Université Pierre et Marie Curie. **LP 102B.**
Année universitaire 2008-2009 **MIME22**

Contrôle du 1er avril 2009

Durée : 1 h 30

Balançoire

A. Mouvement sans frottement

1. Poids : $\vec{P} = -m\ g\ \vec{u}_z = m\ g \cdot (\cos\phi\ \vec{u}_\rho - \sin\phi\ \vec{u}_\phi)$. Appliqué en M.

   Réaction $\vec{R}$ exercée par l'axe sur S en A. Cette réaction est normale à l'interface entre l'axe et S puisqu'il n'y a pas de frottements, donc selon $+\vec{u}_\perp$.
2. $\overrightarrow{OM} = \ell\ \vec{u}_\rho$, donc $\vec{v} = \ell \cdot (\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t)\ \vec{u}_\phi$.
3. Dans un référentiel galiléen, si O est fixe,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_j \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{\text{ext}\to j}),$$

   où $\vec{L}_O = \sum_j \overrightarrow{OM}_j \wedge m_j\ \vec{v}_j$ est le moment cinétique et $\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{\text{ext}\to j}) = \overrightarrow{OM}_j \wedge \vec{F}_{\text{ext}\to j}$ est le moment (de la résultante) des forces **extérieures** exercées sur le point M_j.
4. Ici, on a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}.$$

   $\vec{R}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont parallèles (pas de composante tangentielle), donc $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} = \vec{0}$. $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\ \vec{v} = m\ \ell^2 \cdot (\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t)\ \vec{u}_x$ et $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -m\ g\ \ell\ \sin\phi\ \vec{u}_x$, d'où

$$\ell\ \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = -g\ \sin\phi.$$

5. $\mathrm{d}E_\mathrm{m} = \sum_j \delta W(\vec{F}^{\text{dsp}}_{\to j})$, où $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}$ est l'énergie mécanique et $\delta W(\vec{F}^{\text{dsp}}_{\to j}) = \vec{F}^{\text{dsp}}_{\to j} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}_j$ est le travail élémentaire de la résultante $\vec{F}^{\text{dsp}}_{\to j}$ des forces dissipatives (= non conservatives) exercées sur le point M_j quand il se déplace de $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}_j$.

   (On peut également donner la version intégrée du théorème.)
6. La réaction normale ne travaille pas et le poids dérive d'une énergie potentielle. L'énergie mécanique vaut donc

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\ m\ v^2 + m\ g\ z(M) = \frac{1}{2}\ m\ \ell^2 \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 - m\ g\ \ell\ \cos\phi.$$

7. E_m est conservée car il n'y a pas de force dissipative. À $t = 0$, $\vec{v} = \vec{0}$, donc $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = 0$. On a donc

$$\frac{1}{2}\ m\ \ell^2 \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 - m\ g\ \ell\ \cos\phi = -m\ g\ \ell\ \cos\phi_0.$$

8. La force exercée par l'enfant pour se redresser est une force intérieure au système S : elle n'intervient donc pas dans le théorème du moment cinétique.

   Entre τ et τ', on a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = -m\ g\ \|\overrightarrow{OM}(t)\|\ \sin\phi(t)\ \vec{u}_x.$$

En intégrant de τ à τ',

$$\underline{\vec{L}_O(\tau') - \vec{L}_O(\tau) = -m\ g\ \vec{u}_x \int_{t=\tau}^{\tau'} \|\overrightarrow{OM}(t)\|\ \sin\phi(t)\ \mathrm{d}t.}$$

Or $\|\overrightarrow{OM}(t)\| \leqslant \ell$ et $\phi(t) = \alpha$, donc

$$\underline{\|\vec{L}_O(\tau') - \vec{L}_O(\tau)\| \leqslant m\ g\ \ell\ |\sin\alpha| \cdot (\tau' - \tau).}$$

$\tau' - \tau \approx 0$, donc $\vec{L}_O(\tau') \approx \vec{L}_O(\tau)$.

On en déduit que $\underline{\ell^2\ \omega = \ell'^2\ \omega'}$.

9.

$$E_\mathrm{m}(\tau') = \frac{1}{2}\ m\ \ell'^2\ \omega'^2 - m\ g\ \ell'\ \cos\alpha = \underline{\frac{1}{2}\ m\ \ell^4\ \omega^2/\ell'^2 - m\ g\ \ell'\ \cos\alpha.}$$

$$\underline{E_\mathrm{m}(\tau') - E_\mathrm{m}(\tau) = \frac{1}{2}\ m\ \ell^2\ \omega^2 \cdot (\underbrace{\ell^2/\ell'^2 - 1}_{>0}) + m\ g \cdot (\underbrace{\ell - \ell'}_{>0})\ \cos\alpha > 0.}$$

Le travail des forces intérieures entre τ et τ' doit être pris en compte dans le théorème de l'énergie mécanique[1] (alors que seules les forces extérieures interviennent dans le théorème du moment cinétique). Ici, ce sont les muscles de l'enfant qui travaillent quand il se redresse.

