# Annexe A

# Compléments mathématiques

## A.I. Espace vectoriel

### A.I.1. Généralités

Dans ce cours, nous utilisons des ***scalaires*** (ici, des nombres réels ou complexes) et des ***vecteurs***, c·-à-d· des éléments d'un ensemble $E$ appelé ***espace vectoriel***, sur lequel sont définies deux opérations :

- l'***addition entre deux vecteurs*** $\vec{a}$ et $\vec{b}$, notée $\vec{a}+\vec{b}$ ;
- la ***multiplication d'un vecteur*** $\vec{a}$ ***par un scalaire*** $\lambda$, notée $\lambda \times \vec{a}$, $\lambda \cdot \vec{a}$ ou $\lambda\ \vec{a}$.

Le résultat de ces deux opérations est un vecteur.

Le ***vecteur nul***, $\vec{0}$, fait notamment partie de $E$.

L'espace vectoriel $E$ est dit *réel* ou *complexe* selon la nature des scalaires.

Une famille de $n$ ($\in \mathbb{N}$) vecteurs $\vec{u}_{i,\ i \in [1 \ldots n]}$ non nuls de $E$ est dite ***libre*** (on dit également qu'ils sont ***indépendants***) si aucun d'entre eux ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Si ce n'est pas le cas, ils constituent une famille ***liée***. En particulier, si $\vec{b} = \lambda\ \vec{a}$ (vecteurs ***colinéaires***, ou encore ***parallèles***), $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont liés.

### A.I.2. Bases, composantes d'un vecteur

Si *tout* vecteur $\vec{a}$ de $E$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de ces $n$ vecteurs indépendants, c·-à-d·

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\ \vec{u}_i,$$

les $\vec{u}_i$ forment une ***base*** $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel $E$. Cette combinaison linéaire est *unique*. Les $a_i$ sont les ***composantes***[*1] de $\vec{a}$ dans cette base. On note $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{B}}$ ou

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut omettre l'indice $\mathcal{B}$.

Toute autre famille de $n$ vecteurs indépendants de $E$ constitue une base de $E$ et toute base de $E$ a le même nombre $n$ d'éléments, la ***dimension*** de l'espace vectoriel.

Une fois la base choisie, nous pouvons raisonner sur les composantes. On a ainsi

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$

1. Le terme de « composantes » est aussi utilisé pour désigner les $a_i\ \vec{u}_i$. Pour éviter la confusion, certains appellent « coordonnées » de $\vec{a}$ les $a_i$.

où l'addition dans le membre de gauche porte sur les vecteurs et celle dans le membre de droite est l'addition usuelle de réels.

De même,

$$\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\lambda\ a_1, \ldots, \lambda\ a_n),$$

où le produit dans le membre de gauche est entre un réel et un vecteur et celui dans le membre de droite est la multiplication usuelle de réels.

Enfin, quelle que soit la base,

$$\vec{0} = (0, \ldots, 0).$$

# A.ii. Espace affine

## A.ii.1. Généralités

Soient un ensemble $\mathcal{E}$, un espace vectoriel $E$ et une application associant à tout couple $(A, B)$ d'éléments de $\mathcal{E}$ un vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$, de $E$. $\mathcal{E}$ est un ***espace affine*** si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall\ (A, B, C) \in \mathcal{E}^3$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles) ;
- $\forall\ A \in \mathcal{E}$ et $\forall\ \vec{v} \in E$, $\exists!\ B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

On en déduit que $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des ***points***.

## A.ii.2. Repères et coordonnées

Notons $n$ la dimension de $E$. Si $n = 0$, $\mathcal{E}$ est un point ; si $n = 1$, c'est une droite ; si $n = 2$, c'est un plan.

On appelle ***repère*** $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ de l'espace affine $\mathcal{E}$ l'association d'un point $O$ (l'***origine*** du repère) de $\mathcal{E}$ et d'une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ de $E$ (on parle aussi parfois de trièdre si $E$ a trois dimensions). Les ***coordonnées*** $(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ d'un point $M$ de $\mathcal{E}$ dans ce repère sont les composantes du ***vecteur position*** $\vec{r} := \overrightarrow{OM} = x_1\ \vec{u}_1 + \cdots + x_n\ \vec{u}_n$ dans la base $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.

