Chapitre II

Cinématique du point

L'objet de la cinématique est de décrire le mouvement d'un corps, indépendamment des forces qui s'exercent sur lui.

II.a. Espace et temps en physique

Nous nous placerons dans ce cours dans le cadre de la mécanique classique (newtonienne). Nous ferons donc les hypothèses suivantes :

- l'espace et le temps sont absolus (distances et durées ne dépendent pas de l'observateur) et sont indépendants l'un de l'autre ;
- l'espace usuel est un espace affine euclidien réel de dimension 3 ;
- la position et le mouvement des corps sont parfaitement définis.

Ces hypothèses, faites (implicitement pour certaines d'entre elles) par Isaac Newton au 17e siècle, ont été remises en cause au 20e siècle.

La théorie de la relativité restreinte (Albert Einstein, 1905) a montré que l'espace et le temps sont relatifs à l'observateur et que le concept pertinent est celui d'espace-temps : on peut en effet construire des quantités absolues (indépendantes du mouvement de l'observateur) mélangeant espace et temps.

D'après la théorie de la relativité générale (Einstein, 1916), le phénomène de gravitation doit être interpété comme une courbure de l'espace-temps par la matière : l'espace n'est donc pas affine euclidien.

Enfin, la mécanique quantique (de Broglie, Bohr, Schrödinger, Heisenberg… ; années 1920/1930) a établi que la position et le mouvement d'un corps ne peuvent être définis simultanément au-delà d'une certaine précision.

La faiblesse des vitesses et des champs de gravitation, ainsi que le caractère macroscopique des corps que nous étudierons nous permettent néanmoins d'adopter ici les hypothèses de la mécanique classique.

II.b. Changement de base de dérivation. Vecteur vitesse angulaire de rotation

La dérivation dans une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ d'une fonction vectorielle $\vec{f}(t)$ de composantes (f_x, f_y, f_z) dans cette base $\mathcal{B}$ a été définie au § I.b.3.*a*. Si le vecteur $\vec{f}$ a pour composantes $(f_{x'}, f_{y'}, f_{z'})$ dans une base $\mathcal{B}' = (\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$, sa dérivée dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{f}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}f_{x'}}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_{x'} + f_{x'}\,\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}f_{y'}}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_{y'} + f_{y'}\,\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{y'}}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}f_{z'}}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_{z'} + f_{z'}\,\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{z'}}{\mathrm{d}t}\right),$$

alors que, par définition, sa dérivée dans la base $\mathcal{B}'$ est simplement

$$\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}\vec{f}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f_{x'}}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_{x'} + \frac{\mathrm{d}f_{y'}}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_{y'} + \frac{\mathrm{d}f_{z'}}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_{z'}.$$

Les termes $f_{x'}\ \mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{x'}/\mathrm{d}t$, etc· ne sont nuls que si les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ sont fixes dans la base $\mathcal{B}$ quand t varie.

Sinon, posons

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{y'}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u}_{z'}\right)\,\vec{u}_{x'} + \left(\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{z'}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u}_{x'}\right)\,\vec{u}_{y'} + \left(\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u}_{y'}\right)\,\vec{u}_{z'}.$$

On constate que

$$f_{x'}\,\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t} + f_{y'}\,\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{y'}}{\mathrm{d}t} + f_{z'}\,\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{z'}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}\times\vec{f}.$$

Il existe donc un vecteur $\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}(t)$ tel que, pour toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{f}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}\vec{f}}{\mathrm{d}t} + \vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}\times\vec{f}}\,^{(*1)}.$$

Si t est le temps, $\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}$ porte le nom de ***vecteur vitesse angulaire de rotation*** de $\mathcal{B}'$ par rapport à $\mathcal{B}$.

Justifions cette appellation en examinant le cas où $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_{z'}$ sont confondus. Dans ce cas, $\vec{u}_{x'}$ (resp. $\vec{u}_{y'}$) est l'image de $\vec{u}_x$ (resp. $\vec{u}_y$) par une rotation d'angle $\phi(t)$ et d'axe $\vec{u}_z = \vec{u}_{z'}$, c.-à-d. $\vec{u}_{x'} = \cos\phi\;\vec{u}_x + \sin\phi\;\vec{u}_y$ et $\vec{u}_{y'} = \cos(\phi+\pi/2)\;\vec{u}_x + \sin(\phi+\pi/2)\;\vec{u}_y = -\sin\phi\;\vec{u}_x + \cos\phi\;\vec{u}_y$. On a alors

$$\boldsymbol{\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_z},$$

où $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ est la ***vitesse angulaire de rotation*** de $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{y'}$ autour de $\vec{u}_z$.

