Contrôle continu du 14 avril 2010

Corrigé

Exercice I

1. $\vec{a} = -(\mathrm{d}^2\ell/\mathrm{d}t^2)\ \vec{u}_z$.
2. Le système $\{M, \text{plateau}\}$ est soumis à la tension du ressort, $\vec{T} = -k\cdot(\ell-\ell_0)\cdot(-\vec{u}_z)$, et à son poids, $\vec{P} = -m\ g\ \vec{u}_z$. À l'équilibre, $\vec{T}+\vec{P}=\vec{0}$, donc $k\cdot(\ell_{\text{éq}}-\ell_0) - m\ g = 0$, soit $\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + m\ g/k$.
3. Considérons à nouveau le système $\{M, \text{plateau}\}$. La masse du plateau étant négligeable, la masse du système est égale à m et le centre d'inertie du système est confondu avec M. En appliquant le théorème du centre d'inertie au système, on obtient $m\ \vec{a} = \vec{T}+\vec{P}$, soit
$$-m\ \frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} = k\cdot(\ell-\ell_0) - m\ g.$$
$\ell(t)$ obéit donc à l'équation différentielle
$$\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\ \ell = \frac{k}{m}\ \ell_0 + g = \frac{k}{m}\ \ell_{\text{éq}}.$$
Les solutions sont de la forme
$$\ell(t) = A\ \cos(\omega_0\ t) + B\ \sin(\omega_0\ t) + \ell_{\text{éq}},$$
où A et B sont des constantes et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
À $t=0$, $\ell = A + \ell_{\text{éq}} = \ell_{\text{éq}} + h$, donc $A = h$. En outre, $(\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}t)_{t=0} = 0$ puisque le plateau est lâché. Or
$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = -A\ \omega_0\ \sin(\omega_0\ t) + B\ \omega_0\ \cos(\omega_0\ t),$$
donc $(\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}t)_{t=0} = B\ \omega_0$. Finalement, $B=0$ et
$$\ell(t) = h\ \cos(\omega_0\ t) + \ell_{\text{éq}}.$$
4. Le point M décolle du plateau quand la réaction $\vec{R}$ exercée par le plateau s'annule. Tant que M est sur le plateau, l'application de la relation fondamentale de la dynamique au point M donne $m\ \vec{a} = \vec{R}+\vec{P}$.
Comme on l'a vu à la question précédente, l'application du théorème du centre d'inertie au système $\{M, \text{plateau}\}$ donne $m\ \vec{a} = \vec{T}+\vec{P}$ (il s'agit des mêmes $\vec{P}$, m et $\vec{a}$ puisque la masse du plateau est négligeable). On a donc
$$\vec{R} = \vec{T} = k\cdot(\ell-\ell_0)\ \vec{u}_z = (k\ h\ \cos(\omega_0\ t) + m\ g)\ \vec{u}_z.$$
La réaction oscille entre $-k\ h + m\ g$ et $+k\ h + m\ g$. Elle s'annule donc si $-k\ h + m\ g \leqslant 0$. Le point M décolle du plateau si $h \geqslant m\ g/k$.

Exercice II

1.
   - Conservation de la quantité de mouvement du système dans un référentiel galiléen.
   - Conservation du moment cinétique du système dans un référentiel galiléen par rapport à un point fixe (la réponse « Conservation du moment cinétique du système par rapport à n'importe quel point dans le référentiel barycentrique » est aussi acceptable).
   - Conservation de l'énergie interne du système.

   (Les termes « du système » et « référentiel galiléen » doivent apparaître au moins une fois.)
2. Le choc est parfaitement mou, donc il s'agit d'une collision inélastique.

   La loi de conservation de l'énergie interne ne sert pas à grand chose ici, car l'état interne du satellite et de la météorite est inconnu avant et après la collision (et a manifestement changé lors de l'impact !).

   Les deux autres lois sont vectorielles. Elles fournissent donc six contraintes. Deux ont été implicitement utilisées pour fixer la direction de l'axe de rotation. Les quatre autres permettent de déterminer $\vec{v}'_C$ (un vecteur inconnu, donc trois inconnues scalaires) et ω (une inconnue scalaire).
3. La quantité de mouvement du système est $m_1\ \vec{v}_M$ juste avant la collision et $(m_1 + m_2)\ \vec{v}'_G$ juste après. Comme elle se conserve, on a

$$\vec{v}'_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\ \vec{v}_M = \eta\ v_M\ \vec{u}_y.$$

4. *a.* On a $\overrightarrow{OA} = -\ell\ \vec{u}_x$, $\overrightarrow{OB} = \ell\ \vec{u}_x$ et $\overrightarrow{OD} = r\ \vec{u}_x$. Les masses de A et B valent $m_2/2$ puisqu'elles sont identiques et que la masse totale de AB est m_2. On a donc

$$\overrightarrow{OG} = \frac{(m_2/2)\ \overrightarrow{OA} + (m_2/2)\ \overrightarrow{OB} + m_1\ \overrightarrow{OD}}{m_2/2 + m_2/2 + m_1} = \eta\ r\ \vec{u}_x.$$

   (On aurait aussi pu écrire directement que

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_2\ \overrightarrow{OC} + m_1\ \overrightarrow{OD}}{m_1 + m_2},$$

   puisque C (= O au moment de l'impact) est le centre d'inertie de AB.)

   b. Après la collision,

$$\vec{v}'_G = \vec{v}'_C + \omega\ \vec{u}_z \times \overrightarrow{CG} = \vec{v}'_C + \omega\ \eta\ r\ \vec{u}_y,$$

   où l'on a appliqué la loi de composition des vitesses au référentiel $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}$ défini dans le préambule et au référentiel $\mathcal{R}_2$ dans lequel le satellite est fixe, avec $O_2 = C$ et $\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \omega\ \vec{u}_z$.