Si $A$ et $B$ sont des points de $\mathcal{E}$, de coordonnées respectives $(x_1(A), \ldots, x_n(A))_{\mathcal{R}}$ et $(x_1(B), \ldots, x_n(B))_{\mathcal{R}}$, on a

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1(B) - x_1(A) \\ \vdots \\ x_n(B) - x_n(A) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

# A.iii. Espace euclidien

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux *vecteurs* quelconques d'un espace vectoriel réel $E$. Le ***produit scalaire*** entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, noté [(*2)] $\vec{a} \cdot \vec{b}$, est une opération dont le résultat est un réel et qui possède les propriétés suivantes :

- $\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ;
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$ ;
- $(\lambda\ \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ ;
- $\vec{a} \cdot \vec{a} \geqslant 0$ ;
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ si et seulement si $\vec{a} = \vec{0}$.

Un espace vectoriel réel de dimension finie est dit ***euclidien*** s'il est muni d'un produit scalaire. De même, un espace affine est dit euclidien si l'espace vectoriel sous-jacent est euclidien. L'espace usuel de la physique classique peut être considéré comme un espace affine euclidien réel de dimension 3 (cf· § II.a).

Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, on dit que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont ***orthogonaux*** (ou ***perpendiculaires***).

La ***norme (euclidienne)*** (ou le ***module***) de $\vec{a}$ est le *scalaire* $\|\vec{a}\| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. Elle possède les propriétés suivantes :

2. On notera souvent $\vec{a}^2$, voire $a^2$, la quantité $\vec{a} \cdot \vec{a}$.

- $\|\lambda\ \vec{a}\| = |\lambda|\ \|\vec{a}\|$ ;
- $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leqslant \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (inégalité triangulaire) ;
- $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|$ (inégalité de Cauchy-Schwartz).

De l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on déduit qu'il existe un nombre, l'***angle*** $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, tel que

$$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})}.$$

Si $\|\vec{a}\| = 1$, $\vec{a}$ est dit ***unitaire*** (ou ***normé***). Le vecteur $\vec{a}/\|\vec{a}\|$ est par construction unitaire.

Plaçons-nous dans un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n$.

Il est toujours possible de construire une ***base orthonormée*** de $E$, c.-à-d. une famille de vecteurs $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ *unitaires* ($\forall\ i$, $\|\vec{u}_i\| = 1$), *orthogonaux* deux à deux ($\forall\ i \neq j$, $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$) et constituant une *base* de $E$ (tout vecteur $\vec{a}$ de $E$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\vec{a} = a_1\ \vec{u}_1 + \cdots + a_n\ \vec{u}_n$).

Les ***composantes*** $a_i$ de $\vec{a}$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ sont les produits scalaires de $\vec{a}$ avec les vecteurs de $\mathcal{B}$. En effet,

$$\vec{a} \cdot \vec{u}_i = \sum_{j \neq i} a_j\ \underbrace{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_i}_{0} + a_i\ \underbrace{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i}_{1} = a_i.$$

Toute famille de $n$ vecteurs orthonormés de $E$ constitue une base orthonormée de cet espace.

Dans toute base orthonormée, on a

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1\ b_1 + \cdots + a_n\ b_n}$$

et

$$\boldsymbol{\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \qquad \textbf{(Pythagore)}.$$

Soient $E'$ un sous-espace vectoriel de $E$, de dimension $p \leqslant n$, et $(\vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_p)$ une base orthonormée de $E'$. La ***projection orthogonale*** de $\vec{a}$ sur $E'$ est le vecteur

$$\vec{a}' = (\vec{a} \cdot \vec{u}'_1)\ \vec{u}'_1 + \cdots + (\vec{a} \cdot \vec{u}'_p)\ \vec{u}'_p.$$

De même, soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension $n$, $\mathcal{E}'$ un sous-espace de $\mathcal{E}$, de dimension $p \leqslant n$, et $(O', \vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_p)$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}'$. La projection orthogonale d'un point $M$ sur $\mathcal{E}'$ est le point $M'$ tel que $\overrightarrow{O'M'} = (\overrightarrow{O'M} \cdot \vec{u}'_1)\ \vec{u}'_1 + \cdots + (\overrightarrow{O'M} \cdot \vec{u}'_n)\ \vec{u}'_n$.

