D. Inductances

1. Expressions générales et propriétés des inductances

Considérons deux circuits filiformes $\mathcal{C}_\alpha$ et $\mathcal{C}_\beta$ fermés ou quasi-fermés (cas d'une bobine), parcourus par des courants stationnaires I_α et I_β. Le flux du champ créé par I_β à travers $\mathcal{C}_\alpha$ vaut※6

$$\boldsymbol{\Phi_{\alpha,\beta}} = \iint_{P_\alpha\in\mathcal{S}_\alpha} \vec{B}_\beta(P_\alpha)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_\alpha = \oint_{P_\alpha\in\mathcal{C}_\alpha} \vec{A}_\beta(P_\alpha)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_\alpha = \oint_{P_\alpha\in\mathcal{C}_\alpha} \frac{\mu_0\,I_\beta}{4\,\pi}\oint_{P_\beta\in\mathcal{C}_\beta}\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}_\beta}{P_\beta P_\alpha}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_\alpha = \boldsymbol{L_{\alpha,\beta}\,I_\beta}, \tag{VIII.40}$$

où $\mathcal{S}_\alpha$ est une surface s'appuyant sur $\mathcal{C}_\alpha$ et

$$L_{\alpha,\beta} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\oint_{P_\alpha\in\mathcal{C}_\alpha}\oint_{P_\beta\in\mathcal{C}_\beta}\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}_\beta\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_\alpha}{P_\beta P_\alpha} \qquad \text{(formule de Neumann).} \tag{VIII.41}$$

L'expression de $L_{\alpha,\beta}$ faisant jouer des rôles symétriques aux points P_α de $\mathcal{C}_\alpha$ et aux points P_β de $\mathcal{C}_\beta$,

$$\boldsymbol{L_{\alpha,\beta} = L_{\beta,\alpha}}. \tag{VIII.42}$$

Cette quantité est appelée ***[coefficient d']inductance mutuelle*** entre les deux circuits. Ce coefficient ne dépend que de la géométrie du système. Son unité dans le système international est le ***henry*** (symbole « H »).

Le courant dans le circuit $\mathcal{C}_\alpha$ produit non seulement un flux à travers $\mathcal{C}_\beta$, mais également à travers lui-même. L'expression (VIII.41) fait apparaître des quantités infinies quand on prend $\mathcal{C}_\beta = \mathcal{C}_\alpha$. En raison des termes « $1/P_\alpha P_\beta$ », on doit considérer le circuit comme un volume $\mathcal{V}_\alpha$ et non plus comme un fil pour exprimer le champ ou le potentiel. On a

$$\Phi_{\alpha,\alpha} = \iint_{\mathcal{S}_\alpha}\vec{B}_\alpha\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}_\alpha}\vec{A}_\alpha\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_{P\in\mathcal{C}_\alpha}\left(\iiint_{P'\in\mathcal{V}_\alpha}\frac{\mu_0\,\vec{j}_\alpha(P')}{4\,\pi\,P'P}\,\mathrm{d}\tau\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}, \tag{VIII.43}$$

où $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est un élément de longueur autour de P et $\mathrm{d}\tau$ un élément de volume autour de P'. En permutant les intégrales, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha,\alpha} &= \iiint_{P'\in\mathcal{V}_\alpha}\vec{j}_\alpha(P')\cdot\left(\oint_{P\in\mathcal{C}_\alpha}\frac{\mu_0}{4\,\pi\,P'P}\,\mathrm{d}\vec{\ell}\right)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{I_\alpha}\iiint_{P'\in\mathcal{V}_\alpha}\vec{j}_\alpha(P')\cdot\left(\oint_{P\in\mathcal{C}_\alpha}\frac{\mu_0\,I_\alpha}{4\,\pi\,P'P}\,\mathrm{d}\vec{\ell}\right)\mathrm{d}\tau\\ &= \frac{1}{I_\alpha}\iiint_{\mathcal{V}_\alpha}\vec{j}_\alpha\cdot\vec{A}_\alpha\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{VIII.44}$$

