Chapitre III

Dynamique du point

L'objet de la dynamique est de déterminer le mouvement d'un corps en fonction des forces qui s'exercent sur lui. La mécanique classique repose sur les trois lois de Newton, énoncées par celui-ci en 1687 dans les *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Ce sont des principes, c·-à-d· des postulats induits de l'expérience, dont on peut déduire divers théorèmes. Les lois de Newton s'appliquent à des points matériels. Nous en donnons dans ce chapitre un énoncé moderne et établirons dans des chapitres ultérieurs les théorèmes applicables à des systèmes de points, notamment des solides.

III.a. Point matériel. Lois de Newton. Principe de relativité

III.a.1. Point matériel

Un ***point matériel*** est un corps ponctuel doté d'une masse constante et indépendante du référentiel. Son évolution est entièrement décrite par la donnée de son vecteur position en fonction du temps. Tout corps est supposé constitué de points matériels [*1].

On peut généralement assimiler le centre d'inertie de solides en interaction à un point matériel si les dimensions de ces corps sont faibles par rapport aux distances entre leurs centres (p· ex· le Soleil et une planète quand on étudie le système {Soleil, planète}), si leur constitution (structure et composition) ne varie pas et si l'on peut négliger leur mouvement de rotation. Les seules forces exercées sur ces solides à considérer sont donc extérieures (cf· § V.c.1).

III.a.2. Première loi de Newton. Référentiels galiléens

Principe de l'inertie

Il existe des référentiels $\mathcal{R}$, dits ***galiléens*** ou ***d'inertie***, dans lesquels le mouvement d'un point matériel M quelconque isolé (c·-à-d· qui n'est soumis à aucune interaction) est rectiligne uniforme [*2] : $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{c}^{\text{te}}$.

Le principe de l'inertie *définit* d'une part les référentiels galiléens et d'autre part *postule* leur existence.

Si $\mathcal{R}$ est galiléen, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un référentiel $\mathcal{R}'$ soit galiléen est que $\mathcal{R}'$ soit en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ (c·-à-d· $\vec{v}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{c}^{\text{te}}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$).

Tout le problème est donc de trouver au moins un référentiel galiléen. Le référentiel de Copernic, dont l'origine est le centre d'inertie du système solaire et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines, est un référentiel quasi galiléen. On pourra également souvent supposer que, en première approximation, le référentiel terrestre (c·-à-d· lié à la Terre) est galiléen, bien que celle-ci ait un mouvement de révolution autour du centre d'inertie du système solaire et de rotation sur elle-même par rapport aux étoiles lointaines.

1. L'idée sous-jacente était autrefois celle d'atome, composant ultime et insécable de la matière. On a depuis trouvé des particules encore plus élémentaires (électrons, quarks, etc·), mais ces particules ne sont pas rigoureusement des points matériels : elles peuvent notamment être créées et détruites, et sont dotées d'un spin, une propriété qui s'apparente à une rotation sur elles-mêmes.
2. Ce principe est en fait dû à Galilée. Dans sa version originale (et moins rigoureuse), il énonçait simplement que le mouvement d'un corps isolé est rectiligne uniforme.

III.A.3. Deuxième loi de Newton. Quantité de mouvement

Principe fondamental de la dynamique

Soient $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et M un point matériel d'accélération $\vec{a}$ par rapport à $\mathcal{R}$. Si M est soumis à des forces $\vec{f_i}$, de ***résultante*** $\boldsymbol{\vec{F} = \sum_i \vec{f_i}}$, son mouvement est déterminé par

$$\boldsymbol{\vec{F} = m\,\vec{a}}.$$

Ce principe porte également le nom de ***relation fondamentale de la dynamique***.

On peut également exprimer la relation fondamentale de la dynamique en fonction de la ***quantité de mouvement*** (ou ***impulsion***), $\boldsymbol{\vec{p} = m\,\vec{v}}$, du point matériel.

La masse d'un point matériel étant constante, on a

$$m\,\vec{a} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t},$$

d'où

$$\boldsymbol{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}.$$

Notions de déterminisme et de chaos

Une conséquence essentielle de la 2e loi de Newton est ce qu'on appelle le ***déterminisme*** : l'état initial d'un système (*3) isolé détermine entièrement son évolution ultérieure. Ceci vaut en particulier pour l'univers dans son ensemble (Laplace, début du 19e siècle).

