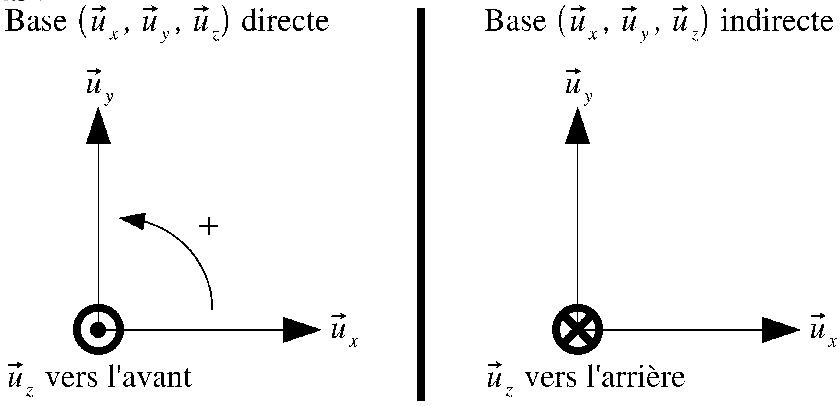
# Chapitre I

# Introduction mathématique

## I.A. Calcul vectoriel

### I.A.1. Produit vectoriel

Plaçons-nous dans un espace vectoriel euclidien à trois dimensions. En faisant subir des rotations identiques aux trois vecteurs d'une base orthonormée ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$), on se retrouve toujours dans un des deux cas suivants :




Le choix d'une base directe permet de déterminer (cf· figure) le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) dans lequel est compté positivement l'angle entre deux vecteurs du plan ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$).

Pour déterminer si une base est directe, on peut utiliser l'une ou l'autre des règles suivantes :

**Règle des trois doigts de la main droite.** Si la base est directe, on peut aligner ses vecteurs avec les doigts de la main *droite* [*1] : $\vec{u}_x$ avec l'index (tendu), $\vec{u}_y$ avec le majeur (à angle droit vers l'intérieur de la main) et $\vec{u}_z$ avec le pouce (perpendiculaire aux deux autres).

**Règle du tire-bouchon de Maxwell.** Si la base est directe, la mèche d'un tire-bouchon progresse dans le sens de $\vec{u}_z$ lorsqu'on tourne la poignée d'un quart de tour de $\vec{u}_x$ vers $\vec{u}_y$.

**Nous nous placerons dorénavant toujours dans une base orthonormée directe.**

Le ***produit vectoriel*** de $\vec{a}$ par $\vec{b}$ est le *vecteur*

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_y\, b_z - a_z\, b_y \\ a_z\, b_x - a_x\, b_z \\ a_x\, b_y - a_y\, b_x \end{pmatrix}.$$

1. On obtiendrait une base indirecte avec la main gauche.

Il est parfois également noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Le produit vectoriel possède les propriétés suivantes :

- ***Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.*** En particulier, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ ;
- ***$\vec{a} \times \vec{b}$ est perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$*** ;
- ***$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$*** : *le produit vectoriel n'est pas commutatif* ;
- $(\lambda\ \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ ;
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

On peut retrouver l'expression du produit vectoriel en utilisant les permutations circulaires suivantes :

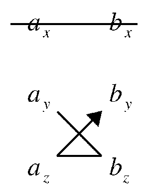
$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \longrightarrow \vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \longrightarrow \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y$$

En développant, on obtient

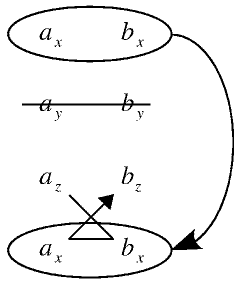
$$\begin{aligned}
(a_x\ \vec{u}_x + a_y\ \vec{u}_y + a_z\ \vec{u}_z) \times (b_x\ \vec{u}_x + b_y\ \vec{u}_y + b_z\ \vec{u}_z) \\
= \quad & a_x\ b_x\ \underbrace{\vec{u}_x \times \vec{u}_x}_{\vec{0}} + a_x\ b_y\ \underbrace{\vec{u}_x \times \vec{u}_y}_{\vec{u}_z} + a_x\ b_z\ \underbrace{\vec{u}_x \times \vec{u}_z}_{-\vec{u}_y} \\
& + a_y\ b_x\ \underbrace{\vec{u}_y \times \vec{u}_x}_{-\vec{u}_z} + a_y\ b_y\ \underbrace{\vec{u}_y \times \vec{u}_y}_{\vec{0}} + a_y\ b_z\ \underbrace{\vec{u}_y \times \vec{u}_z}_{\vec{u}_x} \\
& + a_z\ b_x\ \underbrace{\vec{u}_z \times \vec{u}_x}_{\vec{u}_y} + a_z\ b_y\ \underbrace{\vec{u}_z \times \vec{u}_y}_{-\vec{u}_x} + a_z\ b_z\ \underbrace{\vec{u}_z \times \vec{u}_z}_{\vec{0}} \\
= \quad & (a_y\ b_z - a_z\ b_y)\ \vec{u}_x + (a_z\ b_x - a_x\ b_z)\ \vec{u}_y + (a_x\ b_y - a_y\ b_x)\ \vec{u}_z.
\end{aligned}$$

