

Chapitre VI

COLLISIONS

VI.A. Introduction

Nous étudierons au chapitre VII le mouvement de deux points matériels tout au long de leur interaction. Dans le cas de deux corps M_1 et M_2 quelconques (p. ex. deux solides ou deux particules dont l'énergie interne peut changer), ce qui se passe *pendant* l'interaction est généralement très complexe. Nous nous contenterons d'étudier leur mouvement *avant* et *après* l'interaction. Pendant les phases « avant » et « après », l'interaction entre M_1 et M_2 est négligeable ^(*). Notons \vec{v}_1 et \vec{v}_2 (resp. \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2) les vitesses des centres d'inertie de M_1 et M_2 pendant la phase « avant » (resp. « après »). Plus généralement, toutes les quantités relatives à la phase « après » porteront un prime.

Nous considérerons deux types de phénomènes :

Collision. M_1 et M_2 sont initialement loin l'un de l'autre. Après une brève interaction, ils s'éloignent à nouveau ($\vec{v}'_1 \neq \vec{v}'_2$) ou restent attachés ($\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2$). On parle aussi de *choc*.

Explosion. M_1 et M_2 sont initialement attachés ($\vec{v}_1 = \vec{v}_2$). Après l'explosion, ils s'éloignent l'un de l'autre. On parle aussi de *désintégration*.

VI.B. Lois de conservation

Considérons un système isolé (pas de forces extérieures) ^(*) et plaçons-nous dans un référentiel galiléen, \mathcal{R} . Le système étant isolé, il obéit aux trois lois de conservation suivantes :

- conservation de la quantité de mouvement ;
- conservation du moment cinétique ;
- conservation de l'énergie *interne* du système.

Notons m_1 et m_2 les masses des corps M_1 et M_2 , supposées inchangées lors de la collision. Nous ferons l'hypothèse que les corps sont ponctuels ou que la collision ne modifie pas le mouvement de rotation des corps sur eux-mêmes. Nous ne nous intéresserons donc qu'au mouvement des centres d'inertie de M_1 et M_2 et n'utiliserons pas la conservation du moment cinétique (cette loi serait en revanche utile pour étudier le mouvement de rotation des corps ; l'énergie cinétique de rotation devrait par ailleurs être prise en compte dans l'énergie interne de chacun des corps).

D'après la loi de conservation de la quantité de mouvement, $\vec{p} = \vec{p}'$, soit

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2.$$

Notons G le centre d'inertie du système $\{M_1, M_2\}$. On a $\vec{p} = (m_1 + m_2) \vec{v}_G$, donc $\vec{v}'_G = \vec{v}_G$.

D'après la loi de conservation de l'énergie interne, $U = U'$. L'énergie interne de ce système vaut

$$U = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + U_1 + U_2 + E_{p,1 \leftrightarrow 2} - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_G^2,$$

-
1. ... ou d'intensité constante si M_1 et M_2 sont attachés.
 2. Les résultats donnés ici sont également valables dans les deux cas suivants :
 - si le système est pseudo-isolé, c.-à-d. si les forces extérieures se compensent ;
 - si la durée de la collision est très brève, même en présence de forces extérieures, à condition d'appliquer les lois de conservation entre *juste avant* et *juste après* la phase d'interaction.

où U_1 et U_2 sont les énergies internes des corps M_1 et M_2 , et $E_{p,1\leftrightarrow 2}$ est l'énergie potentielle d'interaction^{(*)3} entre M_1 et M_2 .

De $U = U'$ et $\vec{v}_G = \vec{v}'_G$, on déduit que

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + U_1 + U_2 + E_{p,1\leftrightarrow 2} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + U_1' + U_2' + E'_{p,1\leftrightarrow 2}.$$

L'énergie potentielle d'interaction $E_{p,1\leftrightarrow 2}$ entre M_1 et M_2 ne dépend que de la distance r entre les corps. Elle tend rapidement vers une constante (généralement nulle par convention) quand r tend vers ∞ , donc

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + U_1 + U_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + U_1' + U_2',$$

si les corps sont loin l'un de l'autre avant et après l'interaction (c.-à-d. $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ et $\vec{v}'_1 \neq \vec{v}'_2$).

