

Chapitre VII

MOUVEMENTS À FORCE CENTRALE

VII.A. Lois de Kepler

En première approximation, le mouvement des planètes ^(*) autour du Soleil est régi par trois lois qui furent établies au 17^e siècle par l'astronome Johannes Kepler, à partir notamment des observations de Mars réalisées par Tycho Brahe. Ces lois furent utilisées par Newton pour établir la loi de l'attraction universelle. Voici leur énoncé traditionnel :

Première loi de Kepler

Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.

Deuxième loi de Kepler

Le rayon-vecteur (c.-à-d. le segment) Soleil-planète balaie des aires égales en des temps égaux.

Troisième loi de Kepler

Le rapport du cube du demi-grand axe de l'ellipse sur le carré de la période de révolution autour du Soleil est le même pour toutes les planètes.

Nous démontrerons ces lois et préciserons leur signification et leurs limites dans ce qui suit.

VII.B. Mobile fictif

Soient $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un référentiel galiléen et M_1 et M_2 deux points matériels de masses m_1 et m_2 . Notons G le centre d'inertie du système $S = \{M_1, M_2\}$:

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}.$$

On suppose que S est un *système isolé*. On a donc $(m_1 + m_2) \vec{a}_{G/\mathcal{R}} = \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow S} = \vec{0}$, c.-à-d. $\vec{v}_{G/\mathcal{R}} = \vec{c}^{\text{te}}$: le référentiel *barycentrique* $\mathcal{R}^* = (G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de S est donc galiléen.

On se place désormais dans \mathcal{R}^* .



On définit le *mobile fictif* M par

$$\overrightarrow{GM} := \overrightarrow{M_1 M_2} := \vec{r}$$

1. Rappelons que, par ordre croissant de distance au Soleil, les planètes du Système solaire sont Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Elles effectuent leurs révolutions autour du Soleil quasiment dans le même plan que la Terre. Ce dernier, appelé *écliptique*, est incliné d'environ 23° par rapport à l'équateur terrestre.

et on lui associe la *masse réduite*

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Connaissant la position du mobile fictif, il est facile d'en déduire celles de M_1 et M_2 . En effet, $\overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{GM_2} + \overrightarrow{M_2M_1} = -m_1 \overrightarrow{GM_1}/m_2 - \vec{r}$, donc

$$\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

De même,

$$\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

En particulier, si $m_2 \ll m_1$ (p. ex. la masse d'un satellite devant celle de la Terre ou la masse d'une planète devant celle du Soleil), $\overrightarrow{GM_1} \approx \vec{0}$ et $\overrightarrow{GM_2} \approx \vec{r}$: M_1 est alors presque confondu avec G , et M_2 avec M .



La trajectoire de M est déterminée par

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{GM_2}}{dt^2} = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

On a

$$\begin{aligned} \vec{L}_G(\{M_1, M_2\}) &= m_1 \overrightarrow{GM_1} \times \frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt} + m_2 \overrightarrow{GM_2} \times \frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt} \\ &= m_1 \overrightarrow{GM_1} \times \frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt} + m_2 \overrightarrow{GM_2} \times \frac{d(\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{M_1M_2})}{dt} \\ &= \underbrace{(m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2})}_{\vec{0}} \times \frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt} + \underbrace{m_2 \overrightarrow{GM_2}}_{\mu \vec{r}} \times \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}, \end{aligned}$$

soit

$$\vec{L}_G(\{M_1, M_2\}) = \mu \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} := \vec{L}_G(M).$$

De même,

$$E_c(\{M_1, M_2\}) = \frac{1}{2} \mu \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 := E_c(M).$$

VII.c. Constantes du mouvement

VII.c.1. Moment cinétique. 2^e loi de Kepler

Le système étant isolé, $\vec{L}_G = \vec{c}^{\text{te}}$. Notons \vec{u}_z un vecteur unitaire colinéaire à \vec{L}_G et $L_0 = \vec{L}_G \cdot \vec{u}_z$. Le vecteur \vec{r} étant perpendiculaire à \vec{L}_G , donc à un vecteur \vec{u}_z constant, **M se déplace dans le plan perpendiculaire à \vec{L}_G passant par G** . Soient \vec{u}_x et \vec{u}_y deux vecteurs tels que le repère $(G, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ soit orthonormé direct. Repérons M par ses coordonnées polaires, $r = \|\overrightarrow{GM}\|$ et $\phi = (\vec{u}_x, \widehat{\overrightarrow{GM}})$. On a

$$\vec{L}_G(M) = \mu \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \mu \cdot (r \vec{u}_r) \times (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\phi} \vec{u}_\phi) = \mu r^2 \dot{\phi} \vec{u}_z.$$

