Chapitre VI

Magnétostatique

A. Loi de Biot et Savart

1. Énoncé de la loi

Nous avons vu au § I.F.1 l'expression du champ électrique en fonction de la densité volumique de charge ϱ lorsque les charges sont *statiques*. Les relations obtenues en électrostatique sont plus généralement valides si ρ et la densité volumique de courant $\vec{\jmath}$ sont ***stationnaires***, c.-à-d. si, à tout instant et en tout point, $\partial\varrho/\partial t = 0$ et $\partial\vec{\jmath}/\partial t = \vec{0}$. Le champ électrique en M à un instant t dépend en effet des valeurs en tous les points P de l'espace de $\varrho(P, t')$, $(\partial\varrho/\partial t)(P, t')$ et $(\partial\vec{\jmath}/\partial t)(P, t')$, où t' est le temps retardé défini par $t = t' + PM/c$ (équations (IX.34) et (IX.35)).

Les charges en mouvement créent en plus un ***champ magnétique***, $\vec{B}$, qui agit sur toute charge mobile (éq. (VII.1)). Le champ $\vec{B}$ en un point M à un instant t dépend des valeurs en tous les points P de l'espace de $\vec{\jmath}(P, t')$ et $(\partial\vec{\jmath}/\partial t)(P, t')$. Nous allons nous placer dans ce chapitre dans le cadre de la ***magnétostatique*** : les courants seront stationnaires ($\partial\vec{\jmath}/\partial t = \vec{0}$) en tout point et à tout instant. Les relations que nous obtiendrons seront également valables en première approximation pour des courants lentement variables.

Le ***champ magnétostatique*** créé en un point M par une distribution volumique de courant $\vec{\jmath}(P)$ est donné par la ***loi de Biot et Savart*** :

$$\boldsymbol{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \iiint_P \frac{\vec{\jmath}(P) \times \overrightarrow{PM}}{PM^3}\,đ\tau}, \tag{VI.1}$$

où $\boldsymbol{\mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7}}$ **SI** est la ***perméabilité du vide***, l'intégrale se fait sur tous les points P de l'espace et $đ\tau$ est un élément de volume autour de P. L'unité du champ magnétique est le ***tesla*** (symbole « T »).

Le cas que nous rencontrerons le plus fréquemment est celui de courants dans un conducteur. On peut alors restreindre l'intégrale au volume[※1] du conducteur.

Pour une distribution surfacique de courant (une ***nappe de courants***), la loi de Biot et Savart devient

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \iint_P \frac{\vec{J}(P) \times \overrightarrow{PM}}{PM^3}\,đS, \tag{VI.2}$$

où $\vec{J}$ est la densité surfacique de courant et $đS$ est un élément de surface de la distribution, situé autour de P.

Dans un conducteur filiforme neutre, le courant est tangent au fil, indépendamment du référentiel adopté. Il suffit donc de remplacer $\vec{\jmath}(P)\,đ\tau$ par $I(P)\,đ\vec{\ell}$, où $đ\vec{\ell}$ est un élément de longueur et $I(P)$ est orienté dans le sens de $đ\vec{\ell}$. (Attention, il s'agit du sens dans lequel I est compté positivement, pas de son sens effectif : on peut avoir $I < 0$.) Par ailleurs, en magnétostatique, le temps d'évolution des sources est infini puisque $\vec{\jmath}$ est stationnaire. L'ARQS est donc vérifiée et l'intensité du courant a la même valeur à travers toute section d'un conducteur sans embranchement. On peut alors sortir I de l'intégrale. Dans un fil, la loi de Biot et Savart devient donc

$$\boldsymbol{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi} \int_P \frac{đ\vec{\ell} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3}}. \tag{VI.3}$$

Pour faire ce calcul, il faut

- orienter l'intensité et la courbe $\mathcal{C}$ portant les courants dans le même sens,
- choisir un système de coordonnées,

1. Rappelons qu'il peut y avoir un courant dans le volume même quand le conducteur est neutre : il suffit pour cela que les différents types de porteurs de charge n'aient pas la même vitesse. Par ailleurs, le conducteur n'est pas à l'équilibre puisqu'il est parcouru par des courants : l'éventuelle charge nette n'est donc pas nécessairement en surface.

- exprimer les coordonnées de P dans ce système et en déduire $\overrightarrow{PM}$ puis la distance PM,
- exprimer $đ\vec{\ell}$ et calculer $đ\vec{\ell} \times \overrightarrow{PM}$,
- définir les bornes de l'intégrale,
- intégrer.