On peut retrouver ce résultat de la manière suivante [*2] :

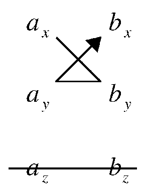
Notons $\begin{smallmatrix} a & & c \\ & \boxtimes & \\ b & & d \end{smallmatrix}$ l'opération dont le résultat est $a\ d - b\ c$.




**Composante selon $x$ :**
1. Rayer la ligne $x$ ;
2. Effectuer l'opération $\boxtimes$ entre les deux lignes restantes.




**Composante selon $y$ :**
1. Rayer la ligne $y$ ;
2. Recopier la ligne $x$ sous la ligne $z$ (le symbole $\boxtimes$ ne doit pas croiser la ligne rayée) ;
3. Effectuer l'opération $\boxtimes$ entre les deux lignes restantes.




**Composante selon $z$ :**
1. Rayer la ligne $z$ ;
2. Effectuer l'opération $\boxtimes$ entre les deux lignes restantes.

On peut enfin exprimer le produit vectoriel en termes de normes et d'angle. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs. On peut toujours trouver une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ telle que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient dans

2. La composante selon $y$ peut aussi être obtenue comme celles selon $x$ et $z$ (donc en croisant la ligne rayée $y$ et sans recopier la ligne $x$ sous la ligne $z$), mais il faut mettre un signe *moins* devant.

le plan $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a alors

$$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|\ \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\ \vec{k}},$$

où $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ est l'angle *orienté* entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

La surface $S$ d'un triangle $(ABC)$ peut être exprimée à l'aide de cette relation. On a en effet

$$S = \frac{1}{2}\ \overbrace{\|\overrightarrow{AB}\|}^{\text{base}}\ \overbrace{\|\overrightarrow{AC}\|\ |\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})|}^{\text{hauteur}} = \frac{1}{2}\ \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

### ‡ I.A.2. Double produit vectoriel

On a

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\ \vec{a}$$

et

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\ \vec{c}.$$

Pour retenir ces expressions, remarquer que

- le résultat du double produit vectoriel n'a de composantes que selon les deux vecteurs présents à l'intérieur des parenthèses du membre de gauche ($\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans la 1re expression ; $\vec{b}$ et $\vec{c}$ dans la 2e) ;
- le deuxième vecteur du membre de gauche ($\vec{b}$) est multiplié par *plus* le produit scalaire des autres vecteurs ($+\vec{a} \cdot \vec{c}$) ;
- l'autre vecteur à l'intérieur des parenthèses du membre de gauche est multiplié par *moins* le produit scalaire des autres vecteurs ($-\vec{b} \cdot \vec{c}$ dans la 1re expression ; $-\vec{a} \cdot \vec{b}$ dans la 2e expression).

### ‡ I.A.3. Produit mixte

Le ***produit mixte*** de trois vecteurs est le scalaire défini par $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

On a $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$.

Si $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires. En effet, $\vec{c}$ est alors perpendiculaire au vecteur $\vec{a} \times \vec{b}$, lui-même perpendiculaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ; $\vec{c}$ est donc dans le plan $(\vec{a}, \vec{b})$.

