

# Chapitre VII

## FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

### A. Force de Lorentz

#### 1. Expression

La force à laquelle est soumis, à un instant  $t$ , un point matériel de charge  $q$ , situé en  $M$  et se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}(t)$  par rapport à un référentiel galiléen dans un champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  et un champ  $\vec{B}(M, t)$  est la **force de Lorentz** <sup>\*1</sup>,

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (\text{VII.1})$$

Cette force comprend deux termes : une force électrique,  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ , et une force magnétique,  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ .

#### 2. Action et réaction pour les forces magnétiques

En raison de la présence de la vitesse dans son expression, la force magnétique n'obéit pas au principe de l'action et de la réaction pour des charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$ , contrairement à la force électrostatique :  $\vec{F}_{B,2 \rightarrow 1} \neq -\vec{F}_{B,1 \rightarrow 2}$ .

En revanche, pour des distributions de courant  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$  localisées et stationnaires, on peut montrer à l'aide d'un calcul laborieux que  $\vec{F}_{B,2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{B,1 \rightarrow 2}$  ; de même pour les moments des forces par rapport à n'importe quel point  $A$ ,  $\vec{\Gamma}_{B,2 \rightarrow 1}^{(A)} = -\vec{\Gamma}_{B,1 \rightarrow 2}^{(A)}$ . Ceci vaut en particulier pour des dipôles magnétostatiques immobiles.

#### 3. Travail de la force magnétique

La force magnétique ne travaille pas <sup>\*\*2</sup>. Sa puissance est en effet nulle :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_B) = \vec{F}_B \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{VII.2})$$

puisque  $\vec{v} \times \vec{B}$  est perpendiculaire à  $\vec{v}$ . La force magnétique ne provoque pas de changement d'énergie cinétique, donc de modification de la norme de la vitesse. En revanche, elle modifie sa *direction*.

#### 4. Application : mouvement d'une charge ponctuelle dans un champ magnétique uniforme stationnaire

##### a. Étude dans le repère intrinsèque

Étudions l'effet de la force magnétique sur une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme stationnaire. On suppose que le champ électrique est nul et que toutes les autres forces sont négligeables. On a

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (\text{VII.3})$$

1. Elle dérive, au sens de la définition (I.77), p. 21, de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p = q(V - \vec{A} \cdot \vec{v})$ .

2. En réalité, la force magnétique sur les particules élémentaires ne se réduit pas à  $q\vec{v} \times \vec{B}$  car celles-ci possèdent un *spin*, une propriété quantique analogue à une rotation sur elles-mêmes. Elles ont de ce fait un moment cinétique et un moment magnétique permanents. La force magnétique et le moment de cette force dus au spin sont donnés par les expressions (VII.51) et (VII.52), où  $\vec{m}$  est le moment magnétique de spin. Le travail élémentaire associé au spin est donné par la relation (I') et n'est en général pas nul. Par extension, le travail magnétique sur un milieu aimanté non plus. (Le travail magnétique sur un électro-aimant est en revanche nul : cf. § VII.B.2.)