2. Application : fil rectiligne infini parcouru par un courant

Considérons un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I. Notons O la projection orthogonale de M sur le fil et $\vec{u}_z$ un vecteur unitaire orienté dans le sens de I. Plaçons-nous dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho(M), \vec{u}_\phi(M), \vec{u}_z)$ et notons z la cote d'un point P du fil. On a $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = -z\,\vec{u}_z + \rho\,\vec{u}_\rho$, donc $PM = \sqrt{z^2 + \rho^2}$. Par ailleurs, $đ\vec{\ell} = \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$, donc

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi}\int_{z=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z\,\vec{u}_z \times (-z\,\vec{u}_z + \rho\,\vec{u}_\rho)}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi}\int_{z=-\infty}^{\infty}\frac{\rho\,\mathrm{d}z}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,\vec{u}_\phi. \tag{VI.4}$$

Notons α l'angle $\angle(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MP})$ orienté par $\vec{u}_\phi(M)$. On a $z = \rho\tan\alpha$, donc

$$\mathrm{d}z = \rho\,\mathrm{d}(\tan\alpha) = \rho\,(1+\tan^2\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\rho}{\cos^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha. \tag{VI.5}$$

De même, puisqu'on a ici nécessairement $\cos\alpha \geqslant 0$,

$$PM = \sqrt{z^2+\rho^2} = \frac{\rho}{\cos\alpha}. \tag{VI.6}$$

Quand z va de $-\infty$ à ∞, α varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$. On a donc

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi}\int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\rho^2\,\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha}\,\frac{\cos^3\alpha}{\rho^3}\,\vec{u}_\phi = \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi\,\rho}\big[\sin\alpha\big]_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2}\,\vec{u}_\phi = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,\rho}\,\vec{u}_\phi. \tag{VI.7}$$

B. Flux de $\vec{B}$, potentiel vecteur

Calculons la divergence de $\vec{B}(M)$ à partir de la loi de Biot et Savart. Celle-ci s'exprime en fonction des dérivées par rapport aux coordonnées de M, pas de P. Soulignons ceci en mettant un indice « M » lorsque c'est nécessaire. On peut donc intervertir l'intégrale sur P et la divergence sur M :

$$\operatorname{div}\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\iiint_P \operatorname{div}_M\!\left(\frac{\vec{\jmath}(P)\times\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right)đ\tau. \tag{VI.8}$$

On a $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} - \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b}$, donc

$$\operatorname{div}_M\!\left(\vec{\jmath}(P)\times\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right) = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\,\vec{\jmath}(P) - \vec{\jmath}(P)\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\!\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right) = -\vec{\jmath}(P)\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\!\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right), \tag{VI.9}$$

puisque $\overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\,\vec{\jmath}(P) = \vec{0}$ ($\vec{\jmath}(P)$ ne dépend pas de M). Or

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}_M\!\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\!\left(\frac{\vec{u}_r}{r^2}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\!\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\!\left(-\frac{1}{r}\right)\right) = \vec{0}, \tag{VI.10}$$

puisque le rotationnel d'un gradient est toujours nul. On a donc

$$\mathbf{div}\,\vec{\boldsymbol{B}} = \mathbf{0}. \tag{VI.11}$$

Cette relation est l'une des quatre équations de Maxwell. On l'appelle parfois ***équation de Maxwell-flux*** ou ***de Maxwell-Thomson***.

Considérons une surface fermée $\mathcal{S}$ contenant un volume $\mathcal{V}$. D'après le théorème d'Ostrogradski,

$$\iiint_{\mathcal{V}}\operatorname{div}\vec{B}\,đ\tau = \oiint_{\mathcal{S}}\vec{B}\cdot đ\vec{S}, \tag{VI.12}$$

donc **le flux de $\vec{B}$ est nul à travers toute surface fermée** :

$$\oiint_{\mathcal{S}}\vec{B}\cdot đ\vec{S} = 0. \tag{VI.13}$$

2. Il est aisé de *vérifier* que, pour toute fonction $\vec{f}$, $\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}) = 0$. Cela ne suffit pas à *prouver* que, si $\operatorname{div}\vec{g} = 0$, alors il existe une fonction $\vec{f}$ telle que $\vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}$. Nous l'admettrons.

L'équation (VI.11) a pour conséquence[※2] qu'il existe une fonction vectorielle $\vec{A}$ dépendant de la position telle que

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}. \tag{VI.14}$$

Cette quantité s'appelle le ***potentiel vecteur***. Elle joue à l'égard de $\vec{B}$ un rôle similaire à celui de V vis-à-vis de $\vec{E}$ (ce qui explique l'appellation de ***potentiel scalaire*** aussi donnée à V).

