

Chapitre VIII

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

A. Cas de Lorentz

Considérons un circuit électrique $\mathcal{C}(t)$ filiforme, fermé et se déplaçant, par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} , dans un champ électrostatique et un champ magnétique stationnaire. Ce circuit peut se déformer mais sa constitution est constante (c.-à-d. qu'il est toujours constitué des mêmes éléments). Ce cas est dit « de Lorentz ».

Notons \vec{w} la vitesse d'entraînement d'un élément $d\vec{\ell}$ du conducteur par rapport à \mathcal{R} . Une charge ponctuelle se déplaçant dans cet élément à la vitesse \vec{v} par rapport à \mathcal{R} est soumise, outre la force de « frottement » \vec{F}_c modélisant les collisions des électrons libres avec les ions du réseau (cf. § V.E.1, éq. (V.36)), à la force électromagnétique

$$\vec{F}_{EB} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (\text{VIII.1})$$

où \vec{E} et \vec{B} sont les champs électrique et magnétique à l'échelle mésoscopique dans l'élément, ainsi qu'à la force \vec{F}_g due à d'éventuels générateurs (une pile chimique, par exemple).

Soient $\vec{f}_{EB} = \vec{F}_{EB}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ et $\vec{f}_g = \vec{F}_g/q$ les forces *par unité de charge*. Par définition, la « **force** » **électromotrice** (« **f.é.m.** »)^{*1} de l'ensemble du circuit vaut

$$\epsilon_m = \oint \vec{f} \cdot d\vec{\ell}, \quad (\text{VIII.2})$$

où $\vec{f} = \vec{f}_{EB} + \vec{f}_g$.

Intéressons-nous en particulier à la **f.é.m. d'induction**,

$$\epsilon_{\text{ind}} = \oint \vec{f}_{EB} \cdot d\vec{\ell}. \quad (\text{VIII.3})$$

(Les raisons de cette dénomination apparaîtront plus loin.) Notons \vec{v}_r la vitesse de la charge relativement à la portion de conducteur où elle se trouve. Puisque $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ et que $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{w}$, on a

$$\epsilon_{\text{ind}} = \oint -\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} + \oint (\vec{v}_r \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} + \oint (\vec{w} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}. \quad (\text{VIII.4})$$

Or $\oint \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} = \oint dV = 0$. Par ailleurs, $(\vec{v}_r \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = 0$ car \vec{v}_r est parallèle à $d\vec{\ell}$ dans un circuit filiforme. On obtient ainsi une autre expression de la f.é.m. d'induction :

$$\epsilon_{\text{ind}} = \oint \vec{f}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell}, \quad (\text{VIII.5})$$

où \vec{f}_{ind} est le champ électromoteur d'induction. Dans le cas de Lorentz, celui-ci vaut

$$\vec{f}_{\text{ind}} = \vec{w} \times \vec{B}. \quad (\text{VIII.6})$$

Multiplions $(\vec{w} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$ par dt . On a

$$(\vec{w} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} dt = (d\vec{\ell} \times \vec{w} dt) \cdot \vec{B} = (d\vec{\ell} \times d\vec{r}) \cdot \vec{B} = -d^2 \vec{S}_c \cdot \vec{B}, \quad (\text{VIII.7})$$

où $d\vec{r} = \vec{w} dt$ est le déplacement de l'élément $d\vec{\ell}$ de circuit pendant dt , $d^2 \vec{S}_c$ est la surface coupée par cet

1. ... qui, en dépit de son nom, a la dimension d'une tension et non d'une force. Certains auteurs suggèrent d'ailleurs de l'appeler « électromotance » pour éviter la confusion avec une vraie force. Nous utiliserons plutôt l'abréviation « f.é.m. ».

élément et $d^2\Phi_c = \vec{B} \cdot d^2\vec{S}_c$ est le flux coupé (cf. § VII.B.3). On a donc

$$\epsilon_{\text{ind}} dt = - \oint d^2\Phi_c = -d\Phi_c, \quad (\text{VIII.8})$$

où $d\Phi_c$ est le flux coupé par l'ensemble du circuit. Dans le cas de Lorentz, la f.é.m. d'induction a pour expression

$$\epsilon_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_c}{dt}. \quad (\text{VIII.9})$$

Le champ magnétique étant stationnaire par hypothèse, on a $d\Phi = d\Phi_c$ (cf. § VII.B.4), où $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ est le flux du champ magnétique à travers une surface S quelconque s'appuyant sur le circuit. On a donc également

$$\epsilon_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (\text{VIII.10})$$