La constante

$$C := r^2 \dot{\phi} = L_0/\mu$$

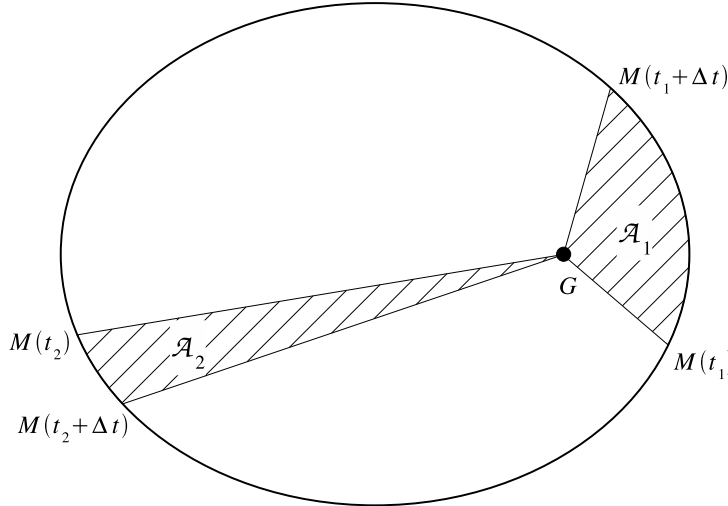
s'appelle la *constante des aires* ^(*).

2. Certains auteurs appellent « constante des aires » la quantité $C/2$.

Pendant une durée infinitésimale dt , l'aire balayée par le *rayon-vecteur* \overrightarrow{GM} vaut (cf. § I.A.1 pour le calcul de l'aire d'un triangle)

$$d\mathcal{A} = \frac{\|\vec{r} \times d\vec{r}\|}{2} = \frac{|C|}{2} dt.$$

C'est ce qu'exprime la *loi des aires*, ou *2^e loi de Kepler* : « Le rayon-vecteur balaie des aires égales en des temps égaux. ».



L'aire \mathcal{A}_1 balayée par \overrightarrow{GM} entre t_1 et $t_1 + \Delta t$ est égale à l'aire \mathcal{A}_2 balayée entre t_2 et $t_2 + \Delta t$.

Cas où $m_1 \gg m_2$

Si $m_1 \gg m_2$, $\vec{L}_{M_1}(M_2) = \vec{L}_G(M)$, donc $\vec{L}_{M_1}(M_2) = \vec{c}^{\text{te}}$.

On peut démontrer ceci sans passer par le mobile fictif. Si $m_1 \gg m_2$, M_1 est confondu avec G et est donc immobile dans \mathcal{R}^* . En appliquant le théorème du moment cinétique à M_2 seul et en calculant les moments par rapport à M_1 , on obtient $d\vec{L}_{M_1}(M_2)/dt = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$, puisque $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est une force centrale.

VII.c.2. Énergie mécanique. Énergie potentielle effective

M_1 et M_2 interagissent par l'intermédiaire d'une *force centrale*, c.-à-d. une force dirigée selon $\overrightarrow{M_1M_2}$ et ne dépendant que de $r = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$. Une telle force est nécessairement conservative. Le système étant isolé, son énergie mécanique, $E_m = E_c + E_p$, est donc constante ; notons-la E_0 . On a

$$E_0 = \frac{1}{2} \mu \cdot (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + E_p(r) = \frac{1}{2} \mu \cdot \left(\dot{r}^2 + r^2 \cdot \left[\frac{C}{r^2} \right]^2 \right) + E_p(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_p^{\text{eff}}(r),$$

où

$$E_p^{\text{eff}}(r) := \frac{\mu C^2}{2 r^2} + E_p(r)$$

est l'*énergie potentielle effective*.



On peut séparer les variables t et r dans l'équation différentielle (en r et \dot{r}) ci-dessus. On obtient

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2(E_0 - E_p^{\text{eff}}[r])/\mu}},$$

que l'on peut intégrer pour trouver t en fonction de r .

On a de même

$$d\phi = \frac{C dr}{r^2 \sqrt{2(E_0 - E_p^{\text{eff}}[r])/\mu}}.$$

Cas d'une force en $1/r^2$

Considérons le cas d'une force en $1/r^2$,

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r.$$

$K = \mathcal{G} m_1 m_2$ correspond à la force gravitationnelle et $K = -q_1 q_2 / (4 \pi \epsilon_0)$ à la force électrostatique. $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ dérive alors de l'énergie potentielle d'interaction

$$E_p = -\frac{K}{r}$$

et

$$E_p^{\text{eff}} = \frac{\mu C^2}{2 r^2} - \frac{K}{r}.$$

On a $r^2 = 2 (E_0 - E_p^{\text{eff}}) / \mu$. Les seules valeurs de r possibles sont donc celles pour lesquelles $E_p^{\text{eff}}(r) \leq E_0$. Distinguons les cas suivants :

1. $K > 0$.