   On a donc

$$\vec{v}'_C = \eta\ v_M\ \vec{u}_y - \omega\ \eta\ r\ \vec{u}_y = \eta \cdot (v_M - \omega\ r)\ \vec{u}_y.$$

5. *a.*

$$\vec{L}_O = \frac{m_2}{2}\ \overrightarrow{OA} \times \underbrace{\vec{v}_A}_{\vec{0}} + \frac{m_2}{2}\ \overrightarrow{OB} \times \underbrace{\vec{v}_B}_{\vec{0}} + m_1\ \overrightarrow{OD} \times \vec{v}_M = m_1\ r\ \vec{u}_x \times v_M\ \vec{u}_y = m_1\ r\ v_M\ \vec{u}_z.$$

   b.

$$\vec{L}'_O = \frac{m_2}{2}\ \overrightarrow{OA} \times \vec{v}'_A + \frac{m_2}{2}\ \overrightarrow{OB} \times \vec{v}'_B + m_1\ \overrightarrow{OD} \times \vec{v}'_M.$$

   D'après la loi de composition des vitesses, on a

$$\vec{v}'_A = \vec{v}'_C + \omega\ \vec{u}_z \times \overrightarrow{CA} = \vec{v}'_C - \omega\ \ell\ \vec{u}_y,$$
$$\vec{v}'_B = \vec{v}'_C + \omega\ \ell\ \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{v}'_M = \vec{v}'_C + \omega\ r\ \vec{u}_y,$$

   donc

$$\begin{aligned}\vec{L}'_O &= \frac{m_2}{2} \cdot (-\ell\ \vec{u}_x) \times (\vec{v}'_C - \omega\ \ell\ \vec{u}_y) + \frac{m_2}{2}\ \ell\ \vec{u}_x \times (\vec{v}'_C + \omega\ \ell\ \vec{u}_y) + m_1\ r\ \vec{u}_x \times (\vec{v}'_C + \omega\ r\ \vec{u}_y)\\ &= (m_2\ \ell^2 + m_1\ r^2)\ \omega\ \vec{u}_z + m_1\ r\ \vec{u}_x \times \vec{v}'_C.\end{aligned}$$

   Comme $\vec{L}_O = \vec{L}'_O$, on obtient

$$m_1\ r\ v_M\ \vec{u}_z = (m_2\ \ell^2 + m_1\ r^2)\ \omega\ \vec{u}_z + m_1\ r\ \vec{u}_x \times \vec{v}'_C.$$

6. On remplace $\vec{v}'_C$ par l'expression obtenue au 4.*b* :

$$(m_2\ \ell^2 + m_1\ r^2)\ \omega\ \vec{u}_z + m_1\ r\ \vec{u}_x \times \vec{v}'_C = (m_2\ \ell^2 + m_1\ r^2)\ \omega\ \vec{u}_z + m_1\ r\ \vec{u}_x \times (\eta \cdot (v_M - \omega\ r)\ \vec{u}_y)$$
$$= ((\ell^2 + \eta\ r^2)\ m_2\ \omega + m_1\ v_M\ r\ \eta)\ \vec{u}_z.$$

On obtient finalement que

$$\eta\ r\ v_M = (\ell^2 + \eta\ r^2)\ \omega,$$

soit

$$\omega = \frac{\eta\ r\ v_M}{\ell^2 + \eta\ r^2}.$$

En reportant dans l'expression de $\vec{v}'_C$, on a

$$\vec{v}'_C = \eta \cdot (v_M - \omega\ r)\ \vec{u}_y = \eta \cdot (v_M - \frac{\eta\ r^2\ v_M}{\ell^2 + \eta\ r^2})\ \vec{u}_y = \frac{\eta\ v_M\ \ell^2}{\ell^2 + \eta\ r^2}\ \vec{u}_y.$$

7. $r_{\min} = 0$ (on doit avoir $r \geqslant 0$). On a alors $\omega = 0$.
Il était inutile de calculer ω pour déterminer $r_{\min}$: le satellite étant symétrique par rapport au point C, l'impact ne peut provoquer sa rotation s'il a lieu en C.

8.
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}r} = \frac{\eta\ v_M \cdot (\ell^2 + \eta\ r^2) - 2\ \eta^2\ r^2\ v_M}{(\ell^2 + \eta\ r^2)^2} = \eta\ v_M\ \frac{\ell^2 - \eta\ r^2}{(\ell^2 + \eta\ r^2)^2}.$$

$\omega(r)$ est donc une fonction croissante sur $[0, \ell/\sqrt{\eta}]$. Comme $\eta < 1$, $\ell/\sqrt{\eta} > \ell$: on a donc $r_{\max} = \ell$.
(Ne donner que la moitié des points si l'étudiant devine le résultat mais ne le démontre pas ou s'il trouve $r_{\max} = \ell/\sqrt{\eta}$.)