Néanmoins, bien que parfaitement *déterminée*, l'évolution d'un système devient généralement *imprévisible* au bout d'un certain temps (phénomène de ***chaos***) : les erreurs sur les conditions initiales (positions et vitesses), si minimes soient-elles, provoquent un écart exponentiellement croissant entre l'état prédit et l'état réel (Poincaré, fin du 19e siècle).

D'après la mécanique quantique, la position et la vitesse d'une particule ne peuvent d'ailleurs pas être mesurées conjointement avec une précision infinie (relations d'incertitude de Heisenberg).

III.A.4. Troisième loi de Newton

Principe de l'action et de la réaction

Soient $\vec{F}_{1\to 2}$ la force exercée par un point matériel M_1 sur un point matériel M_2 et $\vec{F}_{2\to 1}$ la force exercée par M_2 sur M_1. L'action $\vec{F}_{1\to 2}$ et la réaction $\vec{F}_{2\to 1}$ sont reliées par

$$\boldsymbol{\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}}.$$

Les forces sont de plus *centrales*, c.-à-d. parallèles à $\overrightarrow{M_1M_2}$ (*4).

Ce principe porte également le nom de ***principe des actions réciproques***.

3. Par « état » d'un système, on entend l'ensemble des positions *et* des vitesses des points matériels le constituant. En effet, la 2e loi de Newton relie l'accélération aux forces, lesquelles dépendent des positions des points matériels et de leurs vitesses. L'évolution du système est donc régie par un ensemble d'équations différentielles du second ordre par rapport au temps, dont les inconnues sont les positions des points. Or la solution de ces équations ne dépend que des positions et des vitesses à l'instant initial.
4. On a donné ici la version « forte » de cette loi. Si « 1 » et « 2 » ne désignent pas des points matériels mais des systèmes de points, on peut seulement dire que $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$; cette version dite « faible » se démontre en appliquant la version forte à tous les couples de points appartenant l'un au système no 1 et l'autre au no 2.

III.A.5. Principe de relativité

III.A.5.*a*. Énoncé du principe

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels galiléens. Dans $\mathcal{R}$, on a $\vec{F} = m\ \vec{a}_{/\mathcal{R}}$. Comme $\vec{a}_{/\mathcal{R}'} = \vec{a}_{/\mathcal{R}}$, on a aussi $\vec{F} = m\ \vec{a}_{/\mathcal{R}'}$: les lois de la *mécanique* sont indépendantes du référentiel galiléen choisi ; aucun n'est privilégié pour l'expression de ces lois.

Le principe de relativité étend à la *physique* toute entière ce théorème démontré pour la seule mécanique :

Principe de relativité
Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens.

‡ III.A.5.*b*. Relativité, lumière et Éther

Au 19e siècle, Maxwell établit les lois de l'électromagnétisme et l'on découvrit que la lumière était une onde électromagnétique. Or la vitesse de cette onde, c, apparaissait dans les équations de Maxwell, mais par rapport à quel référentiel ? On crut que les lois de l'électromagnétisme s'exprimaient dans un référentiel galiléen particulier, fixe par rapport à l'Éther, le milieu dans lequel la lumière était supposée se propager. L'Éther aurait donc constitué un référentiel privilégié, « absolu », en contradiction avec le principe de relativité. Le mouvement de la Terre par rapport à l'Éther ne put cependant être mis en évidence par l'expérience, pourtant suffisamment sensible, de Michelson et Morley.

En 1905, Einstein proposa la théorie de la relativité restreinte [(*5)]. Pour lever la contradiction entre le principe de relativité et les lois de l'électromagnétisme, il rejeta l'idée d'Éther et postula que la vitesse de la lumière était la même dans tous les référentiels galiléens. Ceci était incompatible avec la loi d'addition des vitesses obtenue au § II.E.2 et obligea à abandonner les hypothèses sur lesquelles elle reposait : l'espace et le temps absolus (indépendants de l'observateur).

‡ III.A.5.*c*. Transformation de Lorentz

Considérons un référentiel $\mathcal{R}'$, d'axes $(O'x')$, $(O'y')$ et $(O'z')$ parallèles, respectivement, aux axes (Ox), (Oy) et (Oz) d'un référentiel $\mathcal{R}$, et dont l'origine se déplace à une vitesse $v_\mathrm{e}\ \vec{u}_x$ constante par rapport à $\mathcal{R}$. Choisissons l'origine des temps dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de telle sorte que, à $t = t' = 0$, $O' = O$.

