Contrôle du 1er avril 2009

Durée : 1 h 30

Les calculatrices et tous les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Balançoire

On étudie le mouvement d'un enfant sur une balançoire. On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, que l'on munit d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe, où $\vec{u}_z$ est vertical et dirigé vers le haut. La partie mobile de la balançoire est constituée de deux barres parallèles rigides, pouvant tourner autour d'un axe cylindrique fixe dirigé selon $\vec{u}_x$, et d'un siège attaché aux barres et perpendiculaire à celles-ci. L'enfant a les pieds posés sur le siège et est soit accroupi, soit debout.

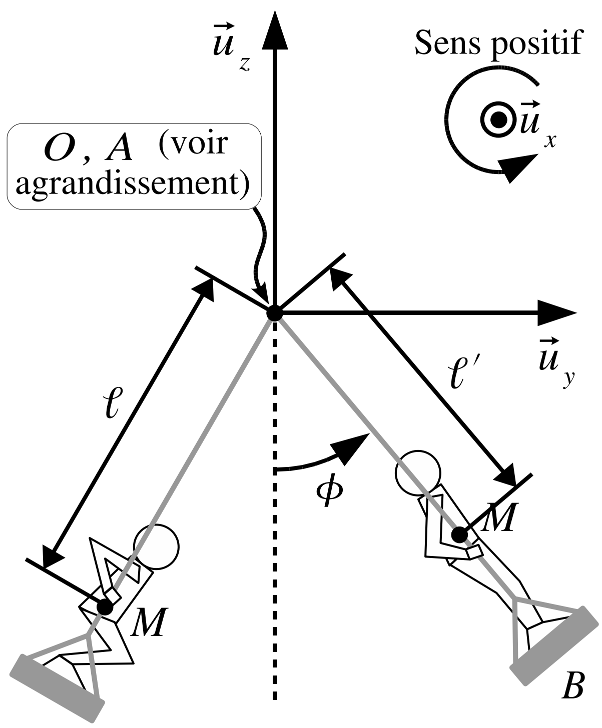
Pour simplifier l'étude, on assimilera les deux barres et le siège à une barre OB unique, rigide et mince, de masse négligeable, pouvant tourner dans le plan $(O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

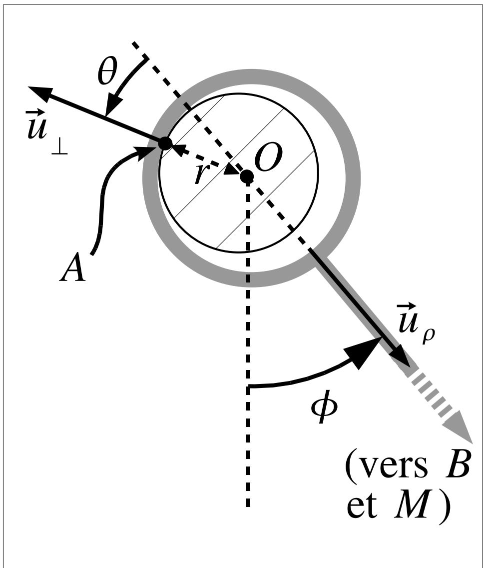
- Le siège est à l'extrémité B de la barre ;
- L'autre extrémité a la forme d'un anneau de centre O entourant l'axe et en contact avec celui-ci en un point A (voir dessin). Le jeu entre l'anneau et l'axe, c'est-à-dire la différence entre le rayon intérieur de l'anneau et le rayon de l'axe, est négligeable.

On considérera en outre que la masse m de l'enfant est entièrement concentrée en un point M du segment OB.

On s'intéressera au mouvement du système S constitué de la barre OB et du point M. On notera g la norme de l'accélération de la pesanteur, ℓ la distance entre O et M quand l'enfant est accroupi, ℓ' cette distance quand il est debout, $\phi(t)$ l'angle orienté $(-\widehat{\vec{u}_z, \overrightarrow{OM}})$ à un instant t et $\vec{u}_\perp(t) = \overrightarrow{OA}/\|\overrightarrow{OA}\|$. Les frottements dus à l'air seront négligés.

On utilisera le repère cylindrique orthonormé direct $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi, \vec{u}_x)$, où $\vec{u}_\rho(t) = \overrightarrow{OM}/\|\overrightarrow{OM}\|$.