La densité de courant $\vec{j}_\alpha$ dans un circuit filiforme et le potentiel $\vec{A}_\alpha$ qu'elle produit sont tous deux proportionnels à l'intensité I_α parcourant le circuit, donc

$$\boldsymbol{\Phi_{\alpha,\alpha} = L_{\alpha,\alpha}\,I_\alpha}, \tag{VIII.45}$$

où

$$L_{\alpha,\alpha} = \frac{1}{I_\alpha^2}\iiint_{\mathcal{V}_\alpha}\vec{j}_\alpha\cdot\vec{A}_\alpha\,\mathrm{d}\tau \tag{VIII.46}$$

est une constante appelée ***inductance propre*** (ou ***auto-inductance***) de $\mathcal{C}_\alpha$.

Comme

$$\Phi_\alpha = \iint_{\mathcal{S}_\alpha}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{P\in\mathcal{S}_\alpha}\sum_\beta \vec{B}_\beta(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_\beta \Phi_{\alpha,\beta}, \tag{VIII.47}$$

on a

$$\boldsymbol{\Phi_\alpha = \sum_\beta L_{\alpha,\beta}\,I_\beta}, \tag{VIII.48}$$

ou, sous forme matricielle,

$$\boldsymbol{[\Phi_\alpha] = [L_{\alpha,\beta}]\,[I_\beta]}. \tag{VIII.49}$$

$[L_{\alpha,\beta}]$ est la matrice inductance. Les inductances $L_{\alpha,\beta}$ ne dépendent que de la géométrie du système, c.-à-d. de la forme des circuits et de leurs positions respectives, pas des intensités des courants qui les parcourent. Elles sont donc constantes tant que cette géométrie ne change pas. Si le circuit $\mathcal{C}_\alpha$ est de constitution constante, sa f.é.m. vaut alors

$$\epsilon_\alpha = -\frac{\mathrm{d}\Phi_\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_\beta L_{\alpha,\beta}\,I_\beta = -\sum_\beta L_{\alpha,\beta}\,\frac{\mathrm{d}I_\beta}{\mathrm{d}t}. \tag{VIII.50}$$

6. Remarquer que l'on utilise dans ce qui suit la loi de Biot et Savart hors du domaine de la magnétostatique ! Les résultats ne sont donc qu'approchés.

Par un raisonnement analogue à celui effectué ci-dessus pour calculer $L_{\alpha,\alpha}$, on peut montrer que

$$L_{\alpha,\beta} = \frac{1}{I_\alpha\, I_\beta} \iiint_{P_\beta \in \mathcal{V}_\beta} \vec{j}_\beta(P_\beta) \cdot \vec{A}_\alpha(P_\beta)\, \text{đ}\tau_\beta = \frac{1}{I_\alpha\, I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha} \vec{j}_\alpha(P_\alpha) \cdot \vec{A}_\beta(P_\alpha)\, \text{đ}\tau_\alpha. \tag{VIII.51}$$

Remplaçons $\vec{j}_\alpha$ par $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B}_\alpha/\mu_0$ dans cette expression. Comme

$$\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{a} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{b}, \tag{VIII.52}$$

on a

$$\begin{aligned} L_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{\mu_0\, I_\alpha\, I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B}_\alpha(P_\alpha) \cdot \vec{A}_\beta(P_\alpha)\, \text{đ}\tau_\alpha \\ &= \frac{1}{\mu_0\, I_\alpha\, I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha} \vec{B}_\alpha(P_\alpha) \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}_\beta(P_\alpha)\, \text{đ}\tau_\alpha + \frac{1}{\mu_0\, I_\alpha\, I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha} \text{div}(\vec{A}_\beta[P_\alpha] \times \vec{B}_\alpha[P_\alpha])\, \text{đ}\tau_\alpha. \end{aligned} \tag{VIII.53}$$