On a $\lim_{r \rightarrow 0} E_p^{\text{eff}} = +\infty$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} E_p^{\text{eff}} = 0^-$. La fonction E_p^{eff} a un minimum négatif unique en $r_0 = \mu C^2 / K$.

a. $E_0 \geq 0$.

L'équation $E_0 - E_p^{\text{eff}}(r) = 0$ n'a qu'une seule racine, r_{\min} . On a alors $r \geq r_{\min}$: la trajectoire s'étend jusqu'à l'infini.

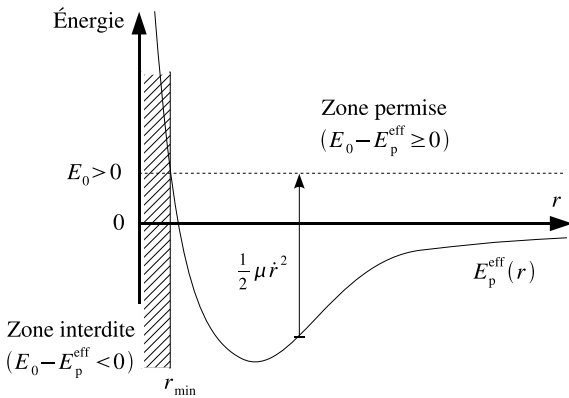
b. $E_0 < 0$.

L'équation $E_0 - E_p^{\text{eff}}(r) = 0$ a deux racines, r_{\min} et r_{\max} ($r_{\max} > r_{\min}$). On a alors $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$: la distance entre M_1 et M_2 est bornée.

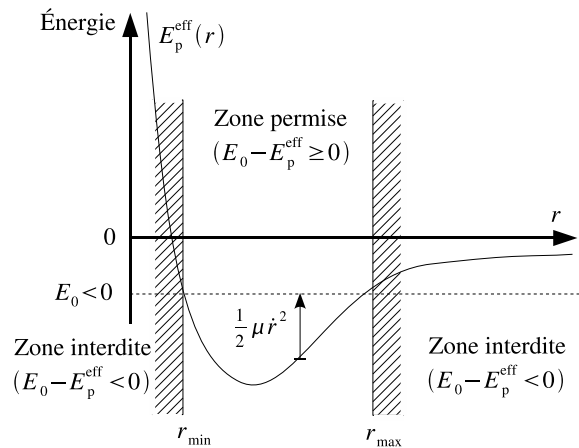
2. $K < 0$.

On a $\lim_{r \rightarrow 0} E_p^{\text{eff}} = +\infty$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} E_p^{\text{eff}} = 0^+$. La fonction E_p^{eff} est strictement décroissante. Comme dans le cas 1.a, $E_0 \geq 0$ et l'équation $E_0 - E_p^{\text{eff}}(r) = 0$ n'a qu'une seule racine, r_{\min} . On a alors $r \geq r_{\min}$: la trajectoire s'étend jusqu'à l'infini.

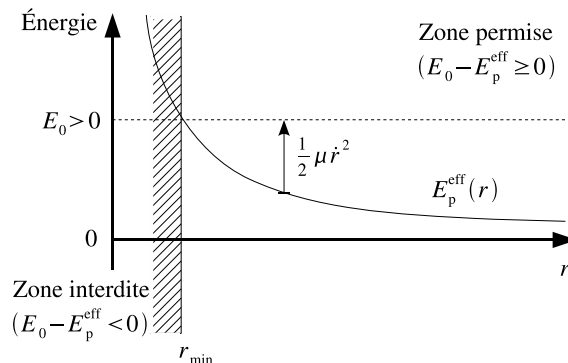
Cas 1.a : $K > 0$ et $E_0 > 0$



Cas 1.b : $K > 0$ et $E_0 < 0$



Cas 2 : $K < 0$



Les points P et A correspondant à $r = r_{\min}$ et $r = r_{\max}$ s'appellent respectivement le péricentre et l'apocentre. Dans le cas particulier d'un corps tournant autour de la Terre, on parle plutôt de périégée et d'apogée; autour du Soleil, de périhélie et d'aphélie; autour d'une autre étoile, enfin, de périastre et d'apoastre.

