Université Pierre et Marie Curie. **Unité d'enseignement LP206.**
Année universitaire 2012/2013 **Mathématiques pour physiciens I**

Examen de première session

I.

1. On trouve $I_0 = \frac{2}{\pi}$ et $I_1 = \frac{1}{\pi}$.
2. Par deux intégrations par parties, $I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)\,(n+2)}{\pi^2}\, I_n$.
   Cela implique que $I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\, I_0 = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}$, puis $I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} + \frac{48}{\pi^5}$.
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0,\, 1]$, $x^n \geqslant x^{n+1}$ et $\sin(\pi\, x) \geqslant 0$, donc $x^n\, \sin(\pi\, x) \geqslant x^{n+1}\, \sin(\pi\, x)$, donc $I_n \geqslant I_{n+1}$. La suite (I_n) est donc décroissante.
4. Pour tout x dans $[0,\, 1]$, $0 \leqslant x^n\, \sin(\pi\, x) \leqslant x^n$, donc $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$: la suite (I_n) converge vers 0.
5. D'après la relation de récurrence, $I_n = \frac{\pi}{(n+1)\,(n+2)} - \frac{\pi^2}{(n+1)\,(n+2)}\, I_{n+2}$. Comme $I_{n+2} = o(1)$ (étant donné que la suite converge vers zéro), on en déduit que $I_n = \frac{\pi}{(n+1)\,(n+2)} + o(1/n^2)$. On trouve finalement $I_n \simeq \frac{\pi}{n^2}$ quand $n \to \infty$.

II.

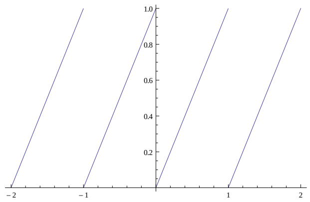
1. u_0 est impaire. Par récurrence, si u_{n-1} est impaire, $u_n = \sin \circ\, u_{n-1}$ l'est aussi (composition de fonctions impaires).
2. La formule de Taylor-Lagrange indique que pour tout $x \in [0,\, \pi/2]$, il existe $\zeta \in\,]0,\, x[$ tel que $\sin x = x + \frac{x^2}{2!} \sin'' \zeta = x - \frac{x^2}{2} \sin \zeta$. Le terme $-\frac{x^2}{2} \sin \zeta$ étant négatif, on en déduit le résultat demandé.
3. Récurrence triviale.
4. La fonction sinus est croissante sur $[0,\, \pi/2]$. On vérifie que $u_1 = \sin x \leqslant x$. La suite $n \mapsto u_n(x)$ est donc décroissante.
   Comme $u_n(x) \geqslant 0$, elle est minorée donc elle converge vers un certain $u(x)$.
5. La limite $u(x)$, dont nous avons démontré l'existence, est un point fixe de la récurrence car la fonction sinus est continue, donc $u(x) = \sin u(x)$, où $u(x) \in [0,\, \pi/2]$. Or le seul point fixe dans cet intervalle (et même dans l'absolu) est zéro (cf. II.2 par exemple). On a donc $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0$.
6. u_0 est une fonction croissante sur $[0,\, \pi/2]$. Supposons u_{n-1} croissante, c'est-à-dire que $0 \leqslant x \leqslant x' \leqslant \pi/2 \implies u_{n-1}(x) \leqslant u_{n-1}(x')$. On applique le sinus aux deux membres de cette inégalite, ce qui donne $u_n(x) \leqslant u_n(x')$ étant donné que $\forall\, x \in [0,\, \pi/2]$, $\forall\, n \geqslant 0$, $0 \leqslant u_n(x) \leqslant \pi/2$ et que la fonction sinus est croissante dans cet intervalle.
7. On a directement $U_n = \sup_{x\in[0,\, \pi/2]} u_n(x) = u_n(\pi/2)$.
8. On a vu que, pour tout $x \in [0,\, \pi/2]$, la suite numérique $n \mapsto u_n(x)$ est décroissante et tend vers zéro. Cela est vrai en particulier pour $x = \pi/2$ donc $\lim U_n = 0$. On en déduit que la convergence de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction nulle est uniforme sur $[-\pi/2,\, \pi/2]$.

III.

