Chapitre V

Dynamique des systèmes

Hormis au § V.H, nous ne nous intéresserons qu'à des systèmes fermés, c.-à-d. constitués à chaque instant des mêmes points matériels.

V.A. Centre d'inertie

Soit un système S (c.-à-d. un ensemble) de points matériels M_j de masses m_j. On appelle ***centre d'inertie*** G de S, ou encore ***centre de masse***, le barycentre des points M_j affectés des coefficients m_j, c.-à-d. le point tel que

$$\sum_j \boldsymbol{m_j\, \overrightarrow{GM_j} = \vec{0}}.$$

Quel que soit le point A,

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_j m_j\, \overrightarrow{AM_j}}{m}},$$

où $m = \sum_j m_j$.

Si G' et G'' sont respectivement les centres d'inertie d'un système S', de masse totale m', et d'un système S'', de masse totale m'', le centre d'inertie G du système $S = S' \cup S''$ (avec $S' \cap S'' = \emptyset$) est le barycentre des points G' et G'' affectés des coefficients m' et m''. Quel que soit le point A, on a donc

$$\overrightarrow{AG} = \frac{m'\, \overrightarrow{AG'} + m''\, \overrightarrow{AG''}}{m' + m''}.$$

V.B. Distributions discrète et continue de matière

Notons $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position d'un point M quelconque. Pour une distribution continue de matière dans un volume $\mathcal{V}$, de masse volumique $\mu(\vec{r})$ en M, les expressions discrètes telles que du genre

$$\sum_j m_j\, f_j,$$

où f_j est la valeur pour le point matériel M_j d'une quantité (scalaire ou vectorielle) f, doivent être remplacées par

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(\vec{r})\, \mathrm{d}m,$$

où $f(\vec{r})$ est la valeur en M de la quantité f et $\mathrm{d}m = \mu(\vec{r})\, \mathrm{d}\mathcal{V}$ est la masse du volume élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{V}$ autour de M.

Par exemple, le centre d'inertie d'un système de points matériels M_j de masses m_j est le point G défini par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_j m_j\ \overrightarrow{OM_j}}{\sum_j m_j} = \frac{\sum_j m_j\ \vec{r}_j}{\sum_j m_j}.$$

Au numérateur, $f_j = \vec{r}_j$, donc $f(\vec{r}) = \vec{r}$. Au dénominateur, $f_j = 1$, donc $f(\vec{r}) = 1$. Si l'on considère la matière comme continue, on peut donc écrire

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_{\mathcal{V}} \mu(\vec{r})\ \vec{r}\ \mathrm{d}\mathcal{V}}{\iiint_{\mathcal{V}} \mu(\vec{r})\ \mathrm{d}\mathcal{V}}.$$

Si la matière est distribuée sur une surface d'aire $\mathcal{A}$ (resp· une courbe de longueur ℓ) de masse surfacique $\sigma(\vec{r})$ (resp· de masse linéique $\lambda(\vec{r})$), l'intégrale $\iiint_{\mathcal{V}} f(\vec{r})\ \mu(\vec{r})\ \mathrm{d}\mathcal{V}$ est remplacée par

$$\iint_{\mathcal{A}} f(\vec{r})\ \sigma(\vec{r})\ \mathrm{d}\mathcal{A} \qquad (\text{resp}\cdot \int_{\ell} f(\vec{r})\ \lambda(\vec{r})\ \mathrm{d}\ell),$$

où $\mathrm{d}\mathcal{A}$ est un élément de surface (resp· $\mathrm{d}\ell$ est un élément de longueur) autour de M.

V.c. Dynamique dans un référentiel galiléen

V.c.1. Théorème du centre d'inertie

Par définition, la ***quantité de mouvement*** (ou ***impulsion***) du système de points matériels M_j est

$$\boldsymbol{\vec{p} := \sum_j \vec{p}_j = \sum_j m_j\ \vec{v}_j}.$$

Remarquer que

$$\begin{aligned}\vec{p} = \sum_j m_j\ \vec{v}_j = \sum_j m_j\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_j}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\Big(\sum_j m_j\ \overrightarrow{OM_j}\Big)}{\mathrm{d}t} \\ = \Big(\sum_j m_j\Big)\ \frac{\mathrm{d}\Big(\Big[\sum_j m_j\ \overrightarrow{OM_j}\Big] \Big/ \sum_j m_j\Big)}{\mathrm{d}t} &= m\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t},\end{aligned}$$

soit

$$\boldsymbol{\vec{p} = m\ \vec{v}_G}.$$

On se place dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

Pour chaque M_j, on a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\to j} = \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j} + \sum_{\substack{i \\ i\neq j}} \vec{f}_{i\to j},$$

où l'on a distingué les forces d'origine extérieure au système exercées sur M_j ($\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}$) des forces intérieures exercées par les autres corps M_i ($\vec{f}_{i\to j}$, avec $i \neq j$). En sommant sur tous les corps, on obtient

$$\sum_j \frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j} + \sum_j \sum_{\substack{i \\ i\neq j}} \vec{f}_{i\to j}$$

Les indices i et j étant muets,

$$\sum_j \sum_{\substack{i \\ i\neq j}} \vec{f}_{i\to j} = \sum_i \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} \vec{f}_{j\to i} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_{\substack{i \\ i\neq j}} (\vec{f}_{i\to j} + \vec{f}_{j\to i}) \text{ (*1)},$$

d'où

$$\sum_j \frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j} + \frac{1}{2} \sum_j \sum_{\substack{i \\ i\neq j}} (\vec{f}_{i\to j} + \vec{f}_{j\to i}).$$

D'après le principe de l'action et de la réaction, $\vec{f}_{i\to j} + \vec{f}_{j\to i} = \vec{0}$, donc $\sum_j (\mathrm{d}\vec{p}_j/\mathrm{d}t) = \sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}$. Or,

$$\sum_j \left(\frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}(\sum_j \vec{p}_j)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\ \vec{v}_G)}{\mathrm{d}t} = m\ \frac{\mathrm{d}\vec{v}_G}{\mathrm{d}t} = m\ \vec{a}_G.$$

On obtient finalement le résultat suivant :

Théorème du centre d'inertie (*2)

$$\boldsymbol{m\ \vec{a}_G = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}}.$$

V.c.2. Théorème du moment cinétique

Par définition, le ***moment cinétique*** par rapport à un point A du système de points matériels M_j est

$$\boldsymbol{\vec{L}_A \coloneqq \sum_j \vec{L}_{A,j} = \sum_j m_j\ \overrightarrow{AM_j} \times \vec{v}_j}.$$

Le moment cinétique par rapport à un autre point, B, est relié à celui par rapport à A par $\vec{L}_B = \vec{L}_A + \overrightarrow{AB} \times \vec{p}$.