# I.B. Calcul différentiel

## I.B.1. Fonction réelle d'une seule variable réelle

Soient $f$ une fonction scalaire d'une variable $x$. La ***différentielle*** de $f$ en $x_0$ est l'application linéaire

$$\mathrm{d}f_{x_0} : \mathrm{d}x \longmapsto \mathrm{d}f_{x_0}(\mathrm{d}x) = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0} \mathrm{d}x,$$

ce que l'on note souvent simplement

$$\boldsymbol{\mathrm{d}f := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x}.$$

En faisant un développement limité de $f$ au premier ordre au voisinage de $x_0$, on obtient

$$f(x_0 + \mathrm{d}x) = f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0} \mathrm{d}x}_{\mathrm{d}f} + \cdots,$$

où les « $\cdots$ » représentent des termes d'ordre supérieur ou égal à 2, donc négligeables devant les termes d'ordre 0 ou 1 quand $\mathrm{d}x$ est suffisamment petit. La différentielle $\mathrm{d}f$ est donc une approximation de la différence $f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$, approximation d'autant meilleure que $\mathrm{d}x$ est petit.

### I.B.2. Fonction réelle de plusieurs variables réelles

Pour définir la différentielle d'une fonction de plusieurs variables (par exemple une fonction $f(x, y)$ de deux variables, $x$ et $y$), il faut introduire la notion de dérivée partielle. La ***dérivée partielle*** de $f$ par rapport à $x$ en $(x_0, y_0)$ est

$$\boldsymbol{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x=x_0,\ y=y_0)} := \lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{f(x_0+\mathrm{d}x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{\mathrm{d}x}}.$$

On la notera plus simplement $\partial f/\partial x$. Seule $x = x_0 + \mathrm{d}x$ varie dans cette opération. On peut donc calculer $\partial f/\partial x$ comme la dérivée usuelle par rapport à $x$, les autres variables étant considérées comme des paramètres constants lors de cette dérivation. De même pour les dérivées partielles par rapport aux autres variables.

La différentielle de $f$ en $(x_0, y_0)$ est alors

$$\mathrm{d}f_{(x_0,\ y_0)}\colon (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \longmapsto \mathrm{d}f_{(x_0,\ y_0)}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x=x_0,\ y=y_0)} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x=x_0,\ y=y_0)} \mathrm{d}y,$$

ou encore, en notation simplifiée,

$$\boldsymbol{\mathrm{d}f := \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y}.$$

Comme précédemment, ***si* $\mathrm{d}x$ *et* $\mathrm{d}y$ *sont petits,* $\boldsymbol{\mathrm{d}f \approx f(x_0+\mathrm{d}x,\ y_0+\mathrm{d}y) - f(x_0,\ y_0)}$**.

Tous ces résultats sont bien entendu généralisables à un plus grand nombre de variables.

### I.B.3. Fonction vectorielle d'une variable réelle

Une fonction vectorielle $\vec{f}$ d'une variable $t$ est un vecteur dont les composantes dans une base $\mathcal{B}$ sont des fonctions de $t$.

Intéressons-nous en particulier au cas d'une fonction $\vec{f}(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ et notons $(f_x, f_y, f_z)$ ses composantes dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

#### I.B.3.*a*. Dérivée d'une fonction vectorielle

La dérivée de $\vec{f}$ dans la base $\mathcal{B}$ est le vecteur

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{f}}{\mathrm{d}t} := \frac{\mathrm{d}f_x}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}f_y}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}f_z}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_z}.$$

Contrairement à la dérivation d'un scalaire, la dérivation d'un vecteur dépend de la base dans laquelle elle est effectuée. En effet, dériver dans la base $\mathcal{B}$ revient à considérer que les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont fixes lors de cette opération : la dérivée $\mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}\vec{f}/\mathrm{d}t$ dans une base $\mathcal{B}'$ mobile par rapport à $\mathcal{B}$ sera donc différente de $\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{f}/\mathrm{d}t$ (cf· § II.B).

#### I.B.3.*b*. Dérivée d'un produit scalaire

On montre sans difficulté que, quelle que soit la base $\mathcal{B}$,

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{f}\cdot\vec{g})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{f}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{g} + \vec{f}\cdot\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{g}}{\mathrm{d}t}.$$

**Dérivée d'un vecteur de norme constante**

Si $\vec{f}$ est un vecteur de *norme* constante, $\mathrm{d}\vec{f}/\mathrm{d}t$ est orthogonal à $\vec{f}$. En effet,

$$\vec{f}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}(\vec{f}\cdot\vec{f})}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}(\|\vec{f}\|^2)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

### I.B.3.*c*. Dérivée d'un produit vectoriel

On montre sans difficulté que

$$\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}(\vec{f}\times\vec{g})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{f}}{\mathrm{d}t}\times\vec{g} + \vec{f}\times\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{g}}{\mathrm{d}t}.$$

### I.B.3.*d*. Différentielle d'une fonction vectorielle

La différentielle de $\vec{f}$ dans la base $\mathcal{B}$ est le vecteur

$$\boldsymbol{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{f} := \mathrm{d}f_x\ \vec{u}_x + \mathrm{d}f_y\ \vec{u}_y + \mathrm{d}f_z\ \vec{u}_z}.$$

Tous les résultats énoncés ci-dessus pour les dérivées sont applicables aux différentielles à condition de remplacer les « $\mathrm{d}(\cdot)/\mathrm{d}t$ » par des « $\mathrm{d}(\cdot)$ ».