VII.D. Coniques

VII.D.1. Généralités

Considérons un cercle C et un point S situé hors du plan de C , sur la droite passant par le centre de C perpendiculaire au plan de C . L'ensemble des droites passant par S et s'appuyant sur C forme un cône, \mathcal{K} , de sommet S .

Les coniques sont les courbes correspondant à l'intersection d'un plan \mathcal{P} avec \mathcal{K} :

- Si \mathcal{P} est peu incliné par rapport au plan de C , on obtient une courbe fermée, l'*ellipse*.
Le cercle est un cas particulier d'ellipse obtenu si \mathcal{P} est parallèle à C .
- Inclignons un peu plus \mathcal{P} . À un certain moment, \mathcal{P} devient parallèle à l'une des droites génératrices du cône; on a alors une courbe ouverte, la *parabole*.
- Si nous inclinons encore plus \mathcal{P} , le plan coupe le cône de part et d'autre de son sommet. On obtient une courbe ouverte constituée de deux branches, l'*hyperbole*.
À la limite, si le plan passe par S , on obtient deux droites.

VII.D.2. Foyer, excentricité

On peut également définir les coniques de la manière suivante : considérons une droite Δ (la « *directrice* »), un point F et un nombre $e \geq 0$.

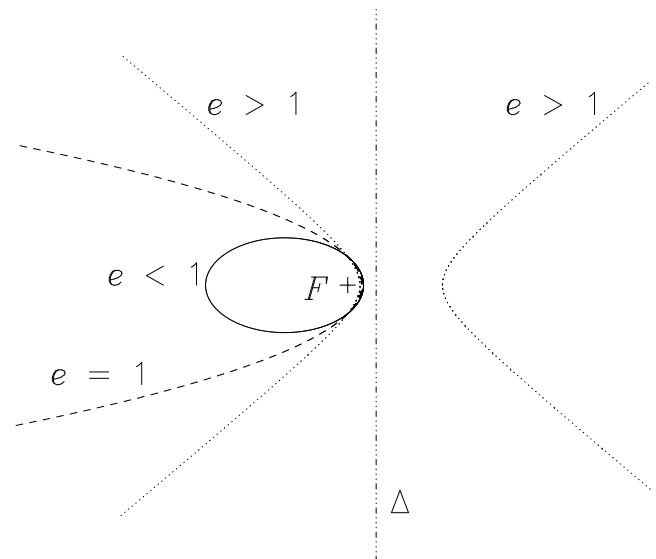
La conique de *foyer* F et d'*excentricité* e est l'ensemble des points M tels que

$$\frac{\|\vec{FM}\|}{\|\vec{HM}\|} = e,$$

où H est la projection orthogonale de M sur Δ .

Si $e < 1$, la conique est une ellipse (en particulier un cercle si $e = 0$); si $e = 1$, c'est une parabole; si $e > 1$, une hyperbole.

Si la conique est une ellipse ou une hyperbole, il existe un deuxième foyer, F' , et une deuxième directrice, Δ' , donnant la même courbe.



VII.D.3. Équation en coordonnées polaires

Notons K la projection orthogonale de F sur Δ , $h = \|\vec{FK}\|$, $\vec{u}_x = \vec{FK}/h$ (donc $\|\vec{u}_x\| = 1$) et \vec{u}_y un vecteur unitaire parallèle à Δ .

Dans le repère orthonormé $(F, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, l'équation en coordonnées polaires de la conique est

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi},$$

où $r := \|\vec{FM}\|$, $\phi := (\vec{u}_x, \vec{FM})$ et $p := e h$.

Dans le cas de l'hyperbole, il s'agit de l'équation de la branche située en deçà de la directrice par rapport à F . L'équation de la branche située au-delà est

$$r = \frac{p}{e \cos \phi - 1}.$$

Dans un autre repère orthonormé $(F, \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'})$, tourné de $-\phi_0$ par rapport à $(F, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (c.-à-d. $(\vec{u}_{x'} \widehat{=} \vec{u}_x)$ = ϕ_0), l'équation de la conique est

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi' - \phi_0)},$$

où $\phi' := (\vec{u}_{x'} \widehat{=} \vec{FM})$. De même, l'équation de la branche de l'hyperbole au-delà de la directrice est

$$r = \frac{p}{e \cos(\phi' - \phi_0) - 1}.$$

VII.D.4. Équation cartésienne

VII.D.4.a. Ellipse et hyperbole

Si $e \neq 1$, la conique a un centre de symétrie O à mi-chemin des foyers. Posons