## A.IV. Trigonométrie

- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.
- $1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$.
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta \mp \sin\alpha\ \sin\beta$.
  En particulier,
  $$\cos(2\ \alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\ \cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\ \sin^2\alpha,$$
  d'où
  $$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\ \alpha)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos(2\ \alpha)}{2}.$$

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta$.
  En particulier,
$$\sin(2\,\alpha) = 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha.$$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\,\tan\beta}$.
- En posant $u = \tan(\alpha/2)$, on obtient
$$\cos\alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \sin\alpha = \frac{2\,u}{1+u^2} \qquad \text{et} \qquad \tan\alpha = \frac{2\,u}{1-u^2}.$$

# A.v. Rappels de géométrie

## A.v.1. Cercle

Considérons un cercle de centre $O$ et de rayon $R$. Soient $A$ et $M$ deux points du cercle.

- La longueur algébrique de l'arc de cercle $\widehat{AM}$ entre $A$ et $M$ vaut $s = \alpha\,R$, où $\alpha$ est l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OM})$.
  En particulier, le périmètre vaut $s = 2\,\pi\,R$.
- Soit $B$ le point du cercle diamétralement opposé à $A$ : le triangle $ABM$ est rectangle en $M$.
- Pour tout point $C$ sur le cercle, $(\overrightarrow{OA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OM}) = 2\,(\overrightarrow{CA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{CM})$.
- Surface (aire) du disque : $\mathcal{A} = \pi\,R^2$.

## A.v.2. Sphère

Considérons une sphère de rayon $R$.

- Surface (aire) : $\mathcal{A} = 4\,\pi\,R^2$.
- Volume : $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$.

# A.vi. Nombres complexes

## A.vi.1. Représentation cartésienne

Un nombre complexe $z$ est un couple de nombres réels $(x, y)$, où $x$ est la ***partie réelle*** de $z$ (notée $\mathrm{Re}(z)$) et $y$ sa ***partie imaginaire*** (notée $\mathrm{Im}(z)$). On définit sur l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'addition et la multiplication (notées provisoirement $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$) entre deux nombres complexes $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ de la manière suivante :

$$z +_{\mathbb{C}} z' := (x + x', y + y')$$

et

$$z \times_{\mathbb{C}} z' := (x\,x' - y\,y', x\,y' + x'\,y),$$

où les opérations dans les membres de droite sont les opérations usuelles entre réels.

Si $y = y' = 0$, on a $z +_{\mathbb{C}} z' := (x + x', 0)$ et $z \times_{\mathbb{C}} z' := (x\,x', 0)$. On peut donc identifier le nombre complexe $(x, 0)$ et le nombre réel $x$, et utiliser sans inconvénient le même symbole pour l'addition (resp. la multiplication) de nombres complexes que pour l'addition (resp. la multiplication) de réels.

Posons $\mathrm{i} = (0, 1)$. On notera désormais $x + \mathrm{i}\,y$ le nombre complexe $(x, y)$ : en effet,

$$x + \mathrm{i}\,y = (x, 0) + (0, 1) \times (y, 0) = (x, 0) + (0, y) = (x, y).$$

Les nombres de la forme $\mathrm{i}\,y$ sont appelés ***imaginaires purs***.