## I.C. Systèmes de coordonnées

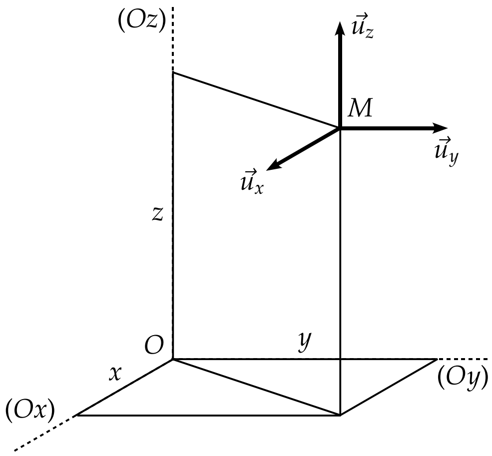
Plaçons-nous dans l'espace usuel à trois dimensions et choisissons un point $O$ et une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

### I.C.1. Coordonnées cartésiennes

Les ***coordonnées cartésiennes*** d'un point $M$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\ \vec{u}_x + y\ \vec{u}_y + z\ \vec{u}_z$ dans la base $\mathcal{B}$. On appelle $x$ l'***abscisse***, $y$ l'***ordonnée*** et $z$ la ***cote*** (ou encore l'***altitude*** si l'axe $z$ est vertical).

Le vecteur ***déplacement élémentaire*** de $M$ est $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\ \vec{u}_x + \mathrm{d}y\ \vec{u}_y + \mathrm{d}z\ \vec{u}_z$.

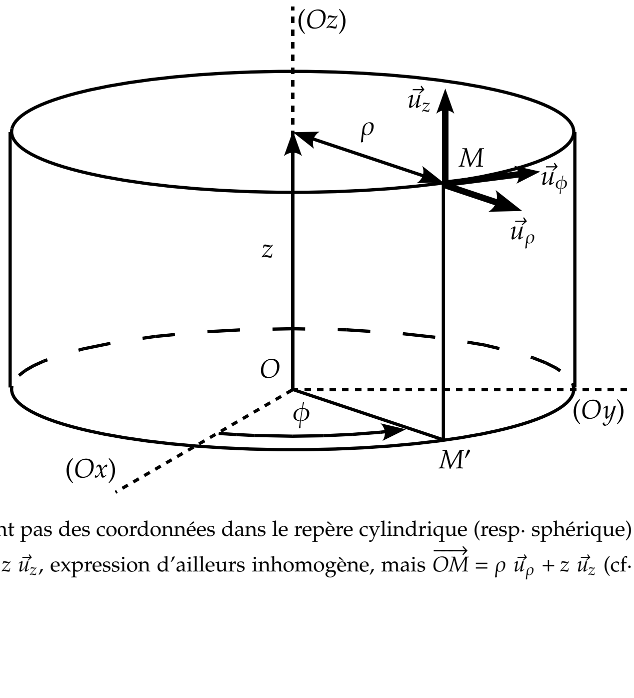
La longueur du segment $AB$ (la distance entre $A$ et $B$) est $\|\overrightarrow{AB}\| = ([x_B - x_A]^2 + [y_B - y_A]^2 + [z_B - z_A]^2)^{1/2}$.




### I.C.2. Coordonnées cylindriques, coordonnées polaires

Appelons $M'$ la projection orthogonale de $M$ sur le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. La ***distance à l'axe*** $\rho = \|\overrightarrow{OM'}\|$, l'***angle polaire*** $\phi = (\widehat{\vec{u}_x, \overrightarrow{OM'}}) \in [0, 2\pi[$ et la ***cote*** $z$ sont les ***coordonnées cylindriques***[(*3)] de $M$.

Si tous les points sont dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, on peut se contenter des ***coordonnées polaires***, $\rho$ et $\phi$.