Supposons le point A *fixe*. Pour chaque M_j, on a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{A,j}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\to j}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}) + \sum_{\substack{i \\ i\neq j}} \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{i\to j}).$$

En sommant sur tous les corps, on obtient

$$\sum_j \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{A,j}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\to j}) = \sum_j \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}) + \frac{1}{2} \sum_j \sum_{\substack{i \\ i\neq j}} (\vec{\mathcal{M}}_A[\vec{f}_{i\to j}] + \vec{\mathcal{M}}_A[\vec{f}_{j\to i}]).$$

Or,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{i\to j}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{j\to i}) &= \overrightarrow{AM_j} \times \vec{f}_{i\to j} + \overrightarrow{AM_i} \times \vec{f}_{j\to i} \\
&= \overrightarrow{AM_i} \times \vec{f}_{i\to j} + \overrightarrow{M_iM_j} \times \vec{f}_{i\to j} + \overrightarrow{AM_i} \times \vec{f}_{j\to i} \\
&= \overrightarrow{AM_i} \times \underbrace{(\vec{f}_{i\to j} + \vec{f}_{j\to i})}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{M_iM_j} \times \vec{f}_{i\to j}}_{\vec{0}} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

(les deux termes sont nuls en raison du principe de l'action et de la réaction : $\vec{f}_{j\to i} = -\vec{f}_{i\to j}$ et $\overrightarrow{M_iM_j}$ est parallèle à $\vec{f}_{i\to j}$), d'où

$$\sum_j \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{A,j}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}).$$

1. Le facteur 1/2 permet donc qu'un couple (M_k, M_ℓ) (avec $k \neq \ell$) de points matériels ne soit compté qu'une fois ; sinon, il le serait une première fois quand $i = k$ et $j = \ell$, et une deuxième fois quand $i = \ell$ et $j = k$. On peut aussi remplacer $\frac{1}{2}\sum_j \sum_{i,\, i\neq j}$ par $\sum_j \sum_{i,\, i<j}$.
2. La relation $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}$ est parfois appelée « théorème de la quantité de mouvement ».

On obtient finalement le résultat suivant :

Théorème du moment cinétique

Si le point A est fixe [(*3)],

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\text{ext}\to j}),$$

où $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\text{ext}\to j}) := \overrightarrow{AM_j} \times \vec{F}_{\text{ext}\to j}$ est le ***moment par rapport à A des forces extérieures appliquées au point M_j***.

Pour un corps ponctuel, les M_j sont confondus : le théorème du moment cinétique est alors équivalent au théorème du centre d'inertie.

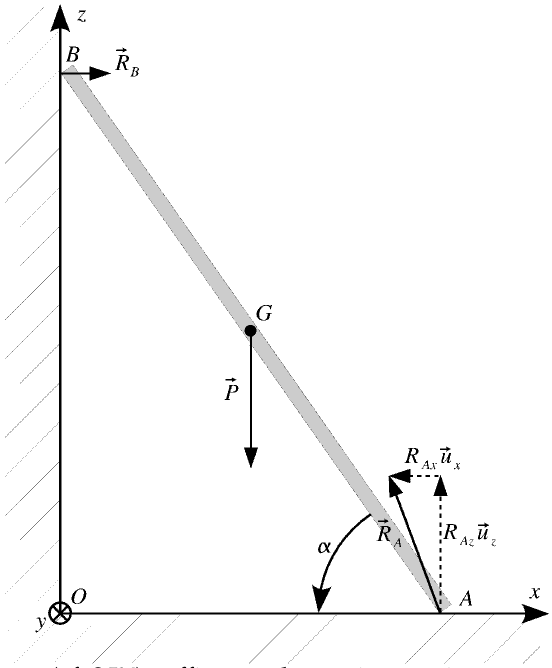
Exemple : équilibre d'une échelle

Pour illustrer ces notions, intéressons-nous à l'équilibre d'une échelle homogène, de masse m et de longueur ℓ, dont l'extrémité A repose sur le sol et dont l'extrémité B est appuyée contre un mur vertical lisse.

Notons G le centre d'inertie de l'échelle (situé en son milieu puisqu'elle est homogène) et f_s le coefficient de frottement statique entre l'échelle et le sol (cf· figure pour les autres notations).

Les forces extérieures qui s'exercent sur l'échelle sont

- le poids total, $\vec{P} = -m\ g\ \vec{u}_z$, appliqué en G (cf· § V.c.3) ;
- la réaction $\vec{R}_A = R_{A,\,x}\ \vec{u}_x + R_{A,\,z}\ \vec{u}_z$ du sol, appliquée en A et telle que $|R_{A,\,x}| \leqslant f_\text{s}\ |R_{A,\,z}|$;
- la réaction $\vec{R}_B = R_{B,\,x}\ \vec{u}_x$ du mur, appliquée en B (la composante tangentielle est nulle puisque le mur est lisse).



Les théorèmes du centre d'inertie et du moment cinétique (cf· § IX) suffisent à déterminer entièrement le mouvement d'un solide. Pour que l'échelle soit immobile, il faut que la somme des forces extérieures et la somme des moments de ces forces par rapport à un point fixe soient nulles. Puisqu'il y a équilibre, A peut être choisi comme point fixe de manière à éliminer $\vec{R}_A$ dans le théorème du moment cinétique. On a donc

$$\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} R_{B,\,x} + R_{A,\,x} = 0 & (\text{selon } \vec{u}_x), \\ -m\ g + R_{A,\,z} = 0 & (\text{selon } \vec{u}_z), \end{cases}$$

et

$$\overrightarrow{AG} \times \vec{P} + \overrightarrow{AA} \times \vec{R}_A + \overrightarrow{AB} \times \vec{R}_B = \vec{0}, \quad \text{soit} \quad R_{B,\,x}\ \ell\ \sin\alpha - \frac{m\ g\ \ell}{2} \cos\alpha = 0 \quad (\text{selon } \vec{u}_y).$$

De la condition $|R_{A,\,x}| \leqslant f_\text{s}\ |R_{A,\,z}|$, on déduit que l'échelle reste immobile si $\tan\alpha \geqslant 1/(2\ f_\text{s})$.

V.c.3. Centre de gravité. Moment du poids

Le ***centre de gravité*** Γ d'un système de points M_j soumis à des forces gravitationnelles extérieures au système, $m_j\ \vec{g}_j$, est défini par

$$\sum_j \overrightarrow{\Gamma M_j} \times m_j\ \vec{g}_j = \vec{0}.$$

3. Si A est mobile, on obtient $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{p} \times \vec{v}_A + \sum_j \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\text{ext}\to j})$.

Quel que soit le point A,

$$\overrightarrow{A\Gamma} \times \sum_j m_j\ \vec{g}_j = \sum_j \overrightarrow{AM_j} \times m_j\ \vec{g}_j.$$

On peut donc remplacer les forces $m_j\ \vec{g}_j$ exercées sur les M_j par une force unique, $\sum_j m_j\ \vec{g}_j$, appliquée en Γ.