Si les corps restent liés après l'interaction (c.-à-d. $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 := \vec{v}'_{1,2}$), on a

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + U_1 + U_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{1,2}'^2 + U_1' + U_2' + E'_{p,1\leftrightarrow 2}.$$

Si, au lieu d'une collision, on a une explosion (c.-à-d. $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 := \vec{v}_{1,2}$), alors

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{1,2}^2 + U_1 + U_2 + E_{p,1\leftrightarrow 2} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + U_1' + U_2'.$$

La quantité $E'_{p,1\leftrightarrow 2}$ ou $E_{p,1\leftrightarrow 2}$ porte dans ces deux derniers cas le nom d'énergie de liaison.

VI.c. Chocs élastiques

VI.c.1. Conservation de l'énergie cinétique

Si l'état de chacun des corps M_1 et M_2 ne change pas (masses conservées, pas de déformation ni d'échauffement), le choc est dit **élastique** : l'énergie cinétique^{(*)4} est alors conservée. La conservation de l'énergie cinétique, exacte par exemple dans le cas de deux particules ne subissant pas de transition énergétique, est généralement une bonne approximation dans le cas de deux solides élastiques.

La loi de conservation de la quantité de mouvement,

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2,$$

donne trois équations scalaires (une selon chaque axe : $m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$, etc.) et la loi de conservation de l'énergie (cinétique, ici),

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2,$$

une équation, soit un total de quatre équations.

Pour déterminer \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 (trois composantes chacune), il faudrait six équations. Seule l'étude du système *pendant* l'interaction pourrait fournir les deux équations manquantes. À défaut, il faut donner deux paramètres supplémentaires pour résoudre le problème. Nous allons montrer dans ce qui suit que, si l'on connaît la direction de \vec{v}'_1 (soit deux angles), on peut trouver sa norme puis \vec{v}'_2 . Pour cette étude, il est plus commode de se placer dans le référentiel barycentrique du système.

VI.c.2. Étude dans le référentiel barycentrique du système

La vitesse de G dans le référentiel galiléen \mathcal{R} est

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

\vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_G sont donc dans un plan, \mathcal{P} .

3. L'énergie potentielle d'interaction et l'énergie interne ne dépendent pas du référentiel.

4. Pour être précis, il s'agit de la somme des énergies cinétiques macroscopiques de translation et de rotation.

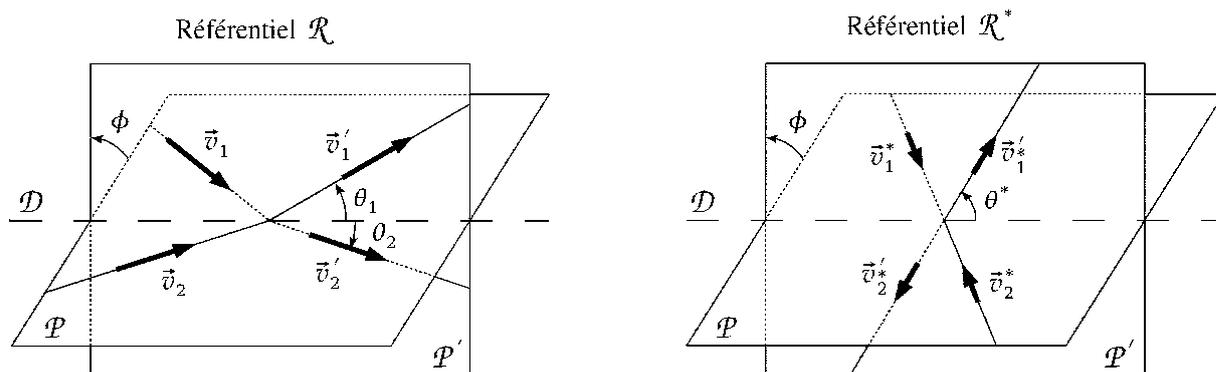
De même,

$$\vec{v}'_G = \frac{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}{m_1 + m_2}.$$

\vec{v}'_1 , \vec{v}'_2 et \vec{v}'_G sont donc aussi dans un plan, \mathcal{P}' , en général différent de \mathcal{P} .