En mécanique classique, les coordonnées (x, y, z, t) d'un événement dans $\mathcal{R}$ sont reliées aux coordonnées (x', y', z', t') dans $\mathcal{R}'$ par la transformation de Galilée :

$$x' = x - v_\mathrm{e}\ t\ ; \qquad y' = y\ ; \qquad z' = z\ ; \qquad t' = t.$$

En relativité restreinte, en revanche, il faut utiliser la transformation de Lorentz :

$$x' = \frac{x - v_\mathrm{e}\ t}{\sqrt{1 - v_\mathrm{e}^2/c^2}}\ ; \qquad y' = y\ ; \qquad z' = z\ ; \qquad t' = \frac{t - v_\mathrm{e}\ x/c^2}{\sqrt{1 - v_\mathrm{e}^2/c^2}}.$$

Si les vitesses des corps sont négligeables devant celle de la lumière, ce que nous supposerons dans ce cours, on retrouve la transformation de Galilée.

‡ III.A.5.*d*. Relativité et lois de Newton

La première loi de Newton reste valide en relativité restreinte.

La deuxième loi également, sous sa forme $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$, à condition de poser

$$\vec{p} = \frac{m\ \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Quant à la troisième loi, elle doit être abandonnée : elle suppose en effet que l'interaction entre M_1 et M_2 se propage instantanément, alors que la transformation de Lorentz impose que la vitesse maximale est c, quel que soit le référentiel. Le principe de l'action et de la réaction n'est applicable que si les vitesses de M_1 et M_2 sont faibles par rapport à c.

Nous supposerons dans ce cours que les interactions se propagent à une vitesse infinie, mais cette hypothèse mène à des incohérences pour la force de Lorentz (voir plus loin). Celle-ci ne peut être rigoureusement étudiée qu'en termes relativistes ; elle n'obéit d'ailleurs pas au principe de l'action et de la réaction.

5. *Restreinte*, car valable uniquement pour des référentiels galiléens, par opposition à la théorie de la relativité *générale* qu'il énonça en 1916.

III.B. Forces

III.B.1. Interactions fondamentales

L'unification des forces de la nature a réduit leur nombre à quatre interactions fondamentales :

- l'interaction gravitationnelle (chute des corps, mouvement des corps célestes) ;
- l'interaction électromagnétique (électricité, magnétisme, lumière, chimie, cohésion des corps, frottements) ;
- l'interaction nucléaire forte (cohésion du noyau atomique) ;
- l'interaction nucléaire faible (certains phénomènes de radioactivité).

Les deux premières sont de portée infinie tandis que les deux dernières n'interviennent qu'à l'échelle du noyau d'un atome et nous intéresseront peu.

Ces quatre interactions sont elles-mêmes en voie d'unification. C'est chose faite pour l'électromagnétisme et la force faible (interaction électro-faible). L'unification des interactions électro-faible et forte a été réalisée en théorie, mais la confirmation expérimentale requiert des énergies difficilement accessibles pour l'instant. Quant à l'unification avec la gravitation, elle n'est pas achevée.

III.B.2. Forces d'action à distance

III.B.2.*a*. Gravitation

III.B.2.*a*.i. Cas général : loi de l'attraction universelle

La force gravitationnelle ou de gravité [(*6)] exercée par un point M_1 de masse m_1 sur un point M_2 de masse m_2 est

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{\mathcal{G}\, m_1\, m_2}{r^2}\, \vec{u}_{1\to 2},$$

où $r = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$, $\vec{u}_{1\to 2} = \overrightarrow{M_1M_2}/r$ (le vecteur $\vec{u}_{1\to 2}$ est donc unitaire et dirigé de 1 vers 2) et $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$ est la constante de gravitation universelle. La force gravitationnelle est une force d'interaction à distance ; elle est toujours attractive.

Cette relation est également applicable à des corps à symétrie sphérique, à condition de prendre pour points M_1 et M_2 le centre de ces corps.

III.B.2.*a*.ii. Cas particulier : poids

La force gravitationnelle exercée par un astre, p· ex· la Terre, de masse M_T et de rayon R, sur un corps de masse m situé près de sa surface porte le nom de ***poids*** ou de ***pesanteur*** [(*7)] et est notée $\vec{P}$. On a

$$\vec{P} = m\,\vec{g} = -m\,g\,\vec{u}_z,$$

où

$$g := \|\vec{g}\| = \mathcal{G}\, M_T/R^2$$

est l'accélération de la pesanteur et $\vec{u}_z = \vec{u}_r$ est dirigé verticalement [(*8)] vers le haut.

