin \theta$  (cf. fig. I.1).

Formules d'Euler :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta, \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{aligned}$$

Produit de  $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$  et  $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$  :

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

donc le module de  $z$  est  $\rho = \rho_1 \rho_2$  et son argument est  $\theta = \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}$ .

Complexe conjugué de  $z$ , noté  $\bar{z}$  ou  $z^*$  :

$$\bar{z} = x - i y = \rho e^{-i\theta}.$$

Module carré de  $z$  :

$$|z|^2 = z \bar{z} = x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Inverse de  $z$  :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \rho^{-1} e^{-i\theta}.$$

(On obtient bien que  $z z^{-1} = 1$ .) En particulier,

$$i = e^{i\pi/2} \quad \text{et} \quad \bar{i} = i^{-1} = e^{-i\pi/2}.$$

Inégalités triangulaires :  $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$  pour  $a$  et  $b$  réels ou complexes.

10. On peut définir des relations d'ordre sur  $\mathbb{C}$ , mais elles ne permettent pas de comparer deux complexes quelconques ou ne sont pas compatibles avec les opérations.

11. Le « - » à gauche du « = » est le symbole de soustraction, tandis qu'il note l'opposé à droite.

## I.B.7. Racines d'un nombre complexe

Si  $n \in \mathbb{N}$  est pair et  $x \in \mathbb{R}^+$ , la racine principale  $n$ -ième de  $x$  (celle dont il s'agit quand on dit « la racine  $n$ -ième », et que l'on note  $\sqrt[n]{x}$  ou  $x^{1/n}$ ) est l'unique  $r \in \mathbb{R}^+$  tel que  $r^n = x$ . Une autre racine réelle de cette équation est  $r' = -r$ . Si  $x \in \mathbb{R}^-$ , cette équation n'a pas de solution réelle.

Si  $n \in \mathbb{N}$  est impair et  $x \in \mathbb{R}$ , l'équation  $r^n = x$  admet toujours une solution réelle  $r$  unique, positive ou négative, que l'on note encore  $\sqrt[n]{x}$  ou  $x^{1/n}$ .

Si  $n \in \mathbb{N}$  et  $z \in \mathbb{C}$ , l'équation  $r^n = z$  admet  $n$  solutions distinctes dans  $\mathbb{C}$ . Le plus simple est d'écrire  $z$  sous la forme  $z = |z| e^{i\theta}$ . Les solutions sont  $r_k = |z|^{1/n} e^{i(\theta/n + 2k\pi/n)}$ , avec  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

**Remarque.** Pour le logiciel *Mathematica*, si  $z = |z| e^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ ,  $\sqrt[n]{z} := |z|^{1/n} e^{i\theta/n}$ . Si  $z \in \mathbb{R}^+$ , on retombe bien sur la définition précédente. En revanche, si  $z \in \mathbb{R}^-$  et  $n$  est impair, on obtient un résultat différent : par exemple, pour *Mathematica*,  $\sqrt[3]{-1} = e^{i\pi/3}$  et non  $-1$ .

## I.B.8. Polynômes dans $\mathbb{C}$

Un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  en la variable  $x \in \mathbb{K}$  est une fonction de la forme  $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , avec  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  et  $a_n \neq 0$ .

Par exemple, la puissance  $n$ -ième de  $(x + a)$  est un polynôme de degré  $n$ . En effet, par la formule du binôme, on obtient

$$\begin{aligned} (a + x)^n &= a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} x^2 + \dots + x^n \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} x^p, \end{aligned}$$

où le coefficient binomial  $\binom{n}{p}$  (parfois noté  $C_n^p$  <sup>\*12</sup>) vaut <sup>\*13</sup>

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{1 \times 2 \times \dots \times (p-1) \times p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}.$$

Les coefficients binomiaux obéissent à la relation de récurrence <sup>\*14</sup>

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Cette relation traduit le fait que  $(a + x)^n = (a + x)(a + x)^{n-1}$ .

Si  $P(r) = 0$ , on dit que  $r$  est un zéro de  $P$  (ou une racine de l'équation  $P(x) = 0$ ), et on peut factoriser  $P$  de façon unique sous la forme  $P(x) = (x - r) Q(x)$ , où  $Q$  est un polynôme de degré  $n - 1$ . Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , un polynôme de degré  $n$  en  $x$  a au plus  $n$  zéros réels.