Or $\vec{v}_G = \vec{v}'_G$: les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' ont donc en commun la droite \mathcal{D} passant par le point de rencontre entre M_1 et M_2 et dirigée selon \vec{v}_G .

Le référentiel barycentrique du système, \mathcal{R}^* , est le référentiel en translation rectiligne à la vitesse \vec{v}_G par rapport à \mathcal{R} . Il est donc ici galiléen. Indiquons par un astérisque les quantités dans le référentiel \mathcal{R}^* . On a $\vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_G$; de même pour \vec{v}_2 , \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 .



Dans le référentiel barycentrique, la conservation de la quantité de mouvement donne

$$m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = \vec{0} = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (1)$$

et la conservation de l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \quad (2)$$

En exprimant \vec{v}_2^* (resp. \vec{v}'_2) en fonction de \vec{v}_1^* (resp. \vec{v}'_1) à partir de l'équation (1) et en remplaçant dans l'équation (2), on obtient

$$v_1^* = v_1^* \quad \text{et} \quad v_2^* = v_2^*.$$

Notons $\vec{w} := \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ la vitesse de M_2 par rapport à M_1 . On a $\vec{w}^* := \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* = \vec{w}$. D'après l'équation (1),

$$\vec{w} = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* = -\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \vec{v}_1^* = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \vec{v}_2^* = -\frac{m_1}{\mu} \vec{v}_1^* = \frac{m_2}{\mu} \vec{v}_2^*,$$

où $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ est la masse réduite. On obtient de même

$$\vec{w}' = -\frac{m_1}{\mu} \vec{v}'_1 = \frac{m_2}{\mu} \vec{v}'_2.$$

Comme $v_1^* = v_1^*$, on a $w' = w$.



Supposons connu le vecteur unitaire \vec{u}'_1 dirigé selon \vec{v}'_1 , c-à-d. la direction de \vec{v}'_1 . Ceci revient à donner deux angles : l'angle ϕ (« longitude ») entre les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' ; l'angle θ^* entre \vec{v}_G et \vec{v}'_1 .

On a

$$\vec{v}'_1 := v'_1 \vec{u}'_1 = \frac{\mu w'}{m_1} \vec{u}'_1 \quad \text{et} \quad \vec{v}'_2 = -\frac{\mu w'}{m_2} \vec{u}'_1.$$

VI.c.3. Étude dans le référentiel \mathcal{R}

Dans le référentiel \mathcal{R} , on a

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}_G \quad \text{et} \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}'_2 + \vec{v}_G.$$

On peut en déduire les angles $\theta_1 = (\widehat{\vec{v}_G, \vec{v}'_1})$ et $\theta_2 = (\widehat{\vec{v}_G, \vec{v}'_2})$. Notons \vec{u}_x le vecteur unitaire dirigé selon \vec{v}_G et \vec{u}_y un vecteur unitaire du plan \mathcal{P}' perpendiculaire à \vec{u}_x . On a

$$\vec{u}'_1 = \cos \theta^* \vec{u}_x + \sin \theta^* \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{v}'_1 = v'_1 \cdot (\cos \theta_1 \vec{u}_x + \sin \theta_1 \vec{u}_y).$$

On obtient donc

$$v'_1 \cos \theta_1 = \frac{\mu w'}{m_1} \cos \theta^* + v_G \quad \text{et} \quad v'_1 \sin \theta_1 = \frac{\mu w'}{m_1} \sin \theta^*.$$

On en déduit que

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + m_1 v_G / (\mu w')}.$$

De même, de

$$v'_2 \cos \theta_2 = -\frac{\mu w'}{m_2} \cos \theta^* + v_G \quad \text{et} \quad v'_2 \sin \theta_2 = -\frac{\mu w'}{m_2} \sin \theta^*,$$

on déduit que

$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* - m_2 v_G / (\mu w')}.$$

VI.c.4. Cas particuliers

VI.c.4.a. Cible M_2 immobile avant la collision

On a alors $v_2 = 0$, $w' = w = \|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\| = v_1$ et $v_G = m_1 v_1 / (m_1 + m_2)$.

