

# Table des matières

Abréviations et notations . . . . .	2
<b>A. Compléments mathématiques</b> . . . . .	<b>7</b>
A. Espace vectoriel . . . . .	7
1. Généralités . . . . .	7
2. Bases, composantes d'un vecteur . . . . .	7
B. Espace affine . . . . .	8
1. Généralités . . . . .	8
2. Repères et coordonnées . . . . .	8
C. Espace euclidien . . . . .	8
D. Trigonométrie . . . . .	9
E. Rappels de géométrie . . . . .	10
1. Cercle . . . . .	10
2. Sphère . . . . .	10
F. Nombres complexes . . . . .	10
1. Représentation cartésienne . . . . .	10
2. Représentation trigonométrique . . . . .	11
G. Dérivées . . . . .	11
1. Définition . . . . .	11
2. Dérivée et tangente à une courbe . . . . .	11
3. Calcul des dérivées . . . . .	11
4. Dérivées usuelles . . . . .	12
H. Intégrales simples . . . . .	12
1. Primitives et intégrales . . . . .	12
2. Règles générales . . . . .	12
3. Primitives usuelles . . . . .	12
4. Intégration par parties . . . . .	13
5. Intégration par changement de variables . . . . .	13
I. Développements limités . . . . .	13
1. Formule de Taylor . . . . .	13
2. Développements usuels au voisinage de 0 . . . . .	13
J. Équations différentielles d'ordre 1 . . . . .	14
1. Équations différentielles linéaires d'ordre 1 . . . . .	14
a. Méthode générale . . . . .	14
i. Solutions de l'équation homogène . . . . .	14
ii. Solution particulière . . . . .	14
b. Méthode de la variation de la constante . . . . .	14
c. Cas particuliers . . . . .	15
2. Équations différentielles d'ordre 1 à variables séparables . . . . .	15
<b>I. Introduction mathématique</b> . . . . .	<b>17</b>
A. Calcul vectoriel . . . . .	17
1. Produit vectoriel . . . . .	17
‡ 2. Double produit vectoriel . . . . .	19
‡ 3. Produit mixte . . . . .	19
B. Calcul différentiel . . . . .	19
1. Fonction réelle d'une seule variable réelle . . . . .	19
2. Fonction réelle de plusieurs variables réelles . . . . .	20

3.	Fonction vectorielle d'une variable réelle . . . . .	20
a.	Dérivée d'une fonction vectorielle . . . . .	20
b.	Dérivée d'un produit scalaire . . . . .	20
	Dérivée d'un vecteur de norme constante . . . . .	20
	Dérivée d'un vecteur de norme constante . . . . .	20
c.	Dérivée d'un produit vectoriel . . . . .	21
d.	Différentielle d'une fonction vectorielle . . . . .	21
c.	Systèmes de coordonnées . . . . .	21
1.	Coordonnées cartésiennes . . . . .	21
2.	Coordonnées cylindriques, coordonnées polaires . . . . .	21
3.	Coordonnées sphériques . . . . .	22
4.	Abscisse curviligne. Repère de Frenet . . . . .	22
a.	Abscisse curviligne . . . . .	22
b.	Repère de Frenet . . . . .	23
<b>II.</b>	<b>Cinématique du point</b> . . . . .	<b>25</b>
A.	Espace et temps en physique . . . . .	25
B.	Changement de base de dérivation. Vecteur vitesse angulaire de rotation . . . . .	25
C.	Notion de référentiel. Vitesse et accélération . . . . .	27
1.	Référentiel . . . . .	27
2.	Vitesse . . . . .	27
3.	Accélération . . . . .	27
D.	Composantes de la vitesse et de l'accélération . . . . .	28
1.	Repère cartésien . . . . .	28
2.	Repère cylindrique . . . . .	28
3.	Repère de Frenet . . . . .	28
E.	Changements de référentiels . . . . .	28
1.	Formules générales . . . . .	28
a.	Composition des vitesses . . . . .	29
b.	Composition des accélérations . . . . .	29
2.	Cas particulier . . . . .	29
<b>III.</b>	<b>Dynamique du point</b> . . . . .	<b>31</b>
A.	Point matériel. Lois de Newton. Principe de relativité . . . . .	31
1.	Point matériel . . . . .	31
2.	Première loi de Newton. Référentiels galiléens . . . . .	31
3.	Deuxième loi de Newton. Quantité de mouvement . . . . .	32
	Notions de déterminisme et de chaos . . . . .	32
4.	Troisième loi de Newton . . . . .	32
5.	Principe de relativité . . . . .	33
a.	Énoncé du principe . . . . .	33
‡	b. Relativité, lumière et Éther . . . . .	33
‡	c. Transformation de Lorentz . . . . .	33
‡	d. Relativité et lois de Newton . . . . .	33
B.	Forces . . . . .	34
1.	Interactions fondamentales . . . . .	34
2.	Forces d'action à distance . . . . .	34
a.	Gravitation . . . . .	34
i.	Cas général : loi de l'attraction universelle . . . . .	34
ii.	Cas particulier : poids . . . . .	34
‡	iii. Principe d'équivalence . . . . .	34
b.	Force électromagnétique . . . . .	35
i.	Cas général : force de Lorentz . . . . .	35
ii.	Cas particulier : force électrostatique . . . . .	35
3.	Forces de contact . . . . .	35
a.	Réaction, frottements solides . . . . .	35
i.	Cas cinétique . . . . .	36
ii.	Cas statique . . . . .	36
b.	Tension exercée par un ressort rectiligne (loi de Hooke) . . . . .	36