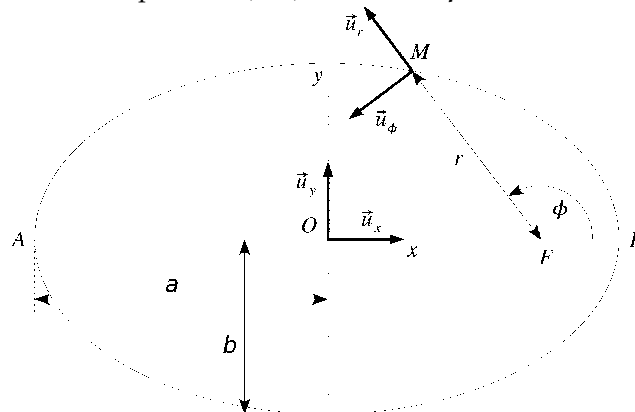
$$a = \frac{p}{|1 - e^2|} \quad \text{et} \quad b = \frac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}}.$$

VII.D.4.a.i. Ellipse

L'équation de l'ellipse dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (attention : l'origine n'est plus F) est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où a est le *demi-grand axe* de l'ellipse et b ($< a$) est le *demi-petit axe*.



Pour tout point M de l'ellipse,

$$\|\vec{FM}\| + \|\vec{F'M}\| = 2 a.$$

L'aire de l'ellipse vaut

$$\mathcal{A} = \pi a b.$$

VII.D.4.a.ii. Hyperbole

L'équation de l'hyperbole dans le repère $(O, \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'})$ est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Pour tout point M de l'hyperbole,

$$\left| \|\vec{FM}\| - \|\vec{F'M}\| \right| = 2 a.$$

L'hyperbole a par ailleurs deux droites asymptotiques, d'équations $y_{\text{asympt}} = \pm(b/a) x$.

VII.D.4.b. Parabole

Soit S le *sommet* de la parabole, c-à-d. le point de la parabole le plus proche de Δ . Posons $\vec{u}_X = \vec{u}_y$ et $\vec{u}_Y = -\vec{u}_x$. L'équation de la parabole dans le repère $(S, \vec{u}_X, \vec{u}_Y)$ est

$$Y = \frac{X^2}{2p}.$$

VII.E. Trajectoire

VII.E.1. Formules de Binet

Exprimons v^2 en fonction de $u = 1/r$. On a $\dot{\phi} = C/r^2 = C u^2$, donc

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = \left(\frac{d[1/u]}{dt} \right)^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{u^2} = \left(-\frac{du/dt}{u^2} \right)^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{u^2} = \left(-\frac{du/d\phi}{u^2} \dot{\phi} \right)^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{u^2},$$

d'où

$$v^2 = C^2 \cdot \left(\left[\frac{du}{d\phi} \right]^2 + u^2 \right).$$

De même,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d^2(\vec{u}_r/u)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{du/dt}{u^2} \vec{u}_r + \frac{1}{u} \dot{\phi} \vec{u}_\phi \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{du}{d\phi} \underbrace{\left[\frac{\dot{\phi}}{u^2} \right]}_C \vec{u}_r + u \underbrace{\left[\frac{\dot{\phi}}{u^2} \right]}_C \vec{u}_\phi \right) \\ &= -\frac{d^2u}{d\phi^2} \frac{\dot{\phi}^2}{u^2} \vec{u}_r - \frac{du}{d\phi} \frac{\dot{\phi}^2}{u^2} \vec{u}_\phi + \frac{du}{d\phi} \frac{\dot{\phi}^2}{u^2} \vec{u}_\phi - \frac{\dot{\phi}^2}{u} \vec{u}_r, \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \cdot \left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u \right) \vec{u}_r.$$

Ces deux formules s'appellent les *formules de Binet*; elles sont valables pour toute force centrale (pas uniquement en $1/r^2$).

VII.E.2. Force en $1/r^2$

Nous supposons désormais que la force est en $1/r^2$.

VII.E.2.a. Équation de la trajectoire. 1^{re} loi de Kepler

Comme $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \mu \vec{a}$, on obtient à partir de la 2^e formule de Binet l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{K}{\mu C^2}.$$

Les solutions sont de la forme

$$u = \frac{K}{\mu C^2} + \frac{1}{h} \cos(\phi - \phi_0),$$

où h et ϕ_0 dépendent des conditions particulières (ϕ_0 est défini à π près; on choisit la valeur telle que $h > 0$).

Posons $p = \mu C^2/|K|$ et $e = p/h$.

