Chapitre IX

Éléments de dynamique du solide indéformable

IX.A. Cinématique du solide

Un ***solide indéformable*** est un corps dont les distances entre les points matériels qui le constituent sont indépendantes du temps.

Considérons un solide S et un référentiel $\mathcal{R}'$ fixe par rapport au solide. Notons O' l'origine de $\mathcal{R}'$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ la vitesse instantanée de rotation de S par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$. Pour tout point M de S (ou fixe par rapport à S), on a

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}_{\vec{0}} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M},$$

soit

$$\boldsymbol{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M}}.$$

Le mouvement de tout point du solide est donc la combinaison du mouvement de translation de l'ensemble du solide ($\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}$) et de son mouvement de rotation ($\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$). Six paramètres, ou ***degrés de liberté***, (trois pour $\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}$ et trois pour $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$) sont nécessaires pour décrire le mouvement du solide, donc deux équations vectorielles suffisent : le théorème du centre d'inertie et le théorème du moment cinétique.

On aura souvent intérêt à utiliser le théorème du centre d'inertie dans un référentiel galiléen, puis le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique du solide. Remarquons que

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}^*} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}}}_{\vec{0}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}^*}$$

si $\mathcal{R}$ est galiléen.

Axe instantané de rotation

À un instant t, on appelle ***axe instantané de rotation*** $\Delta(t)$ de S dans $\mathcal{R}$ le lieu géométrique des points fixes par rapport à S dont la vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ est parallèle à $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$.

Soit A un point de Δ. On a $\vec{v}_{A/\mathcal{R}} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'A}$, d'où, pour tout point M fixe par rapport à S,

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}_{A/\mathcal{R}}}_{/\!/ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{AM}}_{\perp \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}.$$

Le mouvement des points du solide se compose donc d'une translation selon $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, à la même vitesse $\vec{v}_{A/\mathcal{R}}$ pour tous, et d'une rotation autour de $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$.

Si M fait partie de Δ, on doit avoir $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} /\!/ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, soit $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{AM} = \vec{0}$, c.-à-d. $\overrightarrow{AM} /\!/ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$: l'axe instantané est donc une droite dirigée selon $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, dont tous les points se déplacent à la vitesse $\vec{v}_{A/\mathcal{R}}$.

IX.b. Moment d'inertie, moment cinétique, énergie cinétique

Soient $A(t)$ un point de l'axe instantané de rotation $\Delta(t)$ et $\vec{u}_z(t)$ un vecteur unitaire dirigé selon $\Delta(t)$. Choisissons deux vecteurs $\vec{u}_x(t)$ et $\vec{u}_y(t)$ de telle sorte que $(A, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ soit un repère orthonormé direct. Posons $\vec{v}_{A/\mathcal{R}} = v_{A/\mathcal{R}}\ \vec{u}_z$ et calculons le moment cinétique du solide par rapport à Δ à l'aide des coordonnées cylindriques.

$$\begin{aligned}
L_{\Delta/\mathcal{R}} &= \vec{L}_{A/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_z = \sum_j (m_j\ \overrightarrow{AM_j} \times \vec{v}_{j/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}_z \\
&= \sum_j \Big(m_j \cdot [\rho_j\ \vec{u}_{\rho_j} + z_j\ \vec{u}_z] \times [v_{A/\mathcal{R}}\ \vec{u}_z + \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\ \underbrace{\vec{u}_z \times (\rho_j\ \vec{u}_{\rho_j} + z_j\ \vec{u}_z)}_{\rho_j\ \vec{u}_{\phi_j}}] \Big) \cdot \vec{u}_z \\
&= \sum_j m_j \cdot (-\rho_j\ v_{A/\mathcal{R}}\ \vec{u}_{\phi_j} + \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\ \rho_j^2\ \vec{u}_z - z_j\ \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\ \rho_j\ \vec{u}_{\rho_j}) \cdot \vec{u}_z = \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \sum_j m_j\ \rho_j^2.
\end{aligned}$$

La quantité

$$\boldsymbol{I_\Delta = \sum_j m_j\ \rho_j^2}$$

porte le nom de ***moment d'inertie par rapport à Δ***. On a

$$\boldsymbol{L_{\Delta/\mathcal{R}} = I_\Delta\ \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}.$$

Ceci ne présente d'intérêt que si Δ est fixe par rapport au solide (sinon I_Δ doit être recalculé à chaque instant) et si la direction de Δ est fixe dans $\mathcal{R}$.