■

Dans un conducteur ohmique de conductivité γ , la densité de courant vaut

$$\vec{j} = \gamma \vec{f} = \gamma (-\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{v}_r \times \vec{B} + \vec{f}_m), \quad (\text{VIII.11})$$

où $\vec{f}_m = \vec{f}_{\text{ind}} + \vec{f}_g$ est le champ électromoteur total. On en déduit que, sur une portion CD de circuit de résistance R_{CD} ,

$$R_{CD} I = \int_C^D (-\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{v}_r \times \vec{B} + \vec{f}_m) \cdot d\vec{\ell} = V_C - V_D + \int_C^D \vec{f}_m \cdot d\vec{\ell}. \quad (\text{VIII.12})$$

Sur la totalité d'un circuit fermé ($C = D$), on obtient ainsi

$$RI = \epsilon_m, \quad (\text{VIII.13})$$

où R est la résistance totale, $\epsilon_m = \epsilon_{\text{ind}} + \epsilon_g$ et $\epsilon_g = \oint \vec{f}_g \cdot d\vec{\ell}$ est la force électromotrice due aux éventuels générateurs. Le champ électromoteur produit donc un courant, ce dont le champ électrostatique $-\overrightarrow{\text{grad}} V$ est incapable dans un circuit fermé.

B. Cas de Neumann

1. Changement de référentiel

Reprenons le cas précédent et supposons que la forme du circuit ne change pas, c.-à-d. qu'il se comporte comme un solide rigide : on peut alors définir un référentiel \mathcal{R}' dans lequel il est fixe (le « référentiel du circuit »). Supposons en outre que le circuit se déplace à une vitesse uniforme par rapport à \mathcal{R} , sans rotation ; dans ce cas, \mathcal{R}' est également galiléen.

D'après la section précédente, une f.é.m. d'induction n'apparaît que si le flux coupé n'est pas nul, c.-à-d., puisque le circuit ne se déforme pas, seulement si le champ magnétique n'est pas uniforme. Le circuit « perçoit » alors un champ magnétique variable au cours de son déplacement, bien que \vec{B} soit stationnaire dans le référentiel \mathcal{R} .

Plaçons-nous dans le référentiel \mathcal{R}' du circuit. La vitesse \vec{w}' du circuit par rapport à \mathcal{R}' étant nulle et le référentiel \mathcal{R}' étant galiléen, une charge est soumise à la force électromagnétique par unité de charge

$$\vec{f}_{EB} = \vec{E}' + (\vec{v}_r + \vec{w}') \times \vec{B}' = \vec{E}' + \vec{v}_r \times \vec{B}', \quad (\text{VIII.14})$$

où \vec{E}' et \vec{B}' sont les champs électrique et magnétique dans \mathcal{R}' . La f.é.m. d'induction vaut

$$\epsilon_{\text{ind}} = \oint \vec{f}_{EB} \cdot d\vec{\ell} = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} + \oint (\vec{v}_r \times \vec{B}') \cdot d\vec{\ell} = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{\ell}, \quad (\text{VIII.15})$$

car \vec{v}_r est parallèle à $d\vec{\ell}$. L'expression de la f.é.m. d'induction diffère de celle obtenue précédemment, mais sa valeur doit être la même car ϵ_{ind} détermine le mouvement des charges mobiles par rapport au conducteur, pas par rapport à \mathcal{R} . Le champ électrique \vec{E}' doit donc comporter une autre composante que le champ électrostatique $-\overrightarrow{\text{grad}} V'$.

2. Équation de Maxwell-Faraday

Considérons maintenant un circuit de forme constante, immobile (donc $\vec{w} = \vec{0}$), dans un champ magnétique variable ; ce cas est dit « de Neumann ». D'après ce qui précède, la f.é.m. totale est donnée par l'expression (VIII.15) avec $\vec{E}' = \vec{E}$ puisque $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$.

Les expériences de Faraday ont montré que la relation

$$\epsilon_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{VIII.16})$$

reste valable. Or

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{VIII.17})$$

et

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{VIII.18})$$

(la dérivée et l'intégrale peuvent être permutées car le circuit est fixe), donc

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (\text{VIII.19})$$

Ceci étant vrai pour toute surface, on a

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{VIII.20})$$

Cette équation porte le nom d'**équation de Maxwell-Faraday**. Elle se réduit pour des champs stationnaires à la relation $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$, laquelle équivaut à l'existence d'un potentiel V tel que $\vec{E} = -\text{grad} V$.