Si le champ de gravitation peut être considéré comme uniforme à l'échelle du système ($\forall\ j, \vec{g}_j \approx \vec{g} \approx \vec{c}^{\text{te}}$),

$$\sum_j \overrightarrow{GM_j} \times m_j\ \vec{g}_j = \underbrace{\Big(\sum_j m_j\ \overrightarrow{GM_j}\Big)}_{\vec{0}} \times \vec{g} = \vec{0}.$$

Le centre de gravité et le centre d'inertie sont donc pratiquement confondus pour les objets dans le champ de pesanteur terrestre et l'on peut remplacer la somme des moments des forces de pesanteur subies par les points du système par le moment du poids total appliqué au centre d'inertie :

$$\sum_j \overrightarrow{AM_j} \times \vec{P}_j = \overrightarrow{AG} \times \vec{P}.$$

Ceci revient à considérer que le poids « s'applique » au centre d'inertie.

V.c.4. Action et réaction

On peut généraliser le principe de l'action et de la réaction, énoncé pour des points matériels, à l'interaction entre deux systèmes de points, S_1 et S_2. On a

$$\vec{F}_{S_2\to S_1} = -\vec{F}_{S_1\to S_2} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{S_2\to S_1}) = -\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{S_1\to S_2}).$$

V.c.5. Théorème de l'énergie cinétique

V.c.5.*a*. Version infinitésimale

Par définition, l'***énergie cinétique*** du système de points matériels M_j est

$$\boldsymbol{E_\text{c} := \sum_j E_{\text{c},j} = \sum_j \frac{1}{2}\, m_j\ v_j^2.}$$

Pour chaque M_j, on a

$$\mathrm{d}E_{\text{c},j} = \delta W(\vec{F}_{\to j}).$$

En sommant sur tous les corps, on obtient le résultat suivant :

Théorème de l'énergie cinétique

$$\boldsymbol{\mathrm{d}E_\text{c} = \sum_j \delta W(\vec{F}_{\to j}).}$$

V.c.5.*b*. Version finie

Notons A_j et B_j les positions des points M_j à deux instants et $\widehat{A_jB_j}$ le chemin suivi par M_j pour aller de A_j à B_j. En intégrant pour tout j du point A_j au point B_j le long du chemin $\widehat{A_jB_j}$, on obtient l'expression finie du théorème de l'énergie cinétique :

$$\boldsymbol{\Delta E_\text{c} = \sum_j W_{\widehat{A_jB_j}}(\vec{F}_{\to j}),}$$

où $\boldsymbol{W_{\widehat{A_jB_j}}(\vec{F}_{\to j}) = \int_{\widehat{A_jB_j}} \delta W(\vec{F}_{\to j})}$ est le travail (fini) intégré sur le chemin $\widehat{A_jB_j}$.

V.c.5.*c*. Travail des forces intérieures

Contrairement aux théorèmes du centre d'inertie et du moment cinétique, où n'intervenaient que les forces *extérieures* au système, il faut également tenir compte des forces *intérieures* dans le théorème de l'énergie cinétique.

Le travail des forces intérieures est indépendant du référentiel, que celui-ci soit galiléen ou non. En effet, soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ des référentiels quelconques. Le travail dans $\mathcal{R}$ des points M_i et M_j vaut

$$(\delta W[\vec{f}_{i\to j}] + \delta W[\vec{f}_{j\to i}])_{/\mathcal{R}} = \vec{f}_{i\to j} \cdot \vec{v}_{j/\mathcal{R}}\,\mathrm{d}t + \vec{f}_{j\to i} \cdot \vec{v}_{i/\mathcal{R}}\,\mathrm{d}t = \vec{f}_{i\to j} \cdot (\vec{v}_{j/\mathcal{R}} - \vec{v}_{i/\mathcal{R}})\,\mathrm{d}t.$$

Or $\vec{v}_{i/\mathcal{R}} = \vec{v}_{i/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M_i}$; de même pour $\vec{v}_{j/\mathcal{R}}$, donc $\vec{v}_{j/\mathcal{R}} - \vec{v}_{i/\mathcal{R}} = \vec{v}_{j/\mathcal{R}'} - \vec{v}_{i/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{M_iM_j}$. Comme

$$\vec{f}_{i\to j} \cdot (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{M_iM_j}) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{M_iM_j} \times \vec{f}_{i\to j})}_{\vec{0}},$$

$$(\delta W[\vec{f}_{i\to j}] + \delta W[\vec{f}_{j\to i}])_{/\mathcal{R}} = \vec{f}_{i\to j} \cdot (\vec{v}_{j/\mathcal{R}'} - \vec{v}_{i/\mathcal{R}'})\,\mathrm{d}t = (\delta W[\vec{f}_{i\to j}] + \delta W[\vec{f}_{j\to i}])_{/\mathcal{R}'}.$$

Si le corps peut être considéré comme un *solide indéformable* ($\forall\ \{i, j\}$, $\mathrm{d}(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|)/\mathrm{d}t = 0$; cf· chap· IX), le travail des forces intérieures est nul (puisque les points du solide sont immobiles dans le référentiel où celui-ci est fixe et que le travail des forces intérieures est indépendant du référentiel) et l'on a

$$\mathrm{d}E_\mathrm{c} = \sum_j \delta W(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}).$$

V.c.5.*d*. Théorème de la puissance cinétique

En introduisant la ***puissance*** $\boldsymbol{\mathcal{P}(\vec{F}_{\to j}) := \vec{F}_{\to j} \cdot \vec{v}_j}$ de la force exercée sur M_j, on peut également écrire le *théorème de la puissance cinétique* :

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \mathcal{P}(\vec{F}_{\to j}).}$$

V.c.5.*e*. Pseudo-« théorème de l'énergie cinétique »

En général, $E_\mathrm{c} \neq \frac{1}{2}\,m\,v_G^2$ (cf· § V.d.3.*a*) ; l'égalité n'est vraie que pour un point matériel ou un corps dont tous les points se déplacent à la même vitesse, tel qu'un solide en translation. On n'a donc pas $\mathrm{d}\big(\frac{1}{2}\,m\,v_G^2\big) \overset{\text{faux}}{=} \sum_j \delta W(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j})$.

En revanche, on peut déduire du théorème du centre d'inertie que

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\,m\,v_G^2\right) = \Big(\sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}\Big) \cdot \mathrm{d}\vec{r}_G,$$

mais le second membre n'est pas un travail dans la mesure où toutes les forces ne s'appliquent pas en G (on qualifie d'ailleurs parfois cette quantité de « pseudo-travail »).

V.d. Dynamique dans le référentiel barycentrique

V.d.1. Référentiel barycentrique

Considérons un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ d'un système de points de centre d'inertie G est défini par

- $\vec{v}_{G/\mathcal{R}^*} = \vec{0}$ (G est fixe dans $\mathcal{R}^*$) ; et
- $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$ ($\mathcal{R}^*$ ne tourne pas par rapport à $\mathcal{R}$).

En d'autres termes, si « $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ » est galiléen, « $\mathcal{R}^* = (G, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ».

