Université Pierre et Marie Curie. **Unité d'enseignement LP206.**
Année universitaire 2010/2011 **Mathématiques pour physiciens I**

Contrôle continu du 15 novembre 2010

Durée : 1 h 30

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ' (ℓ et ℓ' finis).
   À l'aide de la *définition* d'une limite (c.-à-d. en termes de « Pour tout $\epsilon\ldots$ »), montrer que $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = \ell - \ell'$.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.
   Quelle est la limite de la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Prouvez-le en utilisant la définition d'une limite vers $\pm\infty$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = (3\,u_{n+1} - u_n)/2$.
Montrer qu'elle est monotone et qu'elle converge vers 3.

Exercice 3

1. Soient α un réel et une fonction
$$g_\alpha :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},$$
$$t \longmapsto g(t) = \frac{1}{t^\alpha}.$$
   Préciser, sans preuve, les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale $\int_{t=2}^{\infty} g_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et celles pour lesquelles elle converge.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}\,.$$
   Calculer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

3. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon]1,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}, \\ t &\longmapsto \frac{1}{t\sqrt{\ln t}}. \end{aligned}$$

   a. Déterminer la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale $J = \int_{t=2}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variable.
   b. La réponse à la question 1 permettait-elle de conclure sur la nature de J ?
4. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est-elle convergente ?

Exercice 4

1. Soient n un entier, x un réel et $P(x)$ un polynôme de degré n.
   Quel est le degré de $P'(x)$?
2. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon]0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \mathrm{e}^{-1/x}. \end{aligned}$$

   a. Montrer que f est dérivable et calculer f'.
   b. On pose $f^{(0)} = f$ et $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ pour tout n entier.
   Montrer par récurrence que f est infiniment dérivable et que, pour $n \geqslant 1$,

$$f^{(n)}(x) = x^{-N(n)}\,P_n(x)\,\mathrm{e}^{-1/x}, \tag{1}$$

   où $N(n) \in \mathbb{N}$ et $P_n(x)$ est un polynôme en x de degré $n-1$ au plus.
3. *a.* Établir une relation de récurrence entre $N(n)$ et $N(n+1)$, d'une part, et $P_n(x)$ et $P_{n+1}(x)$, d'autre part.
   b. Donner une expression explicite (sans relation de récurrence) de $N(n)$.
4. Soit la fonction

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Montrer, en utilisant la définition d'une dérivée et en raisonnant par récurrence, que $g^{(n)}(0)$ existe et préciser sa valeur.
   En déduire que g est infiniment dérivable.
5. **Question hors barème.**
   Vérifier que $P_n(x)$ est de degré $n-1$ exactement et que l'on a

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!\,(n+1)!}{(n-k)!\,k!\,(n+1-k)!}\,x^k. \tag{2}$$