D'après le « théorème fondamental de l'algèbre », si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , un polynôme  $P$  de degré  $n$  a exactement  $n$  zéros  $r_i \in \mathbb{C}$  ( $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ), dont certains peuvent être identiques (zéros multiples). On peut donc écrire  $P$  de façon unique sous la forme

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - r_i).$$

## I.C. Notions de topologie

### Définition 3 (distance, espace métrique)

Soit  $E$  un ensemble.

On appelle *distance* une application  $d: E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  possédant les propriétés suivantes :

- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$ ;
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

On appelle *espace métrique*  $(E, d)$  un ensemble  $E$  muni d'une distance  $d$ . ┘

- 
12.  $C_n^p$  est le nombre de *combinaisons* différentes de  $p$  éléments choisis dans un ensemble en contenant  $n$ . Si l'on tient compte de l'ordre dans lequel les  $p$  éléments sont choisis (c.-à-d. en distinguant par exemple  $(a, b, c)$  de  $(a, c, b)$ ), on obtient le nombre d'*arrangements* différents de  $p$  éléments choisis parmi  $n$ ,  $A_n^p = n!/(n-p)!$ .
13.  $p! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (p-1) \times p$  est la factorielle de  $p$ . Par convention,  $0! = 1$ .
14. On peut la retrouver en construisant le triangle de Pascal.



### Exemple 1

L'application

$$d_{\mathbb{K}}: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ (x, y) \longmapsto |x - y|,$$

avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , est une distance, dite *distance usuelle*, sur  $\mathbb{K}$ . Sauf mention contraire, c'est la distance que nous utiliserons par défaut dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  : nous écrirons donc  $\mathbb{R}$  au lieu de  $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ .  $\square$

### Exemple 2

Soit  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  (*droite achevée*) et  $\phi$  l'application

$$\phi: \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{1+|x|} & \text{si } x \in \mathbb{R}, \\ +1 & \text{si } x = +\infty, \\ -1 & \text{si } x = -\infty. \end{cases}$$

L'application

$$\overline{d}: \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ (x, y) \longmapsto |\phi(x) - \phi(y)|$$

est une distance sur  $\overline{\mathbb{R}}$ .  $\square$

### Définition 4 (partie bornée)

Soit  $A$  une partie d'un espace métrique  $(E, d)$ . On dit que  $A$  est bornée si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in A^2, d(x, y) \leq M. \quad \square$$

### Théorème-définition 1 (distance induite)

Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $A$  une partie de  $E$ .

L'application

$$d|_{A^2}: A^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ (x, y) \in A^2 \longmapsto d_A(x, y) = d(x, y)$$

est une distance (appelée *distance induite*) sur  $A$ .  $(A, d|_{A^2})$  est donc un espace métrique.  $\square$

Par commodité, et bien que l'ensemble de départ de  $d|_{A^2}$  ( $A^2$ ) soit différent de celui de  $d$  ( $E^2$ ), on notera également  $d$  la distance induite sur  $A$ .

Il existe plusieurs définitions équivalentes des concepts suivants. Celles-ci nous paraissent les plus intuitives.

### Définition 5 (voisinage)

Soient  $x$  un élément de  $E$  et  $A$  une partie de  $E$ .  $A$  est un *voisinage* de  $x$  si et seulement si

$$\exists \epsilon > 0, \forall y \in E, d(x, y) \leq \epsilon \implies y \in A. \quad \square$$

En termes imagés, un voisinage de  $x$  contient donc  $x$  et ses « plus proches voisins », dans toutes les « directions ».

Toute partie de  $\mathbb{R}$  contenant un intervalle  $]x - \epsilon, x + \epsilon[$  est un voisinage de  $x$  dans  $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ . De même, toute partie de  $\overline{\mathbb{R}}$  contenant un intervalle  $]a, +\infty[$  (resp.  $]-\infty, a[$ ), avec  $a \in \mathbb{R}$ , est un voisinage de  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) dans  $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$  <sup>\*15</sup>.

### Définition 6 (ouvert)

$A$  est un ouvert si et seulement si c'est un voisinage de chacun de ses points.  $\square$

$E$  est évidemment un ouvert de  $(E, d)$ ;  $\emptyset$  aussi.

Un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  est un ouvert.

Une union (quelconque) d'ouverts est un ouvert, de même qu'une intersection *finie* d'ouverts.

15. De manière abusive (car  $+\infty$  n'en fait pas partie), on considère aussi que toute partie de  $\mathbb{R}$  contenant un intervalle  $]a, +\infty[$  est un voisinage de  $+\infty$  dans  $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ .

**Définition 7 (fermé)**

Une partie  $A$  de  $E$  est un *fermé* si et seulement si  $E \setminus A$  est un ouvert. ┘

Un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ . Un intervalle du type  $[a, +\infty[$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  aussi.

Une union *finie* de fermés est un fermé, de même qu'une intersection (quelconque) de fermés.

Une partie peut très bien être à la fois un ouvert et un fermé. C'est notamment le cas de  $E$  et  $\emptyset$ . Inversement, une partie peut être ni ouverte, ni fermée : par exemple  $[a, b[$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

**Définition 8 (frontière)**

Un élément  $x$  de  $E$  est un *point frontière* d'une partie  $A$  de  $E$  si et seulement si tout voisinage de  $x$  contient à la fois des points dans  $A$  et des points dans  $E \setminus A$ .

On appelle *frontière* de  $A$ , et on notera  $\text{fr } A$  <sup>※16</sup>, l'ensemble des points frontières de  $A$ . ┘

**Définition 9 (adhérence)**

On appelle *adhérence* d'une partie  $A$  de  $E$ , et on notera  $\text{adh } A$  <sup>※17</sup>, l'ensemble  $A \cup \text{fr } A$ .

Les éléments de  $\text{adh } A$  sont appelés *points adhérents* à  $A$ . ┘

L'adhérence de  $A$  est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé de  $E$  contenant  $A$ .

**Définition 10 (intérieur)**

On appelle *intérieur* d'une partie  $A$  de  $E$ , et on notera  $\text{int } A$  <sup>※18</sup>, l'ensemble  $A \setminus \text{fr } A$ .

Les éléments de  $\text{int } A$  sont appelés *points intérieurs* à  $A$ . ┘

L'intérieur de  $A$  est le plus grand ouvert de  $E$  contenu dans  $A$ .

**Définition 11 (point d'accumulation)**

Un élément  $x$  de  $E$  est un *point d'accumulation* <sup>※19</sup> de  $A$  si tout voisinage de  $x$  contient un élément de  $A$  distinct de  $x$ . ┘

**Définition 12 (point isolé)**

Un élément  $x$  de  $A$  est un *point isolé* de  $A$  si et seulement s'il existe un voisinage de  $x$  ne contenant que  $x$ . ┘

**Exemple 3**

Illustrons ces notions en prenant  $E = \mathbb{R}$ , la distance  $d_{\mathbb{R}}$  définie ci-dessus et  $A = [0, 1[ \cup \{2\}$  :

- $\text{fr } A = \{0, 1, 2\}$ ;
- $\text{adh } A = [0, 1] \cup \{2\}$ ;
- $\text{int } A = ]0, 1[$ ;
- l'ensemble des points d'accumulation est  $[0, 1]$ ;
- il n'y a qu'un point isolé, 2. ┘

**Remarques**

- $A$  est un ouvert  $\iff A \cap \text{fr } A = \emptyset$ .  
 $A$  est un fermé  $\iff A \cap \text{fr } A = \text{fr } A$ .  
 $A$  est donc ouvert et fermé si et seulement si  $\text{fr } A = \emptyset$ .
- Tout point d'accumulation de  $A$  appartient à  $\text{adh } A$  (mais pas forcément à  $A$ ).  
 Tout point isolé de  $A$  appartient à  $A$  (donc à  $\text{adh } A$ ) et à  $\text{fr } A$ .  
 Inversement, tout point de  $\text{adh } A$  est soit un point d'accumulation de  $A$ , soit un point isolé de  $A$ . ┘

**Définition 13 (partie discrète)**

Une partie constituée uniquement de points isolés est dite *discrète*. ┘

$\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  sont discrets dans  $\mathbb{R}$ .

16. La frontière de  $A$  est parfois notée  $\partial A$ .

On utilisera aussi les lourdes notations  $\text{fr}_E A$  ou  $\text{fr}_{(E, d)} A$  en cas d'ambiguïté sur l'espace  $E$  ou la distance  $d$  considérés; de même pour l'adhérence, etc., de  $A$  (cf. ci-dessous).

17. L'adhérence de  $A$  est parfois notée  $\bar{A}$ , mais nous notons déjà  $\bar{\mathbb{R}}$  l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Or, si  $\text{adh}_{(\bar{\mathbb{R}}, \bar{d})} \mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}}$ ,  $\text{adh}_{(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})} \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \bar{\mathbb{R}}$ .