c.	Tension exercée par un fil . . . . .	36
d.	Force de pression . . . . .	36
e.	Poussée d'Archimède . . . . .	36
f.	Frottements fluides . . . . .	36
c.	Théorèmes généraux pour un point matériel . . . . .	37
1.	Théorème du moment cinétique . . . . .	37
2.	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	37
d.	Énergie . . . . .	38
1.	Gradient . . . . .	38
2.	Énergie potentielle. Forces conservatives et dissipatives . . . . .	38
3.	Énergie mécanique . . . . .	39
4.	Quelques travaux et énergies potentielles... . . . .	39
a.	Gravitation . . . . .	39
i.	Cas général . . . . .	39
ii.	Énergie potentielle de pesanteur . . . . .	39
b.	Force électromagnétique . . . . .	40
i.	Force magnétique . . . . .	40
ii.	Potentiel électrique . . . . .	40
iii.	Force de Coulomb . . . . .	40
c.	Réaction . . . . .	40
d.	Ressort . . . . .	40
e.	Fil inextensible rectiligne . . . . .	40
<b>IV.</b>	<b>Oscillateurs linéaires</b> . . . . .	<b>41</b>
A.	Équations différentielles linéaires d'ordre deux . . . . .	41
1.	Équation homogène. Traitement général ( $\{a_0, a_1\} \in \mathbb{C}^2$ ) . . . . .	41
a.	Cas $\Delta \neq 0$ . . . . .	42
b.	Cas $\Delta = 0$ . . . . .	42
2.	Équation homogène. Cas où $\{a_0, a_1\} \in \mathbb{R}^{+2}$ . . . . .	42
a.	Cas $\Delta > 0$ : régime aperiodique . . . . .	42
b.	Cas $\Delta = 0$ : régime critique . . . . .	42
c.	Cas $\Delta < 0$ : régime pseudo-périodique ou périodique . . . . .	42
i.	Cas $\alpha = 0$ : oscillateur harmonique non amorti . . . . .	42
ii.	Cas $\alpha > 0$ : oscillateur harmonique amorti . . . . .	43
3.	Solutions particulières. Cas où $\{a_0, a_1\} \in \mathbb{R}^{+2}$ et $b(t) \in \mathbb{R}$ . . . . .	43
a.	Oscillations libres . . . . .	43
b.	Oscillations forcées . . . . .	43
4.	Conditions particulières . . . . .	44
5.	Exemple . . . . .	44
B.	Oscillateurs en physique . . . . .	44
1.	Oscillations libres . . . . .	44
2.	Oscillations forcées. Étude de la résonance . . . . .	45
a.	Étude de l'amplitude . . . . .	46
b.	Étude du déphasage . . . . .	47
‡ c.	Résonance de vitesse . . . . .	47
‡ d.	Battements . . . . .	47
<b>V.</b>	<b>Dynamique des systèmes</b> . . . . .	<b>49</b>
A.	Centre d'inertie . . . . .	49
B.	Distributions discrète et continue de matière . . . . .	49
c.	Dynamique dans un référentiel galiléen . . . . .	50
1.	Théorème du centre d'inertie . . . . .	50
2.	Théorème du moment cinétique . . . . .	51
	Exemple : équilibre d'une échelle . . . . .	52
3.	Centre de gravité. Moment du poids . . . . .	52
4.	Action et réaction . . . . .	53
5.	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	53
a.	Version infinitésimale . . . . .	53