La densité de courant $\vec{j}_\alpha$ étant nulle hors de $\mathcal{V}_\alpha$, sur tout volume $\mathcal{V}' \supset \mathcal{V}_\alpha$,

$$L_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\mu_0\, I_\alpha\, I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}'} \vec{B}_\alpha(P_\alpha) \cdot \vec{B}_\beta(P_\alpha)\, \text{đ}\tau_\alpha + \frac{1}{\mu_0\, I_\alpha\, I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}'} \text{div}(\vec{A}_\beta[P_\alpha] \times \vec{B}_\alpha[P_\alpha])\, \text{đ}\tau_\alpha, \tag{VIII.54}$$

où l'on a par ailleurs utilisé le fait que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$. Soit $\mathcal{S}'$ la surface de $\mathcal{V}'$. D'après le théorème d'Ostrogradski,

$$\iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}'} \text{div}(\vec{A}_\beta[P_\alpha] \times \vec{B}_\alpha[P_\alpha])\, \text{đ}\tau_\alpha = \oiint_{P_\alpha \in \mathcal{S}'} (\vec{A}_\beta[P_\alpha] \times \vec{B}_\alpha[P_\alpha]) \cdot \text{đ}\vec{S}_\alpha. \tag{VIII.55}$$

Or $\vec{A}_\beta = \mathcal{O}(1/r)$ et $\vec{B}_\beta = \mathcal{O}(1/r^2)$, donc en prenant pour $\mathcal{S}'$ une sphère de rayon r, on obtient

$$\lim_{r\to\infty} \oiint_{P_\alpha \in \mathcal{S}'} (\vec{A}_\beta[P_\alpha] \times \vec{B}_\alpha[P_\alpha]) \cdot \text{đ}\vec{S}_\alpha = 0. \tag{VIII.56}$$

Une autre expression de $L_{\alpha,\beta}$ est donc

$$L_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\mu_0\, I_\alpha\, I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mho} \vec{B}_\alpha(P_\alpha) \cdot \vec{B}_\beta(P_\alpha)\, \text{đ}\tau_\alpha, \tag{VIII.57}$$

où $\mho$ représente tout l'espace. En particulier,

$$L_{\alpha,\alpha} = \frac{1}{\mu_0\, I_\alpha^2} \iiint_{P_\alpha \in \mho} B_\alpha^2(P_\alpha)\, \text{đ}\tau_\alpha, \tag{VIII.58}$$

donc

$$\boldsymbol{L_\alpha \coloneqq L_{\alpha,\alpha} \geqslant 0}. \tag{VIII.59}$$

L'expression (VIII.57) possédant les propriétés d'un produit scalaire, le théorème de Cauchy-Schwartz permet d'affirmer que

$$\boldsymbol{|L_{\alpha,\beta}| \leqslant \sqrt{L_\alpha\, L_\beta}} \tag{VIII.60}$$

pour $\alpha \neq \beta$. Dans les circuits électriques, les composants dont l'inductance est la plus forte sont les bobines et l'influence entre celles-ci est généralement négligeable. On a alors $L_{\alpha,\beta} \approx 0$ pour $\alpha \neq \beta$ et

$$\Phi_\alpha \approx L_\alpha\, I_\alpha, \tag{VIII.61}$$

d'où $\epsilon_\alpha = -L_\alpha\, \mathrm{d}I_\alpha/\mathrm{d}t$ en supposant la bobine rigide.