18. L'intérieur de  $A$  est parfois noté  $\overset{\circ}{A}$ .

19. On parle parfois aussi de *point limite*; ces deux notions sont équivalentes pour un espace métrique.

**Définition 14 (partie dense)**

Une partie  $A \subset B \subset E$  est dite *dense* dans  $B$  si  $B \subset \text{adh}_E A$ . ┘

$\mathbb{Q}$  (resp.  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ) est dense dans  $\mathbb{R}$  : pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe un rationnel  $y$  (resp. un irrationnel) tels que  $|x - y| \leq \epsilon$ .

**Définition 15 (distances équivalentes)**

Soient  $d$  et  $d'$  deux distances sur un ensemble  $E$ .  $d$  et  $d'$  sont deux *distances équivalentes* si et seulement s'il existe  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad a d(x, y) \leq d'(x, y) \leq b d(x, y). \quad \text{┘}$$

**Remarque**

Les notions de voisinage, etc., sont relatives à un ensemble  $E$  et à une distance  $d$ . Ainsi, une partie  $A$  appartenant à des espaces métriques  $(E, d)$  et  $(E', d')$  peut être un ouvert de  $E$  pour la distance  $d$  mais ne pas être un ouvert de  $E'$  pour  $d'$ .

Néanmoins, si les distances  $d$  et  $d'$  sont équivalentes (on a alors forcément  $E = E'$ ), elles définissent la même topologie, c.-à-d. que les voisinages, etc., pour l'une le sont pour l'autre. ┘

**I.D. Structures algébriques**

Les espaces les plus utilisés en physique,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^p$ , sont des espaces vectoriels normés, une classe particulière d'espaces métriques. Avant de donner les définitions d'un espace vectoriel et d'une norme, nous devons rappeler celles d'un groupe et d'un corps.

**Définition 16 (groupe)**

Soient  $G$  un ensemble et  $+$  une loi de composition interne (c.-à-d. une application de  $G^2$  dans  $G$ ).

$(G, +)$  est un *groupe* si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\forall (x, y, z) \in G^3, (x + y) + z = x + (y + z)$  (*associativité*);
- La loi  $+$  admet un *élément neutre* dans  $G$ , que nous noterons  $0$ , c.-à-d. tel que  $\forall x \in G, x + 0 = 0 + x = x$ ;
- Tout élément  $x$  de  $G$  admet un *symétrique*, noté  $(-x)$ , c.-à-d. tel que  $x + (-x) = (-x) + x = 0$ .

$(G, +)$  est un *groupe commutatif* si, en outre,  $\forall (x, y) \in G^2, x + y = y + x$ . ┘

**Remarques**

Nous avons noté  $+$  la loi interne,  $0$  l'élément neutre et  $(-x)$  le symétrique par analogie avec l'addition usuelle dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  (mais pas  $\mathbb{N}$ !), qui fait de ces ensembles des groupes; le symétrique pour une loi notée  $+$  est d'ailleurs souvent appelé *opposé*.

On utilise parfois la notation  $\times$  pour l'unique loi interne d'un groupe, par exemple l'ensemble des matrices inversibles muni de la multiplication matricielle. ┘

**Définition 17 (corps)**

Soient  $K$  un ensemble et  $+$  et  $\times$  deux lois de compositions internes.

$(K, +, \times)$  est un *corps* si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $(K, +)$  est un groupe commutatif;
- $(K \setminus \{0\}, \times)$  est un groupe;
- $\forall (x, y, z) \in K^3, x \times (y + z) = x \times y + x \times z$  et  $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$  (*distributivité de  $\times$  par rapport à  $+$* ).

Si  $\forall (x, y) \in K^2, x \times y = y \times x$ ,  $(K, +, \times)$  est un *corps commutatif*. ┘

**Remarques**

Nous avons noté  $\times$  la deuxième loi interne par analogie avec la multiplication usuelle dans les groupes  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$  et  $(\mathbb{C}, +)$  (mais pas  $\mathbb{N}$  ni  $\mathbb{Z}$ !), qui fait d'eux des corps. Pour la même raison, le symbole  $1$  désignera l'élément neutre de  $(K \setminus \{0\}, \times)$  et le symétrique pour la loi  $\times$  (appelé plutôt *inverse*) d'un élément  $x \in K \setminus \{0\}$  sera noté  $x^{-1}$ . ┘

**Définition 18 (espace vectoriel)**

Soient  $(K, +, \times)$  un corps commutatif et  $E$  un ensemble muni d'une loi interne,  $\oplus$ , et d'une loi de composition externe sur  $K$  (c.-à-d. une application de  $K \times E$  dans  $E$ ),  $\otimes$ .