Si $K > 0$,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)} \quad (\text{ellipse, parabole ou 1^{re} branche de l'hyperbole}).$$

Si $K < 0$,

$$r = \frac{p}{e \cos(\phi - \phi_0) - 1} \quad (2^{\text{e}} \text{ branche de l'hyperbole}).$$

La trajectoire de M est donc dans tous les cas une conique de foyer G (**1^{re} loi de Kepler** généralisée).

Application au Système solaire

La masse du Soleil est très supérieure à celle de tous les autres corps du Système solaire réunis. On peut donc, en première approximation, confondre le centre d'inertie du système {Soleil (M_1), planète (M_2)} et le centre du Soleil, d'une part, et négliger l'attraction sur M_2 des autres planètes devant celle exercée par le Soleil, d'autre part. On retrouve bien ainsi que « les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers » (énoncé traditionnel de la **1^{re} loi de Kepler**) ^{(*)3}.

VII.E.2.b. Énergie

Exprimons E_0 à l'aide de la 1^{re} formule de Binet. On a

$$E_0 = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{K}{r} = \frac{1}{2} \mu C^2 \cdot \left(\left[\frac{du}{d\phi} \right]^2 + u^2 \right) - K u.$$

En utilisant l'expression de u trouvée précédemment, on obtient

$$E_0 = \frac{K^2}{2 \mu C^2} \cdot (e^2 - 1).$$

Le signe de E_0 dépend de la nature de la conique.

VII.E.2.b.i. Ellipse

$e < 1$, donc $E_0 < 0$. En utilisant le fait que $a = p/(1 - e^2)$, on peut montrer que

$$E_0 = -\frac{K}{2a}.$$

On obtient bien une énergie mécanique négative car K est nécessairement positif dans le cas d'une ellipse. La distance $\|\overrightarrow{GM}\| = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ est donc bornée : le système $\{M_1, M_2\}$ est **lié** (ou dans un « état lié »).

VII.E.2.b.ii. Parabole

$e = 1$, donc $E_0 = 0$. La distance $\|\overrightarrow{GM}\| = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ n'admet pas de borne supérieure : le système $\{M_1, M_2\}$ est **libre** (ou dans un « état libre » ; on parle aussi d'« état de diffusion »).

VII.E.2.b.iii. Hyperbole

$e > 1$, donc $E_0 > 0$. La distance $\|\overrightarrow{GM}\| = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ n'admet pas de borne supérieure : le système $\{M_1, M_2\}$ est **libre**.

Si $K > 0$, le mouvement est attractif. Si $K < 0$, le mouvement est répulsif. Dans tous les cas,

$$E_0 = \frac{|K|}{2a}.$$

3. On peut décrire l'effet des autres planètes et des satellites sur la trajectoire comme une perturbation de l'ellipse.

VII.E.2.c. Propriétés de la trajectoire

VII.E.2.c.i. Ellipse

VII.E.2.c.i.α. Période. 3^e loi de Kepler

Pour calculer la période T de révolution de M autour de G , on peut utiliser la loi des aires. On a

$$\pi a b = \mathcal{A} = \int_{t=0}^T d\mathcal{A} = \int_{t=0}^T \frac{|C|}{2} dt = \frac{|C| T}{2}.$$

Sachant que, pour une ellipse, $|C| = \sqrt{K p/\mu}$, $p = a \cdot (1 - e^2)$ et $b = a \sqrt{1 - e^2}$, on obtient

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{\sqrt{K a \cdot (1 - e^2)/\mu} T}{2},$$

soit, en simplifiant et en mettant au carré,

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K}{4 \pi^2 \mu} \quad (\text{3^e loi de Kepler généralisée}).$$

Dans le cas de la gravitation, $a^3/T^2 = \mathcal{G} \cdot (m_1 + m_2)/(4 \pi^2)$. Si $m_1 \gg m_2$ (p. ex. la masse du Soleil devant celle des planètes), ce rapport vaut

$$\frac{a^3}{T^2} \approx \frac{\mathcal{G} m_1}{4 \pi^2}$$

et est donc à peu près le même pour tous les corps du système solaire tournant autour du Soleil. C'est l'énoncé traditionnel de la *3^e loi de Kepler*.

VII.E.2.c.i.β. Trajectoire circulaire

On a vu ci-dessus que le rapport a^3/T^2 ne dépendait que de K et μ , mais pas des autres propriétés de l'ellipse, notamment son excentricité. On peut donc retrouver sa valeur à l'aide d'un cas simple : le cercle.