La relation $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ ne suffit pas à exprimer $\vec{A}$ de manière univoque à partir de la loi de Biot et Savart. Comme lorsqu'on calcule le potentiel scalaire V à partir de $\vec{E}$, on convient que le potentiel vecteur est nul à l'infini. Cette convention n'est pas toujours appropriée si la distribution de courant n'est pas spatialement bornée et il faut alors préciser celle qu'on adopte. La convention $\vec{A}(\infty) = \vec{0}$ ne suffit de toute façon pas à déterminer $\vec{A}$. En effet, pour toute fonction f, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) = \vec{0}$, donc si $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$, on a aussi $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}'$ avec $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$. Pour déterminer complètement $\vec{A}$, on impose une condition dite de ***jauge***. La jauge utilisée par défaut en magnétostatique est la ***jauge de Coulomb***,

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0. \tag{VI.15}$$

Avec la convention $\vec{A}(\infty) = \vec{0}$ et la jauge de Coulomb, on a

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \iiint_P \frac{\vec{j}(P)}{PM}\,đ\tau. \tag{VI.16}$$

Pour des distributions surfacique ou linéique de courant, il suffit de faire les substitutions suivantes :

Distr. volumique	Distr. surfacique	Distr. linéique
$\vec{j}(P)\,đ\tau$	$\vec{J}(P)\,đS$	$I(P)\,đ\vec{\ell}$
$\iiint_P$	$\iint_P$	$\int_P$

La loi de Biot et Savart n'est exacte que lorsque les charges et les courants sont stationnaires. Bien qu'obtenue à partir de celle-ci, nous verrons que l'équation (VI.11) reste vraie même quand ce n'est pas le cas. Le potentiel vecteur $\vec{A}$ dépend alors de la position et du temps.

c. Symétries et invariances en magnétostatique

1. Symétries

Les conséquences des symétries de la distribution de courant sur le champ magnétique $\vec{B}$ et le potentiel vecteur $\vec{A}$[※3] sont résumées dans le tableau suivant, où $\mathcal{P}$ est un plan et M est un point de l'espace :

	Distribution de courants	
	symétrique par rapport à $\mathcal{P}$	**antisymétrique par rapport à $\mathcal{P}$**
Type de symétrie de $\vec{B}$ et $\vec{A}$ par rapport à $\mathcal{P}$	**$\vec{B}$ antisymétrique, $\vec{A}$ symétrique**	**$\vec{B}$ symétrique, $\vec{A}$ antisymétrique**
Pour $M \in \mathcal{P}$	**$\vec{B}(M) \perp \mathcal{P}$, $\vec{A}(M) \,//\, \mathcal{P}$**	**$\vec{B}(M) \,//\, \mathcal{P}$, $\vec{A}(M) \perp \mathcal{P}$**

2. Invariances

- **Invariance par translation** : si $\vec{\jmath}$ est invariant par translation d'axe $\mathcal{D}$, alors $\vec{B}$ et $\vec{A}$ le sont aussi.
- **Invariance par rotation** : si $\vec{\jmath}$ est invariant par rotation d'axe $\mathcal{D}$, alors $\vec{B}$ et $\vec{A}$ le sont aussi.

3. Pour le potentiel, ce qui suit ne vaut qu'avec l'expression (VI.16) et ses analogues en dimension 1 et 2.

D. Forme intégrale du théorème d'Ampère

1. Énoncé du théorème

Le potentiel vecteur est généralement un peu plus facile à obtenir que le champ magnétique, mais sa détermination nécessite de calculer trois intégrales, en l'absence de symétrie, alors que le calcul du champ électrique via celui du potentiel scalaire ne requiert le calcul que d'une seule. Lorsque les symétries le permettent, il est plus simple d'utiliser un nouveau théorème, le théorème d'Ampère, que nous allons énoncer ci-après et que le cas particulier d'un fil infini rectiligne parcouru par un courant (§ VI.A.2) va nous permettre de découvrir. Calculons la circulation du champ créé par un tel fil sur une boucle fermée :

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \frac{\vec{u}_\phi}{\rho} \cdot (\mathrm{d}\rho\, \vec{u}_\rho + \rho\, \mathrm{d}\phi\, \vec{u}_\phi + \mathrm{d}z\, \vec{u}_z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \mathrm{d}\phi. \tag{VI.17}$$

Or

$$\oint \mathrm{d}\phi = 2\, n\, \pi, \tag{VI.18}$$

où n est le nombre de tours que fait la boucle autour du fil, comptés positivement dans le sens trigonométrique défini par $\vec{u}_z$ et négativement sinon. Donc, pour un fil rectiligne infini et une boucle fermée, quelle que soit sa forme, la circulation de $\vec{B}$ sur $\mathcal{C}$ est égale à $\mu_0 I_{\text{enl}}$, où I_{enl} est l'intensité enlacée par la boucle.