L'équation $\text{div} \vec{B} = 0$ est en revanche vraie même pour un champ non stationnaire. Il existe donc un potentiel vecteur \vec{A} tel que $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, d'où

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \text{rot} \vec{A}}{\partial t}. \quad (\text{VIII.21})$$

La dérivée partielle par rapport à t et le rotationnel (dérivée partielle spatiale) peuvent être permutés, donc

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (\text{VIII.22})$$

Dans le cas le plus général, il existe donc un **potentiel scalaire** V (qu'on ne peut plus qualifier d'« électrostatique ») tel que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} V, \quad (\text{VIII.23})$$

soit

$$\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (\text{VIII.24})$$

c. Cas général

1. Champ électromoteur et force électromotrice d'induction

Les cas de Lorentz et de Neumann sont deux manifestations d'un même phénomène physique, l'**induction électromagnétique**.

Dans le cas général où le circuit peut se déplacer et se déformer dans un champ magnétique variable, la force électromagnétique par unité de charge vaut

$$\vec{f}_{EB} = -\text{grad} V + \vec{v}_r \times \vec{B} + \vec{f}_{\text{ind}}, \quad (\text{VIII.25})$$

où

$$\vec{f}_{\text{ind}} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{w} \times \vec{B} \quad (\text{VIII.26})$$

est le **champ**^{*2} **électromoteur d'induction**.

2. Cette désignation est abusive car un champ ne devrait dépendre que de la position et du temps, pas de la vitesse.

La **f.é.m. d'induction** ^{§3} totale d'un circuit filiforme fermé vaut

$$\epsilon_{\text{ind}} = \oint \vec{f}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell}. \quad (\text{VIII.27})$$

Comme mentionné précédemment, le terme $\vec{v}_r \times \vec{B}$ ne contribue pas à la f.é.m. dans un circuit filiforme ; il est par ailleurs généralement négligeable devant les autres termes de \vec{f}_{EB} et peut donc souvent être omis dans la loi d'Ohm locale généralisée, $\vec{j} = \gamma \vec{f}$ ^{§4}.

On peut de même définir la f.é.m. d'induction d'une portion CD de circuit par

$$\epsilon_{\text{ind}}^{CD} = \int_C^D \vec{f}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell}. \quad (\text{VIII.28})$$

Nous verrons toutefois au § IX.A.2 que la décomposition de \vec{E} en $-\text{grad} V$ et $-\partial \vec{A} / \partial t$ n'est pas unique, mais est fonction de la « jauge » choisie ; la f.é.m. $\epsilon_{\text{ind}}^{CD}$ et la différence de potentiel $V_C - V_D$ en dépendent donc aussi (mais pas leur somme). Pour un circuit fermé, la f.é.m. totale est en revanche bien définie.

2. Loi de Faraday

Montrons que la relation $\epsilon_{\text{ind}} = -d\Phi/dt$, démontrée dans le cas de Lorentz, obtenue expérimentalement dans le cas de Neumann et d'où l'on a dérivé la loi de Maxwell-Faraday, reste valable dans le cas général, du moment que le circuit est fermé et que sa constitution est constante.

Au premier ordre en dt ,

$$\begin{aligned} \Phi(t+dt) - \Phi(t) &= \iint_{S(t+dt)} \left(\vec{B}[t] + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt \right) \cdot d\vec{S} - \iint_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \\ &= \left(\iint_{S(t+dt)} \vec{B}[t] \cdot d\vec{S} - \iint_{S(t)} \vec{B}[t] \cdot d\vec{S} \right) + \iint_{S(t+dt)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt \cdot d\vec{S}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.29})$$

Le terme entre parenthèses est l'opposé du flux coupé par le circuit pendant dt , car \vec{B} est pris au même instant (cf. éq. (VII.36)) :

$$\begin{aligned} \iint_{S(t+dt)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \iint_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} &= - \oint_{C(t)} \vec{B}(t) \cdot (d\vec{\ell} \times d\vec{r}) = - \oint_{C(t)} \vec{B}(t) \cdot (d\vec{\ell} \times \vec{w} dt) \\ &= -dt \oint_{C(t)} (\vec{w} \times \vec{B}[t]) \cdot d\vec{\ell}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.30})$$