On a $\boldsymbol{\vec{p}_{/\mathcal{R}^*} = \vec{0}}$. Or, quels que soient les points A et B, $\vec{L}_B = \vec{L}_A + \overrightarrow{AB} \times \vec{p}$, donc $\vec{L}_{A/\mathcal{R}^*} = \vec{L}_{B/\mathcal{R}^*} = \vec{L}_{G/\mathcal{R}^*} := \vec{L}^*$.

V.D.2. Moment cinétique

‡ V.D.2.*a*. 1er théorème de Koenig

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{A/\mathcal{R}} &= \sum_j m_j\ \overrightarrow{AM_j} \times \vec{v}_{j/\mathcal{R}} \\
&= \sum_j \overrightarrow{AG} \times m_j\ \vec{v}_{j/\mathcal{R}} + \sum_j m_j\ \overrightarrow{GM_j} \times (\vec{v}_{j/\mathcal{R}^*} + \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}}}_{\vec{0}} \times \overrightarrow{GM_j}) \\
&= \overrightarrow{AG} \times \underbrace{\sum_j m_j\ \vec{v}_{j/\mathcal{R}}}_{m\,\vec{v}_{G/\mathcal{R}}} + \vec{L}_{G/\mathcal{R}^*} + \underbrace{\sum_j m_j\ \overrightarrow{GM_j}}_{\vec{0}} \times \vec{v}_{G/\mathcal{R}},
\end{aligned}$$

d'où

$$\boldsymbol{\vec{L}_{A/\mathcal{R}} = \vec{L}^* + m\ \overrightarrow{AG} \times \vec{v}_{G/\mathcal{R}}}.$$

En particulier, en prenant $A = G$, on obtient $\vec{L}_{G/\mathcal{R}} = \vec{L}^*$.

V.D.2.*b*. Théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique

Dérivons le 1er théorème de Koenig dans le cas où A est fixe dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{L}_{A/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}[\vec{L}^* + m\ \overrightarrow{AG} \times \vec{v}_{G/\mathcal{R}}]}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{L}^*}{\mathrm{d}t} + m\ \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{AG}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{v}_{G/\mathcal{R}}} \times \vec{v}_{G/\mathcal{R}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AG} \times \underbrace{m\ \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{v}_{G/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}}_{\sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}} \\
&= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}^*}\vec{L}^*}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}}}_{\vec{0}} \times \vec{L}^* + \overrightarrow{AG} \times \sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après le théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen

$$\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{L}_{A/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_j (\overbrace{\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_j}}^{\overrightarrow{AM_j}}) \times \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j} = \overrightarrow{AG} \times \sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j} + \sum_j \overrightarrow{GM_j} \times \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}.$$

En identifiant les deux expressions de $\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{L}_{A/\mathcal{R}}/\mathrm{d}t$, on obtient finalement le théorème du moment cinétique (par rapport à G) dans le référentiel barycentrique :

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}^*}\vec{L}^*}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j})},$$

où $\boldsymbol{\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}) = \overrightarrow{GM_j} \times \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}}$ est le moment par rapport à G de la force extérieure $\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}$ exercée sur M_j.

V.D.3. Énergie cinétique

‡ V.D.3.*a*. 2e théorème de Koenig

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}} &= \sum_j \frac{1}{2}\, m_j\ v_{j/\mathcal{R}}^2 = \sum_j \frac{1}{2}\, m_j \cdot (\vec{v}_{j/\mathcal{R}^*} + \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}}}_{\vec{0}} \times \overrightarrow{GM_j})^2 \\
&= \sum_j \frac{1}{2}\, m_j\ v_{j/\mathcal{R}^*}^2 + \frac{1}{2}\, m\ v_{G/\mathcal{R}}^2 + \underbrace{\sum_j m_j\ \vec{v}_{j/\mathcal{R}^*}}_{\vec{0}} \cdot \vec{v}_{G/\mathcal{R}},
\end{aligned}$$

d'où

$$\boldsymbol{E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}} = E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}^*} + \frac{1}{2}\, m\ v_{G/\mathcal{R}}^2}.$$

V.D.3.*b*. Théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique

Rappelons que la dérivée ou la différentielle d'un scalaire ne dépend pas du référentiel par rapport auquel cette opération est effectuée. L'énergie cinétique étant un scalaire, il est inutile de préciser le référentiel par rapport auquel on la dérive ou on la différencie : $\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}(E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}}) = \mathrm{d}_{/\mathcal{R}'}(E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}})$ (en revanche, on a généralement $\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}(E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}}) \neq \mathrm{d}_{/\mathcal{R}}(E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}'})$, car $E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}}$ et $E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}'}$ sont des scalaires différents).

Différencions le 2ᵉ théorème de Koenig :

$$\mathrm{d}(E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}}) = \mathrm{d}(E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}^*}) + \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \cdot \underbrace{m\,\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{v}_{G/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}}_{\sum_j \vec{F}_{\to j}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}^*}) + \sum_j \vec{F}_{\to j} \cdot \mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{OG}.$$

Par ailleurs, d'après le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$,

$$\mathrm{d}(E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}}) = \sum_j \vec{F}_{\to j} \cdot \mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{OM_j} = \sum_j \vec{F}_{\to j} \cdot \mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_j}.$$

En identifiant les deux expressions de $\mathrm{d}(E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}})$, on obtient

$$\mathrm{d}(E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}^*}) = \sum_j \vec{F}_{\to j} \cdot \mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{GM_j}.$$

Comme $\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{GM_j} = \mathrm{d}_{/\mathcal{R}^*}\overrightarrow{GM_j} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{GM_j}\,\mathrm{d}t$ et que $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{0}$, on en déduit le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique :

$$\boldsymbol{\mathrm{d}(E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}^*}) = \sum_j \delta W^*(\vec{F}_{\to j})},$$

où $\boldsymbol{\delta W^*(\vec{F}_{\to j}) = \vec{F}_{\to j} \cdot \mathrm{d}_{/\mathcal{R}^*}\overrightarrow{GM_j}}$ est le travail exercé par $\vec{F}_{\to j}$ sur le point matériel M_j quand il se déplace de $\mathrm{d}_{/\mathcal{R}^*}\overrightarrow{GM_j}$ dans le référentiel $\mathcal{R}^*$.

V.E. Énergie

Replaçons-nous dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

V.E.1. Énergie potentielle d'interaction

Pour généraliser les définitions données au § III.D.2, considérons un système $S = \{M_1, \ldots, M_n\}$ de points matériels et notons $\vec{F}_{\to j} = \sum_{i\,(\neq j)} \vec{f}_{i\to j}$ la résultante des forces exercées sur chaque point M_j par les autres points du système. Les forces $\vec{F}_{\to j}$ sont dites conservatives s'il existe une fonction $E_\mathrm{p}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n)$, appelée ***énergie potentielle d'interaction du système***, telle que

$$\sum_j \delta W(\vec{F}_{\to j}) := \sum_j \vec{F}_{\to j} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_j = -\mathrm{d}E_\mathrm{p}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n).$$

Dans le cas où tous les points sont fixes à l'exception du j-ième, $E_\mathrm{p}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) \equiv E_\mathrm{p}(\vec{r}_j)$ et $\delta W(\vec{F}_{\to j}) = -\mathrm{d}E_\mathrm{p}(\vec{r}_j)$: l'énergie potentielle de la force exercée par une source fixe ($S \setminus \{M_j\}$ ici) sur un point matériel (M_j) est donc la même chose que l'énergie potentielle d'interaction du système {source, point}.