On a $\mathrm{i}^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1$. On retrouve ainsi facilement la valeur de $z\,z'$ en développant le produit et en regroupant les termes réels et les termes imaginaires purs :

$$(x + \mathrm{i}\,y) \times (x' + \mathrm{i}\,y') = x\,x' + \mathrm{i}\,x\,y' + \mathrm{i}\,y\,x' + \underbrace{\mathrm{i} \times \mathrm{i}}_{-1}\,y\,y' = (x\,x' - y\,y') + \mathrm{i} \times (x\,y' + x'\,y).$$

On définit le ***module*** de $z$ par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et son ***conjugué*** par $z^* = x - \mathrm{i}\,y$. Avec ces notations, si $z \neq 0$, $1/z = z^*/|z|^2$.

### A.vi.2. Représentation trigonométrique

Soit $z = x + \mathrm{i}\ y$ un nombre complexe. Notons $\rho$ son module. On appelle ***argument*** de $z$ le réel $\phi$ défini à un multiple entier de $2\ \pi$ près par $z = \rho\ \cos\phi + \mathrm{i}\ \rho\ \sin\phi$.

D'après la formule de de Moivre,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\ \sin\phi.$$

On a donc $z = \rho\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \phi}$, d'où l'on déduit que $(\rho\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \phi})^* = \rho\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ \phi}$ et $\rho\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \phi}\ \rho'\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ \phi'} = \rho\ \rho'\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(\phi+\phi')}$.

## A.vii. Dérivées

### A.vii.1. Définition

La dérivée [première] d'une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en un point $x$ de $\mathbb{R}$ est définie par [(*3)]

$$f'(x) \coloneqq \lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

On la note aussi $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$.

La dérivée seconde de $f$, notée $f''$ ou $\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}x^2$, est définie par $f'' \coloneqq (f')'$. En répétant cette opération, on obtient la dérivée $n$-ième,

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} f}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

### A.vii.2. Dérivée et tangente à une courbe

Soit une courbe plane d'équation $y = f(x)$. La tangente à cette courbe en un point $(x_0, f[x_0])$ a pour pente $f'(x_0)$ : l'équation de la tangente est donc $y_{\mathrm{tg}}(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ f'(x_0)$.

Plus généralement, pour une courbe paramétrée par une variable $t$ dans un espace de dimension $n$, d'équation $\vec{x} = \vec{f}(t)$ (c·-à-d· $x_1 = f_1(t), \ldots, x_n = f_n(t)$), la tangente au point $\vec{x}(t_0)$ a pour équation $\vec{x}_{\mathrm{tg}}(t) = \vec{f}(t_0) + (t - t_0)\cdot(\mathrm{d}\vec{f}/\mathrm{d}t)_{t=t_0}$.

### A.vii.3. Calcul des dérivées

Soient $f$ et $g$ deux fonctions d'une variable $x$ et $\alpha$ une constante. On a les propriétés suivantes :

- $(f+g)' = f' + g'$ ;
- $(\alpha\ f)' = \alpha\ f'$ ;
- $(f\ g)' = f'\ g + f\ g'$ ;
- $(f/g)' = (f'\ g - f\ g')/g^2$ ;
- $(f\circ g)' = g'\ f'\circ g$ [(*4)].
- Notons $f^{(-1)\circ}$ la fonction réciproque (encore appelée fonction inverse, mais elle n'a rien à voir avec $1/f$) d'une fonction $f$, c·-à-d· la fonction telle que, si elle existe, $\forall\ x$, $(f\circ f^{(-1)\circ})(x) = (f^{(-1)\circ}\circ f)(x) = x$.
  $(f^{(-1)\circ})' = 1/f'\circ f^{(-1)\circ}$ [(*5)].