D'après le théorème de Stokes, l'autre terme vaut

$$dt \iint_{S(t+dt)} \text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{S}(t) = dt \oint_{C(t+dt)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}. \quad (\text{VIII.31})$$

On obtient donc

$$\Phi(t+dt) - \Phi(t) = -dt \left(\oint_{C(t)} [\vec{w} \times \vec{B}(t)] \cdot d\vec{\ell} - \oint_{C(t+dt)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} \right), \quad (\text{VIII.32})$$

soit, en divisant par dt et en prenant la limite quand $dt \rightarrow 0$,

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint \left(\vec{w} \times \vec{B}(t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\ell}. \quad (\text{VIII.33})$$

D'après les équations (VIII.27) et (VIII.26), on a donc

$$\epsilon_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (\text{VIII.34})$$

Cette relation porte le nom de **loi de Faraday**.

Il est souvent plus commode d'exprimer le terme dépendant du temps en fonction de \vec{B} plutôt que de \vec{A} :

$$- \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (\text{VIII.35})$$

La loi de Faraday ne doit pas être utilisée si le circuit n'est pas fermé, filiforme ou si sa constitution n'est pas constante (on parle alors de **commutation** ou de **substitution** du circuit). Il faut alors revenir à l'expression (VIII.27) de ϵ_{ind} en fonction du champ électromoteur.

3. Nous soulignons « d'induction » car d'autres phénomènes peuvent provoquer l'apparition d'une f.é.m. : les réactions chimiques à l'anode et à la cathode d'une pile, par exemple.

4. Ceci n'est en revanche plus vrai dans un plasma ; bien sûr, les notions de circuit et de f.é.m. n'ont alors guère de sens.

Dans l'effet Hall, qui se produit dans des conducteurs non filiformes parcourus par des courants et plongés dans un champ magnétique, il est également essentiel de tenir compte du terme $\vec{v}_r \times \vec{B}$.

3. Application : roue de Barlow

La roue de Barlow est un disque conducteur pouvant tourner dans un champ magnétique autour d'un axe et reliée à un circuit en deux points : un sur l'axe et l'autre par un contact glissant situé à la périphérie du disque. Notons O le centre du disque, a son rayon, \vec{u}_z un vecteur unitaire selon l'axe de rotation, $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ la vitesse de rotation, $\vec{B} = B \vec{u}_z$ le champ magnétique, supposé uniforme et stationnaire, et R la résistance du circuit.

Lorsque la roue tourne, une f.é.m. ϵ_{ind} apparaît et un courant d'intensité $I = \epsilon_{\text{ind}}/R$ parcourt le circuit. Le circuit n'étant pas de constitution constante (le point de contact change), on doit utiliser la relation $\epsilon_{\text{ind}} = \oint \vec{f}_{\text{ind}} \cdot d\vec{\ell}$. Dans la roue, I se subdivise en courants dI reliant l'axe au contact glissant. Soit $d\vec{\ell}$ une portion de chemin suivie par dI , située entre deux points de la roue voisins P et P' , de coordonnées cylindriques $(\rho, \phi[t])$ et $(\rho + d\rho, \phi[t] + d\phi)$. La vitesse de P vaut $\vec{w} = \rho \dot{\phi} \vec{u}_\phi = \rho \omega \vec{u}_\phi$ et $d\vec{\ell} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\phi \vec{u}_\phi$. (Attention à ne pas confondre la différence $d\phi$ de ϕ entre P et P' à un même instant t et la variation $\dot{\phi} dt$ de ϕ pour le point P entre les instants t et $t + dt$.) Quel que soit le chemin, la f.é.m. vaut^{*5}

$$\epsilon_{\text{ind}} = \oint (\vec{w} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \oint (d\vec{\ell} \times \vec{w}) \cdot \vec{B} = \int_{\rho=0}^a \rho d\rho \omega B = \frac{\omega B a^2}{2}. \quad (\text{VIII.36})$$

(L'intégrale sur le contour fermé se réduit à une intégrale sur le disque car $\vec{w} = \vec{0}$ hors de celui-ci.)

La force de Laplace subie par l'élément $d\vec{\ell}$ vaut

$$d^2\vec{F} = dI d\vec{\ell} \times \vec{B} = -dI d\rho B \vec{u}_\phi + dI \rho d\phi B \vec{u}_\rho. \quad (\text{VIII.37})$$

La résultante de la force de Laplace sur l'ensemble de la roue ne nous intéresse pas car elle est compensée par le poids de la roue et la réaction normale exercée par l'axe sur celle-ci.