Agrandissement près de l'axe. Le jeu entre l'axe (hachures) et l'anneau (en gris) a été exagéré.

A. Mouvement sans frottement

On suppose dans cette partie que l'axe n'exerce pas de frottement sur le système S.

1. Faire l'inventaire des forces extérieures exercées sur le système S. Préciser leur point d'application et donner, si elle est connue, leur expression vectorielle dans la base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi)$. À défaut, indiquer leur direction et leur sens.

■

L'enfant est accroupi aux questions 2 à 7.

2. Donner l'expression de la vitesse de M dans $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi)$ à un instant t quelconque.
3. Rappeler (sans le démontrer) l'énoncé, dans un référentiel galiléen, du théorème du moment cinétique pour un système fermé ; on notera $M_1, \ldots, M_n$ les points matériels du système et l'on nommera et définira les quantités utilisées.
4. Appliquer ce théorème par rapport à O au système S et établir une relation entre $\phi(t)$ et ses dérivées par rapport au temps.
5. Rappeler (sans le démontrer) l'énoncé, dans un référentiel galiléen, du théorème de l'énergie mécanique pour un système fermé ; on nommera et définira les quantités utilisées (sauf l'énergie mécanique).
6. Écrire l'énergie mécanique $E_\mathrm{m}(t)$ du système S en fonction de $\phi(t)$ et $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ (on prendra le zéro des énergies potentielles en O).
7. La balançoire est lâchée sans vitesse initiale d'un angle $\phi_0 = \phi(0) \in \,]-\pi/2, 0[$.
   Appliquer le théorème de l'énergie mécanique à S et en déduire une relation entre $\phi(t)$, $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ et ϕ_0.

■

8. On définit un balancement comme un intervalle de temps pendant lequel $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ ne change pas de signe. À un certain moment pendant le premier balancement, l'enfant se met instantanément debout. On note τ l'instant juste avant, τ' l'instant juste après, α l'angle $\phi(\tau) = \phi(\tau')$, et ω et ω' les valeurs de $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ à τ et τ'.
   Pourquoi le moment cinétique $\vec{L}_O(t)$ du système S par rapport à O a-t-il la même valeur à τ et à τ' (on pourra chercher un majorant de $\|\vec{L}_O(\tau') - \vec{L}_O(\tau)\|$) ?
   En déduire une relation entre ω et ω'.
9. Que vaut l'énergie mécanique à τ' (on l'exprimera en fonction de α et ω) ?
   Montrer que $E_\mathrm{m}(\tau') > E_\mathrm{m}(\tau)$.
   Pourquoi l'énergie mécanique n'est-elle pas nécessairement conservée entre τ et τ', contrairement au moment cinétique, et d'où provient cette variation d'énergie mécanique ?
10. On note ϕ_1 (> 0) la valeur maximale atteinte par $\phi(t)$ après que l'enfant se soit relevé.
   En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, établir une relation entre ϕ_1, α et ω.
   En déduire, à l'aide du résultat de la question 7, l'expression de $\cos\phi_1 - \cos\phi_0$ en fonction de ϕ_0, α et $\beta = (\ell/\ell')^3$.
   En valeur absolue, ϕ_1 est-il inférieur, égal ou supérieur à ϕ_0 ?
11. Pour quelle valeur de α l'angle ϕ_1 est-il maximal ?
   Montrer qu'on a alors
$$\cos\phi_1 = \beta\,\cos\phi_0 + (1-\beta).$$

On adoptera désormais cette valeur de α.

■

12. Lorsque $\phi(t) = \phi_1$, l'enfant s'accroupit instantanément.
   Cela change-t-il la valeur maximale de $\phi(t)$ atteinte lors du premier balancement ?
13. L'enfant se balance n fois :
   - Il s'accroupit à chaque fois que l'écart avec la verticale est maximal. Notons ϕ_i (avec $i = 1, 2, \ldots, n$) la valeur de l'angle $\phi(t)$ quand l'enfant s'accroupit à l'issue du i-ième balancement ;
   - Il se relève à chaque fois que $\phi(t) = \alpha$, où la valeur de α est celle trouvée à la question 11.