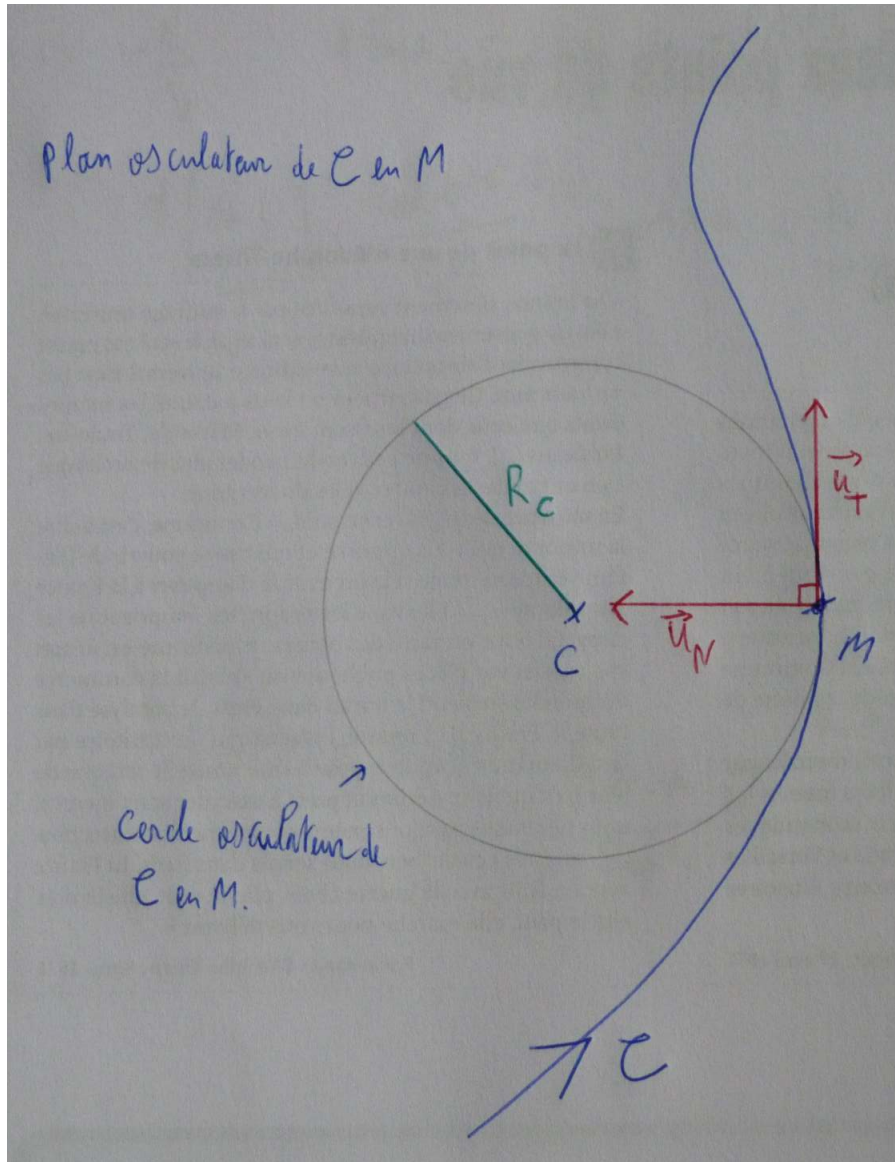
Dans le repère de Frénet,

$$\vec{v} = v \vec{u}_T \quad (\text{VII.4})$$

et

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R_c} \vec{u}_N, \quad (\text{VII.5})$$

où  $v$  est la norme de la vitesse,  $R_c$  le rayon de courbure de la trajectoire (c.-à-d. le rayon du cercle osculateur),  $\vec{u}_T$  le vecteur unitaire tangent à la trajectoire dans le sens de celle-ci et  $\vec{u}_N$  est le vecteur normal à la trajectoire situé dans le plan osculateur et orienté vers le centre de courbure (c.-à-d.  $\vec{MC} = R_c \vec{u}_N$  avec  $R_c \geq 0$ ).



En projetant (VII.3) sur  $\vec{u}_T$ , on obtient

$$m \frac{dv}{dt} = q(v \vec{u}_T \times \vec{B}) \cdot \vec{u}_T = 0. \quad (\text{VII.6})$$

On retrouve que  $v$  est constante. Puisque  $d\vec{v}/dt$  se réduit au terme  $(v^2/R_c) \vec{u}_N$ , on déduit de (VII.3) que  $\vec{u}_N$  est orthogonal à  $\vec{B}$ .

Soient  $B := \|\vec{B}\|$ ,  $\vec{u}_B := \vec{B}/B$  et  $v_{\parallel} := \vec{v} \cdot \vec{u}_B$ . On peut écrire  $\vec{v}$  sous la forme

$$\vec{v} = v_{\parallel} \vec{u}_B + \vec{v}_{\perp}, \quad (\text{VII.7})$$

où  $\vec{v}_{\perp}$  est orthogonale à  $\vec{u}_B$ . Puisque  $\vec{B}$  est uniforme et stationnaire,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{B} = m \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{B})}{dt} = m \frac{dv_{\parallel}}{dt} B = 0, \quad (\text{VII.8})$$

donc  $v_{\parallel} = c^{te}$ . Comme  $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$ , où  $v_{\perp} := \|\vec{v}_{\perp}\|$ , et que  $v = c^{te}$ , on a aussi  $v_{\perp} = c^{te}$ . Or

$$m \frac{v^2}{R_c} \vec{u}_N = q (v_{\parallel} \vec{u}_B + \vec{v}_{\perp}) \times \vec{B} = q \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}. \quad (\text{VII.9})$$

