Chapitre VIII

Dynamique dans un référentiel non galiléen

VIII.A. Forces d'inertie

Soient $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}'$ un référentiel non galiléen. On rappelle que

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\mathrm{C}},$$

où

$$\boldsymbol{\vec{a}_{\mathrm{e}} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \overrightarrow{O'M})}$$

est l'accélération d'entraînement et

$$\boldsymbol{\vec{a}_{\mathrm{C}} = 2\ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}$$

est l'accélération de Coriolis.

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces de résultante $\vec{F}_{\to M}$, on a, d'après la 2e loi de Newton,

$$\vec{F}_{\to M} = m\ \vec{a}_{M/\mathcal{R}}.$$

On obtient ainsi ***la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen,***

$$\boldsymbol{m\ \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{F}_{\to M} + \vec{f}_{\mathrm{e}} + \vec{f}_{\mathrm{C}},}$$

où

$$\boldsymbol{\vec{f}_{\mathrm{e}} = -m\ \vec{a}_{\mathrm{e}}}$$

est la ***force d'inertie d'entraînement*** et

$$\boldsymbol{\vec{f}_{\mathrm{C}} = -m\ \vec{a}_{\mathrm{C}}}$$

est la ***force d'inertie de Coriolis***.

Tous les théorèmes énoncés pour des référentiels galiléens sont valables pour des référentiels non galiléens à condition d'ajouter les forces d'inertie ($\vec{f}_{\mathrm{e}}$ et $\vec{f}_{\mathrm{C}}$) aux forces dues à des interactions ($\vec{F}$).

Par exemple, si A est un point fixe dans $\mathcal{R}'$, le théorème du moment cinétique pour un système de points matériels s'énonce

$$\frac{\mathrm{d}_{/\mathcal{R}'}\vec{L}_{A/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \overrightarrow{AM}_j \times (\vec{F}_{\mathrm{ext}\to j} + \vec{f}_{\mathrm{e},j} + \vec{f}_{\mathrm{C},j}),$$

où $\vec{L}_{A/\mathcal{R}'} = \sum_j m_j\ \overrightarrow{AM}_j \times \vec{v}_{j/\mathcal{R}'}$, $\vec{f}_{\mathrm{e},j} = -m_j\ \vec{a}_{\mathrm{e},j}$, etc·.

Il est inutile de tenir compte des forces d'inertie de Coriolis dans le théorème de l'énergie cinétique car

$$(\delta W[\vec{f}_{\mathrm{C}}])_{/\mathcal{R}'} = \vec{f}_{\mathrm{C}} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}\ \mathrm{d}t = -2\ m \cdot \underbrace{(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}) \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}_{0}\ \mathrm{d}t = 0.$$

VIII.b. Application au référentiel terrestre

Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ un référentiel galiléen, par exemple le référentiel de Copernic, dont l'origine O est le centre d'inertie du système solaire.

Notons $\mathcal{R}' = (O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ le ***référentiel terrestre***, c.-à-d. un référentiel (non galiléen) lié à la Terre. Prenons le centre de la Terre comme origine O' et $(O'z')$ selon l'axe de rotation de la Terre.

Le ***référentiel géocentrique*** est le référentiel barycentrique de la Terre, $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. La Terre tourne sur elle-même à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ (notée $\vec{\Omega}$ par la suite) dans le référentiel géocentrique. On supposera que la vitesse de rotation est constante, donc que $\mathrm{d}_{/\mathcal{R}}\vec{\Omega}/\mathrm{d}t = \vec{0}$ [(*1)].

À ce mouvement de rotation s'ajoute le mouvement de révolution de la Terre autour du centre d'inertie du système solaire, c.-à-d. le mouvement de O' dans le référentiel de Copernic.

Soit M un point proche de la surface terrestre. Notons r sa distance au centre de la Terre, ϕ sa longitude et θ sa colatitude. Nous utiliserons également les coordonnées cylindriques de M : sa distance à l'axe de rotation, ρ ; son angle polaire, ϕ ; et sa cote, z'.