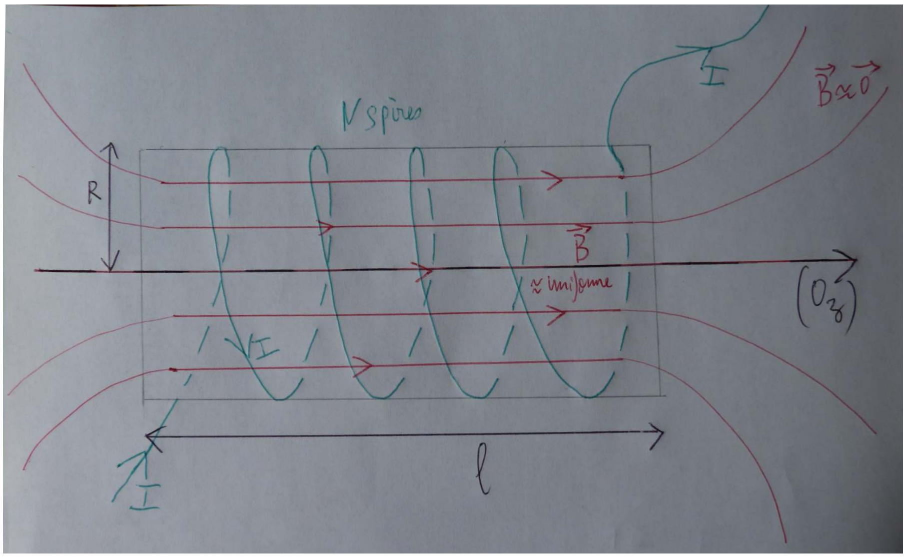
Dans les transformateurs (voir ci-dessous), on cherche au contraire à avoir un couplage maximal entre les bobines.

2. Inductance propre d'un solénoïde

Considérons un solénoïde constitué de N spires circulaires d'axe (Oz), parcourues par un courant d'intensité I, où le sens positif de I est le sens trigonométrique relativement à $\vec{u}_z$. Supposons la longueur ℓ du solénoïde suffisamment grande par rapport à son rayon R pour que l'on puisse admettre que le champ dans l'espace intérieur a la même valeur que pour un solénoïde infini,

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0\, \frac{N}{\ell}\, I\, \vec{u}_z, \tag{VIII.62}$$

et qu'il est nul à l'extérieur.



Le flux à travers chaque spire vaut

$$\Phi_{\text{spire}} = \vec{B}_{\text{int}} \cdot \pi R^2 \vec{u}_z = \frac{\mu_0 N I \pi R^2}{\ell} \tag{VIII.63}$$

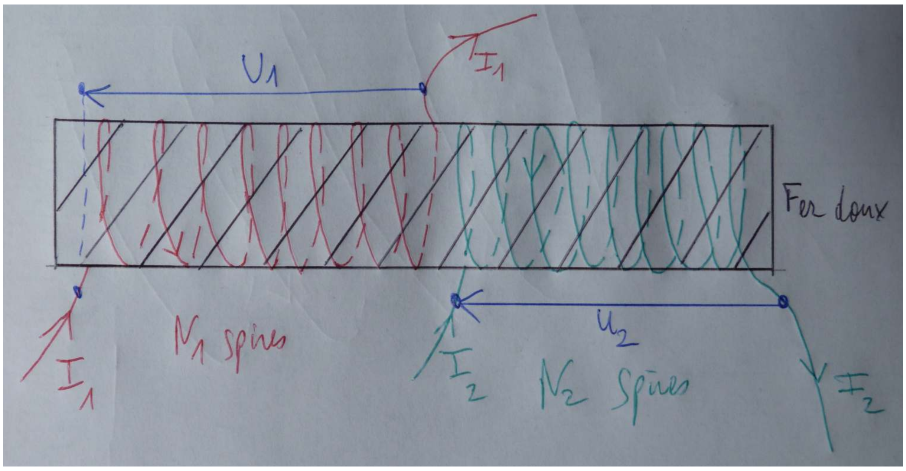
et le flux propre à travers le solénoïde vaut $\Phi_{\text{sol}} = N \Phi_{\text{spire}}$. Son inductance propre est donc donnée par

$$L_{\text{sol}} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell}. \tag{VIII.64}$$

Elle est proportionnelle à N^2, d'où l'intérêt que N soit grand.

3. Transformateurs

Un transformateur est un ensemble de deux bobines fortement couplées.



Pour assurer ce couplage, on peut par exemple les enrouler côte à côte autour d'une même barre de fer doux[7]. Sans rentrer dans les détails, ce dernier permet de canaliser le champ magnétique produit par les bobines. Le flux du champ magnétique est donc quasiment le même à travers une section de l'une ou l'autre bobine. Le couplage entre elles est alors quasi maximal et $L_{\alpha,\beta}^2 \approx L_\alpha L_\beta$.