En prenant la norme, on obtient que

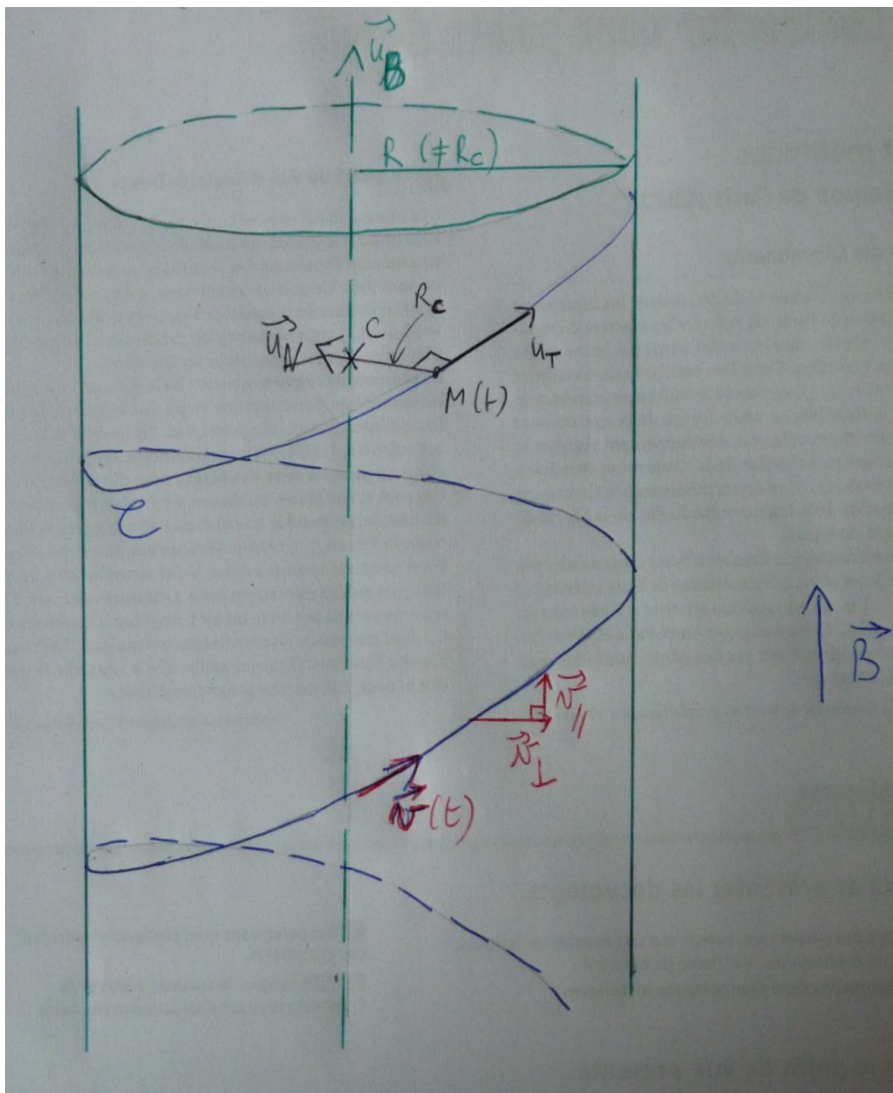
$$\frac{m v^2}{R_c} = |q| v_{\perp} B, \quad (\text{VII.10})$$

puisque  $\vec{v}_{\perp} \perp \vec{B}$ . Le rayon de courbure vaut donc

$$R_c = \frac{m v^2}{|q| v_{\perp} B} \quad (\text{VII.11})$$

et est constant.

On obtient ainsi une trajectoire de rayon de courbure constant dont le centre de courbure  $C$  se déplace à la vitesse constante  $v_{\parallel}$  selon la direction de  $\vec{B}$ . Le champ magnétique étant orthogonal à  $\vec{u}_N$ , la trajectoire est une hélice d'axe dirigé selon  $\vec{B}$ , c.-à-d. une trajectoire qui s'enroule autour d'un cylindre comme le sillon d'une vis. Dans le cas où  $v_{\parallel} = 0$ , le cylindre se réduit à un cercle de rayon  $R_c$  dans un plan perpendiculaire à  $\vec{B}$ , mais  $R_c$  n'est pas le rayon du cylindre dans le cas général.



Lorsque le champ magnétique n'est plus uniforme, le mouvement de particules chargées soumises au seul champ magnétique n'est plus hélicoïdal, mais les charges tendent néanmoins à décrire une trajectoire s'enroulant autour des lignes de champ.

### b. Étude dans un repère cartésien

Le problème peut aussi être traité en coordonnées cartésiennes. Définissons un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  comme ceci :  $\vec{B} = B \vec{u}_z$  avec  $B := \|\vec{B}\|$ ;  $M(t=0) = O$ ;  $\vec{v}(t=0) = v_0^x \vec{u}_x + v_0^z \vec{u}_z$ , avec  $v_0^x \geq 0$ .

De  $m d\vec{v}/dt = q \vec{v} \times \vec{B}$ , on déduit les équations suivantes :

$$m \frac{dv_x}{dt} = q v_y B ; \quad (\text{VII.12})$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -q v_x B ; \quad (\text{VII.13})$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (\text{VII.14})$$

Pour déterminer  $v_x$  et  $v_y$ , on peut dériver (VII.12) par rapport à  $t$  et remplacer  $dv_y/dt$  dans le terme de droite par son expression en fonction de  $v_x$  donnée par (VII.13) : on obtient alors

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_0^2 v_x = 0, \quad \text{où } \omega_0 := \frac{qB}{m}, \quad (\text{VII.15})$$

et de même pour  $v_y$ , soit l'équation différentielle caractérisant un oscillateur harmonique non amorti, libre, de pulsation  $\omega_0$  ; la solution est de la forme

$$(v_x, v_y) = (\alpha_x, \alpha_y) \cos(\omega_0 t) + (\beta_x, \beta_y) \sin(\omega_0 t), \quad (\text{VII.16})$$

où les constantes  $\alpha_x$ , etc., sont déterminées à partir des conditions initiales.