Calculons de même l'énergie cinétique d'un solide.

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}} &= \sum_j \frac{1}{2}\ m_j\ \vec{v}_{j/\mathcal{R}}^{\,2} = \sum_j \frac{1}{2}\ m_j \cdot \Big(v_{A/\mathcal{R}}\ \vec{u}_z + \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\ \vec{u}_z \times \overrightarrow{AM_j} \Big)^2 \\
&= \sum_j \frac{1}{2}\ m_j \cdot \Big(v_{A/\mathcal{R}}\ \vec{u}_z + \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\ \rho_j\ \vec{u}_{\phi_j} \Big)^2 = \sum_j \frac{1}{2}\ m_j \cdot \Big(v_{A/\mathcal{R}}^2 + \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2\ \rho_j^2 \Big),
\end{aligned}$$

d'où

$$\boldsymbol{E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\ m\ v_{A/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2}\ I_\Delta\ \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2}.$$

Cas particulier du référentiel barycentrique

Le centre d'inertie G d'un solide est fixe par rapport à $\mathcal{R}'$. Comme $\vec{v}_{G/\mathcal{R}^*} = \vec{0}$ est parallèle à $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, G est un point de l'axe instantané de rotation dans le référentiel barycentrique, Δ^*, d'où

$$\boldsymbol{E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}^*} = \frac{1}{2}\ I_{\Delta^*}\ \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2}$$

et, d'après le second théorème de Koenig,

$$\boldsymbol{E_{\mathrm{c}/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\ m\ v_{G/\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{2}\ I_{\Delta^*}\ \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2}.$$

IX.c. Théorème de l'énergie cinétique

Calculons la puissance des forces exercées sur le solide. On a

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{\to j}) = \vec{F}_{\to j} \cdot \vec{v}_{j/\mathcal{R}} = \vec{F}_{\to j} \cdot (\vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M_j}) = \vec{F}_{\to j} \cdot \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot (\overrightarrow{O'M_j} \times \vec{F}_{\to j}),$$

soit

$$\boldsymbol{\mathcal{P}(\vec{F}_{\to j}) = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \cdot \vec{F}_{\to j} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{\to j})}.$$

En sommant sur toutes les forces et en distinguant forces intérieures et forces extérieures, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_j \mathcal{P}(\vec{F}_{\to j}) &= \left(\vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \cdot \sum_j \vec{F}_{\text{ext}\to j} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \sum_j \vec{\mathcal{M}}_{O'}[\vec{F}_{\text{ext}\to j}]\right) \\ &\quad + \left(\vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \cdot \underbrace{\sum_j \vec{F}_{\text{int}\to j}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \underbrace{\sum_j \vec{\mathcal{M}}_{O'}[\vec{F}_{\text{int}\to j}]}_{\vec{0}}\right) \\ &= \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \cdot \sum_j \vec{F}_{\text{ext}\to j} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \sum_j \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{\text{ext}\to j}).\end{aligned}$$

On constate que, pour un solide indéformable, les forces intérieures ne travaillent pas, donc

$$\mathbf{d}\boldsymbol{E}_{\mathbf{c}} = \sum_j \boldsymbol{\delta W(\vec{F}_{\text{ext}\to j})},$$

que le référentiel soit galiléen ou qu'il s'agisse du référentiel barycentrique.