3. Les coordonnées cylindriques (resp· sphériques) ne sont pas des coordonnées dans le repère cylindrique (resp· sphérique) au sens du § A.II.2 : on n'a pas $\overrightarrow{OM} \overset{\text{faux}}{=} \rho\ \vec{u}_\rho + \phi\ \vec{u}_\phi + z\ \vec{u}_z$, expression d'ailleurs inhomogène, mais $\overrightarrow{OM} = \rho\ \vec{u}_\rho + z\ \vec{u}_z$ (cf· ci-dessous).

Le ***vecteur radial*** $\vec{u}_\rho = \overrightarrow{OM'}/\rho$, le ***vecteur orthoradial*** $\vec{u}_\phi$, obtenu en faisant subir une rotation d'axe $\vec{u}_z$ et d'angle $+\pi/2$ au vecteur $\vec{u}_\rho$, et le vecteur $\vec{u}_z$ forment une base orthonormée directe. Dans cette base,

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\,\vec{u}_\phi + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z.$$

$(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi, \vec{u}_z)$ est le repère cylindrique.

Les vecteurs $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\phi$ ne dépendent que de $\phi$. On a

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}\phi} = \vec{u}_\phi} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_\phi}{\mathrm{d}\phi} = -\vec{u}_\rho}.$$

### I.c.3. Coordonnées sphériques

La ***distance au centre*** $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, la ***colatitude*** $\theta = (\widehat{\vec{u}_z, \overrightarrow{OM}}) \in [0, \pi]$ et la ***longitude*** $\phi = (\widehat{\vec{u}_x, \overrightarrow{OM'}}) \in [0, 2\,\pi[$ sont les ***coordonnées sphériques***.

On utilise parfois la ***latitude*** $\lambda = \pi/2 - \theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$ au lieu de la colatitude.

Les vecteurs $\vec{u}_r = \overrightarrow{OM}/r$, $\vec{u}_\theta = \partial_{/\mathcal{B}}\vec{u}_r/\partial\theta$ et $\vec{u}_\phi = \dfrac{\partial_{/\mathcal{B}}\vec{u}_r/\partial\phi}{\|\partial_{/\mathcal{B}}\vec{u}_r/\partial\phi\|}$ forment une base orthonormée directe. On a

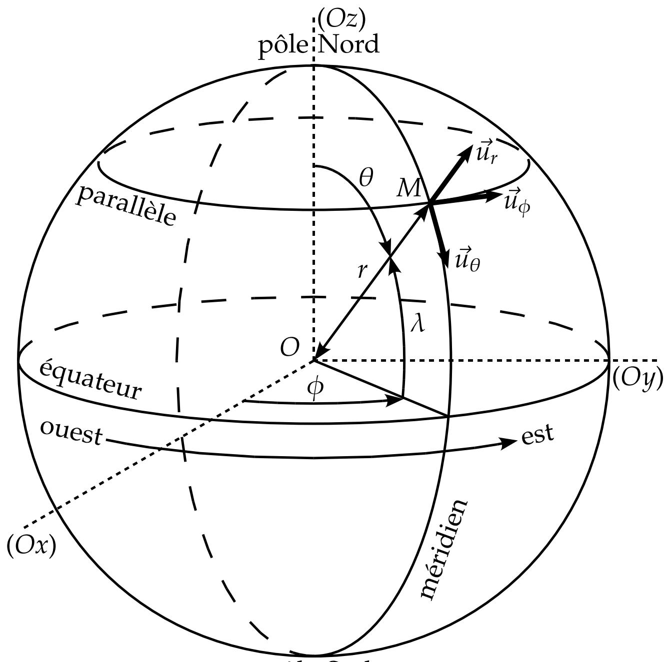
$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r}$$

et

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\vec{u}_\phi.$$

$(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ est le repère sphérique.

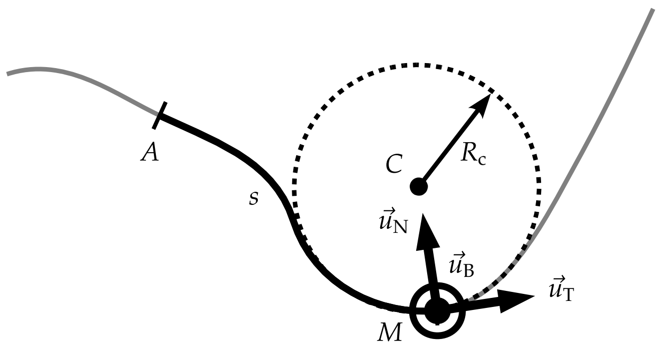
Ces quantités sont illustrées sur la figure ci-contre dans le cas de la Terre (la longitude est nulle par convention sur le méridien de Greenwich).