Le moment par rapport à O de la force de Laplace sur $d\vec{\ell}$ est donné par

$$d^2\vec{\Gamma}^{(O)} = \vec{OP} \times d^2\vec{F} = -\rho d\rho dI B \vec{u}_z. \quad (\text{VIII.38})$$

En intégrant sur tous les chemins suivis par le courant, on obtient

$$\vec{\Gamma}^{(O)} = - \int_0^I \int_{\rho=0}^a \rho d\rho dI B \vec{u}_z = - \frac{I B a^2}{2} \vec{u}_z = - \frac{\omega B^2 a^4}{4R} \vec{u}_z. \quad (\text{VIII.39})$$

Le moment exercé par la force de Laplace sur la roue est de sens opposé à $\vec{\omega}$: il freine donc la rotation de la roue. Ce phénomène est utilisé pour aider certains camions à ralentir.

Inversement, en insérant un générateur dans le circuit, on mettrait en mouvement la roue : on obtiendrait donc un *moteur*.

D. Inductances

1. Expressions générales et propriétés des inductances

Considérons deux circuits filiformes \mathcal{C}_α et \mathcal{C}_β fermés ou quasi-fermés (cas d'une bobine), parcourus par des courants stationnaires I_α et I_β . Le flux du champ créé par I_β à travers \mathcal{C}_α vaut^{*6}

$$\Phi_{\alpha,\beta} = \iint_{P_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha} \vec{B}_\beta(P_\alpha) \cdot d\vec{S}_\alpha = \oint_{P_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha} \vec{A}_\beta(P_\alpha) \cdot d\vec{\ell}_\alpha = \oint_{P_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha} \frac{\mu_0 I_\beta}{4\pi} \oint_{P_\beta \in \mathcal{C}_\beta} \frac{d\vec{\ell}_\beta}{P_\beta P_\alpha} \cdot d\vec{\ell}_\alpha = L_{\alpha,\beta} I_\beta, \quad (\text{VIII.40})$$

où \mathcal{S}_α est une surface s'appuyant sur \mathcal{C}_α et

$$L_{\alpha,\beta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha} \oint_{P_\beta \in \mathcal{C}_\beta} \frac{d\vec{\ell}_\beta \cdot d\vec{\ell}_\alpha}{P_\beta P_\alpha} \quad (\text{formule de Neumann}). \quad (\text{VIII.41})$$

L'expression de $L_{\alpha,\beta}$ faisant jouer des rôles symétriques aux points P_α de \mathcal{C}_α et aux points P_β de \mathcal{C}_β ,

$$L_{\alpha,\beta} = L_{\beta,\alpha}. \quad (\text{VIII.42})$$

Cette quantité est appelée **[coefficient d'inductance mutuelle]** entre les deux circuits. Ce coefficient ne dépend que de la géométrie du système. Son unité dans le système international est le **henry** (symbole « H »).

5. La f.é.m. a un sens ici, bien que le circuit ne soit pas filiforme, car elle a la même valeur quelle que soit la ligne de courant suivie. Ce ne serait pas le cas si $\vec{\omega}$ et \vec{B} n'étaient pas parallèles.

6. Remarquer que l'on utilise dans ce qui suit la loi de Biot et Savart hors du domaine de la magnétostatique ! Les résultats ne sont donc qu'approximés.

Le courant dans le circuit \mathcal{C}_α produit non seulement un flux à travers \mathcal{C}_β , mais également à travers lui-même. L'expression (VIII.41) fait apparaître des quantités infinies quand on prend $\mathcal{C}_\beta = \mathcal{C}_\alpha$. En raison des termes « $1/P_\alpha P_\beta$ », on doit considérer le circuit comme un volume \mathcal{V}_α et non plus comme un fil pour exprimer le champ ou le potentiel. On a

$$\Phi_{\alpha,\alpha} = \iint_{\mathcal{S}_\alpha} \vec{B}_\alpha \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}_\alpha} \vec{A}_\alpha \cdot d\vec{\ell} = \oint_{P \in \mathcal{C}_\alpha} \left(\iiint_{P' \in \mathcal{V}_\alpha} \frac{\mu_0 \vec{j}_\alpha(P')}{4\pi P'P} d\vec{\tau} \right) \cdot d\vec{\ell}, \quad (\text{VIII.43})$$

