Chapitre IV

Oscillateurs linéaires

Les notions élémentaires sur les nombres complexes requises par ce chapitre sont rappelées au § A.vi.

IV.a. Équations différentielles linéaires d'ordre deux

Il s'agit des équations du type

$$\ddot{x} + a_1(t)\,\dot{x} + a_0(t)\,x = b(t).$$

Les solutions $x(t)$ sont de la forme

$$x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t),$$

où les fonctions $x_\mathrm{h}(t)$ sont *les* solutions de l'équation homogène

$$\ddot{x}_\mathrm{h} + a_1(t)\,\dot{x}_\mathrm{h} + a_0(t)\,x_\mathrm{h} = 0$$

et $x_\mathrm{p}(t)$ est *une* solution particulière de l'équation générale

$$\ddot{x}_\mathrm{p} + a_1(t)\,\dot{x}_\mathrm{p} + a_0(t)\,x_\mathrm{p} = b(t).$$

Les fonction $x_\mathrm{h}(t)$ constituent un espace vectoriel de dimension 2. [*1]

Pour résoudre complètement l'équation générale, il faut donc trouver *toutes* les solutions de l'équation homogène et *une* solution particulière *quelconque* de l'équation générale.

On ne s'intéresse par la suite qu'au cas où a_0 et a_1 sont constantes.

IV.a.1. Équation homogène. Traitement général ($\{a_0, a_1\} \in \mathbb{C}^2$)

Les solutions sont de la forme

$$x_\mathrm{h}(t) = \lambda_1\,x_1(t) + \lambda_2\,x_2(t),$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes complexes et $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des fonctions linéairement indépendantes quelconques solutions de l'équation homogène. En cherchant pour x_1 et x_2 des fonctions de la forme $\boldsymbol{x_i = \mathrm{e}^{r\,t}}$, on obtient, après simplification par $\mathrm{e}^{r\,t}$, l'***équation caractéristique***

$$r^2 + a_1\,r + a_0 = 0.$$

Les solutions r sont les racines (éventuellement complexes) de cette équation du second degré. Selon la valeur du discriminant $\Delta = a_1^2 - 4\,a_0$, on a deux racines distinctes ou une racine unique.

1. Plus généralement, pour toute équation différentielle *linéaire* d'ordre n, $\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\,\mathrm{d}^i x/\mathrm{d}t^i = b(t)$, toute solution est de la forme $x = x_\mathrm{h} + x_\mathrm{p}$, où x_h est solution de l'équation homogène et x_p est une solution particulière. L'ensemble des x_h est un espace vectoriel de dimension n.

IV.A.1.*a*. Cas $\Delta \neq 0$

Si $\Delta \neq 0$, on a deux racines distinctes : r_1 et r_2.

$$\boldsymbol{x_1 = \mathrm{e}^{r_1\,t}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{x_2 = \mathrm{e}^{r_2\,t}}.$$

IV.A.1.*b*. Cas $\Delta = 0$

Si $\Delta = 0$, on a une racine unique : $r = -a_1/2$.

$$\boldsymbol{x_1 = \mathrm{e}^{r\,t}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{x_2 = t\,\mathrm{e}^{r\,t}}$$

(on peut vérifier que x_2 est bien solution de l'équation homogène).

IV.A.2. Équation homogène. Cas où $\{a_0, a_1\} \in \mathbb{R}^{+2}$

Posons $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{a_0}}$ et $\boldsymbol{\alpha = a_1/2}$. On a alors $\Delta = 4\,(\alpha^2 - \omega_0^2)$.

IV.A.2.*a*. Cas $\Delta > 0$: régime apériodique

Les racines sont $r_1 = (-a_1 - \sqrt{\Delta})/2$ et $r_2 = (-a_1 + \sqrt{\Delta})/2$, d'où [*2]

$$x_\mathrm{h} = \lambda_1\,\exp\Big([-a_1 - \sqrt{\Delta}\,]\;t/2\Big) + \lambda_2\,\exp\Big([-a_1 + \sqrt{\Delta}\,]\;t/2\Big).$$

Les racines sont négatives, donc x_h décroît rapidement et de manière monotone vers 0.

IV.A.2.*b*. Cas $\Delta = 0$: régime critique

Cf. § IV.A.1.*b*. Comme dans le régime apériodique, x_h tend rapidement et de manière monotone vers 0.