$E$  est un *K-espace vectoriel* (ou « espace vectoriel sur  $K$  ») si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $(E, \oplus)$  est un groupe commutatif;

- $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \otimes x = \lambda \otimes x \oplus \mu \otimes x$ ;
- $\forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \otimes (x \oplus y) = \lambda \otimes x \oplus \lambda \otimes y$ ;
- $\forall x \in E, 1 \otimes x = x$ , où 1 est l'élément neutre de la loi  $\times$ ;
- $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall x \in E, \lambda \otimes (\mu \otimes x) = (\lambda \times \mu) \otimes x$ . ┘

### Remarques

- Les éléments de  $E$  sont appelés « vecteurs » et ceux de  $K$  « scalaires ».
- Pour la clarté de la définition, nous avons distingué ici  $+$  et  $\oplus$  ainsi que  $\times$  et  $\otimes$ . En pratique, il n'y a aucune ambiguïté et nous abandonnerons cette distinction par la suite. Dans certains cas,  $K$  et  $E$  sont d'ailleurs confondus :  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ) est ainsi un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (resp. un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel).  
 $\mathbb{R}^p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ) est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  pour l'addition et la multiplication externe définies par

$$(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$$

et

$$\lambda \times (x_1, \dots, x_p) = (\lambda \times x_1, \dots, \lambda \times x_p).$$

$\overline{\mathbb{R}}$  n'est en revanche pas un espace vectoriel : par exemple, l'opération  $x + y$  n'est pas définie pour  $x = +\infty$  et  $y = -\infty$ . ┘

## I.E. Norme

### Définition 19 (norme, semi-norme, espace vectoriel normé)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Une *norme*  $\|\cdot\|$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que

1.  $\forall x \in E, \|x\| = 0 \implies x = 0$ ;
2.  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;
3.  $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

Si seules les conditions 2 et 3 sont réunies, on parle de *semi-norme*.

Un *espace vectoriel normé* est un espace vectoriel muni d'une norme. ┘

### Remarques

- Dans l'expression  $\|x\| = 0$  de la première condition, 0 est l'élément neutre de  $(\mathbb{R}, +)$ ; dans l'expression  $x = 0$ , il s'agit de l'élément neutre de  $(E, +)$ .
- La condition 2 suffit à montrer que  $\|0\| = 0$  (réciproque de la condition 1). ┘

### Exemple 4

La valeur absolue et le module sont des normes dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

Dans  $\mathbb{C}^p$  ou  $\mathbb{R}^p$  ( $p \in \mathbb{N}^*$ ), on peut utiliser la norme euclidienne,

$$\|(x_1, \dots, x_p)\|_2 = (|x_1|^2 + \dots + |x_p|^2)^{1/2},$$

ou les normes

$$\|(x_1, \dots, x_p)\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} |x_i|$$

et

$$\|(x_1, \dots, x_p)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_p|. \quad \text{┘}$$

### Théorème 1

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. L'application

$$d: E^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ (x, y) \longmapsto \|x - y\|$$

est une distance sur  $E$ .  $(E, d)$  est donc un espace métrique. ┘

Dans un espace vectoriel normé, nous utiliserons implicitement la distance associée à la norme. Nous noterons par exemple  $\text{adh}_{(\mathbb{R}, |\cdot|)}$  plutôt que  $\text{adh}_{(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})}$ .

Si  $\|\cdot\|$  est seulement une semi-norme, l'application  $d$  est une pseudo-distance (on n'a pas  $d(x, y) = 0 \implies x = y$ ) et  $E$  un espace pseudo-métrique.

**Définition 20 (normes équivalentes)**

Soient  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  deux normes sur un espace vectoriel  $E$ .  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  sont des *normes équivalentes* si et seulement s'il existe  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que

$$\forall x \in E, \quad a \|x\| \leq \|x\|' \leq b \|x\|. \quad \lrcorner$$

**Théorème 2**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

On peut toujours le munir d'une norme.

Toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes. \lrcorner

Une conséquence de l'équivalence des normes dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie est que, dans un tel espace, la limite d'une fonction est indépendante de la norme choisie. N'importe quelle norme fera donc l'affaire dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}^p$ .