Contrôle continu du 14 novembre 2013

Durée : 2 h

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

I. Limites de fonctions

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\ (1 + \cos x) - 2\ \sin x}{\ln(1 + x^3)}$;
2. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(\sin \dfrac{1}{x} + \ln \dfrac{x}{x+1} \right)$.

II. Convergence de séries

Déterminer le comportement de chacune des séries suivantes (grossièrement divergente, divergente, convergente, absolument convergente) par la méthode de votre choix :

1. $\sum u_n$, avec $u_n = (n^3 + 3\ n^2 + 1)^{1/3} - (n^2 + 2\ n + 3)^{1/2}$;
2. $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$, avec $v_n = \sin \dfrac{\pi\ (n^2 + 1)}{n}$;
3. $\sum w_n$, avec $w_n = \dfrac{\cos(n^{3/2})}{n^{3/2} + 1}$;
4. $\sum z_n$, où (z_n) est la suite définie par la formule de récurrence

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = z_n \left(z_n + \frac{1}{2} \right)$$

et par $z_0 = 1/4$. On pourra utiliser le critère de d'Alembert.

Tournez la page, s'il vous plaît.

III. Suite définie par récurrence

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+2} = (u_{n+1} + u_n)^{1/3},$$

ainsi que par la donnée de ses deux premiers termes, $u_0 = u_1 = 1/2$.

1. Chercher le ou les points fixes correspondant à la relation de récurrence.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

IV. Intégrale et série

On considère l'intégrale suivante, dépendante d'un entier $n \geqslant 2$:

$$I_n = \int_0^1 \sin \frac{\pi}{x^{1/n^2}}\, \mathrm{d}x.$$

1. Déterminer si cette intégrale converge, et indiquer le cas échéant si elle converge absolument.
2. On considère la série numérique $\sum_{n\geqslant 2} I_n$. Montrer que cette série converge absolument ; on pourra utiliser une intégration par parties pour trouver un majorant de $|I_n|$.

V. Théorème de Cesàro

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de réels convergeant vers une limite ℓ finie.

1. Rappeler la définition de la convergence de (u_n) vers ℓ en termes d'ε (réel) et de N (entier).

On construit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général

$$v_n = \frac{1}{n}\,(u_1 + u_2 + \cdots + u_n).$$

On souhaite montrer que (v_n) converge vers ℓ à l'aide de la définition de la limite.

2. Soit N ($\geqslant 2$) l'entier introduit à la question 1, et $(w_n)_{n\geqslant N}$ la suite de terme général

$$w_n = \frac{1}{n}\left(u_1 + u_2 + \cdots + u_{N-1} - [N-1]\ \ell\right).$$

   Majorer $|v_n - \ell|$ à l'aide de w_n et ε.
3. Quelle est la limite de (w_n) ? En déduire que la suite (v_n) converge vers ℓ.