IV.A.2.*c*. Cas $\Delta < 0$: régime pseudo-périodique ou périodique

Les racines sont $r_1 = (-a_1 - \mathrm{i}\,\sqrt{-\Delta})/2$ et $r_2 = (-a_1 + \mathrm{i}\,\sqrt{-\Delta})/2$, d'où

$$\begin{aligned} x_\mathrm{h} &= \lambda_1\,\exp\Big([-a_1 - \mathrm{i}\,\sqrt{-\Delta}\,]\;t/2\Big) + \lambda_2\,\exp\Big([-a_1 + \mathrm{i}\,\sqrt{-\Delta}\,]\;t/2\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\cdot\Big(A\,\cos[\sqrt{-\Delta}\;\;t/2] + B\,\sin[\sqrt{-\Delta}\;\;t/2]\Big), \end{aligned}$$

en posant $A = \lambda_1 + \lambda_2$ et $B = \mathrm{i}\cdot(\lambda_2 - \lambda_1)$, car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} = \cos t + \mathrm{i}\,\sin t$.

IV.A.2.*c*.i. Cas $\alpha = 0$: oscillateur harmonique non amorti

On a

$$\boldsymbol{x_\mathrm{h} = A\,\cos(\omega_0\;t) + B\,\sin(\omega_0\;t)}$$

ou encore

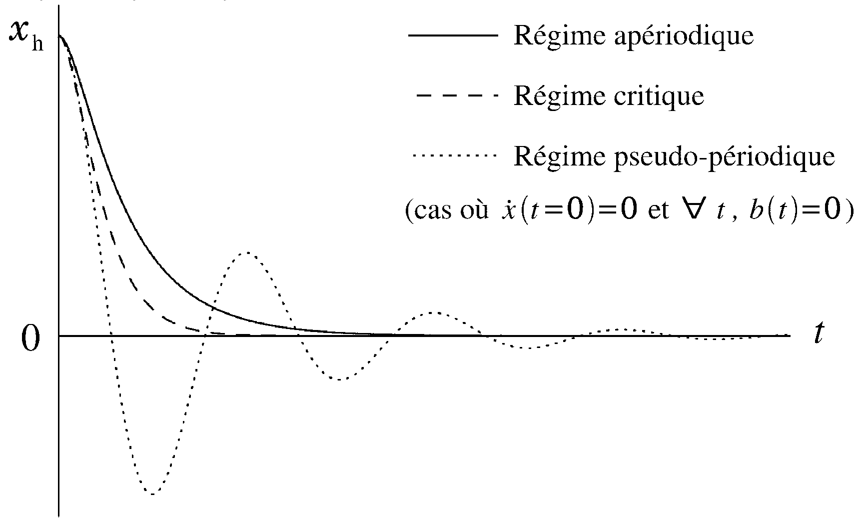
$$\boldsymbol{x_\mathrm{h} = C\,\cos(\omega_0\;t + \phi)},$$

avec $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\cos\phi = A/C$ et $\sin\phi = -B/C$. Le régime est donc ***périodique*** de période $T_0 = 2\,\pi/\omega_0$.

2. On peut également écrire x_h sous la forme $x_\mathrm{h} = \mathrm{e}^{-\alpha\,t}\cdot\Big(A\,\mathrm{ch}[\sqrt{\Delta}\;\;t/2] + B\,\mathrm{sh}[\sqrt{\Delta}\;\;t/2]\Big)$, où $\mathrm{ch}\,t := (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})/2$ est le cosinus hyperbolique, $\mathrm{sh}\,t := (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})/2$ est le sinus hyperbolique, $A = \lambda_1 + \lambda_2$ et $B = \lambda_2 - \lambda_1$.

IV.A.2.*c*.ii. Cas $\alpha > 0$: oscillateur harmonique amorti

Si $\alpha > 0$, x_h correspond à une oscillation de pseudo-période $T = 4\,\pi/\sqrt{-\Delta} > T_0$ et d'amplitude décroissant exponentiellement. On a $x_\mathrm{h}(t+T) = \mathrm{e}^{-\delta}\,x_\mathrm{h}(t)$, où $\delta = \alpha\,T$ est le ***décrément logarithmique***. Ce régime est dit ***pseudo-périodique***.