En convention récepteur et en négligeant leurs résistances, les tensions aux bornes des bobines valent

$$U_\alpha = -\epsilon_\alpha = \frac{\mathrm{d}\Phi_\alpha}{\mathrm{d}t} = L_\alpha \frac{\mathrm{d}I_\alpha}{\mathrm{d}t} + L_{\alpha,\beta} \frac{\mathrm{d}I_\beta}{\mathrm{d}t}, \tag{VIII.65}$$

où $\alpha \in \{1,2\}$ et $\beta \in \{1,2\} \setminus \{\alpha\}$. On en déduit que

$$U_2 = \frac{L_{2,1}}{L_1} U_1 + \frac{L_2 L_1 - L_{2,1}^2}{L_1} \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \approx \frac{L_{2,1}}{L_1} U_1 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\, U_1 \tag{VIII.66}$$

7. On peut aussi les imbriquer. Le fer doux n'est alors pas nécessaire.

puisque le couplage est maximal. En assimilant les bobines à des solénoïdes, on obtient

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1}\,U_1. \tag{VIII.67}$$

Le dispositif permet donc, en jouant sur le rapport N_2/N_1, de *transformer* la tension U_1 en tension U_2.

E. Loi de Lenz

Orientons un circuit $\mathcal{C}$ fermé. Lorsque le flux Φ_{ext} à travers ce circuit du champ magnétique créé par des sources extérieures à $\mathcal{C}$ varie, une f.é.m. ϵ_{ind} apparaît. Celle-ci crée dans le circuit un ***courant induit***

$$I = \frac{\epsilon_{\text{ind}}}{R} = -\frac{1}{R}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t}, \tag{VIII.68}$$

où $R > 0$ est la résistance totale du circuit. Le sens du courant induit est donc opposé au sens de variation de Φ_{ext}. Ce courant induit produit un champ magnétique dont le flux Φ_{auto} à travers le circuit vaut

$$\Phi_{\text{auto}} = L\,I = -\frac{L}{R}\,\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t}, \tag{VIII.69}$$

où L est l'inductance propre de $\mathcal{C}$. Celle-ci étant positive, on obtient la ***"loi" de Lenz*** :

Le courant induit produit des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

De manière plus explicite, Φ_{auto} est de signe opposé à la variation de Φ_{ext}.

F. Énergie magnétique

On a vu au § V.F.2.*b* qu'une bobine d'inductance L_k parcourue par un courant d'intensité I_k emmagasine une énergie

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}\,L_k\,I_k^2 = \frac{1}{2}\,\Phi_k\,I_k. \tag{VIII.70}$$

Vu éq. (VIII.58), on obtient que

$$\mathcal{E}_k = \iiint_{\mho} \frac{B_k^2}{2\,\mu_0}\,\mathrm{d}\tau = \iiint_{\text{courants}} \frac{\vec{j}_k\cdot\vec{A}_k}{2}\,\mathrm{d}\tau. \tag{VIII.71}$$

Cette énergie porte le nom d'***énergie magnétique***. L'existence d'une énergie magnétique n'est pas contradictoire avec l'absence de travail des forces magnétiques : elle provient du champ électrique induit par la variation du champ $\vec{B}_k$ quand l'intensité passe de 0 à I_k.

Le résultat obtenu pour une bobine peut être généralisé : pour toute distribution de courants, une ***énergie magnétique***

$$\boldsymbol{\mathcal{E}_B = \iiint_{\mho} \frac{B^2}{2\,\mu_0}\,\mathrm{d}\tau = \iiint_{\text{courants}} \frac{\vec{j}\cdot\vec{A}}{2}\,\mathrm{d}\tau} \tag{VIII.72}$$

est emmagasinée dans le volume parcouru par les courants ou, de manière équivalente, dans le champ. La quantité $\boldsymbol{B^2/(2\,\mu_0)}$ est la ***densité volumique d'énergie magnétique***. Pour des courants I_k dans des circuits filiformes $\mathcal{C}_k$,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}_B = \frac{1}{2}\sum_k \Phi_k\,I_k}. \tag{VIII.73}$$