‡ III.B.2.*a*.iii. Principe d'équivalence

La masse, dite *gravitationnelle*, intervenant dans la force de gravitation (m_{gr}) est identique à la masse, dite *inerte*, apparaissant dans le principe fondamental de la dynamique (m_{in}). Ceci explique que, en l'absence d'autres forces, de frottements notamment, des corps quelconques soumis à un champ de pesanteur $\vec{g}$ et lâchés simultanément du même point décrivent le même mouvement de chute libre. En effet, $m_{\mathrm{gr}}\,\vec{g} = m_{\mathrm{in}}\,\vec{a}$, d'où, puisque $m_{\mathrm{gr}} = m_{\mathrm{in}}$, $\vec{a} = \vec{g}$.

Dans la loi de Coulomb, la charge électrique semble jouer un rôle analogue à la masse gravitationnelle ; elle est cependant indépendante de la masse inerte. Cette singularité de la gravitation a conduit Einstein à

6. Cette force est parfois aussi appelée « force de Newton », du nom de son découvreur.
7. À distinguer de l'***impesanteur*** (ou ***apesanteur***), qui est le fait de n'être soumis *qu*'à des forces de pesanteur (p· ex· le mouvement d'une fusée hors de l'atmosphère terrestre une fois les moteurs éteints ; le mouvement est alors une *chute libre*).
8. Nous verrons au chapitre VIII que le poids comprend, outre le terme de gravité, un terme dû à la force centrifuge résultant de la rotation de la Terre. Par ailleurs, la Terre n'est pas parfaitement sphérique, mais ressemble plutôt à un ellipsoïde légèrement applati aux pôles. Pour ces deux raisons, g dépend de la position sur la Terre ($g = 9{,}81\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ à Paris) et la verticale ne passe pas exactement par le centre de celle-ci.

énoncer le principe d'équivalence, pierre angulaire de la théorie de la relativité générale qu'il a proposée en 1916 :

> **Principe d'équivalence**
> L'effet d'un champ gravitationnel peut être localement annulé en choisissant un référentiel en chute libre. Dans ce référentiel, le mouvement d'un corps est décrit par la relativité restreinte.

Noter que ce référentiel est localement inertiel : un corps qui n'est soumis à aucune force (autre que la gravitation, déja prise en compte dans le choix du référentiel) y a un mouvement rectiligne uniforme.

III.B.2.*b*. Force électromagnétique

III.B.2.*b*.i. Cas général : force de Lorentz

La ***force***, dite ***de Lorentz***, à laquelle est soumise une particule de charge électrique q se déplaçant dans un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ à une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel galiléen vaut

$$\boldsymbol{\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}.$$

La force magnétique, $q\,\vec{v} \times \vec{B}$, est parfois appelée force de Laplace, mais on désigne plutôt ainsi la force exercée par le champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant.

III.B.2.*b*.ii. Cas particulier : force électrostatique

En un point M_2 tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = r\,\vec{u}_r$, le champ électrique dû à une charge immobile q_1 située en M_1 vaut

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r,$$

où ϵ_0 est la constante de permittivité du vide et $1/(4\,\pi\,\epsilon_0) = 9 \times 10^9$ m·F^{-1}.

La ***force électrostatique***, dite également ***force de Coulomb***, exercée par un corps ponctuel immobile de charge q_1 sur un corps ponctuel immobile [*9] de charge q_2 vaut donc

$$\boldsymbol{\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\epsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_{1\to 2}}.$$

La force de Coulomb est attractive si les charges sont de signes opposés et répulsive sinon. Bien que beaucoup plus intense que la force de gravitation, elle est généralement négligeable à grande distance, car les charges positives et négatives se combinent pour former des corps globalement neutres (c·-à-d· de charge nulle).

III.B.3. Forces de contact

En revanche, à l'échelle des distances entre atomes (p· ex· à l'interface entre deux corps ou à l'intérieur d'un corps), la matière n'est pas localement neutre : c'est l'origine des forces de contact. En raison du grand nombre de particules en interaction, on ne peut calculer ces forces de manière exacte et l'on doit se contenter d'expressions phénoménologiques.

III.B.3.*a*. Réaction, frottements solides

On considère la force de réaction $\vec{R}$ exercée par un corps solide 1 sur un corps solide 2. Cette force est due à la répulsion entre les électrons des couches externes des atomes des deux corps [*10].