IV.A.3. Solutions particulières. Cas où $\{a_0, a_1\} \in \mathbb{R}^{+2}$ et $b(t) \in \mathbb{R}$

IV.A.3.*a*. Oscillations libres

Si b est constante, il existe une solution particulière constante :

$$\boldsymbol{x_\mathrm{p} = b/\omega_0^2}.$$

IV.A.3.*b*. Oscillations forcées

Si $b(t) = \beta\,\cos(\omega\,t)$, avec $(\beta, \omega) \in \mathbb{R}^{+2}$, une solution particulière est

$$\boldsymbol{x_\mathrm{p} = \gamma\,\cos(\omega\,t + \phi)},$$

où l'amplitude $\gamma \geqslant 0$ et le déphasage ϕ sont des constantes à déterminer à partir de l'équation générale. Pour ce faire, le plus simple est d'utiliser les nombres complexes.

Considérons l'équation complexe $\boldsymbol{\ddot{z} + 2\,\alpha\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = \beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}}$. Les quantités α, ω_0, β, ω et t étant réelles, on a

$$\mathrm{Re}(\ddot{z}) + 2\,\alpha\,\mathrm{Re}(\dot{z}) + \omega_0^2\,\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\ddot{z} + 2\,\alpha\,\dot{z} + \omega_0^2\,z) = \mathrm{Re}(\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}) = \beta\,\cos(\omega\,t).$$

Si z est solution de l'équation complexe, $\boldsymbol{x_\mathrm{p} = \mathrm{Re}(z)}$ est solution de l'équation réelle, car $\mathrm{Re}(\dot{z}) = \mathrm{d}(\mathrm{Re}[z])/\mathrm{d}t$. Cherchons z sous la forme $\boldsymbol{z = \gamma\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\omega\,t+\phi)}}$. On obtient

$$\ddot{z} + 2\,\alpha\,\dot{z} + \omega_0^2\,z = (-\omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\omega\,\alpha + \omega_0^2)\,\gamma\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\omega\,t+\phi)} = \beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t},$$

soit, en prenant le module,

$$\gamma = \frac{\beta}{|-\omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\omega\,\alpha + \omega_0^2|} = \frac{\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\omega^2\,\alpha^2}}$$

et, en multipliant par le conjugué de $-\omega^2 + 2\,\mathrm{i}\,\omega\,\alpha + \omega_0^2$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi} = \frac{\beta}{\gamma}\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\,\mathrm{i}\,\omega\,\alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\omega^2\,\alpha^2},$$

d'où

$$\tan\phi = \frac{2\,\omega\,\alpha}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Notez que $\sin\phi \leqslant 0$, donc $\phi \in [-\pi, 0]$: la réponse x_p est en retard par rapport à l'excitation $b(t)$.

IV.A.4. Conditions particulières

Les solutions d'une équation différentielle dépendent également des conditions particulières. En physique, il s'agit généralement de conditions initiales (p· ex· position et vitesse au départ) ou de conditions aux limites (p· ex· pression en deux endroits différents). Elles permettent de déterminer les constantes λ_1 et λ_2 de la solution de l'équation d'ordre 2.

Plus généralement, le nombre de conditions nécessaires pour résoudre une équation différentielle linéaire est égal à l'ordre de l'équation.

IV.A.5. Exemple

On veut résoudre

$$\ddot{x} + 2\,\dot{x} + 5\,x = -4 \quad \text{avec} \quad x(0) = 2 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = -1.$$

Les racines de l'équation caractéristique $r^2 + 2\,r + 5 = 0$ sont $r_1 = -1 + 2\,\mathrm{i}$ et $r_2 = -1 - 2\,\mathrm{i}$ ($\Delta = -16$).

$$\begin{aligned} x_\mathrm{h} &= \lambda_1\,\mathrm{e}^{(-1+2\,\mathrm{i})\,t} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{(-1-2\,\mathrm{i})\,t} = \mathrm{e}^{-t}\cdot\left(\lambda_1\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,t} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,t}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-t}\cdot([\lambda_1+\lambda_2]\cos[2\,t] + \mathrm{i}\cdot[\lambda_1-\lambda_2]\sin[2\,t]). \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation générale est $x_\mathrm{p} = -4/5$, donc

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cdot([\lambda_1+\lambda_2]\cos[2\,t] + \mathrm{i}\cdot[\lambda_1-\lambda_2]\sin[2\,t]) - 4/5.$$

$$x(0) = \lambda_1 + \lambda_2 - 4/5 = 2 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = -(\lambda_1+\lambda_2) + 2\,\mathrm{i}\cdot(\lambda_1-\lambda_2) = -1,$$

d'où

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cdot\left(\frac{14}{5}\cos[2\,t] + \frac{9}{10}\sin[2\,t]\right) - \frac{4}{5}.$$

IV.B. Oscillateurs en physique

En physique, les phénomènes d'oscillations se produisent notamment dans deux cas :

- quand un système est légèrement perturbé par rapport à une position d'équilibre stable et qu'on le laisse évoluer ensuite (oscillations libres) ;
- quand un système est soumis à une excitation variable, notamment sinusoïdale. La réponse du système correspond alors à une oscillation (oscillations forcées).