où $d\vec{\ell}$ est un élément de longueur autour de P et $d\vec{\tau}$ un élément de volume autour de P' . En permutant les intégrales, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha,\alpha} &= \iiint_{P' \in \mathcal{V}_\alpha} \vec{j}_\alpha(P') \cdot \left(\oint_{P \in \mathcal{C}_\alpha} \frac{\mu_0}{4\pi P'P} d\vec{\ell} \right) d\vec{\tau} = \frac{1}{I_\alpha} \iiint_{P' \in \mathcal{V}_\alpha} \vec{j}_\alpha(P') \cdot \left(\oint_{P \in \mathcal{C}_\alpha} \frac{\mu_0 I_\alpha}{4\pi P'P} d\vec{\ell} \right) d\vec{\tau} \\ &= \frac{1}{I_\alpha} \iiint_{\mathcal{V}_\alpha} \vec{j}_\alpha \cdot \vec{A}_\alpha d\vec{\tau}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.44})$$

La densité de courant \vec{j}_α dans un circuit filiforme et le potentiel \vec{A}_α qu'elle produit sont tous deux proportionnels à l'intensité I_α parcourant le circuit, donc

$$\Phi_{\alpha,\alpha} = L_{\alpha,\alpha} I_\alpha, \quad (\text{VIII.45})$$

où

$$L_{\alpha,\alpha} = \frac{1}{I_\alpha^2} \iiint_{\mathcal{V}_\alpha} \vec{j}_\alpha \cdot \vec{A}_\alpha d\vec{\tau} \quad (\text{VIII.46})$$

est une constante appelée **inductance propre** (ou **auto-inductance**) de \mathcal{C}_α .

Comme

$$\Phi_\alpha = \iint_{\mathcal{S}_\alpha} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{P \in \mathcal{S}_\alpha} \sum_\beta \vec{B}_\beta(P) \cdot d\vec{S} = \sum_\beta \Phi_{\alpha,\beta}, \quad (\text{VIII.47})$$

on a

$$\Phi_\alpha = \sum_\beta L_{\alpha,\beta} I_\beta, \quad (\text{VIII.48})$$

ou, sous forme matricielle,

$$[\Phi_\alpha] = [L_{\alpha,\beta}] [I_\beta]. \quad (\text{VIII.49})$$

$[L_{\alpha,\beta}]$ est la matrice inductance. Les inductances $L_{\alpha,\beta}$ ne dépendent que de la géométrie du système, c.-à-d. de la forme des circuits et de leurs positions respectives, pas des intensités des courants qui les parcourent. Elles sont donc constantes tant que cette géométrie ne change pas. La f.é.m. du circuit \mathcal{C}_α vaut alors

$$\epsilon_\alpha = -\frac{d\Phi_\alpha}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_\beta L_{\alpha,\beta} I_\beta = -\sum_\beta L_{\alpha,\beta} \frac{dI_\beta}{dt}. \quad (\text{VIII.50})$$

On peut de la même manière montrer que

$$L_{\alpha,\beta} = \frac{1}{I_\alpha I_\beta} \iiint_{P_\beta \in \mathcal{V}_\beta} \vec{j}_\beta(P_\beta) \cdot \vec{A}_\alpha(P_\beta) d\vec{\tau}_\beta = \frac{1}{I_\alpha I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha} \vec{j}_\alpha(P_\alpha) \cdot \vec{A}_\beta(P_\alpha) d\vec{\tau}_\alpha. \quad (\text{VIII.51})$$

Remplaçons \vec{j}_α par $\vec{\text{rot}} \vec{B}_\alpha / \mu_0$ dans cette expression. Comme

$$\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{b}, \quad (\text{VIII.52})$$

on a

$$\begin{aligned} L_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{\mu_0 I_\alpha I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha} \vec{\text{rot}} \vec{B}_\alpha(P_\alpha) \cdot \vec{A}_\beta(P_\alpha) d\vec{\tau}_\alpha \\ &= \frac{1}{\mu_0 I_\alpha I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha} \vec{B}_\alpha(P_\alpha) \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A}_\beta(P_\alpha) d\vec{\tau}_\alpha + \frac{1}{\mu_0 I_\alpha I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha} \text{div}(\vec{A}_\beta[P_\alpha] \times \vec{B}_\alpha[P_\alpha]) d\vec{\tau}_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{VIII.53})$$