Intéressons-nous à un système de deux points, M_i et M_j. Si les forces $\vec{f}_{i\to j}$ et $\vec{f}_{j\to i}$ sont conservatives,

$$\delta W(\vec{f}_{i\to j}) + \delta W(\vec{f}_{j\to i}) := \vec{f}_{i\to j} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_j + \vec{f}_{j\to i} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = -\mathrm{d}E_\mathrm{p}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_j} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_j - \overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_i} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i,$$

où l'on a posé $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_j} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j} = (\partial E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}/\partial x_j)\,\vec{u}_x + (\partial E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}/\partial y_j)\,\vec{u}_y + (\partial E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}/\partial z_j)\,\vec{u}_z$. On a donc

$$\vec{f}_{i\to j} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_j} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j} + \vec{f}_{\perp\vec{v}_j} \qquad \text{et} \qquad \vec{f}_{j\to i} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_i} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j} + \vec{f}_{\perp\vec{v}_i},$$

où $\vec{f}_{\perp\vec{v}_j}$ et $\vec{f}_{\perp\vec{v}_i}$ sont des forces respectivement orthogonales à $\vec{v}_j$ et $\vec{v}_i$.

Les composantes $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_j} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}$ et $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_i} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}$ doivent être invariantes par translation dans l'espace (les forces dépendent sinon du choix, arbitraire, de l'origine du repère) ; elles doivent l'être également par rotation d'axe $\overrightarrow{M_iM_j}$ (seule direction privilégiée pour des termes ne dépendant que des positions) : on en déduit que

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_j} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j} = -\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}}{\mathrm{d}r_{i,j}}\,\vec{u}_{i\to j} \qquad \text{et} \qquad -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_i} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j} = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}}{\mathrm{d}r_{i,j}}\,\vec{u}_{i\to j},$$

où $E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}$ est uniquement fonction de $r_{i,j} = \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$ (*4).

Remarquons que les composantes $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_j} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}$ et $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{\vec{r}_i} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}$ obéissent à la troisième loi de Newton : elles sont opposées et centrales. Inversement, toute force obéissant à la troisième loi de Newton et ne dépendant que de la distance entre les points est conservative.

V.E.2. Énergie mécanique

Reprenons le théorème de l'énergie cinétique et distinguons les forces conservatives $\vec{F}^{\mathrm{c}}$ des forces non conservatives $\vec{F}^{\mathrm{n\,c}}$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_{\mathrm{c}} &= \sum_j \delta W(\vec{F}^{\mathrm{c}}_{\to j}) + \sum_j \delta W(\vec{F}^{\mathrm{n\,c}}_{\to j}) = \sum_j \sum_{\substack{i\\ i\neq j}} \delta W(\vec{f}^{\mathrm{c}}_{i\to j}) + \sum_j \delta W(\vec{F}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{ext}\to j}) + \sum_j \delta W(\vec{F}^{\mathrm{n\,c}}_{\to j})\\ &= \frac{1}{2}\sum_j \sum_{\substack{i\\ i\neq j}} \underbrace{(\delta W[\vec{f}^{\mathrm{c}}_{i\to j}] + \delta W[\vec{f}^{\mathrm{c}}_{j\to i}])}_{-\mathrm{d}E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}} + \sum_j \underbrace{\delta W(\vec{F}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{ext}\to j})}_{-\mathrm{d}E^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{p},j}} + \sum_j \delta W(\vec{F}^{\mathrm{n\,c}}_{\to j}).\end{aligned}$$

Par définition, l'énergie potentielle du système vaut

$$E_{\mathrm{p}} = E^{\mathrm{int}}_{\mathrm{p}} + E^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{p}},$$

où

$$E^{\mathrm{int}}_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\sum_j \sum_{\substack{i\\ i\neq j}} E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}(r_{i,j})$$

est l'énergie potentielle due aux forces intérieures au système et

$$E^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{p}} = \sum_j E^{\mathrm{ext}}_{\mathrm{p},j}(\vec{r}_j)$$

est l'énergie potentielle due aux forces extérieures au système.

En notant $\boldsymbol{E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}}}$ l'***énergie mécanique***, on obtient le résultat suivant :

Théorème de l'énergie mécanique

$$\mathbf{d}\boldsymbol{E_{\mathrm{m}}} = \sum_j \boldsymbol{\delta W(\vec{F}^{\mathrm{n\,c}}_{\to j})}.$$

En intégrant, on obtient

$$\boldsymbol{\Delta E_{\mathrm{m}}} = \sum_j \boldsymbol{W_{\widehat{A_jB_j}}(\vec{F}^{\mathrm{n\,c}}_{\to j})}.$$

Si toutes les forces sont conservatives, l'énergie mécanique se conserve : $\boldsymbol{\Delta E_{\mathrm{m}} = 0}$.

4. $E_{\mathrm{p},i\leftrightarrow j}$ est donc indépendante du référentiel.

V.E.3. Énergie totale. Énergie interne

‡ V.E.3.*a*. Forces non conservatives

Les quatre interactions fondamentales sont conservatives. Toutes les forces résultant des interactions fondamentales, les forces intérieures à un système dérivent bien d'une énergie potentielle d'interaction, $E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{int}}$, dépendant des distances $r_{i,j}$ entre les points du système. En revanche, les forces extérieures ne dérivent d'une énergie potentielle $E_{\mathrm{p}}^{\mathrm{ext}}$ dépendant seulement des positions $\vec{r}_j$ des points du système que si les sources extérieures peuvent être considérées comme immobiles, c.-à-d., en pratique, si celles-ci sont bien plus massives que le système (ce sera vrai, par exemple, pour un objet ordinaire dans le champ de gravitation de la Terre, mais pas pour la Lune). Sinon, on peut toujours les intégrer au système.

Lorsque les sources extérieures sont fixes, les forces non conservatives sont un artéfact de la modélisation : elles n'apparaissent que lorsque l'on remplace les forces agissant sur des points matériels par leur résultante appliquée à l'ensemble de ces points.

Considérons par exemple les forces extérieures exercées sur un système S. Pour tout point matériel M_j de S, on a $\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_j = -\mathrm{d}E_{\mathrm{p},j}^{\mathrm{ext}}$. On peut trouver un point M_0 (géométrique, pas nécessairement un point matériel), de vecteur position $\vec{r}_0$, représentant la position moyenne du système et tel que

$$\Big(\sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}\Big)\cdot \mathrm{d}\vec{r}_0 = \sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_j = -\sum_j \mathrm{d}E_{\mathrm{p},j}^{\mathrm{ext}}(\vec{r}_j).$$

En général, cependant, la résultante $\vec{F}_{\mathrm{ext}\to S} = \sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}$ ne sera pas conservative, car on ne pourra pas trouver de fonction $E_{\mathrm{p},0}(\vec{r}_0)$ telle que $-\mathrm{d}E_{\mathrm{p},0}(\vec{r}_0) = \vec{F}_{\mathrm{ext}\to S}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_0$.