On distingue deux composantes :

- une *réaction normale* $\vec{R}_\perp$, perpendiculaire à l'interface entre 1 et 2 et dirigée [*11] de 1 vers 2 ;
- une *réaction tangentielle* $\vec{R}_{/\!/}$ (= frottement solide), parallèle à l'interface entre 1 et 2.

9. Cette expression est encore utilisable si les vitesses sont faibles et pour des corps de symétrie sphérique, à condition de prendre pour points M_1 et M_2 le centre de ces corps.
10. C'est cette force qui empêche de passer à travers le sol et qui est à l'origine de la sensation de poids. D'ailleurs, lors d'une chute libre, donc lorsqu'on n'est soumis qu'à la pesanteur, on ne la ressent pas.
11. Sauf si 1 et 2 sont « collés » : dans ce cas, si on essaie de les séparer, la réaction va s'y opposer.

Si les corps sont parfaitement lisses, il n'y a pas de frottement ; la réaction est alors purement normale. S'il n'y a plus de contact, la réaction s'annule.

On doit distinguer deux cas selon que les deux corps sont en mouvement l'un par rapport à l'autre (cas cinétique ou dynamique) ou non (cas statique).

III.B.3.*a*.i. Cas cinétique

Le frottement est opposé à la vitesse de 2 par rapport à 1 et on a $\|\vec{R}_{/\!/}\| = f_{\mathrm{c}}\ \|\vec{R}_{\perp}\|$, où f_{c} est une constante sans dimension dépendant des corps et de leur interface.

III.B.3.*a*.ii. Cas statique

Le frottement est opposé au mouvement latent (c.-à-d. au mouvement qui se produirait si $\vec{R}_{/\!/}$ était nulle) de 2 par rapport à 1 et on a $\|\vec{R}_{/\!/}\| \leqslant f_{\mathrm{s}}\ \|\vec{R}_{\perp}\|$, où $f_{\mathrm{s}} \geqslant f_{\mathrm{c}}$ est une constante sans dimension dépendant des corps et de leur interface.

III.B.3.*b*. Tension exercée par un ressort rectiligne (loi de Hooke)

La force exercée par un ressort AB sur un objet M accroché à son extrémité B vaut

$$\vec{T} = -k \cdot (\ell - \ell_0)\ \vec{u}_\ell,$$

où k est la constante de raideur du ressort, ℓ_0 est la longueur ***à vide*** (c.-à-d. sans rien d'accroché), ℓ est la longueur du ressort et $\vec{u}_\ell$ est un vecteur unitaire dirigé de A vers B.

Cette loi n'est valable que dans le domaine d'élasticité du ressort.

III.B.3.*c*. Tension exercée par un fil

On considère un fil inextensible et souple. On peut assimiler le fil à une courbe paramétrée par son abscisse curviligne. La tension $\vec{T}(s)$ en un point d'abscisse s est la force exercée par la portion de fil au-delà de s sur la portion située en deça. Elle est tangente au fil, mais sa norme est inconnue a priori.

Si le fil est de masse nulle et qu'aucune force tangentielle n'est exercée sur lui, la norme de la tension est constante tout le long du fil.

III.B.3.*d*. Force de pression

Soit dS un élément de surface d'un corps soumis à la pression P exercée par un fluide. Notons $\vec{u}$ un vecteur unitaire normal à dS et dirigé du fluide vers le corps. Le fluide exerce la force

$$\mathrm{d}\vec{F} = P\ \mathrm{d}S\ \vec{u}$$

sur dS.

III.B.3.*e*. Poussée d'Archimède

Considérons un fluide homogène statique soumis à un champ de pesanteur $-g\ \vec{u}_z$ uniforme. La poussée d'Archimède exercée par ce fluide sur un corps immergé, totalement ou partiellement, est la résultante des forces de pression. Elle est dirigée vers le haut et son intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé, c.-à-d.

$$\vec{F} = \rho_{\mathrm{flu}}\ \mathcal{V}_{\mathrm{imm}}\ g\ \vec{u}_z,$$

où ρ_{flu} est la masse volumique du fluide et $\mathcal{V}_{\mathrm{imm}}$ est le volume du corps sous la surface du fluide.