1. Le développement en série entière de f est donné par $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2\,n}$.
2. Le développement de g est $\tilde{S}(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, (x^2)^n$. Le rayon de convergence de $\tilde{S}$, donc celui de S, est $R = 1$.
3. Sur tout intervalle fermé contenu dans l'intervalle $]-1, 1[$, on peut intégrer terme à terme, en raison de la convergence uniforme de la série entière.
4. On obtient ainsi une primitive de $1/(1+x^2)$, soit $\arctan x + \mathrm{c^{te}}$: $\forall\, x \in \,]-1, 1[\,$, $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1} \, x^{2\,n+1}$. La constante d'intégration est obtenue avec $\arctan 0 = 0$.
5. On peut appliquer le critère de Leibniz car, $\forall\, x \in [0, 1]$, la suite $n \mapsto \frac{1}{2\,n+1} x^{2\,n+1}$ est décroissante et tend vers zéro. (Lorsque $x \in [-1, 0]$, $n \mapsto -\frac{1}{2\,n+1} x^{2\,n+1}$ est aussi décroissante et tend vers zéro.) La série de fonctions converge donc sur $[-1, 1]$.
   On a également, $\forall\, x \in [-1, 1]$, $|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\,n+3} \, |x|^{2\,n+3}$.
6. On observe que, $\forall\, x \in [-1, 1]$, $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\,n+3} \, |x|^{2\,n+3} < \frac{1}{2\,n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ce qui prouve la convergence uniforme de (S_n) dans $[-1, 1]$.
7. La série de fonctions convergeant uniformément sur $[-1, 1]$, elle est continue sur cet intervalle.
   Le rayon de convergence du développement en série entière de arctangente étant $R = 1$, $\forall x \in \,]-1, 1[$, on a $S(x) = \arctan x$.
   Comme démontré précédemment, S est continue sur $[-1, 1]$. En faisant tendre x vers 1^- dans l'égalité précédente, on obtient $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, donc $\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}$.
8. L'erreur commise sur π en sommant n termes est $4\,|R_n(1)| \leqslant \frac{4}{2\,n+3}$, qu'on souhaite inférieure ou égale à 10^{-6}. Il faut donc au minimum $n \approx 2 \times 10^6$ termes. La convergence est donc très lente.

IV.

1. Périodique de période $T = 1$.



2. Pas de parité.
3. Pour $n \neq 0$, $d_n = \int_0^1 f(x) \, \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi\,n\,x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x \, \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi\,n\,x} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{2\,\pi\,n}$.
   Par ailleurs $d_0 = \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = 1/2$.
   On a donc $\tilde{\phi}(t) = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2\,\pi} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \, \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,n\,t}$.
4. ϕ est de classe C^1 par morceaux dans $\mathbb{R}$; le théorème de Dirichlet s'applique donc et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{\phi}(x)$ converge et vaut $\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{2}\,(\phi(x^-) + \phi(x^+))$.
   ϕ est par ailleurs continue, sauf pour $x \in \mathbb{Z}$. En tout point où ϕ est continue, $\phi(x) = \phi(x^-) = \phi(x^+)$, donc ϕ et $\tilde{\phi}$ coïncident sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. En revanche, pour $x \in \mathbb{Z}$, $\phi(x) = 0$ alors que $\tilde{\phi}(x) = 1/2$.
5. On applique le théorème de Parseval : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4\,\pi^2} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.
   On en déduit que $\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} = \pi^2/3$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.
6. $f_{\mathrm{h}}(t) = A \exp(-a\;t)$, où A est une constante indéterminée.
7. Les coefficients de f_{p}' sont $\{2\;\mathrm{i}\;\pi\;n\;c_n,\; n \in \mathbb{Z}\}$.

8. On a $f_{\mathrm{p}}'(t) + a\ f_{\mathrm{p}}(t) - \phi(t) = 0$. Les coefficients du développement de la fonction nulle étant nuls, on doit avoir $(2\ \mathrm{i}\ \pi\ n + a)\ c_n - d_n = 0$, donc $c_n = \frac{d_n}{2\ \mathrm{i}\ \pi\ n + a}$,
soit, $\forall\ n \neq 0$, $c_n = \frac{\mathrm{i}}{2\ \pi\ n\ (2\ \mathrm{i}\ \pi\ n + a)}$
et $c_0 = \frac{1}{2\ a}$.
9. La solution générale est ainsi

$$f(t) = f_{\mathrm{h}}(t) + f_{\mathrm{p}}(t) = A\ \mathrm{e}^{-a\ t} + \frac{1}{2\ a} + \sum_{n \neq 0} \frac{\mathrm{i}}{2\ \pi\ n\ (2\ \mathrm{i}\ \pi\ n + a)}\ \mathrm{e}^{2\ \mathrm{i}\ \pi\ n\ t}\,.$$

10. Elle n'est solution de l'équation que pour $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ selon le théorème de Dirichlet (voir plus haut).
11. On remarque que $x_0 = 1/2 \in]0, 1[$, et la solution générale trouvée ci-dessus est bien valide dans cet intervalle. L'équation étant du premier ordre, la solution est alors unique dans cet intervalle.
On a

$$f(1/2) = A\ \mathrm{e}^{-a/2} + \frac{1}{2\ a} - \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{2\ \mathrm{i}\ \pi\ n\ (2\ \mathrm{i}\ \pi\ n + a)} = 0\,,$$

donc

$$A = -\frac{\mathrm{e}^{a/2}}{2\ a} + \mathrm{e}^{a/2} \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{2\ \mathrm{i}\ \pi\ n\ (2\ \mathrm{i}\ \pi\ n + a)}\,.$$

On en déduit

$$f(t) = \frac{1}{2\ a}\left(1 - \mathrm{e}^{a\ (1/2-t)}\right) - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2\ \mathrm{i}\ \pi\ n\ (2\ \mathrm{i}\ \pi\ n + a)}\left(\mathrm{e}^{2\ \mathrm{i}\ \pi\ n\ t} - (-1)^n\ \mathrm{e}^{a\ (1/2-t)}\right).$$