Une méthode plus astucieuse consiste à poser  $w = v_x + i v_y$ . En effectuant la combinaison (éq. VII.12) +  $i \times$  (éq. VII.13), on obtient

$$m \frac{dw}{dt} + i q B w = 0, \quad (\text{VII.17})$$

soit

$$w = \lambda e^{-i \omega_0 t}, \quad \text{où } \omega_0 := qB/m \quad (\text{VII.18})$$

et  $\lambda$  est une constante. À  $t = 0$ ,  $w(t = 0) = v_0^x + i \times 0$ , donc  $\lambda = v_0^x$ . Avec  $v_x = \text{Re } w$  et  $v_y = \text{Im } w$ , on a

$$v_x = v_0^x \cos(\omega_0 t), \quad (\text{VII.19})$$

$$v_y = -v_0^x \sin(\omega_0 t). \quad (\text{VII.20})$$

Par ailleurs, on déduit de (VII.14) que  $v_z = \text{cte} = v_0^z$ .

En intégrant par rapport au temps et en imposant la contrainte  $M(t = 0) = O$ , on obtient

$$x = \frac{v_0^x}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (\text{VII.21})$$

$$y = \frac{v_0^x}{\omega_0} (\cos[\omega_0 t] - 1), \quad (\text{VII.22})$$

$$z = v_0^z t. \quad (\text{VII.23})$$

Comme

$$x^2 + (y - [-v_0^x/\omega_0])^2 = (v_0^x/\omega_0)^2, \quad (\text{VII.24})$$

la trajectoire est une hélice s'enroulant sur le cylindre de rayon  $R = v_0^x/|\omega_0|$  et d'axe ( $O'z$ ), où  $O'$  est le point de coordonnées  $(x, y, z) = (0, -v_0^x/\omega_0, 0)$ . La rotation se fait dans le sens horaire autour de ( $O'z$ ) si  $\omega_0 > 0$ , c.-à-d. si  $q > 0$ , et dans le sens trigonométrique sinon. Le déplacement selon  $z$  sur un tour vaut  $2\pi v_0^z/\omega_0$  ; le pas de l'hélice est la valeur absolue de cette quantité.

## 5. Transformation des champs dans un changement de référentiels galiléens

Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  deux référentiels galiléens,  $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  la vitesse de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  (c.-à-d. celle de  $O'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , car  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ne tournent pas l'un par rapport à l'autre puisqu'ils sont tous deux galiléens : la vitesse angulaire  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  de rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est nulle), et  $\vec{v}_{q/\mathcal{R}}$  et  $\vec{v}_{q/\mathcal{R}'}$  les vitesses d'une charge ponctuelle  $q$  par rapport à  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . En mécanique classique non relativiste, la force subie par un point matériel est la même dans deux référentiels galiléens. La charge, quant à elle, ne dépend pas du référentiel. On a donc

$$q(\vec{E} + \vec{v}_{q/\mathcal{R}} \times \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}_{q/\mathcal{R}'} \times \vec{B}'), \quad (\text{VII.25})$$

où  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  (resp.  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$ ) sont les champs électrique et magnétique dans  $\mathcal{R}$  (resp.  $\mathcal{R}'$ ). Comme  $\vec{v}_{q/\mathcal{R}} = \vec{v}_{q/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  (car  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$ ),

$$q(\vec{E} + \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{B}) + q\vec{v}_{q/\mathcal{R}'} \times \vec{B} = q\vec{E}' + q\vec{v}_{q/\mathcal{R}'} \times \vec{B}'. \quad (\text{VII.26})$$

Ceci étant vrai pour toute vitesse  $\vec{v}_{q/\mathcal{R}'}$ , on doit avoir

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{B}, \quad (\text{VII.27})$$

$$\vec{B}' = \vec{B}. \quad (\text{VII.28})$$

L'équation (VII.27) montre que le caractère électrique ou magnétique d'un terme n'a rien d'absolu mais dépend du référentiel ; les champs électrique et magnétique ne sont pas indépendants, mais forment un tout : le **champ électromagnétique**.

D'après l'équation (VII.28),  $\vec{B}'$  semble ne pas dépendre de  $\vec{E}$ , mais ces calculs ont été effectués dans le cadre de la relativité galiléenne. Dans le cadre de la relativité restreinte, plus exact et plus approprié, même à faible vitesse, à l'électromagnétisme, l'expression de  $\vec{B}'$  dépend aussi de  $\vec{E}$  et est symétrique de celle de  $\vec{E}'$ . À faible vitesse, l'équation (VII.28) devient

$$\vec{B}' \approx \vec{B} - \frac{\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times \vec{E}}{c^2}. \quad (\text{VII.29})$$

Même si  $\|\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\| \ll c$ , le terme en  $\vec{E}$  n'est pas négligeable devant celui en  $\vec{B}$  si  $\|\vec{E}\| \gg c\|\vec{B}\|$ .