Dans le référentiel barycentrique,

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}^*}(\vec{F}_{\text{ext}\to j}) = \underbrace{\vec{v}_{G/\mathcal{R}^*}}_{\vec{0}} \cdot \vec{F}_{\text{ext}\to j} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \cdot \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{\text{ext}\to j}) = \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\ \mathcal{M}_{\Delta^*}(\vec{F}_{\text{ext}\to j}).$$

En posant $\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ et en multipliant par $\mathrm{d}t$, on en déduit que

$$\boldsymbol{\delta W^*(\vec{F}_{\text{ext}\to j}) = \mathcal{M}_{\Delta^*}(\vec{F}_{\text{ext}\to j})\ \mathbf{d}\phi},$$

où $\mathrm{d}\phi$ est l'angle dont a tourné le solide autour de son axe instantané de rotation dans $\mathcal{R}^*$ pendant $\mathrm{d}t$.

IX.D. Calcul du moment d'inertie

IX.D.1. Théorème de Huygens

Soient Δ^* un axe quelconque passant par G, et Δ un axe parallèle à Δ^* et situé à une distance d de Δ^*.

Introduisons les repères orthonormés directs suivants : $(G, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, où $\vec{u}_z$ est parallèle à Δ^* et $\vec{u}_x$ est dirigé de Δ^* vers Δ ; et $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$, où $\overrightarrow{GO'} = d\ \vec{u}_x$, $\vec{u}_{x'} = \vec{u}_x$, $\vec{u}_{y'} = \vec{u}_y$ et $\vec{u}_{z'} = \vec{u}_z$.

$$\begin{aligned}I_\Delta &= \sum_j m_j\ \rho_j'^2 = \sum_j m_j \cdot \left(x_j'^2 + y_j'^2\right) = \sum_j m_j \cdot \left([x_j + d]^2 + y_j^2\right) \\ &= \sum_j m_j \cdot \left(x_j^2 + y_j^2\right) + d^2 \sum_j m_j + 2\ d\ \underbrace{\sum_j m_j\ x_j}_{0},\end{aligned}$$

d'où

$$\boldsymbol{I_\Delta = I_{\Delta^*} + m\ d^2}.$$

IX.D.2. Moment d'inertie d'un cylindre

Calculons le moment d'inertie d'un cylindre homogène de masse m, de rayon R et de hauteur h par rapport à son axe de révolution, Δ. Notons μ sa masse volumique. L'élément de volume vaut

$$\mathrm{d}\mathcal{V} = \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z.$$

On a

$$m = \int_{\rho=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h} \mu\ \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\rho=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{h} \mu\ \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z = \pi\ \mu\ R^2\ h$$

et

$$I_\Delta = \int_{\rho=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\,\pi} \int_{z=0}^{h} \mu\,\rho^2\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\rho=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\,\pi} \int_{z=0}^{h} \mu\,\rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = \frac{\pi\,\mu\,R^4\,h}{2},$$

d'où

$$\boldsymbol{I_\Delta = \frac{1}{2}\,m\,R^2}.$$

IX.D.3. Moment d'inertie d'une sphère

Calculons le moment d'inertie d'une sphère homogène de masse m et de rayon R par rapport à un de ses axes de révolution, Δ. Notons μ sa masse volumique. L'élément de volume a pour expression

$$\mathrm{d}\mathcal{V} = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

et la distance à l'axe vaut

$$\rho = r\,\sin\theta.$$

On a

$$m = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\,\pi} \mu\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\,\pi} \mu\,r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{4\,\pi\,\mu\,R^3}{3}$$

et

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\,\pi} \mu\,\rho^2\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\,\pi} \mu\,r^4\,\sin^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{2\,\pi\,\mu\,R^5}{5} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Or,