10. L'énergie mécanique est conservée après τ', donc

$$\underline{\frac{1}{2}\ m\ \ell^4\ \omega^2/\ell'^2 - m\ g\ \ell'\ \cos\alpha = -m\ g\ \ell'\ \cos\phi_1,}$$

puisque $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = 0$ en ϕ_1.

De même, l'énergie est conservée entre $t = 0$ et τ, donc

$$\underline{\frac{1}{2}\ m\ \ell^2\ \omega^2 - m\ g\ \ell\ \cos\alpha = -m\ g\ \ell\ \cos\phi_0.}$$

En retranchant la première équation multipliée par ℓ'^2 de la seconde multipliée par ℓ^2, on obtient

$$\ell'^3\ \cos\phi_1 - \ell^3\ \cos\phi_0 = (\ell'^3 - \ell^3)\ \cos\alpha,$$

soit

$$\underline{\cos\phi_1 - \cos\phi_0 = (\beta - 1) \cdot (\cos\phi_0 - \cos\alpha).}$$

$|\alpha| < |\phi_0|$ (sinon, la balançoire cesse de monter avant que l'enfant ne se soit redressé !), donc $\cos\alpha > \cos\phi_0$. Or $\ell > \ell'$, donc $\beta > 1$, d'où $\cos\phi_1 < \cos\phi_0$, c.-à-d. $\underline{|\phi_1| > |\phi_0|}$: l'amplitude de l'oscillation croît.

11. ϕ_1 est maximal quand $\cos\phi_1$ est minimal, c.-à-d. quand $\cos\alpha$ maximal, soit $\underline{\alpha = 0}$.

On a alors

$$\underline{\cos\phi_1 = \beta\ \cos\phi_0 + (1 - \beta).}$$

12. Notons t_1' l'instant juste avant d'atteindre ϕ_1 et t_1 l'instant juste après. Le moment cinétique est conservé entre t_1' et t_1, donc

$$\ell'^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_1'} = \ell^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_1}.$$

Or $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = 0$ à $t = t_1'$, donc à $t = t_1$ également : le maximum de ϕ est atteint, que l'enfant s'accroupisse ou non.

(En revanche, s'accroupir en ϕ_1 lui permet de se redresser ultérieurement et de continuer à amplifier les balancements.)

13. La suite $i \mapsto \cos\phi_i - 1$ est une suite géométrique de raison β. On a donc

$$\underline{\cos\phi_n - 1 = \beta^n \cdot (\cos\phi_0 - 1).}$$

Or $\cos\phi_n$ ne peut pas être inférieur à -1. Si $\beta^n \cdot (\cos\phi_0 - 1) + 1 < -1$, l'angle maximal ϕ_n atteint à l'issue du n-ième balancement n'est pas défini : la balançoire fait donc un tour complet quand n dépasse

$$\underline{\frac{\ln\bigl(2/(1 - \cos\phi_0)\bigr)}{\ln\beta}}.$$

1. Le travail des forces intérieures est nul avant τ et après τ', car le système S se comporte alors comme un solide (au sens de la mécanique), c.-à-d. que les distances entre les points du système ne varient pas.

B. Frottement solide

1. Schéma : $R_{/\!/}\ \vec{u}_{/\!/}$ est tangente au point A à l'interface entre le bras et l'axe et opposée au mouvement du bras par rapport à l'axe.
   $\vec{u}_{/\!/} = -\sin\theta\ \vec{u}_\rho + \cos\theta\ \vec{u}_\phi$.
   $\vec{u}_\perp = -\cos\theta\ \vec{u}_\rho - \sin\theta\ \vec{u}_\phi$.
2. Le centre d'inertie est M, donc $\sum \vec{F}_{\text{ext}\to S} = \vec{P} + \vec{R} = m\ \vec{a}_M$.

$$\mathcal{E}_\rho\ :\qquad m\ g\cos\phi - R_{/\!/}\ \sin\theta - R_\perp\ \cos\theta = -m\ \ell\ \left(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t\right)^2.$$

$$\mathcal{E}_\phi\ :\qquad -m\ g\ \sin\phi + R_{/\!/}\ \cos\theta - R_\perp\ \sin\theta = m\ \ell\ \mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}t^2.$$