---

3. Rappelons la définition de la limite d'une fonction réelle $f$ d'une variable réelle $x$ : si $x_0$ et $\ell$ sont finis, $f$ tend vers la limite $\ell$ quand $x$ tend vers $x_0$ (noté « $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ») signifie que $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \alpha > 0$ tel que si $|x - x_0| < \alpha$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
   Pour une limite égale à $+\infty$ (resp· $-\infty$), « $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ » est remplacé par « $f(x) > +\epsilon$ » (resp· « $f(x) < -\epsilon$ »).
   Pour une limite quand $x$ tend vers $+\infty$ (resp· $-\infty$), « $|x - x_0| < \alpha$ » est remplacé par « $x > +\alpha$ » (resp· « $x < -\alpha$ »).
4. Rappelons la définition de la composition $f\circ g$ (« $f$ rond $g$ ») de deux fonctions : $\forall\ x$, $(f\circ g)(x) \coloneqq f(g[x])$. La composition est prioritaire sur les autres opérations.
   On a donc $\forall\ x$, $(f\circ g)'(x) = g'(x)\ f'\circ g(x) = g'(x)\ f'(g[x])$.
5. C·-à-d· $\forall\ x$, $(f^{(-1)\circ})'(x) = 1/f'(f^{(-1)\circ}[x])$.

### A.vii.4. Dérivées usuelles

- $(\mathrm{c^{te}})' = 0$ ;
- $(x^\alpha)' = \alpha\ x^{\alpha-1}$, d'où $(f^\alpha)' = \alpha\ f^{\alpha-1}\ f'$ ;
- $(\ln x)' = 1/x$, d'où l'on déduit que $(\ln|f|)' = f'/f$ ;
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, d'où $(\mathrm{e}^f)' = f'\ \mathrm{e}^f$ ;
- $(\sin x)' = \cos x$, d'où $(\sin f)' = f'\ \cos f$ ;
- $(\cos x)' = -\sin x$, d'où $(\cos f)' = -f'\ \sin f$.

## A.viii. Intégrales simples

### A.viii.1. Primitives et intégrales

Une primitive d'une fonction $f(x)$ est une fonction $F(x)$ telle que, $\forall\ x$, $F'(x) = f(x)$. Toute fonction $F(x) + \mathrm{c^{te}}$ est également une primitive de $f$.

L'intégrale par rapport à $x$ de $f(x)$ de $a$ à $b$, notée $\int_{x=a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x$, vaut

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x = \Big[F\Big]_a^b,$$

où $\Big[F\Big]_a^b \coloneqq F(b) - F(a)$.

Inversement, quelle que soit la valeur de $a$, $\int_{\xi=a}^{x} f(\xi)\ \mathrm{d}\xi$ est une primitive de $f(x)$.

En l'absence d'ambiguïté sur la variable d'intégration, on peut noter $\int_a^b f$ l'intégrale de $a$ à $b$. De même, on note souvent $\int^x f$, voire $\int f$, une primitive quelconque de $f$.

### A.viii.2. Règles générales

- $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$ ;
- $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ ;
- $\displaystyle\int^x (f+g) = \int^x f + \int^x g$ ;
- Si $\alpha$ est une constante, $\displaystyle\int^x \alpha\ f = \alpha \int^x f$.

### A.viii.3. Primitives usuelles

Si $f'$ est la dérivée de $f$, $f$ est une primitive de $f'$. On déduit donc de § A.vii.4 les primitives suivantes :

- $\displaystyle\int^x 0 = \mathrm{c^{te}}$ ;
- $\displaystyle\int^x \xi^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathrm{c^{te}}$, si $\alpha \neq -1$ ;
- $\displaystyle\int^x \frac{1}{\xi} = \ln x + \mathrm{c^{te}}$ ;
- $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^\xi = \mathrm{e}^x + \mathrm{c^{te}}$ ;
- $\displaystyle\int^x \sin\xi = -\cos x + \mathrm{c^{te}}$ ;
- $\displaystyle\int^x \cos\xi = \sin x + \mathrm{c^{te}}$.

### A.VIII.4. Intégration par parties

De $(f\ g)' = f'\ g + f\ g'$, on déduit que

$$\int^x f'\ g = f(x)\ g(x) - \int^x f\ g' + \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$$

ou encore

$$\int_a^b f'\ g = \Big[f\ g\Big]_a^b - \int_a^b f\ g'.$$

Ceci ne présente bien sûr d'intérêt que si $f(x) = \int^x f'$ et $\int^x f\ g'$ sont calculables.

