Corrigé du contrôle continu du 14 novembre 2013

I. Limites de fonctions

1. Au voisinage de 0,

$$x\,(1+\cos x) - 2\,\sin x = x\left(1+1-\frac{x^2}{2}+O[x^4]\right) - 2\left(x-\frac{x^3}{6}+O[x^5]\right) = -\frac{x^3}{6}+O(x^4)$$

et

$$\ln(1+x^3) = x^3 + O(x^6).$$

La limite est donc $-1/6$.

2. Quand $x \to \infty$,

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

et

$$\ln\frac{x}{x+1} = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2\,x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

donc

$$\sin\frac{1}{x} + \ln\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2\,x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

d'où

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \ln\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

II. Convergence de séries

1. Cherchons un équivalent asymptotique de

$$u_n = n\left(\left[1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right]^{1/3} - \left[1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right]^{1/2}\right).$$

On trouve

$$u_n = \frac{-2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \simeq \frac{-2}{n}.$$

La suite $(-2/n)$ est de signe constant et $\sum -2/n$ diverge (somme de Riemann avec $\alpha = 1$) : la série est donc divergente (mais elle n'est pas grossièrement divergente).

2. On a

$$v_n = (-1)^n \sin\frac{\pi}{n}.$$

Comme $\sin(\pi/n) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il s'agit bien d'une série alternée. En outre, $\sin(\pi/n) \simeq_\infty \pi/n$, donc $|v_n|$ tend bien vers zéro. Elle est aussi décroissante à partir de $n = 2$, car la fonction $x \mapsto \sin(\pi/x)$ a pour dérivée

$$x \mapsto -\frac{\pi}{x^2}\cos\frac{\pi}{x},$$

qui est négative lorsque $x \geqslant 2$. On peut donc appliquer le critère de Leibniz pour montrer que la série converge. Comme $|v_n| \simeq \pi/n$, elle n'est pas absolument convergente.

3. On a
$$|w_n| \leqslant \frac{1}{n^{3/2}+1} \simeq \frac{1}{n^{3/2}},$$
donc par comparaison avec les sommes de Riemann, la série $\sum w_n$ converge absolument.

4. L'application $x \mapsto x\,(x+1/2)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $z_1 = 3/8 < z_0$, la suite (z_n) est décroissante et tend vers le point fixe $x = 0$. On a $z_{n+1}/z_n = (z_n + 1/2) \to 1/2$, donc, en appliquant le critère de d'Alembert, la série converge ; étant à termes positifs, elle converge absolument.

III. Suite définie par récurrence

1. Les points fixes sont solutions de $x = (2\,x)^{1/3}$, donc $x \in \{0, \sqrt{2}\}$.
2. On vérifie que $u_2 = 1 \geqslant u_1$. Supposons, pour $n \geqslant 1$, que
$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}.$$
On a
$$u_{n+2} - u_{n+1} = (u_{n+1} + u_n)^{1/3} - (u_n + u_{n-1})^{1/3} \geqslant (2\,u_n)^{1/3} - (2\,u_n)^{1/3} = 0,$$
donc
$$u_0 \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}.$$
3. Supposons que
$$u_0 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2}.$$
On a
$$u_{n+1} = (u_n + u_{n-1})^{1/3} \leqslant (2\,u_n)^{1/3} \leqslant \left(2^{3/2}\right)^{1/3} = \sqrt{2}.$$
La suite étant croissante et majorée, elle converge. Elle converge vers l'unique point fixe plus grand que u_0, soit vers $\sqrt{2}$.

IV. Intégrale et série

1. On a
$$\forall\, x \in\,]0, 1], \quad \left|\sin \frac{\pi}{x^{1/n^2}}\right| \leqslant 1,$$
donc l'intégrale impropre converge absolument, et par conséquent simplement.
2. Par intégration par parties sur $[\varepsilon, 1] \subset\,]0, 1]$, on a
$$\int_\varepsilon^1 \sin \frac{\pi}{x^{1/n^2}}\,\mathrm{d}x = \left[x \sin \frac{\pi}{x^{1/n^2}}\right]_\varepsilon^1 + \frac{\pi}{n^2} \int_\varepsilon^1 x^{-1/n^2} \cos \frac{\pi}{x^{1/n^2}}\,\mathrm{d}x.$$
Comme
$$\left|\varepsilon\, \sin \frac{\pi}{\varepsilon^{1/n^2}}\right| \leqslant \varepsilon,$$
le terme tout intégré tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0^+$. Par ailleurs,
$$\left|x^{-1/n^2} \cos \frac{\pi}{x^{1/n^2}}\right| \leqslant x^{-1/n^2}$$

sur $]0,1]$. Or la fonction $x \mapsto x^{-1/n^2}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $1/n^2 < 1$. On a donc

$$\left|\int_0^1 x^{-1/n^2} \cos\frac{\pi}{x^{1/n^2}}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|x^{-1/n^2} \cos\frac{\pi}{x^{1/n^2}}\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{-1/n^2}\,\mathrm{d}x.$$

Cette dernière intégrale vaut

$$\int_0^1 x^{-1/n^2} = \frac{1}{1-1/n^2} = \frac{n^2}{n^2-1},$$

donc

$$|I_n| \leqslant \frac{\pi}{n^2-1} \simeq \frac{\pi}{n^2}.$$

On en déduit que $\sum_{n\geqslant 2} I_n$ converge absolument.

V. Théorème de Cesàro

1. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$

2. Pour $n \geqslant N$, on a

$$\begin{aligned}|v_n - \ell| &= \frac{1}{n}\left|(u_1-\ell)+(u_2-\ell)+\cdots+(u_{N-1}-\ell)+(u_N-\ell)+\cdots+(u_n-\ell)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{n}\left|(u_1-\ell)+(u_2-\ell)+\cdots+(u_{N-1}-\ell)\right| + \frac{1}{n}\left|(u_N-\ell)+\cdots+(u_n-\ell)\right|,\end{aligned}$$

donc, en prenant le N défini en fonction de ε à la question 1,

$$|v_n - \ell| \leqslant |w_n| + \left(1 - \frac{N-1}{n}\right)\varepsilon \leqslant |w_n| + \varepsilon.$$

3. w_n tend vers zéro quand $n \to \infty$, donc

$$\exists\, N',\ \forall\, n \geqslant N',\ |w_n| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\forall\ n \geqslant \sup(N, N'),\ |v_n - \ell| \leqslant 2\ \varepsilon.$$