

IV-3. Dipôle électrique

1. (a) On considère deux charges positives de valeur $+q$ placées en $+a$ et $-a$ sur un axe x (figure 1). Exprimer, en fonction de q , a et $1/(4\pi\epsilon_0)$, l'énergie potentielle $E_p(x,y)$ d'une charge $-q$ placée en un point M du plan (x,y) .
- (b) En utilisant l'équipotentielle n° 2 sur la figure 1, expliciter la valeur de K (on remarquera que cette équipotentielle passe par $(0,0)$).
- (c) On pose $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OM})$. Exprimer E_p en fonction de r et θ lorsque $r \gg a$. Quelle est alors la forme des équipotentielles?
- (d) Calculer le gradient de E_p en fonction de x et y dans la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) . Quels sont la direction et le sens de $\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ par rapport aux équipotentielles?
- (e) Dans le cas où $r \gg a$, exprimer $\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ en fonction de r et θ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, où $\vec{u}_r = \overrightarrow{OM}/r$ et \vec{u}_θ est un vecteur unitaire perpendiculaire à \vec{u}_r dans le sens direct.
- (f) On appelle « lignes de champ » les courbes perpendiculaires aux équipotentielles. En considérant un petit déplacement $d\vec{r} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y$ le long d'une ligne de champ, déterminer l'équation différentielle à laquelle elle obéit (on ne cherchera pas à la résoudre). Quelle est sa forme lorsque $r \gg a$?
- (g) Représenter sur la figure 1 la forme des lignes de champ.
2. (a) On considère désormais deux charges $+q$ et $-q$ placées respectivement en $+a$ et $-a$ sur un axe x (figure 2). Exprimer, en fonction de K , a , x et y , l'énergie potentielle d'une charge $-q$ placée en M .
- (b) Dans le cas où $r \gg a$, donner l'expression de E_p en fonction de r et θ .
- (c) En coordonnées polaires, l'expression du gradient est

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta.$$

En considérant un petit déplacement $d\vec{r} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$, établir dans le cas où $r \gg a$ l'équation différentielle en r et θ à laquelle obéissent les lignes de champ et la résoudre.

- (d) Représenter la forme des lignes de champ sur la figure 2.

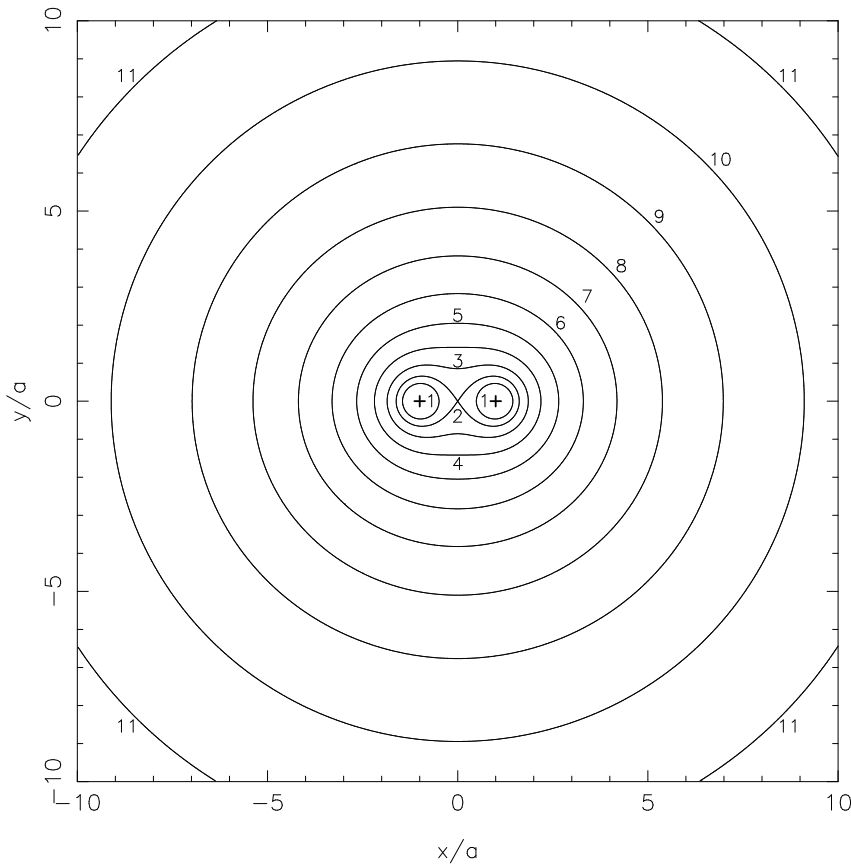


FIG. 1 – Équipotentiellles pour le cas d'une charge $-q$ placée dans le champ électrostatique produit par deux charges $+q$ situées en $(a,0)$ et $(-a,0)$.

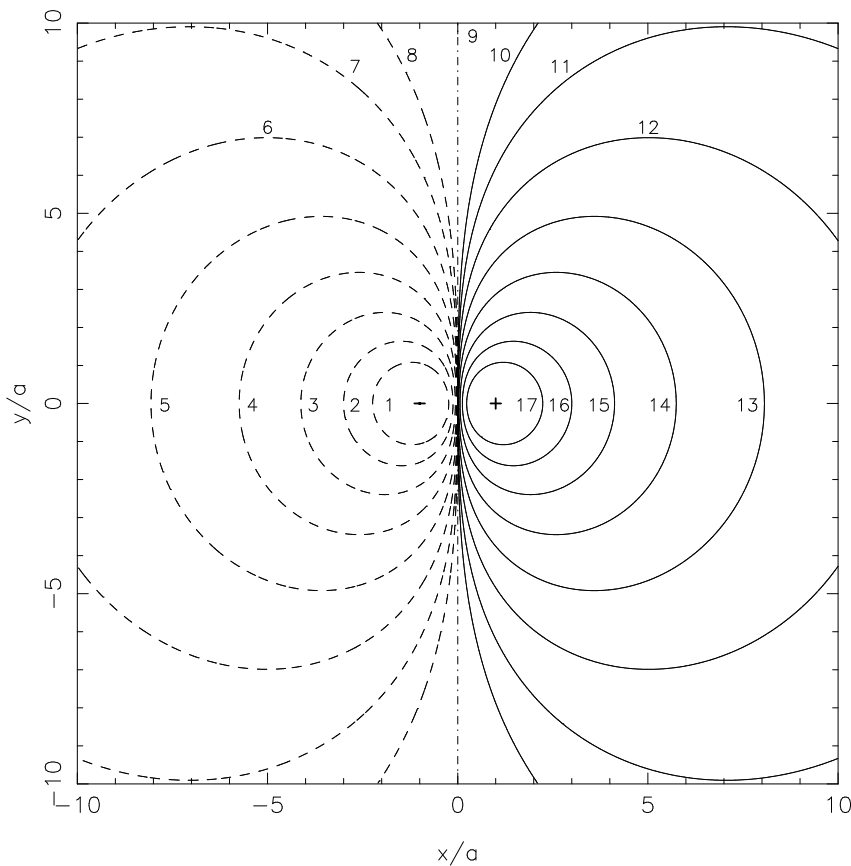


FIG. 2 – Équipotentiellles pour le cas d'une charge $-q$ placée dans le champ électrostatique produit par deux charges $+q$ et $-q$ situées respectivement en $(a,0)$ et $(-a,0)$.