V.E.3.*b*. Énergie totale. Énergie mécanique

Si toutes les forces sont conservatives, pourquoi, dans le cas où les sources extérieures sont fixes, l'énergie mécanique n'est-elle pas toujours conservée ? C'est en fait une question de définition : si l'énergie mécanique est définie comme la somme des énergies cinétique et potentielle *totales* du système, elle est bien conservée. On préfère néanmoins appeler ***énergie totale*** (E_{t}) cette quantité.

Supposons qu'on ne puisse connaître les positions et les vitesses des parties d'un système S qu'au-dessus d'une certaine échelle spatiale. Découpons le système en sous-systèmes S_j de cette taille ($S = \bigcup_j S_j$ et $S_i \cap S_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et appelons « macroscopiques » (resp. « microscopiques ») les quantités relatives à une échelle supérieure (resp. inférieure). On peut alors calculer l'énergie cinétique macroscopique des différents sous-systèmes S_j à partir de leurs vitesses d'ensemble (vitesse du centre d'inertie de S_j et, éventuellement, vitesse de rotation) ; on peut de même calculer l'énergie potentielle macroscopique, due à l'interaction entre les S_j et à l'action sur eux des forces extérieures, à partir des positions de leurs centres (et éventuellement de leur forme). C'est la somme E_{m} des énergies cinétique et potentielle macroscopiques que l'on appelle habituellement l'***énergie mécanique***.

Cependant, à l'intérieur d'un sous-système S_j, l'énergie cinétique microscopique des particules par rapport à S_j n'est pas nulle ; de même pour l'énergie potentielle microscopique d'interaction entre les particules de S_j. Nommons ***énergie microscopique*** (E_μ) la somme des énergies cinétique et potentielle microscopiques des différents sous-systèmes (E_μ est parfois appelée énergie « interne », mais nous adopterons une autre définition ci-dessous) : contrairement à E_{m}, E_μ ne peut être calculée à partir des vitesses et des positions de chaque particule élémentaire puisqu'elles sont inconnues ; elle peut parfois l'être en revanche à partir de leur distribution *statistique*.

On constate que la frontière entre E_{m} et E_μ est assez floue. Selon le problème, un terme peut être considéré comme relevant de l'une ou de l'autre (p. ex. l'énergie cinétique de rotation d'un solide). L'essentiel est qu'aucun terme ne soit oublié dans l'énergie totale, $\boldsymbol{E_{\mathrm{t}} = E_{\mathrm{m}} + E_\mu}$. On a alors le résultat suivant :

Loi de conservation de l'énergie totale

Pour tout système, si les sources extérieures sont fixes, l'énergie totale se conserve :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{E_{\mathrm{t}}} = \mathbf{0}.$$

Pour illustrer ces concepts, prenons le système {Terre (T), Lune (L)} et classons dans E_m ou E_μ les différentes énergies selon le degré de résolution :

Degré 0. Le système est considéré comme un point matériel de masse $m_T + m_L$ et de centre d'inertie G tournant autour du Soleil (S).
$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,(m_T + m_L)\,v_G^2 + E_{\mathrm{p},S\leftrightarrow\{T,\,L\}}$.

Degré 1. La Terre et la Lune sont chacune considérées comme des points matériels, de centres d'inertie respectifs G_T et G_L.
$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,m_T\,v_{G_T}^2 + \frac{1}{2}\,m_L\,v_{G_L}^2 + E_{\mathrm{p},S\leftrightarrow T} + E_{\mathrm{p},S\leftrightarrow L} + E_{\mathrm{p},T\leftrightarrow L}$.

Degré 2. La Terre et la Lune sont considérées comme des solides de symétrie sphérique en rotation.
$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,m_T\,v_{G_T}^2 + E_{\mathrm{c},T}^{\mathrm{rot}} + \frac{1}{2}\,m_L\,v_{G_L}^2 + E_{\mathrm{c},L}^{\mathrm{rot}} + E_{\mathrm{p},S\leftrightarrow T} + E_{\mathrm{p},S\leftrightarrow L} + E_{\mathrm{p},T\leftrightarrow L}$, où les énergies potentielles ont la même expression qu'au degré 1.

Degré 3. La Terre et la Lune sont considérées comme des ellipsoïdes.
Comme au degré 2, mais il faut rajouter des termes correctifs aux énergies potentielles.

Degré 4. La Terre et la Lune ne sont plus considérées comme des solides rigides : tenir compte des marées [(*5)], des courants marins, des vents, des mouvements de magma à l'intérieur de la Terre ; à plus long terme, de l'effet des glaciations, de la tectonique des plaques (dérive des continents)…

À chaque fois, toutes les autres énergies sont dans E_μ.

V.E.3.*c*. Énergie interne

Reprenons le théorème de l'énergie cinétique et distinguons les forces intérieures et extérieures. On a

$$\mathrm{d}E_\mathrm{c} = \sum_j \sum_{\substack{i \\ i\neq j}} \delta W(\vec{f}_{i\to j}) + \delta W(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to S}) = -\mathrm{d}E_\mathrm{p}^{\mathrm{int}} + \delta W(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to S}).$$

Les forces intérieures dérivent d'un potentiel d'après § V.E.3.*a*.

L'énergie cinétique du système est la somme de deux termes (cf· § V.D.3.*a*) :

- un terme représentant le mouvement d'ensemble du système par rapport à l'extérieur, $\frac{1}{2}\,m\,v_{G/\mathcal{R}}^2$ (énergie cinétique macroscopique de translation) ;
- un terme représentant le mouvement des points matériels les uns par rapport aux autres, $E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}^*}$ (énergie cinétique interne).

La quantité $\boldsymbol{U = E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}^*} + E_\mathrm{p}^{\mathrm{int}}}$ porte le nom d'***énergie interne*** du système. Cette appellation est justifiée par le fait que U ne dépend que des positions et vitesses des points matériels du système les uns par rapport aux autres. La quantité $\boldsymbol{E = U + \frac{1}{2}\,m\,v_{G/\mathcal{R}}^2}$ est parfois appelée ***énergie propre*** du système. On a

$$\mathbf{d}\boldsymbol{E = \delta W(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to S})}.$$