IV.B.1. Oscillations libres

Considérons par exemple un corps de masse m ne pouvant se déplacer que selon un axe x (un seul degré de liberté) et soumis à une force $\vec{F} = F(x)\,\vec{u}_x$. L'équation du mouvement de m est $m\,\ddot{x} = F(x)$. Supposons que m soit à l'équilibre en x_0, c·-à-d· $F(x_0) = 0$. Si m subit un petit déplacement δx par rapport à x_0, il est soumis à une force $F(x_0 + \delta x)$. Si $F(x_0 + \delta x)$ est opposée à δx (c·-à-d· $F(x_0 + \delta x)\,\delta x < 0$), la force ramène m vers l'équilibre. Si c'est vrai pour n'importe quel petit déplacement, l'équilibre est stable.

Supposons maintenant que F dérive d'une énergie potentielle :

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}.$$

En x_0, $(\mathrm{d}E_\mathrm{p}/\mathrm{d}x)_{x=x_0} = 0$: E_p est extrémale à l'équilibre. On a

$$F(x_0 + \delta x) = \underbrace{F(x_0)}_{0} + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}}_{-(\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}/\mathrm{d}x^2)_{x=x_0}}\delta x + \cdots.$$

La condition de stabilité prend donc la forme suivante :

$$\forall\ \delta x,\ F(x_0 + \delta x)\,\delta x = -\left(\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_0}\cdot(\delta x)^2 < 0,$$

c.-à-d.

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_0} > 0.$$

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que E_p soit minimale en x_0.

Plus généralement, quel que soit le nombre de degrés de liberté, si un système n'est soumis qu'à des forces conservatives, l'équilibre correspond à un extrémum de l'énergie potentielle et l'équilibre stable, en particulier, à un minimum.

Posons $(\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}/\mathrm{d}x^2)_{x=x_0} = m\ \omega_0^2$. Un développement limité de E_p autour de x_0 donne

$$\begin{aligned} E_\mathrm{p}(x) &= E_\mathrm{p}(x_0) + \left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots \\ &\approx E_\mathrm{p}(x_0) + \frac{1}{2}\ m\ \omega_0^2 \cdot (x - x_0)^2. \end{aligned}$$

Au voisinage de x_0 et en négligeant les termes d'ordre strictement supérieur à 2 du développement de E_p, l'équation $m\ \ddot{x} = F(x)$ donne

$$\ddot{x} + \omega_0^2\ x = \omega_0^2\ x_0.$$

On reconnaît là l'équation d'un oscillateur harmonique oscillant périodiquement autour de x_0 avec une pulsation ω_0 (en $\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$). La pulsation est reliée à la fréquence ν_0 (en Hz) et à la période T_0 (en secondes) par les relations $\omega_0 = 2\ \pi\ \nu_0$ et $T_0 = 1/\nu_0$.

Outre la force F, l'oscillateur peut subir une force de frottement, f. On peut traiter analytiquement le cas où f est proportionnelle à la vitesse.