3.
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{P} + \overrightarrow{OA}\wedge\vec{R} = -m\ g\ \ell\ \cos\phi\ \vec{u}_x + \underbrace{r\ \vec{u}_\perp \wedge (R_{/\!/}\ \vec{u}_{/\!/} + R_\perp\ \vec{u}_\perp)}_{-r\ R_{/\!/}\ \vec{u}_x},$$

   d'où $\mathcal{E}_x\ :\qquad m\ \ell^2\ \mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}t^2 = -m\ g\ \ell\ \sin\phi - r\ R_{/\!/}$.
4. $\ell\times\mathcal{E}_\phi = \mathcal{E}_x$, d'où $-r\ R_{/\!/} = \ell\cdot(R_{/\!/}\ \cos\theta - R_\perp\ \sin\theta)$. Comme $R_{/\!/} = \mu\ R_\perp$, on obtient

$$\mu\ r = \ell\cdot(\sin\theta - \mu\ \cos\theta).$$

   θ est donc une constante.
   Si $\mu = 0$, $\theta = 0$ (la solution $\theta = \pi$ correspond à des barres au-dessus de l'axe).
5.
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\rho/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t} + 2\times\mathcal{E}_\phi \longrightarrow 3\ m\ g\ \sin\phi = -(\mu\ \sin\theta + \cos\theta)\ \frac{\mathrm{d}R_\perp}{\mathrm{d}\phi} + 2\ (\mu\ \cos\theta - \sin\theta)\ R_\perp,$$

   d'où le résultat demandé avec

$$k_1 = \frac{2\ (\sin\theta - \mu\ \cos\theta)}{\mu\ \sin\theta + \cos\theta}\qquad\text{et}\qquad k_2 = \frac{-3\ m\ g}{\mu\ \sin\theta + \cos\theta}.$$

6. $\mathrm{d}Z/\mathrm{d}\phi = \mathrm{i}\ \gamma\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\phi+\delta)}$, donc $\gamma\cdot(\mathrm{i} + k_1)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \delta} = k_2$.
   En prenant le module, on obtient $\gamma = |k_2|/\sqrt{1+k_1^2}$.
   On obtient $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \delta} = \sqrt{1+k_1^2}/(\mathrm{i}+k_1)$, soit, en multipliant par le conjugué du dénominateur, $\cos\delta + \mathrm{i}\ \sin\delta = (k_1 - \mathrm{i})/\sqrt{1+k_1^2}$, d'où $\cos\delta = k_1/\sqrt{1+k_1^2}$ et $\sin\delta = -1/\sqrt{1+k_1^2}$, ce qui suffit à déterminer δ. (On peut donner à la place $\tan\delta = -1/k_1$ et préciser que $\delta\in[-\pi,\,0]$.)
7. On a $R_\perp = R_{\perp\mathrm{h}} + R_{\perp\mathrm{p}} = C\ \mathrm{e}^{-k_1\ \phi} + \gamma\ \sin(\phi+\delta)$. La seule inconnue est C. On doit donc utiliser la condition initiale $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = 0$ quand $\phi = \phi_0$ dans l'équation $\mathcal{E}_\rho$.
   On obtient

$$m\ g\ \cos\ \phi_0 - (\mu\ \sin\theta + \cos\theta)\cdot\left(C\ \mathrm{e}^{-k_1\ \phi_0} + \gamma\ \sin(\phi_0+\delta)\right) = 0.$$

8. La seule force dissipative est $R_{/\!/}\ \vec{u}_{/\!/}$, donc

$$\mathrm{d}E_\mathrm{m} = \sum_j \delta W(\vec{F}^{\mathrm{dsp}}_{\to j}) = R_{/\!/}\ \vec{u}_{/\!/}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OA} = -r\ R_{/\!/}\ \mathrm{d}(\phi+\pi+\theta) = -\mu\ r\ R_\perp\ \mathrm{d}\phi.$$

   En intégrant de ϕ_0 jusqu'à ϕ_1', on obtient $E_\mathrm{m}(\phi_1') - E_\mathrm{m}(\phi_0) = \int_{\phi_0}^{\phi_1'} -\mu\ r\ R_\perp\ \mathrm{d}\phi$. Or $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = 0$ en ϕ_0 et en ϕ_1', d'où

$$m\ g\ \ell\cdot(\cos\phi_0 - \cos\phi_1') = \int_{\phi_0}^{\phi_1'} -\mu\ r\cdot\left(C\ \mathrm{e}^{-k_1\ \phi} + \gamma\ \sin(\phi+\delta)\right)\ \mathrm{d}\phi = \mu\ r\cdot\left[\frac{C}{k_1}\ \mathrm{e}^{-k_1\ \phi} + \gamma\ \cos(\phi+\delta)\right]_{\phi_0}^{\phi_1'}.$$