Considérons une trajectoire circulaire de rayon (c.-à-d. de demi-grand axe) a . On a

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{K}{a^2} \vec{u}_r = \mu \vec{a} = \mu \cdot (-a \dot{\phi}^2 \vec{u}_r + a \ddot{\phi} \vec{u}_\phi).$$

On en déduit que $\ddot{\phi} = 0$ et que la vitesse

$$v = a \dot{\phi} = \sqrt{\frac{K}{\mu a}}$$

est constante. En multipliant la vitesse par la période, on obtient le périmètre du cercle, soit

$$\sqrt{\frac{K}{\mu a}} T = 2 \pi a,$$

d'où

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K}{4 \pi^2 \mu}.$$

VII.E.2.c.i.γ. Vitesse de satellisation

Considérons un corps de masse m à la surface d'un astre, p. ex. la Terre, de masse $M_T \gg m$ et de rayon R . En négligeant la vitesse due à la rotation de la Terre, la vitesse de satellisation est la vitesse la plus basse qu'il faut lui donner pour qu'il décrive une orbite proche de la surface terrestre, donc quasi-circulaire de rayon $r \approx R$. Cette vitesse vaut

$$v_{\text{sat}} \approx \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{R}} = 7,9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}.$$

VII.E.2.c.ii. Parabole. Vitesse de libération

La vitesse de libération est la vitesse la plus basse qu'il faut donner à un corps à la surface terrestre pour qu'il échappe à l'attraction terrestre, donc pour qu'il ait une orbite parabolique. On a

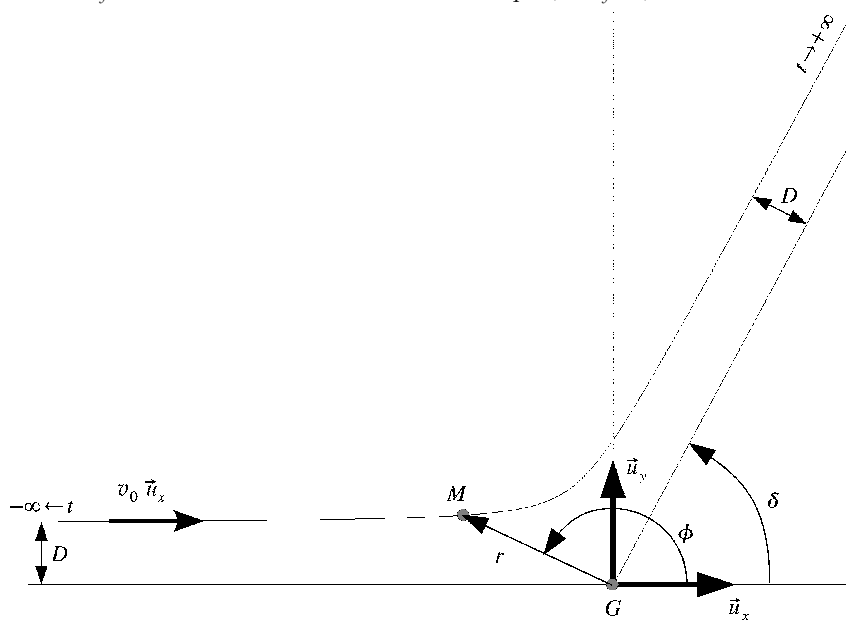
$$E_0 = \frac{1}{2} m v_{\text{lib}}^2 - \frac{\mathcal{G} M_T m}{R} = 0,$$

soit

$$v_{\text{lib}} \approx \sqrt{\frac{2 \mathcal{G} M_T}{R}} = \sqrt{2} v_{\text{sat}} = 11,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}.$$

‡ **VII.E.2.c.iii. Hyperbole. Diffusion de Rutherford entre deux noyaux**

Étudions l'interaction entre deux noyaux atomiques. Leurs charges q_1 et q_2 sont positives, donc $K = -q_1 q_2 / (4 \pi \epsilon_0) < 0$: l'interaction est répulsive. La trajectoire du mobile fictif M (et donc aussi de M_1 et M_2) est dans un plan passant par le centre d'inertie G . En l'absence d'interaction, cette trajectoire serait une droite parcourue à une vitesse \vec{v}_0 constante. Notons M_0 la projection orthogonale de G sur cette droite. On appelle *paramètre d'impact* la distance D entre G et M_0 . Posons $v_0 = \|\vec{v}_0\|$, $\vec{u}_x = \vec{v}_0/v_0$, $\vec{u}_y = \vec{GM}_0/D$ et choisissons \vec{u}_z de telle sorte que $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ soit une base orthonormée directe.