L'énergie totale et l'énergie propre sont reliées par

$$\boldsymbol{E_\mathrm{t} = E + E_\mathrm{p}^{\mathrm{ext}}}.$$

Non-extensivité de l'énergie interne

Considérons un système S dans lequel on a distingué deux sous-systèmes, S' et S'' ($S = S' \cup S''$ et $S' \cap S'' = \emptyset$). En thermodynamique, on fait souvent l'hypothèse que l'énergie interne est une grandeur extensive, c·-à-d· que $U_S = U_{S'} + U_{S''}$. En réalité,

$$E_S = E_{S'} + E_{S''} + E_{\mathrm{p},S'\leftrightarrow S''},$$

soit

$$U_S = U_{S'} + U_{S''} + \frac{1}{2}\,m'\,v_{G'/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2}\,m''\,v_{G''/\mathcal{R}}^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_{G/\mathcal{R}}^2 + E_{\mathrm{p},S'\leftrightarrow S''},$$

où G, G' et G'' sont les centres d'inertie de S, S' et S'', et m, m' et m'' les masses de ces systèmes. Pour que U soit extensive, il faut donc, d'une part, que les différentes parties du système se déplacent à la même vitesse d'ensemble ($\vec{v}_{G'/\mathcal{R}} = \vec{v}_{G''/\mathcal{R}}$) et, d'autre part, que les interactions entre les différentes parties du système soient négligeables ($E_{\mathrm{p},S'\leftrightarrow S''} = 0$). Cette dernière hypothèse n'est notamment pas vérifiée dans les systèmes auto-gravitants (p· ex· les amas de galaxies) en raison de la longue portée de l'interaction gravitationnelle ; elle ne l'est pas non plus quand les phénomènes de surface sont importants (p· ex· la tension superficielle dans une goutte de liquide).

5. La dissipation d'énergie mécanique (au sens du degré 3) due aux marées est ainsi la cause de l'éloignement de la Lune et du ralentissement de la rotation de la Terre : la durée du jour était d'environ 22 heures il y a 600 millions d'années

Énergie cinétique de rotation

Pour un solide ou une molécule polyatomique, on peut écrire $E_{c/\mathcal{R}^*} = E_c^{rot} + E_c^{vib}$, où E_c^{rot} est l'énergie cinétique macroscopique de rotation et E_c^{vib} est l'énergie cinétique de vibration (*6) ; dans le cas d'un solide parfaitement rigide, $E_c^{vib} = 0$ et $E_p^{int} = c^{te}$.

Avec ces notations, on peut décomposer l'énergie totale d'un système S constitué de deux solides S' et S'' en une somme de l'énergie mécanique (c.-à-d. macroscopique) et de l'énergie microscopique de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_t &= E_{S'} + E_{S''} + E_{p,S'\leftrightarrow S''} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\,m'\,v^2_{G'/\mathcal{R}} + \frac{1}{2}\,m''\,v^2_{G''/\mathcal{R}} + E^{rot}_{c,S'} + E^{rot}_{c,S''} + E_{p,S'\leftrightarrow S''} + E^{ext}_{p,S'} + E^{ext}_{p,S''}}_{E_m} + \underbrace{E^{vib}_{c,S'} + E^{vib}_{c,S''} + E^{int}_{p,S'} + E^{int}_{p,S''}}_{E_\mu}. \end{aligned}$$

Dans le cas d'un gaz, les notions d'énergie cinétique macroscopique de rotation et d'énergie cinétique de vibration ne sont guère pertinentes : celui-ci peut en effet subir une expansion ou une contraction, une rotation différentielle (c.-à-d. différente selon la position ; cf. les bandes de Jupiter qui tournent à une vitesse angulaire différente selon la latitude)...

‡ V.E.3.*d*. Premier principe de la thermodynamique

On peut décomposer le travail des forces extérieures en deux termes : le travail modifiant l'état macroscopique du système, c.-à-d. le travail des forces dont le point d'application se déplace macroscopiquement, $\delta\mathcal{W}$; le travail modifiant son état microscopique, c.-à-d. le travail des forces dont le point d'application se déplace microscopiquement, δQ. En thermodynamique, $\delta\mathcal{W}$ porte le nom de ***travail mécanique*** et δQ le nom de ***quantité de chaleur***. On obtient ainsi le ***premier principe de la thermodynamique*** pour un système fermé :

$$\mathrm{d}U + \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2_{G/\mathcal{R}}\right) = \delta\mathcal{W} + \delta Q.$$

V.F. Lois de conservation pour un système isolé

Considérons un ***système isolé***, c.-à-d. fermé et non soumis à des forces extérieures. En lui appliquant le théorème du centre d'inertie et le théorème du moment cinétique, on obtient deux lois de conservation dans un référentiel galiléen :

- ***conservation de la quantité de mouvement*** :

$$\vec{p} = \vec{c}^{te} ;$$

- ***conservation du moment cinétique*** :

$$\vec{L}_A = \vec{c}^{te},$$

où A est un point fixe. Dans le référentiel barycentrique, on a de même $\vec{L}^* = \vec{c}^{te}$.

Si le système est isolé, le travail des forces extérieures est nul : l'énergie propre, $U + \frac{1}{2}\,m\,v^2_{G/\mathcal{R}}$, est donc conservée. Pour la même raison, $\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \vec{c}^{te}$ d'après le théorème du centre d'inertie. On obtient donc une troisième loi de conservation :

- ***conservation de l'énergie interne*** :

$$U = c^{te}.$$

Ces lois de conservation sont en fait plus générales que les théorèmes qui ont permis de les établir. Elles restent en effet valables en relativité et en mécanique quantique (*7), alors que le principe de l'action et de la réaction utilisé pour démontrer les théorèmes généraux n'est plus applicable dans ces théories.

‡ Ces lois de conservation sont associées à des ***symétries***, c.-à-d. au fait que les lois de la physique doivent être ***invariantes*** pour certaines transformations (théorème de Noether) :

- la conservation de la quantité de mouvement correspond à une invariance des lois de la physique par translation dans l'espace ;
- la conservation du moment cinétique correspond à une invariance par rotation dans l'espace ;
- la conservation de l'énergie correspond à une invariance par translation dans le temps.

6. E_c^{vib} comprend en fait, outre l'énergie cinétique de vibration *stricto sensu*, un terme appelé énergie de Coriolis couplant vibrations et rotation.
7. La quantité de mouvement, le moment cinétique et l'énergie doivent cependant être redéfinis et prendre en compte notamment, outre les particules, les champs d'interaction et l'énergie de masse des particules au repos (le terme « $E = m\,c^2$ »).

V.G. Moments (scalaires) par rapport à un axe

V.G.1. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen. L'expression du théorème du moment cinétique par rapport à un point A mobile est

$$\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{L}_{A/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = m\,\vec{v}_{G/\mathcal{R}} \times \vec{v}_{A/\mathcal{R}} + \sum_j \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\text{ext}\to j}).$$

Supposons que A se déplace sur un axe Δ fixe [(*8)] dans $\mathcal{R}$, orienté par un vecteur directeur unitaire $\vec{u}_\Delta$ constant. On a à tout instant $\vec{v}_{A/\mathcal{R}} = v_{A/\mathcal{R}}\,\vec{u}_\Delta$.