Le mouvement d'un point M de masse m dans le référentiel terrestre est déterminé par

$$m\, \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{F}_{\to M} - m \cdot (\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'M}]) - m \cdot (2\, \vec{\Omega} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}).$$

On peut décomposer $\vec{F}_{\to M}$ en plusieurs termes :

- la force gravitationnelle exercée par la Terre sur M, $\vec{F}_{T\to M}$;
- les forces gravitationnelles exercées par les autres corps, principalement le Soleil (S) et la Lune (L) : $\vec{F}_{S\to M}$ et $\vec{F}_{L\to M}$;
- toutes les autres forces, $\vec{F}_{\text{autres}\to M}$.

On obtient

$$\boldsymbol{m\, \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}} = \begin{array}{ll} \boldsymbol{\vec{F}_{T\to M} - m\, \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'M})} & \textbf{(pesanteur)} \\ \boldsymbol{-\, 2\, m\, \vec{\Omega} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}} & \textbf{(force de Coriolis)} \\ \boldsymbol{+\, \vec{F}_{S\to M} + \vec{F}_{L\to M} - m\, \vec{a}_{O'/\mathcal{R}}} & \textbf{(force de marée)} \\ \boldsymbol{+\, \vec{F}_{\text{autres}\to M}.} & \end{array}$$

VIII.b.1. Force de pesanteur

Supposons dans une première approximation le référentiel géocentrique galiléen (c.-à-d. $\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}$) et négligeons les forces exercées par le Soleil et la Lune. Faisons en outre l'hypothèse que la vitesse de M dans $\mathcal{R}'$ est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de Coriolis.

On a alors

$$m\, \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{F}_{T\to M} + \vec{F}_{\text{autres}\to M} - m\, \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'M}).$$

Supposons la Terre sphérique. Notons M_T sa masse et R son rayon. On a $r \approx R$ et

$$\vec{F}_{T\to M} = -\frac{\mathcal{G}\, M_T\, m}{R^2}\, \vec{u}_r = -m\, g_0\, \vec{u}_r,$$

où

$$g_0 = \frac{\mathcal{G}\, M_T}{R^2}.$$

Par ailleurs, $\vec{\Omega} = \Omega\, \vec{u}_{z'}$ et $\overrightarrow{O'M} = \rho\, \vec{u}_\rho + z'\, \vec{u}_{z'}$, d'où

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O'M}) &= \Omega\, \vec{u}_{z'} \times (\Omega\, \vec{u}_{z'} \times [\rho\, \vec{u}_\rho + z'\, \vec{u}_{z'}]) \\ &= \rho\, \Omega^2\, \vec{u}_{z'} \times \vec{u}_\phi = -\rho\, \Omega^2\, \vec{u}_\rho = -R\, \Omega^2 \cos\lambda\, \vec{u}_\rho, \end{aligned}$$

où $\lambda = \pi/2 - \theta$ est la latitude.

On obtient finalement

$$m\, \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = m\, \vec{g} + \vec{F}_{\text{autres}\to M},$$

1. La direction de l'axe de rotation de la Terre tourne en fait autour de l'axe perpendiculaire à l'écliptique avec une période d'environ 26 000 ans (phénomène de ***précession des équinoxes***) ; l'étoile Polaire (à $\approx 1°$ du pôle Nord actuellement) ne méritera donc plus son nom dans quelques milliers d'années.

   À plus longue échelle, la rotation de la Terre ralentit à cause des marées.

où

$$\boldsymbol{\vec{g} = -g_0\ \vec{u}_r + R\ \Omega^2 \cos\lambda\ \vec{u}_\rho}.$$

L'accélération de la pesanteur comprend donc un terme dominant dû à l'attraction de la Terre, dirigé vers le centre de la Terre, et un terme correctif dû à la force centrifuge, perpendiculaire à l'axe des pôles et dirigé vers l'extérieur.

Le terme centrifuge est nul aux pôles ($\lambda = \pm\pi/2$) et est maximal à l'équateur ($\lambda = 0$). La verticale, c·-à-d· la direction de $\vec{g}$, n'est rigoureusement dirigée vers le centre de la Terre qu'à l'équateur (on a alors $\vec{u}_\rho = \vec{u}_r$).