## B. Force de Laplace

### 1. Expression

Considérons une portion de conducteur *neutre* se déplaçant à la vitesse d'entraînement  $\vec{v}_e$  par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  et parcourue par des courants. Différents types de porteurs de charge, référencés par un indice  $k$ , se meuvent dans ce conducteur. Notons  $q_k$  la charge d'un porteur,  $\nu_k$  le nombre de porteurs de type  $k$  par unité de volume,  $\vec{v}_k$  leur vitesse par rapport au conducteur (donc  $\vec{v}_k + \vec{v}_e$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ), et  $\rho_k$  la densité volumique de charge. La force magnétique exercée sur un porteur est  $q_k(\vec{v}_k + \vec{v}_e) \times \vec{B}$ . La force magnétique exercée sur la portion de conducteur, c.-à-d. sur tous les porteurs contenus dans le volume  $d\tau$ , porte le nom de **force de Laplace**<sup>\*3</sup>. Elle vaut

$$d\vec{F}_{\text{Lapl}} = \sum_k \nu_k d\tau q_k (\vec{v}_k + \vec{v}_e) \times \vec{B} = \sum_k \rho_k \vec{v}_k \times \vec{B} d\tau + \left( \sum_k \rho_k \right) \vec{v}_e \times \vec{B} d\tau, \quad (\text{VII.30})$$

soit, puisque le conducteur est neutre,

$$d\vec{F}_{\text{Lapl}} = \vec{j} \times \vec{B} d\tau. \quad (\text{VII.31})$$

Pour un conducteur filiforme parcouru par un courant  $I$ , la force de Laplace exercée sur une portion  $d\vec{\ell}$  orientée dans le sens de  $I$  vaut

$$d\vec{F}_{\text{Lapl}} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}. \quad (\text{VII.32})$$

### 2. Travail des forces exercées sur un conducteur

Le travail de la force de Laplace exercée sur une portion de conducteur neutre se déplaçant de  $d\vec{r} = \vec{v}_e dt$  vaut

$$d^2W_{\text{Lapl}} = d\vec{F}_{\text{Lapl}} \cdot d\vec{r} = (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} d\tau. \quad (\text{VII.33})$$

Ce travail<sup>\*4</sup> n'est généralement pas nul : il ne s'agit donc pas du travail de la force magnétique !

Pour clarifier ce point, reprenons le calcul du travail des forces électromagnétiques exercées sur un volume  $d\tau$  de conducteur se déplaçant de  $d\vec{r}$  :

$$d^2W = \sum_k \rho_k (\vec{E} + [\vec{v}_k + \vec{v}_e] \times \vec{B}) \cdot (\vec{v}_k + \vec{v}_e) d\tau dt. \quad (\text{VII.34})$$

Comme  $(\vec{v}_k \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_k = 0$  et  $(\vec{v}_e \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_e = 0$ , on a

$$\begin{aligned} d^2W &= \left( \sum_k \rho_k \vec{v}_k \right) \cdot (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) d\tau dt + \left( \sum_k \rho_k \right) \vec{E} \cdot \vec{v}_e d\tau dt + \left( \left[ \sum_k \rho_k \vec{v}_k \right] \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v}_e d\tau dt \\ &= \vec{j} \cdot (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) d\tau dt + (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_e d\tau dt. \end{aligned} \quad (\text{VII.35})$$

Le terme

$$d^2W_m = \vec{j} \cdot (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) d\tau dt \quad (\text{VII.36})$$

3. Il ne faut pas rajouter à la force de Lorentz : c'est la forme que prend le terme magnétique de celle-ci dans le cas d'un conducteur.  
4. Il s'agit en fait d'un « pseudo-travail » car le déplacement  $d\vec{r}$  n'est pas le même pour toutes les charges. Voir Sherwood, B.A. (1983), «Pseudowork and real work», *American Journal of Physics*, vol. 51, 597.

est le **travail électromoteur**, c.-à-d. le travail fourni au conducteur par un générateur pour déplacer ses charges libres par rapport à lui-même, c.-à-d. pour maintenir le courant quand le conducteur se meut ; sa source est ici le champ électromoteur

$$\vec{f}_m = \vec{v}_e \times \vec{B} \tag{VII.37}$$

engendré par le déplacement du conducteur dans le champ magnétique<sup>\*5</sup>. Le champ électromoteur peut aussi être produit par une pile chimique<sup>\*6</sup> ou, nous le verrons au chapitre VIII, par un champ magnétique variable ; le champ électrique comprend alors, outre le terme électrostatique «  $-\text{grad } V$  », un terme électromoteur qu'il faut rajouter à  $\vec{f}_m$ .