Posons $f = -2\ \alpha\ m\ \dot{x}$. On a alors l'équation suivante

$$m\ \ddot{x} = F + f,$$

soit

$$\ddot{x} + 2\ \alpha\ \dot{x} + \omega_0^2\ x = \omega_0^2\ x_0.$$

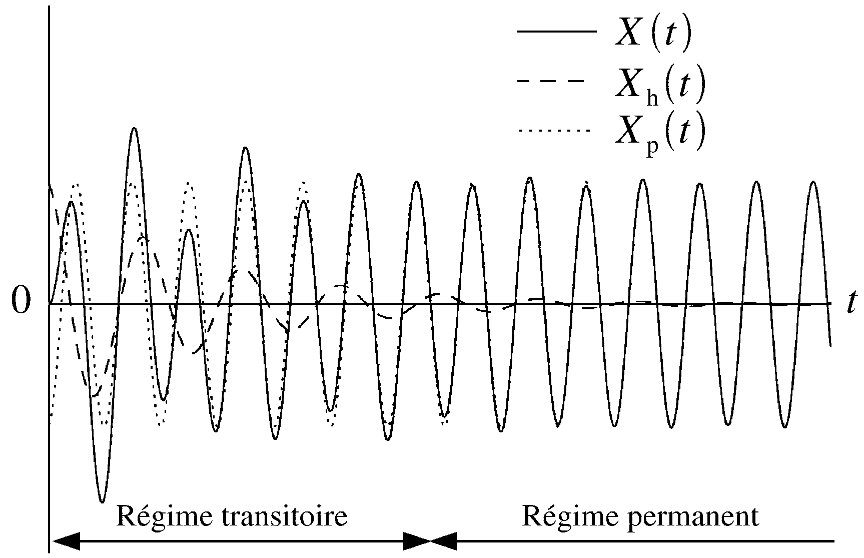
Après une perturbation par rapport à l'équilibre (x_0), x tend à nouveau vers x_0, en oscillant ($\alpha < \omega_0$) ou non ($\alpha \geqslant \omega_0$). L'échelle de temps pour revenir à l'équilibre porte le nom de ***temps de relaxation*** et est de l'ordre de $1/\alpha$ dans le cas d'oscillations amorties.

IV.B.2. Oscillations forcées. Étude de la résonance

Reprenons le système précédent (avec amortissement) et soumettons-le à une excitation sinusoïdale de pulsation ω. On peut choisir l'origine des temps de manière à avoir l'équation suivante :

$$\ddot{X} + 2\ \alpha\ \dot{X} + \omega_0^2\ X = \beta\ \cos(\omega\ t),$$

où l'on a posé $X = x - x_0$ pour simplifier. La solution de cette équation est de la forme $X = X_\mathrm{h} + X_\mathrm{p}$.



Après un ***régime transitoire*** durant quelques $1/\alpha$ pendant lequel X_h tend vers 0, le système entre en ***régime permanent***. On a alors $X \approx X_p = \gamma\ \cos(\omega\ t + \phi)$, avec

$$\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\ \omega^2\ \alpha^2}}$$

et

$$\tan\phi = \frac{2\ \omega\ \alpha}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

IV.B.2.*a*. Étude de l'amplitude

Étudions $\gamma(\omega)$. On a $\gamma(\omega) \underset{0}{\simeq} \beta/\omega_0^2$ et $\gamma(\omega) \underset{+\infty}{\simeq} \beta/\omega^2$.

Cherchons un éventuel maximum. L'amplitude γ est maximale si $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\ \omega^2\ \alpha^2$ est minimale. On a

$$\frac{\mathrm{d}([\omega_0^2 - \omega^2]^2 + 4\ \omega^2\ \alpha^2)}{\mathrm{d}(\omega^2)} = 2 \times (2\ \alpha^2 + \omega^2 - \omega_0^2).$$

La dérivée s'annule pour

$$\omega_{\text{rés}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\ \alpha^2},$$

sous réserve que $\omega_0 \geqslant \sqrt{2}\ \alpha$. Si cette condition est vérifiée, γ admet en $\omega_{\text{rés}}$ un maximum

$$\gamma_{\text{rés}} = \frac{\beta}{2\ \alpha\ \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

de hauteur supérieure à la valeur obtenue dans le cas des oscillations libres ($\gamma(0) = \beta/\omega_0^2$). Ce phénomène s'appelle une ***résonance***. La ***bande passante*** $[\omega_1, \omega_2]$ de la résonance est définie par

$$\boldsymbol{\gamma(\omega_1) = \gamma(\omega_2) = \gamma_{\text{rés}}/\sqrt{2}}.$$

Notons $\boldsymbol{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1}$ sa largeur et $\boldsymbol{Q = \omega_0/\Delta\omega}$ le ***facteur de qualité***.