### A.VIII.5. Intégration par changement de variables

Faisons le changement de variable $x = g(t)$ dans l'intégrale $\int_{x=a}^b f(x)\ \mathrm{d}x$. Soient $\alpha$ et $\beta$ tels que $g(\alpha) = a$ et $g(\beta) = b$. On a $\mathrm{d}x = g'(t)\ \mathrm{d}t$, où $g'$ est la dérivée de $g$ par rapport à $t$, donc

$$\int_{x=a}^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{t=\alpha}^\beta f(g[t])\ g'(t)\ \mathrm{d}t.$$

## A.IX. Développements limités

### A.IX.1. Formule de Taylor

Un développement limité d'ordre $n$ d'une fonction $f$ au voisinage d'un point $x_0$ est une approximation par un polynôme de degré $n$ de cette fonction près de $x_0$.

On peut obtenir le développement limité à l'ordre $n$ à l'aide de la formule de Taylor.

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)^i}{i!} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}\right)_{x=x_0} + \cdots,$$

où $(\mathrm{d}^i f/\mathrm{d}x^i)_{x=x_0}$ est la dérivée $i$-ième de $f$ en $x_0$ (avec la convention $\mathrm{d}^0 f/\mathrm{d}x^0 = f$) et la factorielle de $i$ vaut $i! = 1 \times 2 \times \cdots \times (i-1) \times i$ (avec la convention $0! = 1$).

### A.IX.2. Développements usuels au voisinage de 0

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\ x + \dfrac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2}\ x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \cdots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}\ x^n + \cdots.$

  Si $\alpha$ est un entier positif, $(1+x)^\alpha$ est un polynôme et est égal à son développement limité à l'ordre $\alpha$.

  Si $\alpha = -1$, on obtient

  $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n\ x^n + \cdots\ ;$$

- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\ \dfrac{x^n}{n} + \cdots$ (sans factorielles) ;
- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$ ;
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^p\ \dfrac{x^{2\,p}}{(2\,p)!} + \cdots$ ($p \in \mathbb{N}$ et $n = 2\,p$) ;
- $\sin x = x + \cdots + (-1)^p\ \dfrac{x^{2\,p+1}}{(2\,p+1)!} + \cdots$ ($p \in \mathbb{N}$ et $n = 2\,p + 1$).

Les développements de cosinus et sinus sont donnés pour un angle $x$ en radians.

# A.x. Équations différentielles d'ordre 1

## A.x.1. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Il s'agit des équations du type

$$\boldsymbol{y' + a\ y = b,}$$

où $y$, $a$ et $b$ sont des fonctions de $x$ et $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

### A.x.1.*a*. Méthode générale

Les solutions sont de la forme

$$\boldsymbol{y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p},}$$

où $y_\mathrm{h}$ est solution de l'*équation homogène* (c.-à-d. sans second membre)

$$\boldsymbol{y'_\mathrm{h} + a\ y_\mathrm{h} = 0}$$

et $y_\mathrm{p}$ est une *solution particulière* (quelconque) de l'équation générale

$$\boldsymbol{y'_\mathrm{p} + a\ y_\mathrm{p} = b.}$$

#### A.x.1.*a*.i. Solutions de l'équation homogène

Soit $\boldsymbol{A(x) = \int^x a(\xi)\ \mathrm{d}\xi}$ une primitive quelconque de $a(x)$.
On a

$$A' = a = -\frac{y'_\mathrm{h}}{y_\mathrm{h}} = (-\ln y_\mathrm{h})',$$

donc

$$\ln y_\mathrm{h} = -A + \mathrm{c^{te}},$$

d'où, en prenant l'exponentielle,

$$\boldsymbol{y_\mathrm{h}(x) = \lambda\ \mathrm{e}^{-A(x)}}.$$

La valeur de la constante $\lambda$ sera imposée par le choix de $y_\mathrm{p}$ et les conditions particulières.

