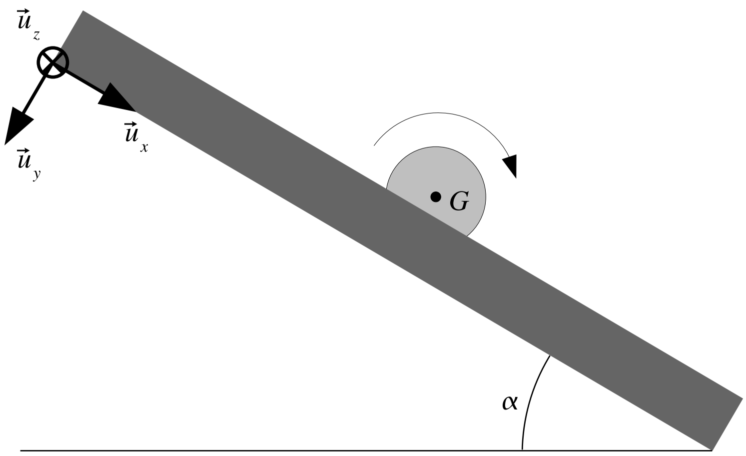
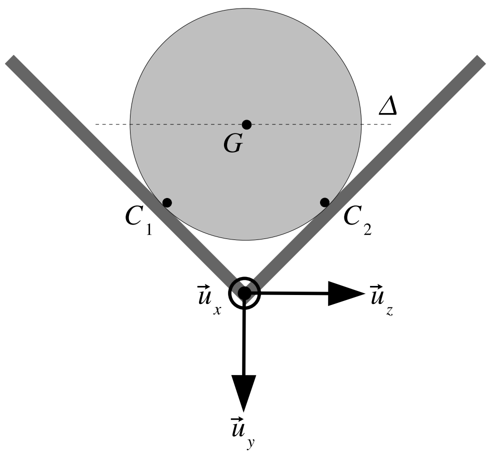
TP « Bille »

1. Notations





- G : centre d'inertie de la bille.
- m : masse de la bille.
- r : rayon de la bille.
- $I = 2\ m\ r^2/5$: moment d'inertie de la bille par rapport à un axe passant par G.
- $\mathcal{D}$: droite d'intersection des plans de la cornière.
- α : angle de $\mathcal{D}$ par rapport à l'horizontale.
- $\vec{u}_x$: vecteur unitaire parallèle à $\mathcal{D}$, dirigé vers le bas.
- $\vec{u}_y$: vecteur unitaire perpendiculaire à $\mathcal{D}$, dirigé vers le bas et dans un plan vertical.
- $\vec{u}_z = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$.
- $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: référentiel terrestre, quasi-galiléen.
- $\mathcal{R}'$: référentiel lié à la bille.
- $\vec{\Omega} = \Omega\ \vec{u}_z$, avec $\Omega > 0$: vitesse angulaire de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ (direction fixe).
- $\mathcal{R}^* = (G, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: référentiel barycentrique de la bille.
- Δ : axe $(G, \vec{u}_z)$.
- C_1 : point de la bille en contact avec le plan du côté de $-\vec{u}_z$ à un instant t.
- C_2 : point de la bille en contact avec le plan du côté de $+\vec{u}_z$ à un instant t.

2. Étude dynamique

2.1. Bilan des forces

La bille est soumise à son poids, $\vec{P} = m\ g \cdot (\sin\alpha\ \vec{u}_x + \cos\alpha\ \vec{u}_y)$, appliqué en G, et aux réactions exercées par la cornière au voisinage de C_1 et C_2 (« au voisinage » car le contact n'est pas rigoureusement ponctuel). Notons $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ les résultantes de ces réactions. On a

$$\vec{R}_1 = \frac{R_\perp}{\sqrt{2}} \cdot (\vec{u}_z - \vec{u}_y) - R_{/\!/}\ \vec{u}_x$$

et

$$\vec{R}_2 = \frac{R_\perp}{\sqrt{2}} \cdot (-\vec{u}_z - \vec{u}_y) - R_{/\!/}\ \vec{u}_x,$$

où $R_\perp$ et $R_{/\!/}$ sont les normes des réactions normale et tangentielle en C_1 et C_2.