On a par ailleurs

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}''/\mathcal{B}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{B}''/\mathcal{B}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}},$$

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{B}'} = -\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}}{\mathrm{d}t}.$$

Remarque

Il est important de bien distinguer la *dérivée d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$* (indice « $/\mathcal{B}$ ») des *composantes d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$* (indice « $\mathcal{B}$ »). Les composantes d'un vecteur $\vec{a}$ dans deux bases $\mathcal{B} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ sont les projections de $\vec{a}$ sur les vecteurs de ces bases ; elles sont différentes ($a_x = \vec{a}\cdot\vec{u}_x \neq a_{x'} = \vec{a}\cdot\vec{u}_{x'}$, etc.), mais il s'agit du même vecteur : $a_x\;\vec{u}_x + a_y\;\vec{u}_y + a_z\;\vec{u}_z = a_{x'}\;\vec{u}_{x'} + a_{y'}\;\vec{u}_{y'} + a_{z'}\;\vec{u}_{z'}$.

En revanche, généralement, $\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{f}/\mathrm{d}t \neq \mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}\vec{f}/\mathrm{d}t$. Les deux dérivées ne sont égales que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont fixes l'une par rapport à l'autre.

1. On peut retrouver les composantes de $\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}$ en appliquant cette relation aux vecteurs de $\mathcal{B}'$. En effet,

$$\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}\times\vec{u}_{x'}.$$

En faisant le produit scalaire avec $\vec{u}_{y'}$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{u}_{x'}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{u}_{y'} = (\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}\times\vec{u}_{x'})\cdot\vec{u}_{y'} = (\vec{u}_{x'}\times\vec{u}_{y'})\cdot\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}} = \vec{u}_{z'}\cdot\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}},$$

c.-à-d. la composante de $\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}$ selon $\vec{u}_{z'}$.

Dérivée d'un produit scalaire

On peut vérifier qu'il est inutile de préciser par rapport à quelle base on dérive le produit scalaire. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}(\vec{f}\cdot\vec{g})}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{f}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{g}+\vec{f}\cdot\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}}\vec{g}}{\mathrm{d}t} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}\vec{f}}{\mathrm{d}t}+\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}\times\vec{f}\right)\cdot\vec{g}+\vec{f}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}\vec{g}}{\mathrm{d}t}+\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}\times\vec{g}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}\vec{f}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{g}+\vec{f}\cdot\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}\vec{g}}{\mathrm{d}t}+(\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}\times\vec{f})\cdot\vec{g}+\vec{f}\cdot(\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}\times\vec{g}) \\
&= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}(\vec{f}\cdot\vec{g})}{\mathrm{d}t}+\vec{\Omega}_{\mathcal{B}'/\mathcal{B}}\cdot(\underbrace{\vec{f}\times\vec{g}+\vec{g}\times\vec{f}}_{\vec{0}}) = \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}'}(\vec{f}\cdot\vec{g})}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

II.c. Notion de référentiel. Vitesse et accélération

II.c.1. Référentiel

Soient $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1)$ et $\mathcal{R}_2 = (O_2, \mathcal{B}_2)$ deux repères, M un point et t le temps.
On a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}_1}\overrightarrow{O_1M}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}_1}\overrightarrow{O_1O_2}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}_1}\overrightarrow{O_2M}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}_1}\overrightarrow{O_1O_2}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{B}_2}\overrightarrow{O_2M}}{\mathrm{d}t}+\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}\times\overrightarrow{O_2M}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\mathrm{d}_{/\mathcal{B}_1}\overrightarrow{O_1M}/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}_{/\mathcal{B}_2}\overrightarrow{O_2M}/\mathrm{d}t$ sont égaux pour tout point M si

- $\mathrm{d}_{/\mathcal{B}_1}\overrightarrow{O_1O_2}/\mathrm{d}t = \vec{0}$ (pas de translation de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$) ; et
- $\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1} = \vec{0}$ (pas de rotation de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$).

Les repères fixes les uns par rapport aux autres sont donc *équivalents* pour dériver le vecteur position par rapport au temps.

Un ensemble de repères d'espace [*2] $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, etc· équivalents constitue un ***référentiel*** [*3] $\mathcal{R}$.

Par un abus de langage commode, on parle parfois du référentiel « $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ », où $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ n'est en fait qu'un repère fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$.

II.c.2. Vitesse

La valeur de la dérivée par rapport au temps est indépendante du choix de la base et de l'origine O du repère, tant que celui-ci est fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$; on peut donc définir le ***vecteur vitesse instantanée*** [*4] de M dans $\mathcal{R}$ par

$$\boldsymbol{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}.$$

II.c.3. Accélération

De même, on définit le ***vecteur accélération instantanée*** de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ par

$$\boldsymbol{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} := \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}[\vec{v}_{M/\mathcal{R}}]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}}.$$

2. En théorie de la relativité, il faut adjoindre un repère de temps au repère d'espace pour définir un référentiel, car le temps dépend du mouvement de l'observateur.
3. On utilise parfois aussi l'expression *solide de référence* au lieu de référentiel. On peut effectivement concevoir un référentiel comme un solide (immatériel) parfaitement rigide sur lequel sont fixés des repères.
4. Sauf mention contraire, le terme « vitesse » désigne le vecteur vitesse instantanée, pas la vitesse moyenne ni la norme de la vitesse. De même pour l'« accélération ».