Le deuxième terme du membre de droite de (VII.35) est le travail de la force de Laplace ; il correspond au travail fourni au conducteur pour le déplacer et est égal à l'opposé de la contribution des forces magnétiques au travail électromoteur. Le travail total des forces magnétiques est donc bien nul.

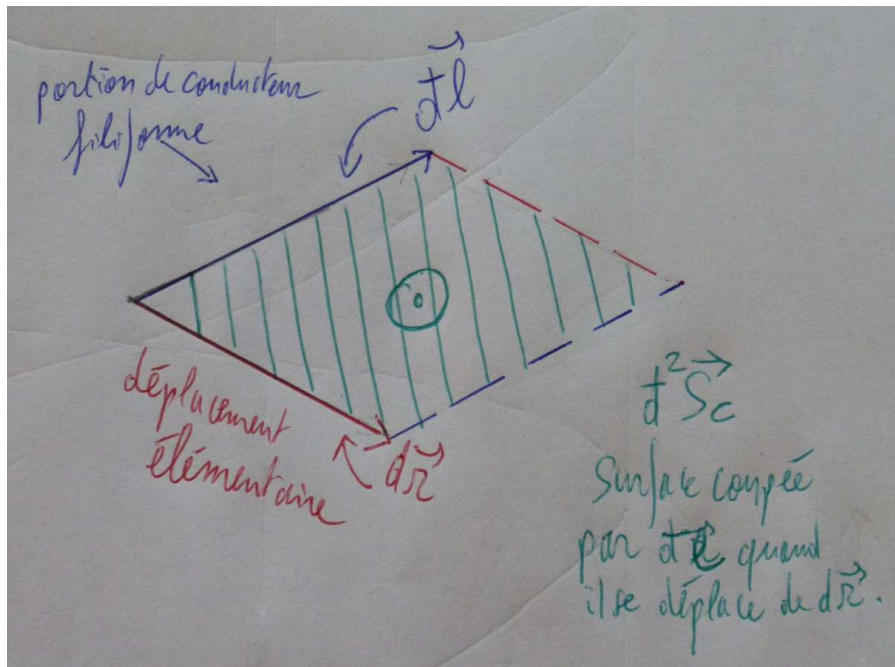
Pour un conducteur filiforme, le travail de la force de Laplace sur une portion de conducteur s'écrit

$$d^2W_{\text{Lapl}} = I(d\vec{\ell} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = I\vec{B} \cdot (d\vec{r} \times d\vec{\ell}) = I\vec{B} \cdot d^2\vec{S}_c \tag{VII.38}$$

où l'on a utilisé l'invariance par permutation circulaire d'un produit mixte, c.-à-d.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}, \tag{VII.39}$$

et  $d^2\vec{S}_c = d\vec{r} \times d\vec{\ell}$  est la surface balayée, « coupée » par l'élément  $d\vec{\ell}$  quand il se déplace de  $d\vec{r}$ .



On obtient donc

$$d^2W_{\text{Lapl}} = I d^2\Phi_c \tag{VII.40}$$

où  $d^2\Phi_c = \vec{B} \cdot d^2\vec{S}_c$  est le flux de  $\vec{B}$  coupé par  $d\vec{\ell}$ . L'intensité étant la même en tout point d'un conducteur, dans l'ARQS, le travail des forces de Laplace sur l'ensemble du conducteur pendant  $dt$  est

$$dW_{\text{Lapl}} = I d\Phi_c \tag{VII.41}$$

où  $d\Phi_c = \oint_{\mathcal{C}} d^2\Phi_c$  est le **flux coupé** par l'ensemble du conducteur  $\mathcal{C}$ .