   Par le même raisonnement que précédemment, on pourrait montrer que, pour tout $i \leqslant n$,
$$\cos\phi_i - 1 = \beta\cdot(\cos\phi_{i-1} - 1).$$
   En déduire une relation entre ϕ_n, ϕ_0, β et n.
   Pour quelle valeur de n l'enfant fait-il un tour complet ?

B. Frottement solide

On suppose dans cette partie que l'axe exerce un frottement solide sur le système S.

La réaction exercée en A par l'axe sur le système S est $\vec{R}(t) = R_{/\!/}\ \vec{u}_{/\!/} + R_\perp\ \vec{u}_\perp$, où $R_{/\!/}\ \vec{u}_{/\!/}$ et $R_\perp\ \vec{u}_\perp$ sont respectivement les composantes tangentielle et normale. Le vecteur unitaire $\vec{u}_{/\!/}$ est orthogonal à $\vec{u}_\perp$ et choisi de telle sorte que $R_{/\!/} \geqslant 0$. On a alors $R_{/\!/} = \mu\ R_\perp$, où le coefficient de frottement cinétique μ est connu et constant. On note $\theta(t)$ l'angle orienté $(\widehat{-\vec{u}_\rho\,, \vec{u}_\perp})$ et r le rayon de l'axe (voir l'agrandissement sur la figure).

La balançoire est à nouveau lâchée sans vitesse initiale d'un angle $\phi_0 = \phi(0) \in\ ]-\pi/2,\ 0[$. On ne s'intéressera au mouvement de la balançoire que pendant le premier balancement ($\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t \geqslant 0$) et l'on supposera que l'enfant reste toujours accroupi.

1. Représenter $\vec{u}_{/\!/}$, $\vec{u}_\perp$, $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\phi$ et θ sur un schéma.
   Exprimer $\vec{u}_{/\!/}$ et $\vec{u}_\perp$ dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi)$ en fonction de θ.
2. Projeter le théorème du centre d'inertie sur $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi)$; on notera $\mathcal{E}_\rho$ l'équation selon $\vec{u}_\rho$ et $\mathcal{E}_\phi$ celle selon $\vec{u}_\phi$.
3. Appliquer au système S le théorème du moment cinétique par rapport à O.
   En déduire une relation, notée $\mathcal{E}_x$, entre $R_{/\!/}$, ϕ et ses dérivées par rapport au temps.
4. En combinant $\mathcal{E}_\phi$ et $\mathcal{E}_x$, établir une relation entre θ, μ, r et ℓ.
   En déduire que l'angle θ est constant au cours du mouvement (on ne cherchera pas à le déterminer).
   Que vaut θ si $\mu = 0$?
5. En combinant $\mathcal{E}_\phi$ et la dérivée par rapport au temps de $\mathcal{E}_\rho$, montrer que

$$\frac{\mathrm{d}R_\perp}{\mathrm{d}\phi} + k_1\ R_\perp = k_2\ \sin\phi,$$

   où k_1 et k_2 sont des constantes que l'on exprimera en fonction de μ, m, g et θ.
6. On rappelle que toute solution d'une équation différentielle linéaire est somme d'une des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière quelconque de l'équation générale. On cherche une solution particulière de la forme $R_{\perp\mathrm{p}} = \gamma\ \sin(\phi+\delta)$ de l'équation générale obtenue à la question 5 ; γ ($\geqslant 0$) et δ sont des constantes. Cette équation est la partie imaginaire de l'équation complexe

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\phi} + k_1\ Z = k_2\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \phi},$$

   où $Z = \gamma\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\phi+\delta)}$.
   Déterminer γ et δ en fonction de k_1 et k_2.
7. Les solutions de l'équation homogène

$$\frac{\mathrm{d}R_{\perp\mathrm{h}}}{\mathrm{d}\phi} + k_1\ R_{\perp\mathrm{h}} = 0$$

   sont de la forme $R_{\perp\mathrm{h}} = C\ \mathrm{e}^{-k_1\ \phi}$.
   Établir une relation entre C et d'autres quantités.
8. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, établir une relation entre l'angle maximal ϕ_1' atteint à l'issue du premier balancement, ϕ_0, γ, δ, k_1, C et les données du problème.