### I.c.4. Abscisse curviligne. Repère de Frenet

#### I.c.4.*a*. Abscisse curviligne

Considérons une courbe paramétrée par une variable $t$ (par exemple le temps). Orientons-la selon les valeurs croissantes de $t$ et choisissons un point $A$ de la courbe comme origine. L'***abscisse curviligne*** d'un point $M(t)$ de la courbe, $s(t)$, est la distance entre $A$ et $M$ calculée en suivant la courbe et comptée positivement si $M$ est après $A$ ($t \geqslant t_A$), négativement sinon. Si l'on sait qu'un point fait partie de la courbe, son abscisse curviligne suffit à déterminer sa position.




Entre deux points très proches, $M(t)$ et $M(t + \mathrm{d}t)$, on a

$$\boldsymbol{\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\;\mathrm{d}t}.$$

On peut alors calculer l'abscisse curviligne en intégrant d$s$ :

$$\boldsymbol{s(t) = \int_A^M \mathrm{d}s = \int_{t'=t_A}^{t} \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t'}\right)\,\mathrm{d}t'}.$$

### I.c.4.*b*. Repère de Frenet

Soit

$$\boldsymbol{\vec{u}_\mathrm{T}} \boldsymbol{:=} \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\overrightarrow{OM}}}{\mathbf{d}\boldsymbol{s}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t}$$

le ***vecteur tangent*** à la courbe en $M$. Il est par construction unitaire et dirigé vers les valeurs croissantes de $t$.

Soit

$$\boldsymbol{\vec{u}_\mathrm{N}} \boldsymbol{:=} \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\vec{u}_\mathrm{T}}/\mathbf{d}\boldsymbol{s}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\vec{u}_\mathrm{T}}/\mathbf{d}\boldsymbol{s}\|} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\mathrm{T}/\mathrm{d}t}{\|\mathrm{d}\vec{u}_\mathrm{T}/\mathrm{d}t\|}$$

le ***vecteur normal***. Par construction, $\vec{u}_\mathrm{N}$ est unitaire. Par ailleurs, $\vec{u}_\mathrm{T}$ étant un vecteur de norme constante, $\vec{u}_\mathrm{N}$ est perpendiculaire à $\vec{u}_\mathrm{T}$. Le point $M$ et les vecteurs $\vec{u}_\mathrm{T}$ et $\vec{u}_\mathrm{N}$ forment le ***plan osculateur*** à la courbe en $M$. Le vecteur $\vec{u}_\mathrm{N}$ est ***centripète***(*4), c·-à-d· dirigé vers l'intérieur de la courbure.

La quantité

$$\boldsymbol{R_\mathrm{c}} \boldsymbol{:=} \frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\vec{u}_\mathrm{T}}/\mathbf{d}\boldsymbol{s}\|} = \frac{|\mathrm{d}s/\mathrm{d}t|}{\|\mathrm{d}\vec{u}_\mathrm{T}/\mathrm{d}t\|}$$

a la dimension d'une longueur et est appelée ***rayon de courbure***. C'est le rayon du ***cercle osculateur***, c·-à-d· du cercle du plan osculateur approchant le mieux la courbe au voisinage de $M$ (son centre est le point $C$ tel que $\overrightarrow{MC} = R_\mathrm{c}\ \vec{u}_\mathrm{N}$). Bien sûr, si la trajectoire est circulaire, le rayon de courbure n'est autre que le rayon du cercle. Si la trajectoire est rectiligne, $R_\mathrm{c} = \infty$.

Introduisons enfin le ***vecteur binormal*** $\boldsymbol{\vec{u}_\mathrm{B} = \vec{u}_\mathrm{T} \times \vec{u}_\mathrm{N}}$. Le repère orthonormé direct $(M, \vec{u}_\mathrm{T}, \vec{u}_\mathrm{N}, \vec{u}_\mathrm{B})$ est appelé ***repère de Frenet*** ou ***repère intrinsèque***.

4. On qualifie à l'inverse de ***centrifuge*** un vecteur dirigé vers l'extérieur de la courbure.