2.2. Lois du mouvement

La bille étant un solide indéformable, son mouvement est entièrement déterminé par le théorème du centre d'inertie,

$$m\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2,$$

et par le théorème du moment cinétique,

$$\mathrm{d}(L_{\Delta/\mathcal{R}^*})/\mathrm{d}t = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_2),$$

où $L_{\Delta/\mathcal{R}^*} = I\,\Omega$ (la version scalaire, projetée sur $\vec{u}_z$, suffit ici, car la direction de l'axe de rotation est fixe).

2.3. Théorème du centre d'inertie

D'après le théorème du centre d'inertie, en notant x et y les coordonnées de G, on a

$$m\,\ddot{x} = m\,g\,\sin\alpha - 2\,R_{/\!/} \tag{1}$$

et

$$m\,\ddot{y} = m\,g\,\cos\alpha - 2\,R_\perp/\sqrt{2}.$$

$\ddot{y} = 0$, d'où

$$R_\perp = m\,g\,\cos\alpha/\sqrt{2}. \tag{2}$$

2.4. Théorème du moment cinétique

On a $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = (\overrightarrow{GG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z = 0$,

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_1) = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{R}_1) \cdot \vec{u}_z = \left(\overrightarrow{GC_1} \wedge \vec{R}_1 + \vec{\mathcal{M}}_{C_1}[\vec{R}_1]\right) \cdot \vec{u}_z$$

et de même pour $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}_2)$.

$$(\overrightarrow{GC_1} \wedge \vec{R}_1) \cdot \vec{u}_z = \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \cdot [\vec{u}_y - \vec{u}_z] \wedge \left[\frac{R_\perp}{\sqrt{2}} \cdot (\vec{u}_z - \vec{u}_y) - R_{/\!/}\,\vec{u}_x\right]\right) \cdot \vec{u}_z = R_{/\!/}\,r/\sqrt{2}.$$

$\vec{\mathcal{M}}_{C_1}(\vec{R}_1)$ n'est pas nul car le contact n'est pas ponctuel. Pour calculer ce moment, décomposons $\vec{\Omega}$ en une composante perpendiculaire au plan de contact en C_1 (pivotement) et un composante parallèle (roulement) :

$$\vec{\Omega} = \Omega_\perp\,\vec{u}_\perp + \Omega_{/\!/}\,\vec{u}_{/\!/},$$

avec $\Omega_\perp > 0$ et $\Omega_{/\!/} > 0$. $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{u}_z$, d'où $\vec{u}_\perp = (\vec{u}_z - \vec{u}_y)/\sqrt{2}$ et $\vec{u}_{/\!/} = (\vec{u}_z + \vec{u}_y)/\sqrt{2}$.

D'après les lois du frottement de Coulomb, on a $\vec{\mathcal{M}}_{C_1}(\vec{R}_1) = \vec{\mathcal{M}}_\perp + \vec{\mathcal{M}}_{/\!/}$, où

$$\vec{\mathcal{M}}_\perp = -h\,R_\perp\,\vec{u}_\perp \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_{/\!/} = -k\,R_\perp\,\vec{u}_{/\!/},$$

sont les moments de résistance au pivotement et au roulement, et h et k sont des constantes ayant la dimension d'une longueur. [†1]

On obtient finalement que

$$\vec{\mathcal{M}}_{C_1}(\vec{R}_1) \cdot \vec{u}_z = -(h+k)\,R_\perp/\sqrt{2}.$$

De même pour $\vec{\mathcal{M}}_{C_2}(\vec{R}_2) \cdot \vec{u}_z$.

On déduit donc du théorème du moment cinétique que

$$I\,\dot{\Omega} = \sqrt{2}\,R_{/\!/}\,r - \sqrt{2}\,(h+k)\,R_\perp. \tag{3}$$

2.5. Roulement sans glissement

Le roulement étant sans glissement, la vitesse $\vec{v}_{C_1/\mathcal{R}}$ du point de contact C_1 à l'instant t est nulle. Or

$$\vec{v}_{C_1/\mathcal{R}} = \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GC_1} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \Omega\,\vec{u}_z \wedge \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot (\vec{u}_y - \vec{u}_z) = (\dot{x} - \Omega\,r/\sqrt{2})\,\vec{u}_x,$$

donc

$$\Omega = \sqrt{2}\,\dot{x}/r. \tag{4}$$

Cette relation n'est valable que si $R_{/\!/} \leqslant f_0\,R_\perp$ (f_0 est le coefficient de frottement statique), c'est-à-dire si α n'est pas trop grand. Sinon, le roulement se fait avec glissement.