#### A.x.1.*a*.ii. Solution particulière

Une solution particulière est parfois évidente (p. ex. § A.x.1.*c*). Sinon, on peut utiliser la méthode suivante ou celle du § A.x.1.*b* pour en trouver une. On a

$$\left(y_\mathrm{p}\ \mathrm{e}^A\right)' = y'_\mathrm{p}\ \mathrm{e}^A + y_\mathrm{p} \cdot \left(\mathrm{e}^A\right)' = y'_\mathrm{p}\ \mathrm{e}^A + y_\mathrm{p}\ A'\ \mathrm{e}^A = (y'_\mathrm{p} + a\ y_\mathrm{p})\ \mathrm{e}^A = b\ \mathrm{e}^A,$$

d'où, en prenant une primitive quelconque de cette expression (on cherche *une* solution particulière) et en multipliant par $\mathrm{e}^{-A}$,

$$y_\mathrm{p}(x) = \mathrm{e}^{-A(x)} \int^x b(\xi)\ \mathrm{e}^{A(\xi)}\ \mathrm{d}\xi.$$

Les bornes inférieures des intégrales dans les expressions ci-dessus n'ont aucune importance. Les modifier revient à changer la constante multiplicative $\lambda$.

### A.x.1.*b*. Méthode de la variation de la constante

On peut retrouver ce résultat à l'aide de la méthode dite de « variation de la constante ». On cherche directement la solution générale sous la forme

$$\boldsymbol{y(x) = \phi(x)\ \mathrm{e}^{-A(x)}}$$

(c.-à-d. comme l'expression de $y_\mathrm{h}(x)$, mais avec une fonction $\phi(x)$ au lieu de la constante $\lambda$).
En appliquant l'équation générale à cette expression, on obtient

$$b = y' + a\ y = \left(\phi'\ \mathrm{e}^{-A} + \phi \cdot \left[\mathrm{e}^{-A}\right]'\right) + a\ \phi\ \mathrm{e}^{-A} = (\phi'\ \mathrm{e}^{-A} - \phi\ A'\ \mathrm{e}^{-A}) + a\ \phi\ \mathrm{e}^{-A} = \phi'\ \mathrm{e}^{-A},$$

donc, en multipliant par $\mathrm{e}^A$ et en intégrant,

$$\phi(x) = \int^x b(\xi)\ \mathrm{e}^{A(\xi)}\ \mathrm{d}\xi + \lambda.$$

### A.x.1.*c*. Cas particuliers

- Si $a$ est constante,
$$\boldsymbol{y_{\mathrm{h}}(x) = \lambda\ \mathrm{e}^{-a\,x}}.$$
- Si $a$ et $b$ sont constantes,
$$\boldsymbol{y_{\mathrm{p}}(x) = \frac{b}{a}}.$$

## A.x.2. Équations différentielles d'ordre 1 à variables séparables

Il s'agit des équations du type
$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\ g(y)},$$
où $y$ est une fonction de $x$.

En regroupant les termes en $y$ à gauche et ceux en $x$ à droite, on a $\mathrm{d}y/g(y) = f(x)\ \mathrm{d}x$, soit
$$\boldsymbol{\int^y \frac{\mathrm{d}\eta}{g(\eta)} = \int^x f(\xi)\ \mathrm{d}\xi + \mathrm{c}^{\mathrm{te}}},$$
où la valeur de la constante est imposée par une condition particulière. En notant
$$\Gamma(y) = \int^y \frac{\mathrm{d}\eta}{g(\eta)}$$
et $\Gamma^{(-1)\circ}$ sa fonction réciproque, on obtient finalement
$$y(x) = \Gamma^{(-1)\circ}\left(\int^x f[\xi]\ \mathrm{d}\xi + \mathrm{c}^{\mathrm{te}}\right).$$

## Exemple

Résolvons l'équation $y'(x) = x^2\ y$, où $y(x_0) = y_0$ et $y > 0$.

On a $\mathrm{d}y/y = x^2\ \mathrm{d}x$, d'où $\left[\ln y\right]_{y_0}^{y} = \left[x^3/3\right]_{x_0}^{x}$. On obtient donc $y = y_0\ \exp([x^3 - x_0^3]/3)$.