Supposons $\alpha \ll \omega_0$. On a alors $\boldsymbol{\omega_{\text{rés}} \approx \omega_0}$ et $\gamma_{\text{rés}} \approx \beta/(2\ \alpha\ \omega_0)$. On obtient

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - 2\ \alpha^2 - 2\ \alpha\ \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad \text{et} \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2 - 2\ \alpha^2 + 2\ \alpha\ \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2},$$

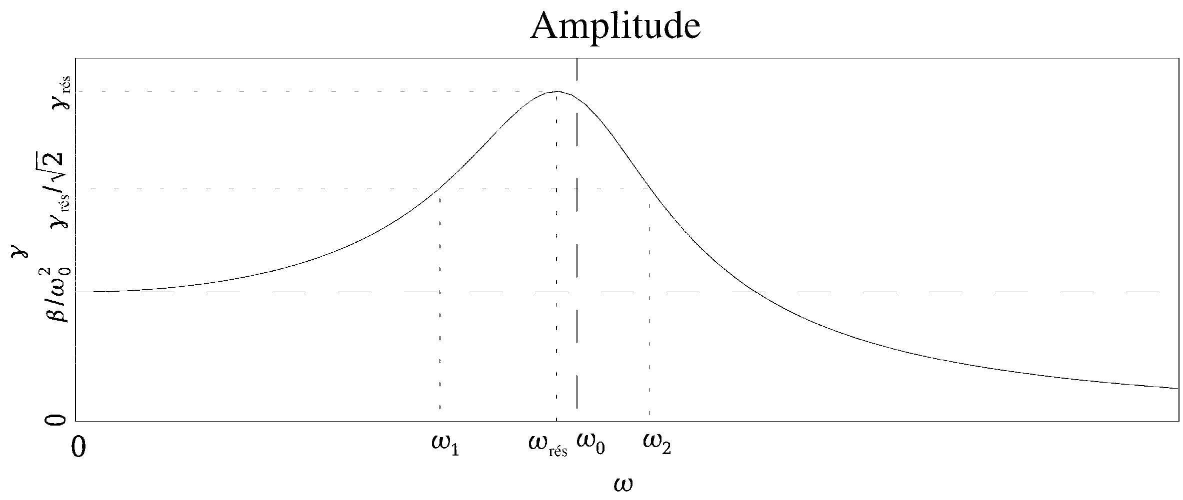
soit, en développant au 1er ordre en α/ω_0,

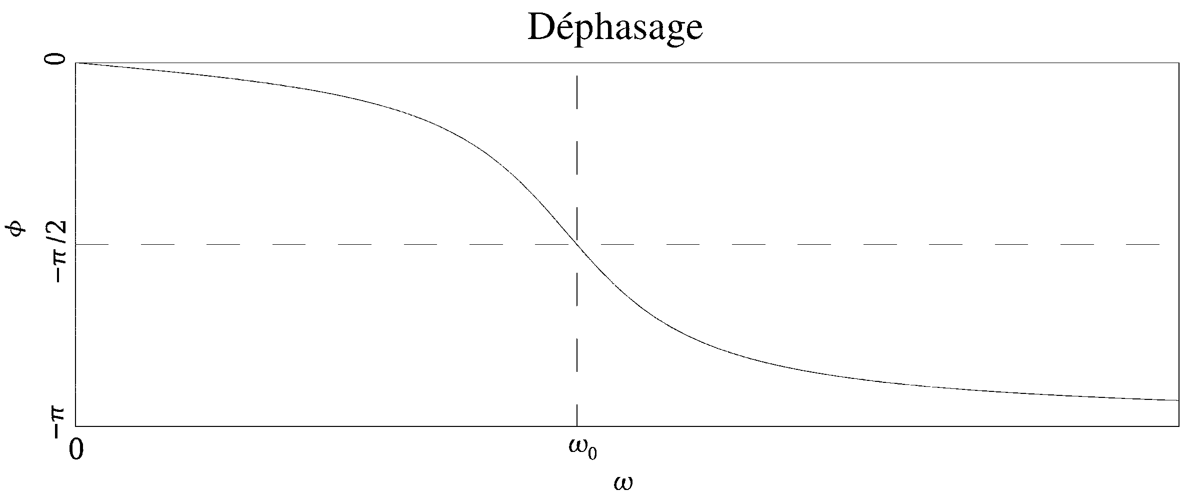
$$\boldsymbol{\omega_1 \approx \omega_0 - \alpha} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\omega_2 \approx \omega_0 + \alpha},$$

d'où $\Delta\omega \approx 2\,\alpha$ et $\boldsymbol{Q \approx \omega_0/(2\,\alpha)}$. Remarquons également que $\boldsymbol{\gamma_{\text{rés}}/\gamma(0) \approx Q}$.

