Université Pierre et Marie Curie.
Année universitaire 2009/2010

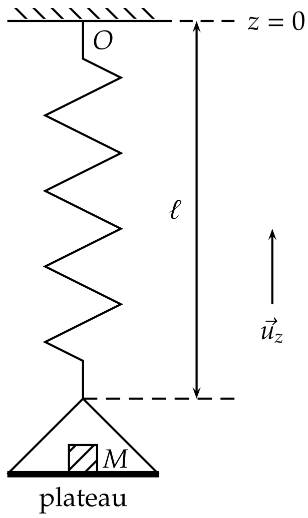
Unité d'enseignement LP112.
Section PCME21

# Contrôle continu du 14 avril 2010

**Durée : 1 h 30**

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

## Exercice I




On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Un point matériel $M$, de masse $m$, est posé sur un plateau de masse négligeable. Ce plateau est attaché rigidement à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de raideur $k$ et de longueur à vide $\ell_0$. L'extrémité supérieure du ressort est attachée à un point $O$ fixe. On notera $g$ la norme de l'accélération de la pesanteur et $\vec{u}_z$ un vecteur unitaire dirigé vers le haut. On repérera la position du point $M$ par sa cote $z$ sur l'axe $(O, \vec{u}_z)$.

**Pour répondre aux questions suivantes, on définira précisément les systèmes utilisés et on détaillera les forces qui s'exercent sur eux.**

1. Exprimer l'accélération $\vec{a}$ de $M$ en fonction de la longueur $\ell(t)$ du ressort.
2. Quelle est la longueur $\ell_{\text{éq}}$ du ressort à l'équilibre ?
3. On tire le plateau vers le bas d'une longueur $h$ à partir de sa position d'équilibre. À l'instant $t = 0$, on lâche le plateau. Calculer $\ell$ en fonction du temps en supposant que $M$ reste sur le plateau.
4. À quelle condition sur $h$ le point $M$ décolle-t-il du plateau ?

## Exercice II

1. **Question de cours**
   Rappeler les trois lois de conservation applicables à un système isolé.

■

**(Tournez la page s'il vous plaît.)**

On étudie la collision entre un satellite $AB$ de masse $m_2$ et une météorite $M$ ponctuelle de masse $m_1$. Le système $\{AB, M\}$ peut être considéré comme isolé durant la collision. Le satellite est constitué de deux masses ponctuelles identiques, $A$ et $B$, reliées par une tige de masse négligeable et de longueur $2\ \ell$ constante.

On utilise un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

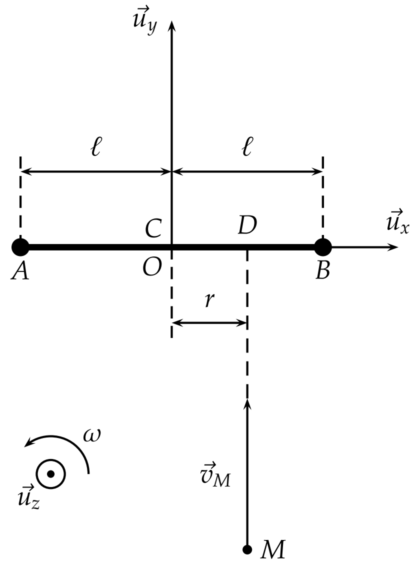
**Juste avant la collision**, le satellite est immobile dans $\mathcal{R}$ ; le milieu $C$ du segment $AB$ est en $O$ et $\overrightarrow{AB}$ est selon $+\vec{u}_x$ ; $M$ a alors une vitesse $\vec{v}_M = v_M\ \vec{u}_y$ (avec $v_M > 0$).

**Lors de la collision**, $M$ s'encastre dans le satellite en un point $D$ entre $C$ et $B$, à une distance $r$ de $C$.

**Juste après la collision**, le point $C$ a une vitesse $\vec{v}_C'$ et le système $\{AB, M\}$ tourne à une vitesse angulaire $\omega\ \vec{u}_z$ par rapport à $\mathcal{R}$.

L'objet du problème est de déterminer $\vec{v}_C'$ et $\omega$. On exprimera si possible les résultats en fonction de

$$\eta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$




Les vitesses des différents points *juste après* la collision seront notées avec un prime.

2. Quelle est la nature de la collision ?

   Laquelle des trois lois de conservation demandées dans la question de cours n'apporte rien ici, en l'absence d'information supplémentaire ?

   Les deux autres lois sont-elles suffisantes pour déterminer $\vec{v}_C'$ et $\omega$ ?
3. On note $G$ la position du centre d'inertie du système $\{AB, M\}$. Calculer la vitesse $\vec{v}_G'$ de $G$ juste après la collision en fonction des données du problème.
4. *a.* Calculer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ au moment de l'impact.

   *b.* On rappelle la loi générale de composition des vitesses : les vitesses $\vec{v}_{P/\mathcal{R}_1}$ et $\vec{v}_{P/\mathcal{R}_2}$ d'un point $P$ dans des référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont reliées par

   $$\vec{v}_{P/\mathcal{R}_1} = \vec{v}_{P/\mathcal{R}_2} + \vec{v}_{O_2/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \times \overrightarrow{O_2P},$$

   où $O_2$ est un point fixe dans $\mathcal{R}_2$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}$ est la vitesse angulaire de rotation de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$.

   Exprimer $\vec{v}_G'$ en fonction de $\vec{v}_C'$, $\omega$ et des données du problème, et en déduire une relation entre $\vec{v}_C'$ et $\omega$.
5. *a.* Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_O$ du système $\{AB, M\}$ par rapport à $O$ juste avant la collision.

   *b.* Calculer les vitesses $\vec{v}_A'$, $\vec{v}_B'$ et $\vec{v}_M'$ des points $A$, $B$ et $M$ juste après la collision.

   Montrer que le moment cinétique du système $\{AB, M\}$ par rapport à $O$ juste après la collision vaut

   $$\vec{L}_O' = (m_2\ \ell^2 + m_1\ r^2)\ \omega\ \vec{u}_z + m_1\ r\ \vec{u}_x \times \vec{v}_C'$$

   et en déduire une relation entre $v_M'$ et $\omega$.
6. Calculer $\omega$ et $\vec{v}_C'$ en fonction de $\eta$, $r$, $\ell$ et $v_M$.
7. Pour quelle valeur $r_{\min}$ de $r$ la vitesse angulaire $\omega$ est-elle minimale ? Que vaut-elle alors ? Pouvait-on trouver $r_{\min}$ sans calculer $\omega$ ?
8. Pour quelle valeur $r_{\max}$ de $r$ la vitesse angulaire $\omega$ est-elle maximale ?