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} -(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta) = \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\theta=0}^{\pi} = \frac{4}{3},$$

d'où

$$\boldsymbol{I_\Delta = \frac{2}{5}\,m\,R^2}.$$

IX.E. Solide en rotation autour d'un axe fixe

IX.E.1. Axe fixe dans un référentiel galiléen

Intéressons-nous au cas où l'axe instantané de rotation est fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$.
On a alors

$$L_{\Delta/\mathcal{R}} = I_\Delta\,\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}L_{\Delta/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}).$$

Si l'axe instantané de rotation est fixe dans $\mathcal{R}$, il l'est également dans $\mathcal{R}'$. Le moment d'inertie par rapport à cet axe est donc constant. On en déduit que

$$I_\Delta\,\frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}).$$

Application au pendule pesant

Considérons un pendule pesant pouvant tourner autour d'un axe horizontal, Δ, fixe dans $\mathcal{R}$. On repère la position du pendule par l'angle ϕ entre la verticale et une droite perpendiculaire à Δ passant par le centre d'inertie G du pendule. Notons m sa masse et I_Δ son moment d'inertie par rapport à Δ.

Les forces exercées sur le pendule sont la réaction $\vec{R}$ de l'axe et le poids $\vec{P}$. On a $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ et

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -m\ g\ \ell\ \sin\phi,$$

où ℓ est la distance de G à Δ.

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi},$$

d'où

$$I_\Delta\ \ddot{\phi} = -m\ g\ \ell\ \sin\phi.$$

Dans le cas où toute la masse est concentrée en G, $I_\Delta = m\ \ell^2$, d'après le théorème de Huygens, et on retrouve l'équation du pendule simple :

$$\ell\ \ddot{\phi} + g\ \sin\phi = 0.$$

IX.E.2. Axe fixe dans le référentiel barycentrique

Si l'axe instantané de rotation n'est pas fixe dans $\mathcal{R}$, mais que sa direction l'est, on a intérêt à se placer dans $\mathcal{R}^*$. L'axe instantané de rotation est alors fixe dans $\mathcal{R}^*$.

On a

$$L_{\Delta^*/\mathcal{R}^*} = I_{\Delta^*}\ \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}L_{\Delta^*/\mathcal{R}^*}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \mathcal{M}_{\Delta^*}(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}),$$

d'où

$$I_{\Delta^*}\ \frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \mathcal{M}_{\Delta^*}(\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j}).$$

Application : roulement sans glissement

Étudions le mouvement d'une boule homogène roulant sans glissement sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Notons r son rayon, m sa masse, I_{Δ^*} son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation instantané $\Delta^* = (G, \vec{u}_z)$ dans $\mathcal{R}^*$, et C le point de la boule en contact avec le plan à un instant t (cf· figure ci-dessous pour les autres notations).

Le roulement étant sans glissement, la vitesse $\vec{v}_{C/\mathcal{R}}$ de C par rapport au plan (fixe dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$, supposé galiléen) est nulle :

$$\vec{v}_{C/\mathcal{R}} = \vec{v}_{G/\mathcal{R}} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{GC} = \dot{x}_G\ \vec{u}_x + \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\ \vec{u}_z \times (-r\ \vec{u}_y) = (\dot{x}_G + \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\ r)\ \vec{u}_x = \vec{0},$$