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + m_1 / m_2}.$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* - 1} = \frac{2 \sin(\theta^*/2) \cos(\theta^*/2)}{-2 \sin^2(\theta^*/2)} = -\frac{1}{\tan(\theta^*/2)},$$

d'où $\theta_2 = \theta^*/2 - \pi/2$.

Corps de même masse

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + 1} = \frac{2 \sin(\theta^*/2) \cos(\theta^*/2)}{2 \cos^2(\theta^*/2)} = \tan(\theta^*/2),$$

d'où $\theta_1 = \theta^*/2$: \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 sont donc perpendiculaires si $v_2 = 0$ et $m_1 = m_2$.

On retrouve ce cas simplement à partir des lois de conservation

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \quad \text{et} \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

En mettant la première équation au carré et en soustrayant la deuxième, on obtient $\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2 = 0$.

VI.c.4.b. Choc frontal

On parle également de choc direct. Dans ce cas, les vitesses sont toutes colinéaires. On peut trouver \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 sans passer par le référentiel barycentrique. Notons $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}'_1$ et \bar{v}'_2 les vitesses algébriques selon l'axe commun. La conservation de la quantité de mouvement donne

$$m_1 \cdot (\bar{v}_1 - \bar{v}'_1) = m_2 \cdot (\bar{v}'_2 - \bar{v}_2)$$

et celle de l'énergie cinétique,

$$m_1 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 \cdot (v_2'^2 - v_2^2),$$

soit

$$m_1 \cdot (\bar{v}_1 - \bar{v}_1') \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_1') = m_2 \cdot (\bar{v}_2' - \bar{v}_2) \cdot (\bar{v}_2' + \bar{v}_2).$$

S'il y a eu une collision, $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \neq (\bar{v}_1', \bar{v}_2')$. En divisant la dernière équation par la première, on obtient

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_1' = \bar{v}_2 + \bar{v}_2'$$

puis

$$\bar{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2) \bar{v}_1 + 2 m_2 \bar{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Par symétrie, en échangeant les indices 1 et 2, on obtient

$$\bar{v}_2' = \frac{2 m_1 \bar{v}_1 + (m_2 - m_1) \bar{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

On constate que si $m_1 = m_2$, alors $\bar{v}_1' = \bar{v}_2$ et $\bar{v}_2' = \bar{v}_1$: les vitesses de M_1 et M_2 ont été échangées. En particulier, si M_2 est au repos avant le choc, M_1 est au repos après le choc et M_2 a la vitesse de M_1 d'avant le choc (phénomène de « carreau »).

Si $\bar{v}_2 = 0$ et $m_1 \ll m_2$, $\bar{v}_1' \approx -\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2' \approx 0$: M_1 rebondit sur M_2 avec la même vitesse, mais de sens contraire, et M_2 reste immobile. Si $m_1 \gg m_2$, $\bar{v}_1' \approx \bar{v}_1$ et $\bar{v}_2' \approx 2 \bar{v}_1$.

VI.D. Chocs inélastiques

VI.D.1. Dissipation de l'énergie cinétique

Lors d'un choc *inélastique*, une partie de l'énergie cinétique (au sens de la note n°4) est dissipée. L'énergie interne du système devant être conservée, la somme des énergies internes de chacun des corps et de leur énergie potentielle d'interaction doit augmenter. Cette augmentation de l'énergie non cinétique peut prendre plusieurs formes : chaleur (augmentation de la température des corps, vaporisation), déformation, énergie de liaison... La quantité de mouvement reste en revanche toujours conservée.