1. Si $\Omega_\perp = 0$, on a $\|\vec{\mathcal{M}}_\perp\| \leqslant h_0\,R_\perp$ avec $h \leqslant h_0$ et $\vec{\mathcal{M}}_\perp$ opposé au pivotement latent, c.-à-d. le pivotement qui se produirait si $\vec{\mathcal{M}}_\perp$ était nul. Idem pour le roulement.

2.6. Accélération

Des équations (1) à (4), on déduit que

$$\ddot{x} = g \sin\alpha \, \frac{1 - \sqrt{2}\,(h+k)/(r \tan\alpha)}{1 + 2\, I/(m\, r^2)}.$$

3. Étude énergétique

3.1. Travail des forces non conservatives

La bille étant un solide indéformable, le travail de $\vec{R}_1$ pendant une durée t vaut

$$W(\vec{R}_1) = \int_{t'=0}^{t} (\vec{v}_{O'} \cdot \vec{R}_1 + \vec{\Omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O'}[\vec{R}_1])\, \mathrm{d}t',$$

où O' est un point quelconque du solide, par exemple G ou C_1. En prenant $O' = C_1$, on obtient que

$$W(\vec{R}_1) = \int_{t'=0}^{t} -\Omega \cdot (h+k)\, R_\perp / \sqrt{2}\, \mathrm{d}t',$$

puisque $\vec{v}_{C_1} = \vec{0}$ et que

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{C_1}(\vec{R}_1) = -\Omega \cdot (h+k)\, R_\perp / \sqrt{2}.$$

En exprimant Ω et $R_\perp$ à l'aide des relations (2) et (4), on obtient que

$$W(\vec{R}_1) = \int_{t'=0}^{t} -(\sqrt{2}\, \dot{x}/r) \cdot (h+k) \cdot (m\, g \cos\alpha/\sqrt{2})/\sqrt{2}\, \mathrm{d}t' = -m\, g \cos\alpha \cdot (h+k)\, x/(r\, \sqrt{2}),$$

où l'on a pris $x(0) = 0$. De même pour $W(\vec{R}_2)$.

Le travail des forces extérieures non conservatives exercées sur la bille vaut donc

$$W_{\mathrm{n\,c}} = W(\vec{R}_1) + W(\vec{R}_2) = -\sqrt{2}\, m\, g \cos\alpha \cdot (h+k)\, x/r.$$

Quant aux forces intérieures, elles ne travaillent pas pour un solide indéformable.

3.2. Énergie cinétique

D'après le 2$^{\mathrm{e}}$ théorème de Koenig,

$$E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}} = \underbrace{E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}^*}}_{E_{\mathrm{c,rot}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\, m\, v_{G/\mathcal{R}}^2}_{E_{\mathrm{c,trans}}}.$$

Pour la bille en rotation,

$$E_{\mathrm{c,rot}} = \frac{1}{2}\, I\, \Omega^2 = \frac{1}{2}\, I \cdot (\sqrt{2}\, \dot{x}/r)^2 = \frac{1}{2}\, a\, m\, \dot{x}^2 = a\, E_{\mathrm{c,trans}}$$

avec $a = 4/5$.

3.3. Théorème de l'énergie mécanique

L'énergie potentielle (de pesanteur uniquement) vaut

$$E_{\mathrm{p}} = -m\, g\, x \sin\alpha.$$

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, on obtient

$$E_{\mathrm{m}}(t) - E_{\mathrm{m}}(0) = \frac{1}{2}\,(1+a)\, \dot{x}^2 - m\, g\, x \sin\alpha = W_{\mathrm{n\,c}} = -\sqrt{2}\, m\, g \cos\alpha \cdot (h+k)\, x/r.$$

On retrouve bien l'expression de $\ddot{x}$ en dérivant par rapport au temps et en simplifiant par $\dot{x}$.