La densité de courant \vec{j}_α étant nulle hors de \mathcal{V}_α , sur tout volume $\mathcal{V}' \supset \mathcal{V}_\alpha$,

$$L_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\mu_0 I_\alpha I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}'} \vec{B}_\alpha(P_\alpha) \cdot \vec{B}_\beta(P_\alpha) d\vec{\tau}_\alpha + \frac{1}{\mu_0 I_\alpha I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}'} \text{div}(\vec{A}_\beta[P_\alpha] \times \vec{B}_\alpha[P_\alpha]) d\vec{\tau}_\alpha, \quad (\text{VIII.54})$$

où l'on a par ailleurs utilisé le fait que $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$. Soit \mathcal{S}' la surface de \mathcal{V}' . D'après le théorème d'Ostrogradski,

$$\iiint_{P_\alpha \in \mathcal{V}'} \text{div}(\vec{A}_\beta[P_\alpha] \times \vec{B}_\alpha[P_\alpha]) d\vec{\tau}_\alpha = \oiint_{P_\alpha \in \mathcal{S}'} (\vec{A}_\beta[P_\alpha] \times \vec{B}_\alpha[P_\alpha]) \cdot d\vec{S}_\alpha. \quad (\text{VIII.55})$$

Or $\vec{A}_\beta = \mathcal{O}(1/r)$ et $\vec{B}_\beta = \mathcal{O}(1/r^2)$, donc en prenant pour S' une sphère de rayon r , on obtient

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oiint_{P_\alpha \in S'} (\vec{A}_\beta[P_\alpha] \times \vec{B}_\alpha[P_\alpha]) \cdot \vec{dS}_\alpha = 0. \quad (\text{VIII.56})$$

Une autre expression de $L_{\alpha,\beta}$ est donc

$$L_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\mu_0 I_\alpha I_\beta} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{U}} \vec{B}_\alpha(P_\alpha) \cdot \vec{B}_\beta(P_\alpha) \vec{d}\tau_\alpha, \quad (\text{VIII.57})$$

où \mathcal{U} représente tout l'espace. En particulier,

$$L_{\alpha,\alpha} = \frac{1}{\mu_0 I_\alpha^2} \iiint_{P_\alpha \in \mathcal{U}} B_\alpha^2(P_\alpha) \vec{d}\tau_\alpha, \quad (\text{VIII.58})$$

donc

$$L_\alpha := L_{\alpha,\alpha} \geq 0. \quad (\text{VIII.59})$$

L'expression (VIII.57) possédant les propriétés d'un produit scalaire, le théorème de Cauchy-Schwartz permet d'affirmer que

$$|L_{\alpha,\beta}| \leq \sqrt{L_\alpha L_\beta} \quad (\text{VIII.60})$$

pour $\alpha \neq \beta$. Dans les circuits électriques, les composants dont l'inductance est la plus forte sont les bobines et l'influence entre celles-ci est généralement négligeable. On a alors $L_{\alpha,\beta} \approx 0$ pour $\alpha \neq \beta$ et

$$\Phi_\alpha \approx L_\alpha I_\alpha, \quad (\text{VIII.61})$$

d'où $\epsilon_\alpha = -L_\alpha dI_\alpha/dt$ en supposant la bobine rigide.

Dans les transformateurs (voir ci-dessous), on cherche au contraire à avoir un couplage maximal entre les bobines.

2. Inductance propre d'un solénoïde

Considérons un solénoïde parcouru par un courant I , constitué de N spires d'axe \vec{u}_z et de longueur ℓ suffisamment grande par rapport à son rayon R pour que l'on puisse admettre que le champ dans l'espace intérieur a la même valeur que pour un solénoïde infini,

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{u}_z, \quad (\text{VIII.62})$$

et qu'il est nul à l'extérieur. Le flux à travers chaque spire vaut

$$\Phi_{\text{spire}} = \vec{B}_{\text{int}} \cdot \pi R^2 \vec{u}_z = \frac{\mu_0 N I \pi R^2}{\ell} \quad (\text{VIII.63})$$

et le flux propre à travers le solénoïde vaut $\Phi_{\text{sol}} = N \Phi_{\text{spire}}$. Son inductance propre est donc donnée par

$$L_{\text{sol}} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell}. \quad (\text{VIII.64})$$

Elle est proportionnelle à N^2 , d'où l'intérêt que N soit grand.