III.B.3.*f*. Frottements fluides

Considérons un solide se déplaçant dans un fluide à la vitesse $\vec{v}_{\mathrm{sol/flu}}$ par rapport à ce dernier. La force de frottement exercée par le fluide sur le solide est opposée à $\vec{v}_{\mathrm{sol/flu}}$ et d'autant plus intense que $\vec{v}_{\mathrm{sol/flu}}$ est grande et que le fluide est visqueux. À faible vitesse, la force est généralement proportionnelle à $v_{\mathrm{sol/flu}}$; à grande vitesse, à $v_{\mathrm{sol/flu}}^2$.

III.c. Théorèmes généraux pour un point matériel

On se place dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

III.c.1. Théorème du moment cinétique

Par définition, le ***moment cinétique*** par rapport à un point A du point matériel M est

$$\boldsymbol{\vec{L}_A := \overrightarrow{AM} \times \vec{p} = m\, \overrightarrow{AM} \times \vec{v}.}$$

Dérivons cette quantité par rapport au temps. On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t} \times m\,\vec{v} + \overrightarrow{AM} \times m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AO}}{\mathrm{d}t}}_{-\vec{v}_A} \times m\,\vec{v} + \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{v}} \times m\,\vec{v}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AM} \times \underbrace{m\,\vec{a}}_{\vec{F}} \\ &= \vec{p} \times \vec{v}_A + \overrightarrow{AM} \times \vec{F}.\end{aligned}$$

La quantité

$$\boldsymbol{\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) := \overrightarrow{AM} \times \vec{F}}$$

est le ***moment par rapport à A de la force*** appliquée en M.

Théorème du moment cinétique
Si A est fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$,

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}).}$$

III.c.2. Théorème de l'énergie cinétique

Par définition, l'***énergie cinétique*** du point matériel M est

$$\boldsymbol{E_\mathrm{c} := \frac{p^2}{2\,m} = \frac{1}{2}\,m\,v^2.}$$

En différenciant, on obtient la variation infinitésimale de l'énergie cinétique

$$\mathrm{d}E_\mathrm{c} = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\,m\,\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = m\,\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} = m\,\vec{v}\cdot\vec{a}\,\mathrm{d}t = m\,\vec{a}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}.$$

La quantité

$$\boldsymbol{\delta W(\vec{F}) := \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$

est le ***travail élémentaire*** exercé par la force $\vec{F}$ sur M pendant un déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\vec{r}$ de M.

Théorème de l'énergie cinétique

$$\boldsymbol{\mathrm{d}E_\mathrm{c} = \delta W(\vec{F}).}$$

Notons A et B les positions du point M à deux instants et $\widehat{AB}$ le chemin suivi par M pour aller de A à B. En intégrant du point A au point B le long du chemin $\widehat{AB}$, on obtient

$$E_\mathrm{c}(B) - E_\mathrm{c}(A) = \int_{\widehat{AB}} \mathrm{d}E_\mathrm{c} = \int_{\widehat{AB}} \delta W(\vec{F}),$$

soit l'expression finie du théorème de l'énergie cinétique :

$$\boldsymbol{\Delta E_\mathrm{c} = W_{\widehat{AB}}(\vec{F})},$$

où $\Delta E_\mathrm{c} = E_\mathrm{c}(B) - E_\mathrm{c}(A)$ et $W_{\widehat{AB}}(\vec{F}) = \int_{\widehat{AB}} \delta W(\vec{F})$ est le travail (fini) intégré sur le chemin $\widehat{AB}$.

Précisons la signification de l'intégrale de chemin $\int_{\widehat{AB}} \delta W(\vec{F})$. Si le chemin est paramétré par une variable u (p· ex· l'abscisse curviligne s ou le temps t), c·-à-d· si on connaît $\vec{r}(u)$ pour les points du chemin et que les valeurs u_A et u_B correspondent aux points A et B, alors

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}} \delta W(\vec{F}) = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_{u=u_A}^{u_B} \vec{F}(\vec{r}[u])\cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{u=u_A}^{u_B} \left(F_x[\vec{r}(u)]\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} + F_y[\vec{r}(u)]\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + F_z[\vec{r}(u)]\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

III.D. Énergie

III.D.1. Gradient

Une expression du genre $F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z$ (p· ex· le travail), où F_x, F_y et F_z sont des fonctions, s'appelle une ***forme différentielle***.