Aux pôles, la norme $g(\lambda)$ de $\vec{g}$ vaut $g(\pm\pi/2) = g_0$. À l'équateur, $g(0) = g_0 - R\ \Omega^2 < g(\pm\pi/2)$.

En fait, la Terre ressemble à un ellipsoïde aplati aux pôles [(*2)] : la distance des pôles au centre de la Terre est inférieure d'environ 1/300 à celle de l'équateur au centre de la Terre, d'où $g_0(\pm\pi/2) > g_0(0)$. La différence entre $g(\pm\pi/2)$ et $g(0)$ est donc supérieure à celle donnée par le calcul précédent.

VIII.B.2. Déviation vers l'est

Si M n'est pas immobile dans $\mathcal{R}'$, on doit tenir compte de la force de Coriolis. Étudions le cas où M a un mouvement vertical vers le bas ($\dot{r} < 0$, $\dot{\phi} \approx 0$, $\dot{\theta} \approx 0$). On a alors

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} \approx \dot{r}\ \vec{u}_r$$

et

$$\vec{f_\mathrm{C}} = -2\ m\ \vec{\Omega} \times \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = -2\ m\ \Omega\ \vec{u}_{z'} \times \dot{r}\ \vec{u}_r.$$

Or,

$$\vec{u}_{z'} = \cos\theta\ \vec{u}_r - \sin\theta\ \vec{u}_\theta,$$

d'où

$$\vec{f_\mathrm{C}} = -2\ m\ \Omega\ \dot{r} \cdot (\cos\theta\ \vec{u}_r - \sin\theta\ \vec{u}_\theta) \times \vec{u}_r = -2\ m\ \Omega\ \dot{r}\ \cos\lambda\ \vec{u}_\phi.$$

Comme $\dot{r} < 0$, la force de Coriolis est dirigée selon $\vec{u}_\phi$: M est donc dévié vers l'est.

VIII.B.3. Marées

Nous tenons ici compte de l'attraction exercée par le Soleil et la Lune. On a ||

$$\vec{F}_{S\to M} = -\frac{\mathcal{G}\ M_S\ m}{\overrightarrow{SM}^2} \frac{\overrightarrow{SM}}{||\overrightarrow{SM}||} \qquad \text{et} \qquad \vec{F}_{L\to M} = -\frac{\mathcal{G}\ M_L\ m}{\overrightarrow{LM}^2} \frac{\overrightarrow{LM}}{||\overrightarrow{LM}||}.$$

Par ailleurs, en appliquant le théorème du centre d'inertie à la Terre, on obtient

$$M_T\ \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{F}_{S\to T} + \vec{F}_{L\to T} = -\frac{\mathcal{G}\ M_S\ M_T}{\overrightarrow{SO'}^2} \frac{\overrightarrow{SO'}}{||\overrightarrow{SO'}||} - \frac{\mathcal{G}\ M_L\ M_T}{\overrightarrow{LO'}^2} \frac{\overrightarrow{LO'}}{||\overrightarrow{LO'}||} = \frac{\mathcal{G}\ M_S\ M_T}{D_S^2}\ \vec{u}_S + \frac{\mathcal{G}\ M_L\ M_T}{D_L^2}\ \vec{u}_L,$$

où $\vec{u}_S$ (resp· $\vec{u}_L$) est un vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre vers le Soleil (resp· la Lune), et D_S (resp· D_L) est la distance entre le centre de la Terre et le Soleil (resp· la Lune). Comme $D_S \gg R$, $-\overrightarrow{SM}/||\overrightarrow{SM}|| \approx \vec{u}_S$. De même, $D_L \gg R$, donc $-\overrightarrow{LM}/||\overrightarrow{LM}|| \approx \vec{u}_L$.