On a les équations suivantes :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' ;$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \underbrace{U_1' + U_2' + E'_{p,1 \leftrightarrow 2} - U_1 - U_2}_{\geq 0}.$$

Dans le référentiel barycentrique, la deuxième équation prend cette forme :

$$\frac{1}{2} \mu w^2 = \frac{1}{2} \mu w'^2 + U_1' + U_2' + E'_{p,1 \leftrightarrow 2} - U_1 - U_2.$$

Cette équation ne présente d'intérêt que si la quantité $U_1' + U_2' + E'_{p,1 \leftrightarrow 2} - U_1 - U_2$ est connue. Toute autre quantité équivalente, p. ex. le coefficient de restitution ⁽⁵⁾,

$$\eta = \frac{w'}{w} \leq 1,$$

fait également l'affaire. On peut alors traiter le problème dans le référentiel barycentrique, puis dans \mathcal{R} . Toutes les équations données aux § VI.c.2 et § VI.c.3 sont encore valables, à l'exception de la conservation de l'énergie cinétique et des relations qui en découlent : $w' = w$, $v_1' = v_1^*$ et $v_2' = v_2^*$.

5. Le cas $\eta = 1$ correspond au choc élastique.

VI.D.2. Choc parfaitement mou

Le cas $\eta = 0$ porte le nom de *choc parfaitement mou* : on a alors $w' = 0$, c.-à-d. que M_1 et M_2 restent liés après la collision. D'après la conservation de la quantité de mouvement,

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2 = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

On obtient bien que

$$\begin{aligned} E'_c - E_c &= \frac{1}{2} (m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 - m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2) = \frac{m_1 m_2 \cdot (2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 - v_1^2 - v_2^2)}{2 (m_1 + m_2)} \\ &= - \frac{m_1 m_2 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2 (m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

est négatif.

VI.E. Explosions

Le cas des explosions s'apparente à celui des chocs parfaitement mous, la différence étant qu'une partie de l'énergie non cinétique est transformée en énergie cinétique. On a

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \frac{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}{m_1 + m_2},$$

d'où

$$\begin{aligned} E'_c - E_c &= \frac{1}{2} (m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 - m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2) = \frac{m_1 m_2 \cdot (v_1'^2 + v_2'^2 - 2 \vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2)}{2 (m_1 + m_2)} \\ &= \frac{m_1 m_2 \cdot (\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2)^2}{2 (m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

est positif.

‡ VI.F. Section efficace

‡ VI.F.1. Angle solide

Considérons une sphère de rayon R . L'élément de surface d^2S de la sphère compris entre les longitudes ϕ et $\phi + d\phi$ et les colatitudes θ et $\theta + d\theta$ vaut

$$d^2S = (R \sin \theta d\phi) \cdot (R d\theta).$$

L'angle solide élémentaire correspondant à d^2S , $d^2\omega := d^2S/R^2$, est indépendant du rayon de la sphère et vaut

$$d^2\omega(\phi, \theta) = \sin \theta d\theta d\phi.$$

L'angle solide $d\omega$ compris entre les colatitudes θ et $\theta + d\theta$ vaut

$$d\omega(\theta) = \int_{\phi=0}^{2\pi} d^2\omega(\phi, \theta) = 2 \pi \sin \theta d\theta.$$

L'angle solide $\omega_{\text{cône}}(\theta)$ du cône compris entre les colatitudes 0 et θ vaut

$$\omega_{\text{cône}}(\theta) = \int_{\theta'=0}^{\theta} d\omega(\theta') = 2 \pi \cdot (1 - \cos \theta).$$