S'il existe (mais ça n'est pas toujours le cas) une fonction Ψ telle que $\mathrm{d}\Psi = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z$, la forme différentielle est une ***différentielle exacte*** (ou ***totale***). Puisque $\mathrm{d}\Psi = (\partial\Psi/\partial x)\,\mathrm{d}x + (\partial\Psi/\partial y)\,\mathrm{d}y + (\partial\Psi/\partial z)\,\mathrm{d}z$, on doit alors avoir $\partial\Psi/\partial x = F_x$, $\partial\Psi/\partial y = F_y$ et $\partial\Psi/\partial z = F_z$.

On appelle ***gradient*** d'une fonction $\Psi(\vec{r})$ scalaire (c·-à-d· à valeurs dans $\mathbb{R}$) le vecteur, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi$ (ou $\vec{\nabla}\Psi$), défini par

$$\boldsymbol{\mathrm{d}\Psi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi\cdot \mathrm{d}\vec{r}}.$$

En coordonnées cartésiennes, l'expression du gradient est

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\vec{u}_z}$$

et on a bien

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\Psi.$$

L'ensemble des points tels que $\Psi(\vec{r}) = \Psi_0$, où Ψ_0 est une constante, définit une surface. Si $\mathrm{d}\vec{r}$ est un déplacement élémentaire tangent à cette surface, $\mathrm{d}\Psi = 0$ puisque $\Psi = \Psi_0 = \mathrm{c^{te}}$. On constate donc que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi$ est perpendiculaire aux surfaces d'égale valeur de Ψ et est dirigé vers les valeurs croissantes de Ψ.

En coordonnées cylindriques,

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\,\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\,\vec{u}_\phi + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\vec{u}_z}.$$

III.D.2. Énergie potentielle. Forces conservatives et dissipatives

On dit qu'une force $\vec{F}$ ***dérive d'une énergie potentielle***, ou que $\vec{F}$ est [à circulation] ***conservative***, *si* il existe une fonction $E_\mathrm{p}(\vec{r})$, appelée ***énergie potentielle***(*12), telle que

$$\boldsymbol{\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_\mathrm{p}}.$$

On constate que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_\mathrm{p} + \mathrm{c^{te}}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_\mathrm{p}$: E_p est donc définie à une constante additive près qu'on doit fixer arbitrairement.

12. Noter que l'énergie potentielle ne dépend que de la position, pas du mouvement. C'est également une condition nécessaire pour la force qui en dérive ; les forces de frottement, qui sont opposées à la direction du mouvement, ne peuvent donc pas être conservatives.

Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ appliquée à un corps M en $\vec{r}$ étant $\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, *si* $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_\mathrm{p}$, alors δW est une *différentielle totale* et on a

$$\delta W = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_\mathrm{p} \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

soit

$$\boldsymbol{\delta W = -\mathrm{d}E_\mathrm{p}}.$$

Alors, $\boldsymbol{W_{\widehat{AB}}(\vec{F}) = \int_{\widehat{AB}} \delta W(\vec{F}) = E_\mathrm{p}(A) - E_\mathrm{p}(B)}$, c.-à-d. que le travail ne dépend pas du chemin suivi entre A et B, mais seulement des points de départ et d'arrivée.

III.D.3. Énergie mécanique

Reprenons le théorème de l'énergie cinétique et distinguons les forces conservatives $\vec{F}^\mathrm{c}$ des forces non conservatives $\vec{F}^\mathrm{n\,c}$. On a

$$\mathrm{d}E_\mathrm{c} = \delta W(\vec{F}^\mathrm{c}) + \delta W(\vec{F}^\mathrm{n\,c}) = -\mathrm{d}E_\mathrm{p} + \delta W(\vec{F}^\mathrm{n\,c}).$$

En notant $\boldsymbol{E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}}$ l'***énergie mécanique***, on obtient le théorème suivant :

Théorème de l'énergie mécanique

$$\boldsymbol{\mathrm{d}E_\mathrm{m} = \delta W(\vec{F}^\mathrm{n\,c})}.$$

En intégrant, on a

$$\boldsymbol{\Delta E_\mathrm{m} = E_\mathrm{m}(B) - E_\mathrm{m}(A) = W_{\widehat{AB}}(\vec{F}^\mathrm{n\,c})}.$$

Si toutes les forces sont conservatives, l'énergie mécanique se conserve : $\boldsymbol{\Delta E_\mathrm{m} = 0}$.

Une force non conservative provoquant une perte d'énergie mécanique est aussi qualifiée de ***dissipative***.