On en déduit que

$$\vec{F}_{S\to M} + \vec{F}_{L\to M} - m\ \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \mathcal{G}\ m \cdot \left(M_S \cdot \left[\frac{1}{\overrightarrow{MS}^2} - \frac{1}{D_S^2} \right] \vec{u}_S + M_L \cdot \left[\frac{1}{\overrightarrow{ML}^2} - \frac{1}{D_L^2} \right] \vec{u}_L \right).$$

Notons $\alpha_S = (\widehat{\vec{u}_S, \vec{u}_\rho})$ et $\alpha_L = (\widehat{\vec{u}_L, \vec{u}_\rho})$. On a

$$\overrightarrow{ML}^2 = \left(\overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{O'L}\right)^2 = \overrightarrow{MO'}^2 + \overrightarrow{O'L}^2 + 2\ \overrightarrow{MO'} \cdot \overrightarrow{O'L} = R^2 + D_L^2 - 2\ R\ D_L\ \cos\alpha_L.$$

2. Cet aplatissement résulte d'ailleurs de l'effet sur la Terre, lorsqu'elle se formait et n'était pas encore rigide, de la force centrifuge due à sa rotation.

Un développement limité au premier ordre en R/D_L de $1/\overrightarrow{ML}^2$ nous donne

$$\frac{1}{\overrightarrow{ML}^2} = \frac{1}{D_L^2}\,\frac{1}{1 - 2\,R\,\cos\alpha_L/D_L + R^2/D_L^2} \approx \frac{1}{D_L^2}\cdot\left(1 + \frac{2\,R\,\cos\alpha_L}{D_L}\right).$$

On obtient donc que

$$\mathcal{G}\,m\,M_L\cdot\left(\frac{1}{\overrightarrow{ML}^2} - \frac{1}{D_L^2}\right)\vec{u}_L = \frac{2\,\mathcal{G}\,m\,M_L\,R\,\cos\alpha_L}{D_L^3}\,\vec{u}_L.$$

De même,

$$\mathcal{G}\,m\,M_S\cdot\left(\frac{1}{\overrightarrow{MS}^2} - \frac{1}{D_S^2}\right)\vec{u}_S = \frac{2\,\mathcal{G}\,m\,M_S\,R\,\cos\alpha_S}{D_S^3}\,\vec{u}_S.$$

Les termes de marée sont donc en $1/D^3$. C'est pourquoi, alors que l'attraction due au Soleil est bien supérieure à celle de la Lune, le terme de marée d'origine solaire est deux fois plus faible que le terme lunaire.

Les marées tendent à éloigner M du centre de la Terre et sont maximales, en première approximation, pour les points sur l'axe passant par le centre de la Terre et la Lune. N'étant pas rigides, les océans sont bien plus sensibles aux marées que les continents. Ils tendent à prendre la forme d'un ellipsoïde dont le grand axe est aligné avec la Lune : les points à $\alpha_L = 0$ ou π sont à marée haute (pleine mer) ; ceux à $\alpha_L = \pi/2$ ou $3\,\pi/2$ sont à marée basse (basse mer). À cause de la rotation de la Terre, chaque point d'un océan subit deux pleines mers et deux basses mers par jour [*3].

Si la Terre, la Lune et le Soleil sont alignés, l'effet du Soleil s'ajoute à celui de la Lune : on parle alors de marées de vives eaux (coefficient de marée maximal) ; les marées hautes sont particulièrement hautes, les marées basses particulièrement basses. À l'inverse, quand la Terre, la Lune et le Soleil sont en quadrature ($(\widehat{\vec{u}_L, \vec{u}_S}) = \pm\pi/2$), l'effet du Soleil s'oppose à celui de la Lune : on parle alors de marées de mortes eaux (coefficient de marée minimal) ; l'amplitude des marées est alors faible. En raison de la révolution de la Lune autour de la Terre, il y a typiquement deux périodes de vives eaux (à la pleine Lune et à la nouvelle Lune) et deux périodes de mortes eaux (aux premier et dernier quartiers) par mois.

3. En fait, à cause de la révolution de la Lune autour de la Terre, la période du phénomène est en moyenne de 24 h 52 min. En outre, les océans mettant un certain temps à réagir, la marée haute se produit généralement après le passage de la Lune au méridien. Enfin, ce modèle ne décrit pas correctement la réalité près des côtes ou dans les mers fermées et les baies.