On obtient, en faisant le produit scalaire avec $\vec{u}_\Delta$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{L}_{A/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u}_\Delta = \frac{\mathrm{d}(\vec{L}_{A/\mathcal{R}}\cdot\vec{u}_\Delta)}{\mathrm{d}t} &= m\cdot\underbrace{(\vec{v}_{G/\mathcal{R}} \times \vec{v}_{A/\mathcal{R}})\cdot\vec{u}_\Delta}_{\vec{0}} + \sum_j \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\text{ext}\to j})\cdot\vec{u}_\Delta \\ &= \sum_j \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_{\text{ext}\to j})\cdot\vec{u}_\Delta.\end{aligned}$$

On appelle ***moment cinétique*** (resp· ***moment de la force***) ***par rapport à l'axe Δ*** les quantités

$$\boldsymbol{L_\Delta = \vec{L}_A\cdot\vec{u}_\Delta} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_A\cdot\vec{u}_\Delta}.$$

Ces quantités sont indépendantes du point A de l'axe.

On a

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}L_{\Delta/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}\to j})},$$

si l'axe Δ est fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

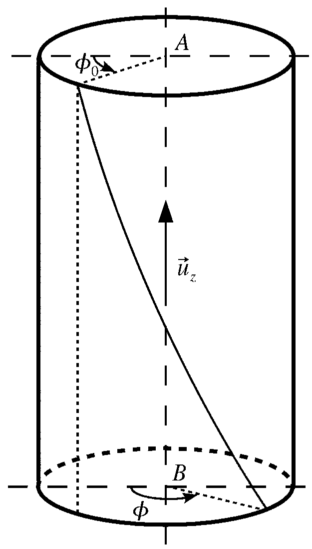
On démontre de même que

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}L_{\Delta^*/\mathcal{R}^*}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \mathcal{M}_{\Delta^*}(\vec{F}_{\text{ext}\to j})},$$

si l'axe Δ^* est fixe dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ et passe par G.

‡ V.G.2. Couple

On appelle ***couple*** le moment exercé sur un corps par des forces de résultante nulle. Remarque : ce moment est indépendant du point par rapport auquel il est calculé.



Un fil rectiligne AB qui subit une torsion exerce ainsi sur un objet attaché à son extrémité B un couple de rappel $\vec{\mathcal{M}}$.

Utilisons le repère cylindrique $(B, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi, \vec{u}_z)$, où $\vec{u}_z = \overrightarrow{BA}/\|\overrightarrow{BA}\|$. En première approximation,

$$\vec{\mathcal{M}} = -C\cdot(\phi-\phi_0)\,\vec{u}_z,$$

où C est la constante de torsion, ϕ est l'angle polaire d'un point situé à la surface du fil à l'extrémité B, et ϕ_0 est la valeur de ϕ quand le fil n'est pas tordu (fil au repos).

L'énergie potentielle associée à la torsion du fil vaut

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\,C\cdot(\phi-\phi_0)^2.$$

8. « Axe fixe » ne veut pas dire que les points de l'axe sont fixes, mais seulement qu'ils ont un mouvement de translation parallèlement à l'axe.

V.h. Systèmes ouverts

Tout ce qui précède n'est applicable qu'à des systèmes fermés. Pour étudier le mouvement d'un système ouvert, c.-à-d. échangeant de la matière avec l'extérieur, il faut se ramener au cas d'un système fermé.

Considérons par exemple une fusée de masse $m(t)$ se déplaçant à une vitesse $\vec{v}(t)$ dans un référentiel galiléen. Cette fusée expulse des gaz à une vitesse $\vec{w}$ par rapport à elle-même (donc à la vitesse $\vec{w}+\vec{v}$ dans le référentiel galiléen), à un débit massique $D = -\,\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$.

On peut déduire son mouvement en appliquant le théorème du centre d'inertie, $\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$ à un système fermé. Une application incorrecte à la fusée *seule* donnerait

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}\to\text{fusée}} \overset{\text{faux}}{=} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{fusée}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\vec{v} + m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -D\,\vec{v} + m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t},$$

soit

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \overset{\text{faux}}{=} \sum \vec{F}_{\text{ext}\to\text{fusée}} + D\,\vec{v}.$$

L'accélération de la fusée serait indépendante de la vitesse des gaz ! La raison en est que la fusée est un système ouvert et qu'il faut considérer le système fermé constitué de la fusée et des gaz.

Considérons le système S constitué des points matériels de la fusée à l'instant t. Sa quantité de mouvement vaut $\vec{p}(t) = m(t)\,\vec{v}(t)$.

À l'instant $t+\mathrm{d}t$, le système constitué des mêmes points matériels comprend la fusée à l'instant $t+\mathrm{d}t$ et les gaz éjectés entre t et $t+\mathrm{d}t$. Sa quantité de mouvement vaut

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t) = \overbrace{m(t+\mathrm{d}t)\,\vec{v}(t+\mathrm{d}t)}^{\vec{p}\text{ de la fusée à } t+\mathrm{d}t} + \overbrace{(m[t]-m[t+\mathrm{d}t])\cdot(\vec{v}[t]+\vec{w})}^{\vec{p}\text{ des gaz éjectés entre } t \text{ et } t+\mathrm{d}t}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &:= \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{\vec{p}(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t}\\
&= \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{m(t+\mathrm{d}t)\,\vec{v}(t+\mathrm{d}t) + (m[t]-m[t+\mathrm{d}t])\cdot(\vec{v}[t]+\vec{w}) - m(t)\,\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}\\
&= \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{m(t+\mathrm{d}t)\cdot(\vec{v}[t+\mathrm{d}t]-\vec{v}[t]) + (m[t]-m[t+\mathrm{d}t])\,\vec{w}}{\mathrm{d}t}\\
&= m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + D\,\vec{w},
\end{aligned}$$

soit

$$m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\text{ext}\to S} - D\,\vec{w}.$$

Le terme $-D\,\vec{w}$ est ce qu'on appelle la force de poussée.

V.i. Conseils pour la résolution d'un problème de mécanique

1. Choisir un référentiel (galiléen ou barycentrique généralement).
2. Définir le système étudié (bien distinguer l'intérieur de l'extérieur).
3. Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées au système.

   Donner leur expression si elle est connue (p. ex. le poids, la tension d'un ressort) ou leur direction (p. ex. la tension d'un fil, la réaction purement normale s'il n'y a pas de frottement).
4. Préciser les points d'application si le système n'est pas ponctuel.
5. Choisir les théorèmes ou les lois de conservation à utiliser.

   Les théorèmes sur l'énergie sont plus simples à utiliser (équation scalaire, alors que les théorèmes du centre d'inertie et du moment cinétique donnent une équation vectorielle), mais moins riches : ils ne sont vraiment utiles que si la trajectoire est connue (même si la position à chaque instant sur cette trajectoire est, elle, inconnue).
6. Pour les théorèmes du centre d'inertie et du moment cinétique, choisir une base de projection appropriée (chercher à aligner les axes avec les forces dont on ne connaît pas l'intensité ou avec le maximum de forces possible).

7. Pour le théorème du moment cinétique, calculer les moments des forces par rapport à un point fixe qui donne des moments nuls pour les forces d'intensité inconnue (p· ex· leur point d'application).