Q caractérise donc bien la qualité de la résonance : plus Q est grand (c.-à-d. plus α est petit devant ω_0),

- plus le pic de résonance est intense ;
- plus sa largeur relative est étroite ; et
- plus la pulsation $\omega_{\text{rés}}$ est proche de ω_0.





IV.B.2.*b*. Étude du déphasage

Quand $\omega \approx 0$, $\phi \approx 0$: la réponse est en phase avec l'excitation.

Quand $\omega \to \infty$, $\phi \approx -\pi$: la réponse est en opposition de phase par rapport à l'excitation.

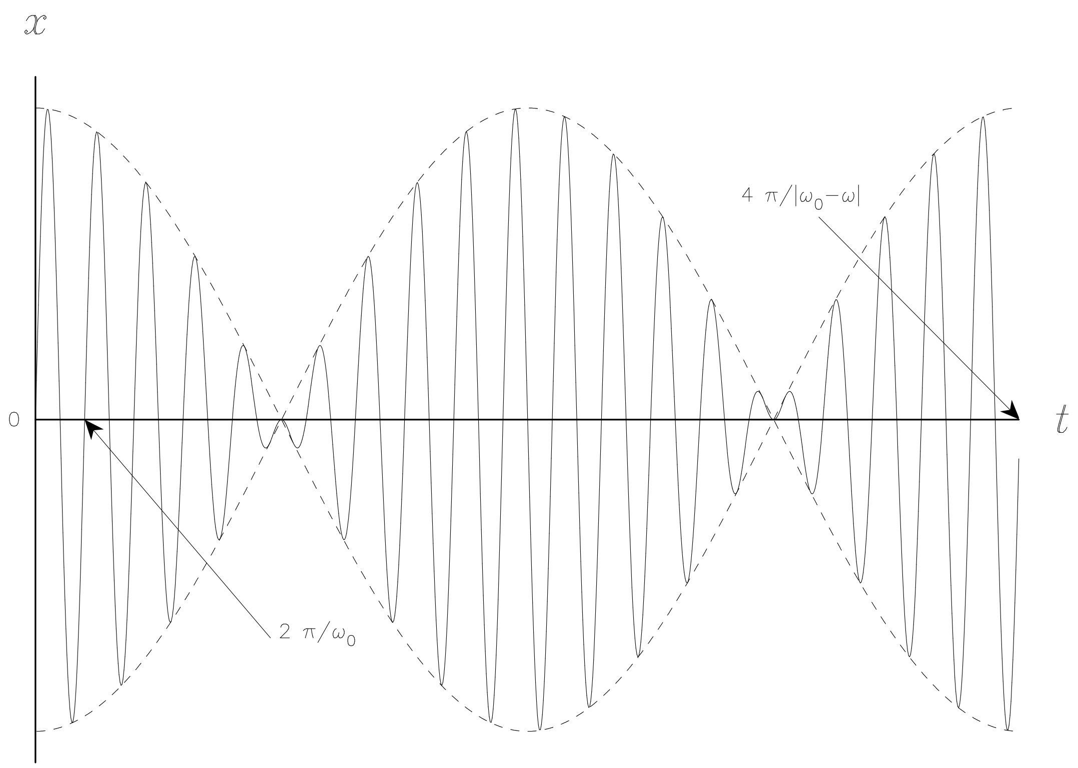
Quand $\omega \approx \omega_0$, $\phi \approx -\pi/2$: la réponse est en quadrature de phase en retard par rapport à l'excitation.

‡ IV.B.2.*c*. Résonance de vitesse

Outre le phénomène de résonance de position (X_p) que nous venons d'étudier, on peut s'intéresser à la résonance de vitesse ($\dot{X}_p = \gamma\,\omega\cos(\omega\,t + \phi + \pi/2)$). Celle-ci se produit exactement à ω_0. La vitesse a un déphasage de $\phi + \pi/2$ par rapport à l'excitation ; elle est donc en phase avec celle-ci à la résonance.

‡ IV.B.2.*d*. Battements

Si $\alpha \approx 0$, le régime transitoire persiste longtemps. Si, en outre, $\omega \approx \omega_0$, des battements apparaissent, c.-à-d. des oscillations sinusoïdales de pulsation $(\omega_0 + \omega)/2 \approx \omega_0$ dont l'amplitude est modulée par une sinusoïde de plus courte pulsation (donc de plus longue période), $|\omega_0 - \omega|/2$.


x
0
t
$4\ \pi/|\omega_0-\omega|$
$2\ \pi/\omega_0$