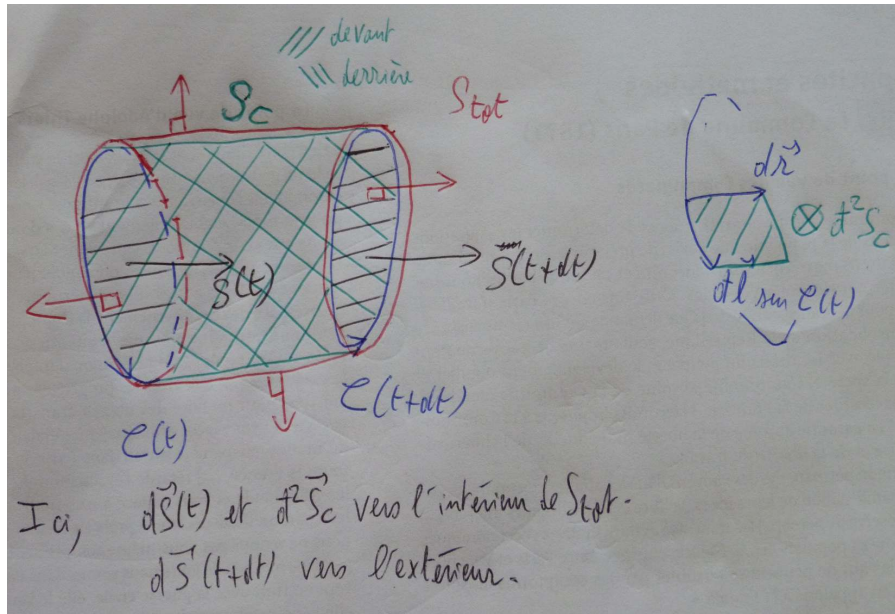
### 3. Énergie potentielle

Réécrivons cette expression, dans le cas d'un champ magnétique stationnaire (c.-à-d. indépendant du temps), pour un circuit filiforme  $\mathcal{C}(t)$  fermé, éventuellement déformable mais de constitution constante. La surface coupée  $S_c$  par le circuit n'est pas fermée. Complétons-la par une surface  $S(t)$  s'appuyant sur le circuit à l'instant  $t$  et par une surface  $S(t + dt)$  s'appuyant sur le circuit à l'instant  $t + dt$ . La surface  $S_{\text{tot}} = S_c \cup S(t) \cup$

5. Rappelons que le champ électrostatique seul ne permet pas l'établissement d'un courant dans un circuit fermé. En effet, on a alors  $V_A - V_B = R_{AB} I$ , où  $R_{AB}$  est la résistance d'une portion  $AB$  de circuit. Pour un circuit fermé,  $A = B$ , donc  $0 = RI$ , où la résistance totale du circuit,  $R$ , est différente de 0. On a donc  $I = 0$ .

6.  $d^2W$  n'est alors plus le travail des seules forces électromagnétiques.

$S(t + dt)$  ainsi obtenue est fermée. L'orientation de  $S_c$  et celle de  $S(t)$  déterminée par celle de  $C(t)$  sont soit toutes deux vers l'extérieur de  $S_{tot}$ , soit vers l'intérieur. L'orientation de  $S(t + dt)$  déterminée par celle de  $C(t + dt)$  est en sens opposé.



On a donc

$$\oiint_{S_{tot}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_{tot} = \pm \left( \oint_{C(t)} \vec{B}[t] \cdot d\vec{s}_c + \iint_{S(t)} \vec{B}[t] \cdot d\vec{S} - \iint_{S(t+dt)} \vec{B}[t] \cdot d\vec{S} \right), \quad (VII.42)$$

où l'orientation des surfaces est vers l'extérieur dans  $\oiint_{S_{tot}}$  et est cohérente avec celle de  $C$  dans  $\oint_{C(t)}$ ,  $\iint_{S(t)}$  et  $\iint_{S(t+dt)}$ . Or

$$\oiint_{S_{tot}} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_{tot} = 0 \quad (VII.43)$$

pour  $\vec{B}$  pris à un même instant en tout point de la surface, car  $\text{div } \vec{B} = 0$ , donc

$$\oint_{C(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}_c = \iint_{S(t+dt)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \iint_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}. \quad (VII.44)$$

Le champ étant stationnaire, on obtient

$$d\Phi_c = \Phi(t + dt) - \Phi(t) := d\Phi, \quad (VII.45)$$

où  $\Phi(t) = \iint_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}$  et  $\Phi(t + dt) = \iint_{S(t+dt)} \vec{B}(t + dt) \cdot d\vec{S}$  sont les flux de  $\vec{B}$  à travers  $C$  aux instants  $t$  et  $t + dt$ .

Si le champ est stationnaire, on a donc

$$dW_{Lapl} = I d\Phi. \quad (VII.46)$$

Si l'intensité est, elle aussi, stationnaire,

$$dW_{Lapl} = -d\mathcal{E}_p, \quad (VII.47)$$

où

$$\mathcal{E}_p^{Lapl} = -I \Phi \quad (VII.48)$$

est l'énergie potentielle<sup>\*7</sup> d'interaction entre la boucle et les sources du champ magnétique.

Un équilibre stable correspondant à un minimum de potentiel, la boucle a tendance à se déplacer et à s'orienter (en l'absence d'autres forces conservatives) de manière à maximiser le flux (**règle du flux maximal**). L'équilibre stable n'est bien sûr atteint que parce qu'il y a des forces dissipatives ; la boucle oscillerait sinon autour de cette position.

7. Attention, l'expression de  $\mathcal{E}_p$  n'inclut pas l'énergie nécessaire pour conserver un courant stationnaire.