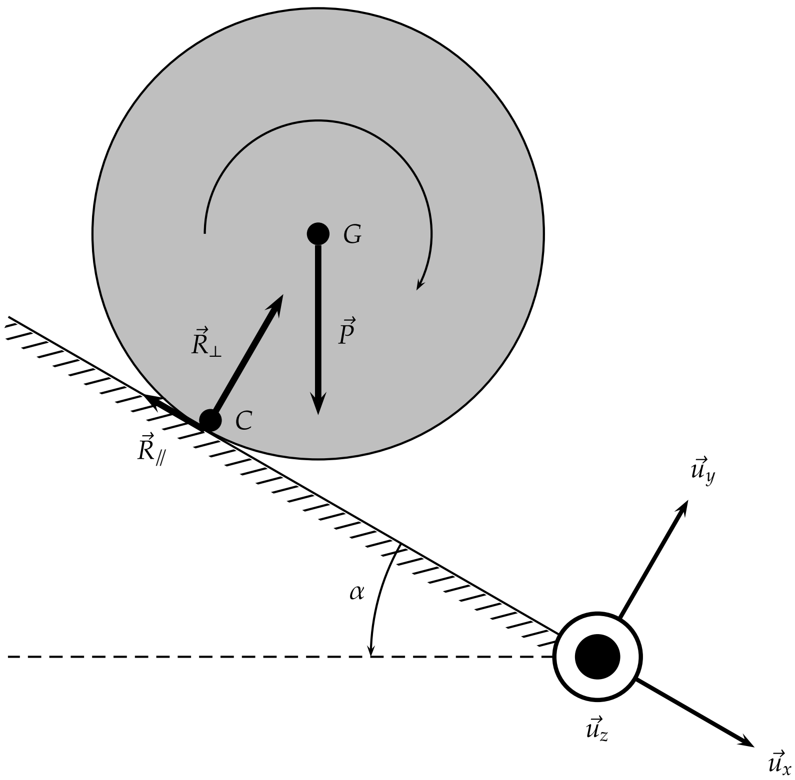
soit

$$\dot{x}_G + \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\ r = 0. \qquad (1)$$

La boule est soumise à son poids $\vec{P}$, exercé en G, et à la réaction du plan, $\vec{R}_\perp + \vec{R}_{/\!/}$, exercée en C. On a $\vec{P} = m\ g \cdot (\sin\alpha\ \vec{u}_x - \cos\alpha\ \vec{u}_y)$, $\vec{R}_\perp = R_\perp\ \vec{u}_y$ et $\vec{R}_{/\!/} = -R_{/\!/}\ \vec{u}_x$, où $R_\perp = \|\vec{R}_\perp\|$ et $R_{/\!/} = \|\vec{R}_{/\!/}\|$. Dans le cas d'un roulement sans glissement, on a $R_{/\!/} \leqslant f_\mathrm{s}\ R_\perp$, où f_s est le coefficient de frottement statique. Noter que « roulement sans glissement » ne veut pas dire qu'il n'y a pas de frottements : au contraire, c'est précisément parce qu'il y a des frottements que la boule ne glisse pas sur le plan.

En appliquant le théorème du centre d'inertie à la boule et en le projetant sur $\vec{u}_x$, on obtient

$$m\ \ddot{x}_G = m\ g\ \sin\alpha - R_{/\!/}. \qquad (2)$$



En appliquant le théorème du moment cinétique à la boule dans le référentiel barycentrique de celle-ci et en projetant sur son axe de rotation $\Delta^* = (G, \vec{u}_z)$, on obtient

$$I_{\Delta^*}\ \dot{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = (\vec{\mathcal{M}}_G[\vec{P}] + \vec{\mathcal{M}}_G[\vec{R}_\perp] + \vec{\mathcal{M}}_G[\vec{R}_{/\!/}]) \cdot \vec{u}_z.$$

$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P}) = \overrightarrow{GG} \times \vec{P} = \vec{0}$. De même, $\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{R}_\perp) = \overrightarrow{GC} \times \vec{R}_\perp = \vec{0}$ puisque $\overrightarrow{GC}$ et $\vec{R}_\perp$ sont alignés. Enfin,

$$\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{R}_{/\!/}) = \overrightarrow{GC} \times \vec{R}_{/\!/} = -r\ \vec{u}_y \times (-R_{/\!/}\ \vec{u}_x) = -r\ R_{/\!/}\ \vec{u}_z,$$

donc

$$I_{\Delta^*}\ \dot{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -r\ R_{/\!/}. \tag{3}$$

En combinant les équations (1), (2) et (3), on obtient finalement

$$\ddot{x}_G = \frac{g \sin\alpha}{1 + I_{\Delta^*}/(m\ r^2)}.$$