II.D. Composantes de la vitesse et de l'accélération

II.D.1. Repère cartésien

Soit $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ un repère fixe dans $\mathcal{R}$.
En notant $\dot{q}$ et $\ddot{q}$ les dérivées première et seconde par rapport au temps d'une quantité q, on a

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x}\ \vec{u}_x + \dot{y}\ \vec{u}_y + \dot{z}\ \vec{u}_z$$

et

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x}\ \vec{u}_x + \ddot{y}\ \vec{u}_y + \ddot{z}\ \vec{u}_z.$$

II.D.2. Repère cylindrique

Rappelons que $\dot{\vec{u}}_\rho = (\mathrm{d}\vec{u}_\rho/\mathrm{d}\phi)\cdot(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t) = \dot{\phi}\ \vec{u}_\phi$ et que $\dot{\vec{u}}_\phi = (\mathrm{d}\vec{u}_\phi/\mathrm{d}\phi)\cdot(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t) = -\dot{\phi}\ \vec{u}_\rho$.

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}(\rho\ \vec{u}_\rho + z\ \vec{u}_z)}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\ \vec{u}_\rho + \rho\ \dot{\vec{u}}_\rho + \dot{z}\ \vec{u}_z + z\ \dot{\vec{u}}_z = \dot{\rho}\ \vec{u}_\rho + \rho\ \dot{\phi}\ \vec{u}_\phi + \dot{z}\ \vec{u}_z.$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}(\dot{\rho}\ \vec{u}_\rho + \rho\ \dot{\phi}\ \vec{u}_\phi + \dot{z}\ \vec{u}_z)}{\mathrm{d}t} = \ddot{\rho}\ \vec{u}_\rho + \dot{\rho}\ \dot{\vec{u}}_\rho + \dot{\rho}\ \dot{\phi}\ \vec{u}_\phi + \rho\ \ddot{\phi}\ \vec{u}_\phi + \rho\ \dot{\phi}\ \dot{\vec{u}}_\phi + \ddot{z}\ \vec{u}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\ \dot{\phi}^2)\ \vec{u}_\rho + (2\ \dot{\rho}\ \dot{\phi} + \rho\ \ddot{\phi})\ \vec{u}_\phi + \ddot{z}\ \vec{u}_z.\end{aligned}$$

Remarquer que même pour un mouvement circulaire uniforme autour de O dans le plan ($\rho = \mathrm{c^{te}}$, $\dot{\phi} = \mathrm{c^{te}}$ et $z = \mathrm{c^{te}}$), l'accélération radiale n'est pas nulle : il reste un terme centripète, $-\rho\ \dot{\phi}^2\ \vec{u}_\rho$.

II.D.3. Repère de Frenet

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

d'où

$$\boldsymbol{\vec{v} = v\ \vec{u}_\mathrm{T}},$$

en notant $\boldsymbol{v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t}$ la norme de $\vec{v}$.

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\ \vec{u}_\mathrm{T} + v\ \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\ \vec{u}_\mathrm{T} + v\ \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}s}\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

d'où

$$\boldsymbol{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\ \vec{u}_\mathrm{T} + \frac{v^2}{R_\mathrm{c}}\ \vec{u}_\mathrm{N}}.$$

L'accélération tangentielle $a_\mathrm{T} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ correspond à un changement de norme de la vitesse et l'accélération normale (centripète) $a_\mathrm{N} = v^2/R_\mathrm{c}$ à un changement de direction.

II.E. Changements de référentiels

II.E.1. Formules générales

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels. Exprimons la vitesse et l'accélération dans $\mathcal{R}$ en fonction des quantités correspondantes dans $\mathcal{R}'$.

II.E.1.*a*. Composition des vitesses

On a

$$\begin{aligned}\vec{v}_{M/\mathcal{R}} &= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}'}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M},\end{aligned}$$

d'où

$$\boldsymbol{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{\mathrm{e}}},$$

où

$$\boldsymbol{\vec{v}_{\mathrm{e}} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M}}$$

est la ***vitesse d'entraînement***. Les termes $\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M}$ sont dus respectivement à la translation et à la rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

II.E.1.*b*. Composition des accélérations

$$\begin{aligned}\vec{a}_{M/\mathcal{R}} &= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{O'M} \\ &\quad + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}'}\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{O'M} \\ &\quad + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \left(\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}'}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M}\right),\end{aligned}$$

d'où

$$\boldsymbol{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{C}}},$$

où

$$\boldsymbol{\vec{a}_{\mathrm{e}} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M})}$$

est l'***accélération d'entraînement*** et

$$\boldsymbol{\vec{a}_{\mathrm{C}} = 2\,\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}$$

est l'***accélération de Coriolis*** (ou complémentaire).

II.E.2. Cas particulier

Si $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$, le référentiel $\mathcal{R}'$ a uniquement un mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$. Dans ce cas, les lois de composition des vitesses et accélérations se réduisent aux lois d'additions suivantes :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}}$$

et

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}}.$$