		53
		53
		54
		54
D.	Dynamique dans le référentiel barycentrique . . . . .	54
1.	Référentiel barycentrique . . . . .	54
2.	Moment cinétique . . . . .	55
‡	a. 1 <sup>er</sup> théorème de Koenig . . . . .	55
	b. Théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique . . . . .	55
3.	Énergie cinétique . . . . .	55
‡	a. 2 <sup>e</sup> théorème de Koenig . . . . .	55
	b. Théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique . . . . .	56
E.	Énergie . . . . .	56
1.	Énergie potentielle d'interaction . . . . .	56
2.	Énergie mécanique . . . . .	57
‡ 3.	Énergie totale. Énergie interne . . . . .	58
‡	a. Forces non conservatives . . . . .	58
‡	b. Énergie totale. Énergie mécanique . . . . .	58
‡	c. Énergie interne. Premier principe de la thermodynamique . . . . .	59
‡	Remarque : non-extensivité de l'énergie interne (en général) . . . . .	59
F.	Lois de conservation pour un système isolé . . . . .	59
G.	Moments (scalaires) par rapport à un axe . . . . .	60
1.	Théorème du moment cinétique par rapport à un axe . . . . .	60
‡ 2.	Couple . . . . .	61
H.	Systèmes ouverts . . . . .	61
I.	Résolution d'un problème de mécanique . . . . .	62
<b>VI.</b>	<b>Collisions</b> . . . . .	<b>63</b>
A.	Introduction . . . . .	63
B.	Lois de conservation . . . . .	63
C.	Chocs élastiques . . . . .	64
1.	Conservation de l'énergie cinétique . . . . .	64
2.	Étude dans le référentiel barycentrique du système . . . . .	64
3.	Étude dans le référentiel $\mathcal{R}$ . . . . .	66
4.	Cas particuliers . . . . .	66
a.	Cible $M_2$ immobile avant la collision . . . . .	66
	Corps de même masse . . . . .	66
	Corps de même masse . . . . .	66
b.	Choc frontal . . . . .	66
D.	Chocs inélastiques . . . . .	67
1.	Dissipation de l'énergie cinétique . . . . .	67
2.	Choc parfaitement mou . . . . .	68
E.	Explosions . . . . .	68
‡ F.	Section efficace . . . . .	68
‡ 1.	Angle solide . . . . .	68
‡ 2.	Sections efficaces différentielle et totale . . . . .	69
‡ 3.	Application à la diffusion entre noyaux . . . . .	69
<b>VII.</b>	<b>Système isolé de deux points matériels</b> . . . . .	<b>71</b>
A.	Lois de Kepler . . . . .	71
B.	Mobile fictif . . . . .	71
C.	Constantes du mouvement . . . . .	72
1.	Moment cinétique. 2 <sup>e</sup> loi de Kepler . . . . .	72
2.	Énergie mécanique. Énergie potentielle effective . . . . .	73
	Cas d'une force en $1/r^2$ . . . . .	73
D.	Coniques . . . . .	75
1.	Généralités . . . . .	75
2.	Foyer, excentricité . . . . .	75
3.	Équation en coordonnées polaires . . . . .	75

4.	Équation cartésienne . . . . .	76
a.	Ellipse et hyperbole . . . . .	76
i.	Ellipse . . . . .	76
ii.	Hyperbole . . . . .	76
b.	Parabole . . . . .	76
E.	Trajectoire . . . . .	77
1.	Formules de Binet . . . . .	77
2.	Force en $1/r^2$ . . . . .	77
a.	Équation de la trajectoire. 1 <sup>re</sup> loi de Kepler . . . . .	77
	Application au Système solaire . . . . .	78
b.	Énergie . . . . .	78
i.	Ellipse . . . . .	78
ii.	Parabole . . . . .	78
iii.	Hyperbole . . . . .	78
c.	Propriétés de la trajectoire . . . . .	78
i.	Ellipse . . . . .	78
$\alpha$ .	Période . . . . .	78
$\beta$ .	Trajectoire circulaire . . . . .	79
$\gamma$ .	3 <sup>e</sup> loi de Kepler . . . . .	79
$\delta$ .	Vitesse de satellisation . . . . .	79
ii.	Parabole. Vitesse de libération . . . . .	79
$\ddagger$ iii.	Hyperbole. Diffusion de Rutherford entre deux noyaux . . . . .	80
<b>VIII.</b>	<b>Dynamique dans un référentiel non galiléen</b> . . . . .	<b>83</b>
A.	Forces d'inertie . . . . .	83
B.	Application au référentiel terrestre . . . . .	84
1.	Force de pesanteur . . . . .	84
2.	Déviaton vers l'est . . . . .	85
3.	Marées . . . . .	85
<b>IX.</b>	<b>Éléments de dynamique du solide indéformable</b> . . . . .	<b>87</b>
A.	Cinématique du solide . . . . .	87
	Axe instantané de rotation . . . . .	87
B.	Moment d'inertie, moment cinétique, énergie cinétique . . . . .	88
	Cas particulier du référentiel barycentrique . . . . .	88
C.	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	88
D.	Calcul du moment d'inertie . . . . .	89
1.	Théorème de Huygens . . . . .	89
2.	Moment d'inertie d'un cylindre . . . . .	89
3.	Moment d'inertie d'une sphère . . . . .	90
E.	Solide en rotation autour d'un axe fixe . . . . .	90
1.	Axe fixe dans un référentiel galiléen . . . . .	90
	Application au pendule pesant . . . . .	91
2.	Axe fixe dans le référentiel barycentrique . . . . .	91
	Application : roulement sans glissement . . . . .	91