### c. Actions sur un dipôle magnétique

Considérons un dipôle magnétique permanent  $D$  de moment magnétique  $\vec{m}$ , disons une boucle  $\mathcal{C}$  rigide parcourue par un courant  $I$  stationnaire pour simplifier, placé dans un champ extérieur stationnaire  $\vec{B}_{\text{ext}}$ . L'énergie potentielle d'interaction vaut

$$\mathcal{E}_p(D \leftrightarrow \text{ext}) = -I \Phi = -I \iint_S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S} \approx -\vec{B}_{\text{ext}} \cdot \iint_S I d\vec{S}, \quad (\text{VII.49})$$

en supposant  $\vec{B}_{\text{ext}}$  quasi uniforme à l'échelle de la boucle. Or  $\iint_S I d\vec{S}$  est le moment magnétique  $\vec{m}$  de la boucle, donc l'énergie d'interaction entre un dipôle magnétique de moment  $\vec{m}$  de norme constante et les sources du champ magnétique est

$$\mathcal{E}_p(D \leftrightarrow \text{ext}) = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}. \quad (\text{VII.50})$$

Ce résultat, ainsi que ceux qui suivent, reste vrai pour une distribution volumique de courant localisée et stationnaire (dans le référentiel du dipôle, considéré comme un solide) de petite taille, par exemple un aimant.

#### Calcul hors programme

Pour un dipôle se comportant comme un solide, le travail des forces exercées sur lui pendant une durée  $dt$ , lorsqu'un point  $C$  du dipôle subit une translation  $d\vec{r}_C$  et que le dipôle tourne d'un angle orienté  $d\alpha$  autour d'un axe dirigé selon un vecteur unitaire  $\vec{u}$ , vaut

$$dW_{\text{ext} \rightarrow D} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} \cdot d\vec{r}_C + \vec{\Gamma}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(C)} \cdot d\vec{\alpha}, \quad (1')$$

où  $d\vec{\alpha} = d\alpha \vec{u}$ . En termes de vitesse de rotation  $\vec{\omega}_{D/\mathcal{R}}$  du dipôle par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ ,

$$d\vec{\alpha} = \vec{\omega}_{D/\mathcal{R}} dt. \quad (2')$$

La valeur de  $\vec{m} \cdot \vec{B}$  ne dépend que de la position du dipôle, par l'intermédiaire de  $\vec{B}$ , et de l'orientation de  $\vec{m}$ . On a donc

$$dW_{\text{ext} \rightarrow D} = -d\mathcal{E}_p = d(\vec{m} \cdot \vec{B}) = d_{\vec{r}_C}(\vec{m} \cdot \vec{B}) + d_{(\vartheta, \varphi)}(\vec{m} \cdot \vec{B}), \quad (3')$$

où  $\vartheta$  est la « colatitude » de  $\vec{m}$ ,  $\varphi$  sa « longitude »<sup>8</sup> et les termes en indice des différentielles désignent les variables par rapport auxquelles la différentiation est effectuée. On a

$$d_{\vec{r}_C}(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}_C(\vec{m} \cdot \vec{B}) \cdot d\vec{r}_C \quad (4')$$

et

$$d_{(\vartheta, \varphi)}(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (d_{(\vartheta, \varphi)} \vec{m}) \cdot \vec{B}. \quad (5')$$

Or, pour toute fonction  $f$ , ses dérivées temporelles dans deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont reliées par

$$\left( \frac{df}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \left( \frac{df}{dt} \right)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \times f, \quad (6')$$

donc

$$\left( \frac{d\vec{m}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{D/\mathcal{R}} \times \vec{m} \quad (7')$$

puisque  $\vec{m}$  est constant dans le référentiel  $\mathcal{R}' = D$  du dipôle.

8.  $\vartheta$  et  $\varphi$  sont deux des trois angles d'Euler. Le troisième n'intervient pas dans l'expression de  $\mathcal{E}_p$ .



On a donc

$$d_{(\mathfrak{S}, \varphi)} \vec{m} := (d\vec{m})_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{D/\mathcal{R}} \times \vec{m} dt = d\vec{\alpha} \times \vec{m}. \quad (8')$$

On en déduit que

$$d_{(\mathfrak{S}, \varphi)} (\vec{m} \cdot \vec{B}) = (d\vec{\alpha} \times \vec{m}) \cdot \vec{B} = (\vec{m} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\alpha} \quad (9')$$

car le produit mixte est invariant par permutation circulaire. On obtient finalement que

$$dW_{\text{ext} \rightarrow D} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} \cdot d\vec{r}_C + \vec{I}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(C)} \cdot d\vec{\alpha} = \overrightarrow{\text{grad}}_C (\vec{m} \cdot \vec{B}) \cdot d\vec{r}_C + (\vec{m} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\alpha}, \quad (10')$$

d'où, par identification,

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D} = (\overrightarrow{\text{grad}} [\vec{m} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}]) (C) \quad \text{\textcircled{9}} \quad (VII.51)$$

et

$$\vec{I}_{\text{ext} \rightarrow D}^{(C)} = \vec{m} \times \vec{B}_{\text{ext}}(C). \quad (VII.52)$$

9. Attention, comme  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_{\text{ext}} = \mu_0 \vec{j}_{\text{ext}}$  (en magnétostatique), la force  $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow D}$  n'est égale à  $([\vec{m} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}] \vec{B}_{\text{ext}}) (C)$  que si  $\vec{j}_{\text{ext}}(C) = \vec{0}$ .