3. Transformateurs

Un transformateur est un ensemble de deux bobines fortement couplées. Pour assurer ce couplage, on peut par exemple les enrouler côte à côte autour d'une même barre de fer doux^{*7}. Sans rentrer dans les détails, ce dernier permet de canaliser le champ magnétique produit par les bobines. Le flux du champ magnétique est donc quasiment le même à travers une section de l'une ou l'autre bobine. Le couplage entre elles est alors quasi maximal et $L_{\alpha,\beta}^2 \approx L_\alpha L_\beta$.

En convention récepteur et en négligeant leurs résistances, les tensions aux bornes des bobines valent

$$U_\alpha = -\epsilon_\alpha = \frac{d\Phi_\alpha}{dt} = L_\alpha \frac{dI_\alpha}{dt} + L_{\alpha,\beta} \frac{dI_\beta}{dt}, \quad (\text{VIII.65})$$

où $\beta \neq \alpha$. On en déduit que

$$U_\alpha = \frac{L_{\alpha,\beta}}{L_\beta} U_\beta + \frac{L_\alpha L_\beta - L_{\alpha,\beta}^2}{L_\beta} \frac{dI_\alpha}{dt} \approx \frac{L_{\alpha,\beta}}{L_\beta} U_\beta = \sqrt{\frac{L_\alpha}{L_\beta}} U_\beta \quad (\text{VIII.66})$$

7. On peut aussi les imbriquer. Le fer doux n'est alors pas nécessaire.

puisque le couplage est maximal. En assimilant les bobines à des solénoïdes, on obtient

$$U_\alpha = \frac{N_\alpha}{N_\beta} U_\beta. \quad (\text{VIII.67})$$

Le dispositif permet donc, en jouant sur le rapport N_α/N_β , de transformer la tension U_β en tension U_α .

E. Loi de Lenz

Orientons un circuit \mathcal{C} fermé. Lorsque le flux Φ_{ext} à travers ce circuit du champ magnétique créé par des sources extérieures à \mathcal{C} varie, une f.é.m. ϵ_{ind} apparaît. Celle-ci crée dans le circuit un **courant induit**

$$I = \frac{\epsilon_{\text{ind}}}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dt}, \quad (\text{VIII.68})$$

où $R > 0$ est la résistance totale du circuit. Le sens du courant induit est donc opposé au sens de variation de Φ_{ext} . Ce courant induit produit un champ magnétique dont le flux Φ_{auto} à travers le circuit vaut

$$\Phi_{\text{auto}} = LI = - \frac{L}{R} \frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dt}, \quad (\text{VIII.69})$$

où L est l'inductance propre de \mathcal{C} . Celle-ci étant positive, on obtient la "**loi de Lenz**" :

Le courant induit produit des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

De manière plus explicite, Φ_{auto} est de signe opposé à la variation de Φ_{ext} .

F. Énergie magnétique

On a vu au § V.F.2.b qu'une bobine d'inductance L_k parcourue par un courant d'intensité I_k emmagasine une énergie

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} L_k I_k^2 = \frac{1}{2} \Phi_k I_k. \quad (\text{VIII.70})$$

Vu éq. (VIII.58), on obtient que

$$\mathcal{E}_k = \iiint_{\mathcal{U}} \frac{B_k^2}{2\mu_0} d\tau = \iiint_{\text{courants}} \frac{\vec{j}_k \cdot \vec{A}_k}{2} d\tau. \quad (\text{VIII.71})$$

Cette énergie porte le nom d'**énergie magnétique**. L'existence d'une énergie magnétique n'est pas contradictoire avec l'absence de travail des forces magnétiques : elle provient du champ électrique induit par la variation du champ \vec{B}_k quand l'intensité passe de 0 à I_k .

Le résultat obtenu pour une bobine peut être généralisé : pour toute distribution de courants, une **énergie magnétique**

$$\mathcal{E}_B = \iiint_{\mathcal{U}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \iiint_{\text{courants}} \frac{\vec{j} \cdot \vec{A}}{2} d\tau \quad (\text{VIII.72})$$

est emmagasinée dans le volume parcouru par les courants ou, de manière équivalente, dans le champ. La quantité $B^2/(2\mu_0)$ est la **densité volumique d'énergie magnétique**. Pour des courants I_k dans des circuits filiformes \mathcal{C}_k ,

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k I_k. \quad (\text{VIII.73})$$