La trajectoire du mobile fictif dans le référentiel barycentrique est une hyperbole d'équation

$$r = \frac{p}{e \cos(\phi - \phi_0) - 1}.$$

Les deux asymptotes de cette hyperbole correspondent aux angles $\phi = \pi$ et $\phi = \delta$. De $\lim_{\phi \rightarrow \pi} r = \lim_{\phi \rightarrow \delta} r = \infty$, on déduit que $\cos(\pi - \phi_0) = \cos(\delta - \phi_0) = 1/e$, soit $\phi_0 = \arccos(-1/e)$ et $\delta = 2 \phi_0 - \pi$.

Quand $\phi \rightarrow \pi$, $r \rightarrow \infty$. Or $\lim_{r \rightarrow \infty} E_p(r) = 0$, donc

$$E_0 = \frac{1}{2} \mu v_0^2.$$

En coordonnées cartésiennes, $\vec{L}_G \cdot \vec{u}_z = \mu \cdot (x \dot{y} - y \dot{x})$. On a $\lim_{\phi \rightarrow \pi} y \dot{x} = (\lim_{\phi \rightarrow \pi} y) \cdot (\lim_{\phi \rightarrow \pi} \dot{x}) = D v_0$. On peut également montrer que $\lim_{\phi \rightarrow \pi} x \dot{y} = 0$ ⁽⁴⁾, donc

$$C = -v_0 D.$$

4. On a $\lim_{\phi \rightarrow \pi} x = -\infty$ et $\lim_{\phi \rightarrow \pi} \dot{y} = 0$, donc $\lim_{\phi \rightarrow \pi} x \dot{y}$ est une forme indéterminée. Or $x \dot{y} = x y' \dot{x}$, où $y' = dy/dx$, et $\lim_{\phi \rightarrow \pi} \dot{x} = v_0$. Il suffit donc de montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x y' = 0$.
La force étant répulsive, $x \mapsto y'(x)$ est une fonction croissante de x au voisinage de $-\infty$, donc

$$y\left(\frac{x}{2}\right) - y(x) = \int_{\xi=x}^{x/2} y'(\xi) d\xi \geq y'(x) \cdot \left(\frac{x}{2} - x\right) = -\frac{1}{2} x y'(x) \geq 0.$$

Quand $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow D$, donc $\forall \epsilon > 0, \exists X < 0, \forall \xi, \xi < X \implies |y(\xi) - D| < \epsilon$. Pour tout x tel que $x/2 < X$,

$$|y(x/2) - y(x)| = |(y[x/2] - D) + (D - y[x])| \leq |y(x/2) - D| + |D - y(x)| < 2 \epsilon,$$

donc $|x y'(x)| \leq 4 \epsilon : x y'$ tend bien vers 0 quand $x \rightarrow -\infty$.



Cherchons les caractéristiques (a et e) de l'hyperbole en fonction de v_0 et D . On a

$$E_0 = -\frac{K}{2a} = \frac{1}{2} \mu v_0^2,$$

soit

$$a = -\frac{K}{\mu v_0^2}.$$

Par ailleurs, la distance minimale d'approche r_{\min} entre les deux noyaux correspond à $\phi = \phi_0$. On a alors $\dot{r}(\phi_0) = 0$, soit

$$E_0 = \frac{1}{2} \mu v_0^2 = E_p^{\text{eff}}(r_{\min}) = -\frac{K}{r_{\min}} + \frac{1}{2} \mu \frac{C^2}{r_{\min}^2}.$$

La distance minimale est donc solution de l'équation

$$\frac{1}{2} \mu v_0^2 r_{\min}^2 + K r_{\min} - \frac{1}{2} \mu v_0^2 D^2 = 0,$$

dont la seule racine positive est

$$r_{\min} = \frac{-K + \sqrt{K^2 + \mu^2 v_0^4 D^2}}{\mu v_0^2}.$$

On a

$$\frac{r_{\min}}{a} = \frac{p/(e-1)}{p/(e^2-1)} = 1+e = 1 + \sqrt{1 + \frac{\mu^2 v_0^4 D^2}{K^2}},$$

soit

$$e = \sqrt{1 + \frac{\mu^2 v_0^4 D^2}{K^2}}.$$



Cherchons à calculer l'angle de déviation (ou «angle de diffusion») δ entre les directions initiale et finale de M en fonction du paramètre d'impact. Comme $\cos \phi_0 = -1/e$,

$$\tan \phi_0 = -\sqrt{e^2 - 1}.$$

On a $\delta = 2 \phi_0 - \pi$, soit

$$\tan \phi_0 = \tan\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\delta/2)},$$

d'où finalement

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{|K|}{\mu v_0^2 D}.$$