L'angle solide couvert par la sphère toute entière correspond à $\theta = \pi$, soit

$$\omega_{\text{sphère}} = 4 \pi.$$

‡ VI.F.2. Sections efficaces différentielle et totale

Considérons un faisceau de particules M_1 envoyées à la vitesse \vec{v}_1 contre une cible de faible épaisseur, constituée de particules M_2 immobiles ($\vec{v}_2 = 0$). Un certain nombre de projectiles vont être déviés par les particules de la cible dans la direction caractérisée par les angles ϕ et θ_1 . Notons I_1 l'intensité du faisceau incident, c.-à-d. le nombre de particules rencontrant la cible par unité de temps ; n_2 le nombre de particules cibles par unité de surface de la cible ; et $d^2N_\omega(\phi, \theta_1)$ le nombre de particules M_1 déviées par unité de temps dans l'angle solide $d^2\omega(\phi, \theta_1)$.

A priori, $d^2N_\omega \propto I_1 n_2 d^2\omega$.

On appelle *section efficace différentielle* $\sigma_{\text{diff}}(\phi, \theta_1)$ la quantité

$$\sigma_{\text{diff}}(\phi, \theta_1) = \frac{d^2 N_{\omega}}{I_1 n_2 d^2 \omega}.$$

Cette quantité a la dimension d'une surface.

Le nombre dN_{θ_1} de particules déviées par unité de temps entre θ_1 et $\theta_1 + d\theta_1$ vaut

$$dN_{\theta_1} = \int_{\phi=0}^{2\pi} d^2 N_{\omega} = \int_{\phi=0}^{2\pi} I_1 n_2 \sigma_{\text{diff}}(\phi, \theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi.$$

Si $\sigma_{\text{diff}}(\phi, \theta_1)$ ne dépend pas de ϕ , c.-à-d. s'il y a symétrie de révolution autour de l'axe \mathcal{D} , notons $\sigma_{\text{diff}}(\theta_1) := \sigma_{\text{diff}}(\phi, \theta_1)$.

On a alors

$$dN_{\theta_1} = I_1 n_2 \sigma_{\text{diff}}(\theta_1) \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi = 2\pi I_1 n_2 \sigma_{\text{diff}}(\theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1,$$

d'où

$$\sigma_{\text{diff}}(\theta_1) = \frac{1}{2\pi I_1 n_2 \sin \theta_1} \frac{dN_{\theta_1}}{d\theta_1}.$$

On définit également la *section efficace totale*

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{N}{I_1 n_2},$$

où N est le nombre de particules déviées par unité de temps dans toutes les directions.

‡ VI.F.3. Application à la diffusion entre noyaux

Considérons des noyaux d'atomes M_1 envoyés contre des noyaux M_2 au repos. La plupart des projectiles passent loin des noyaux cibles. Certains passent cependant près d'une cible. Notons D le paramètre d'impact correspondant et θ^* l'angle de déviation dans le référentiel barycentrique. On rappelle (cf. § VII.E.2.c.iii) que

$$\tan\left(\frac{\theta^*}{2}\right) = \frac{K}{\mu v_0^2 D}.$$

La probabilité $p(D) dD$ qu'un noyau M_1 ait un paramètre d'impact compris entre D et $D + dD$ est proportionnelle à $2\pi D dD$. La probabilité $p(\theta^*) d\theta^*$ qu'il soit dévié entre θ^* et $\theta^* + d\theta^*$ (dans le référentiel barycentrique) vaut

$$p(\theta^*) d\theta^* = p(D) \left| \frac{dD}{d\theta^*} \right| d\theta^* \propto \frac{d\theta^*}{\tan(\theta^*/2) \sin^2(\theta^*/2)}.$$

On a

$$\frac{dN_{\theta^*}}{d\theta^*} \propto p(\theta^*),$$

d'où

$$\sigma_{\text{diff}}(\theta^*) \propto \frac{1}{\sin \theta^*} \frac{dN_{\theta^*}}{d\theta^*} \propto \frac{1}{\sin^4(\theta^*/2)}.$$

On peut à partir de cette expression obtenir la section efficace différentielle dans le référentiel \mathcal{R} plutôt que dans \mathcal{R}^* .