III.D.4. Quelques travaux et énergies potentielles…

III.D.4.*a*. Gravitation

III.D.4.*a*.i. Cas général

$$\delta W = -\frac{\mathcal{G}\, m_1\, m_2}{r^2}\, \vec{u}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Or, $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}(r\, \vec{u}_r) = \mathrm{d}r\, \vec{u}_r + r\, \mathrm{d}\vec{u}_r$ et $\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}\vec{u}_r = 0$ (car $\|\vec{u}_r\| = \mathrm{c^{te}}$), donc

$$\delta W = -\frac{\mathcal{G}\, m_1\, m_2}{r^2}\, \mathrm{d}r = -\mathrm{d}\left(-\frac{\mathcal{G}\, m_1\, m_2}{r} + \mathrm{c^{te}}\right).$$

On peut donc écrire

$$\boldsymbol{E_\mathrm{p} = -\frac{\mathcal{G}\, m_1\, m_2}{r}}, \text{ avec la convention } \lim_{r\to\infty} E_\mathrm{p} = 0.$$

III.D.4.*a*.ii. Énergie potentielle de pesanteur

Plaçons-nous au voisinage de la surface terrestre (altitude $z = r - R$, $|z| \ll R$). On a

$$\delta W = -m\, g\, \vec{u}_z \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -m\, g\, \vec{u}_z \cdot \mathrm{d}(x\, \vec{u}_x + y\, \vec{u}_y + z\, \vec{u}_z) = -m\, g\, \mathrm{d}z = -\mathrm{d}(m\, g\, z + \mathrm{c^{te}}),$$

d'où

$$\boldsymbol{E_\mathrm{p} = m\, g\, z}, \text{ avec la convention } (E_\mathrm{p})_{z=0} = 0.$$

III.D.4.*b*. Force électromagnétique

III.D.4.*b*.i. Force magnétique

$(\vec{v} \times \vec{B}) \perp \vec{v}$, donc $q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$: la force magnétique ne travaille pas.

III.D.4.*b*.ii. Potentiel électrique

Si le champ électromagnétique est stationnaire ($\partial\vec{E}/\partial t = \vec{0}$ et $\partial\vec{B}/\partial t = \vec{0}$),

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V,$$

où $V(\vec{r})$ est le potentiel électrique en $\vec{r}$. On a

$$V(\vec{r}) = -\int^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \mathrm{c}^{\mathrm{te}}.$$

Le travail exercé par la force électromagnétique est

$$\delta W = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -q\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -q\, \mathrm{d}(V + \mathrm{c}^{\mathrm{te}}).$$

L'énergie potentielle électrique d'une charge ponctuelle q vaut donc

$$\boldsymbol{E_{\mathrm{p}} = q\ V}, \text{ avec la convention } E_{\mathrm{p}}(\vec{r}) = 0 \text{ si } V(\vec{r}) = 0.$$

III.D.4.*b*.iii. Force de Coulomb

Par une démonstration semblable à celle utilisée pour l'énergie potentielle de gravitation, on obtient que

$$\boldsymbol{E_{\mathrm{p}} = \frac{q_1\, q_2}{4\, \pi\, \epsilon_0\, r}}, \text{ avec la convention } \lim_{r\to\infty} E_{\mathrm{p}} = 0.$$

III.D.4.*c*. Réaction

Si le support ne bouge pas, le travail de la réaction normale est nul, car le déplacement est perpendiculaire à celle-ci tant qu'il y a contact.

La réaction tangentielle est parallèle et de sens opposé au déplacement : son travail est donc négatif, d'où une perte (une ***dissipation***) d'énergie mécanique. Elle ne dérive pas d'une énergie potentielle, car elle ne dépend pas que de la position, mais aussi de la direction du mouvement.

III.D.4.*d*. Ressort

$$\delta W = -k \cdot (\ell - \ell_0)\ \vec{u}_\ell \cdot \mathrm{d}(\ell\ \vec{u}_\ell) = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\, k \cdot [\ell - \ell_0]^2 + \mathrm{c}^{\mathrm{te}}\right),$$

d'où

$$\boldsymbol{E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\, k \cdot (\ell - \ell_0)^2}, \text{ avec la convention } (E_{\mathrm{p}})_{\ell=\ell_0} = 0.$$

III.D.4.*e*. Fil inextensible rectiligne

Si une extrémité est fixe, l'autre a un mouvement circulaire ; en ce cas, la tension est perpendiculaire au déplacement et le travail est nul.