Nous admettrons que ce résultat est général[※4]. Le champ magnétostatique obéit au ***théorème d'Ampère***, dont la ***forme intégrale*** est la suivante : **pour toute courbe fermée,**

$$\oint_{P\in\mathcal{C}} \vec{B}(P) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\, I_{\text{enl}}, \tag{VI.19}$$

où l'**intensité I_{enl} enlacée par $\mathcal{C}$** vaut

$$I_{\text{enl}} = \iint_{P'\in\mathcal{S}} \vec{\jmath}(P') \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{VI.20}$$

dans le cas d'une distribution volumique de courant.

Dans l'équation (VI.19),

- $\mathcal{C}$ est une courbe fermée, orientée arbitrairement. Elle est fictive, comme la surface utilisée dans le théorème de Gauss ;
- le terme de gauche est la *circulation* de $\vec{B}$ le long de $\mathcal{C}$;
- le point P décrit la courbe $\mathcal{C}$ toute entière ;
- $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est un élément vectoriel de longueur de $\mathcal{C}$ autour de P, orienté dans le même sens que $\mathcal{C}$.

Dans l'équation (VI.20),

- $\mathcal{S}$ est n'importe quelle surface s'appuyant sur $\mathcal{C}$;
- le terme de droite est le *flux* de $\vec{\jmath}$ à travers $\mathcal{S}$;
- P' balaie toute la surface $\mathcal{S}$;
- $\mathrm{d}\vec{S}$ est un élément de surface de $\mathcal{S}$ autour de P', normal à la surface en P' et orienté selon la règle de la main droite (c.-à-d. selon la direction indiquée par le pouce droit, quand les autres doigts de cette main sont dirigés dans le sens de la courbe).

Pour des fils parcourus par des intensités I_1, I_2, etc. et traversant une surface $\mathcal{S}$ quelconque s'appuyant sur $\mathcal{C}$, l'intensité enlacée se réduit à

$$I_{\text{enl}} = \sum_k s_k\, I_k, \tag{VI.21}$$

où

- **$s_k = +1$ si le courant est « sortant »**, c.-à-d. orienté dans le même sens que la surface au point d'intersection[※5] ;
- **$s_k = -1$ si le courant est « entrant »**.

Si un fil traverse $\mathcal{S}$ plusieurs fois, son intensité doit apparaître plusieurs fois dans (VI.21) et à chaque fois avec le signe approprié.

2. Application : solénoïde infini

Considérons un solénoïde infini rectiligne, c.-à-d. un ensemble de spires jointives de même rayon R, parallèles, coaxiales et isolées électriquement les unes des autres. Le solénoïde est parcouru par un courant I.

4. On peut l'établir à partir de la loi de Biot et Savart, mais la démonstration fait appel à la notion hors programme de distribution de Dirac.
5. L'angle en ce point entre le vecteur tangent au fil orienté dans le sens adopté pour I_k, d'une part, et le vecteur normal à la surface, d'autre part, est alors inférieur à $\pi/2$.

Notons (Oz) son axe, orienté de telle sorte que le courant soit selon $\vec{u}_\phi$, et n le nombre de spires par unité de longueur. Tout plan perpendiculaire à (Oz) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc, en tout point M de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z), $\vec{B}$ est normal à ce plan, c.-à-d. $\vec{B} = B_z(\rho, \phi, z)\,\vec{u}_z$. La distribution de courant est par ailleurs invariante par translation selon (Oz), donc B_z ne dépend pas de z ; elle est aussi invariante par rotation autour de cet axe, donc B_z ne dépend pas de ϕ et $\vec{B} = B_z(\rho)\,\vec{u}_z$.

Appliquons le théorème d'Ampère à une boucle rectangulaire dans un plan $\phi = \mathrm{c^{te}}$, dont l'un des côtés est sur l'axe (Oz) et le côté opposé est à une distance ρ de l'axe. Notons a la longueur des deux autres côtés et orientons la boucle de telle sorte que son sens le long du côté sur l'axe soit selon $\vec{u}_z$. On a

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = B_z(0)\,a - B_z(\rho)\,a. \tag{VI.22}$$

Si $\rho < R$, le courant enlacé par la boucle est nul. Si $\rho > R$, le courant enlacé vaut $n\,a\,I$. On a donc

$$B_z(\rho) = \begin{cases} B_z(0) & \text{à l'intérieur du solénoïde,} \\ B_z(0) - \mu_0\,n\,I & \text{à l'extérieur.} \end{cases} \tag{VI.23}$$

Pour achever le calcul de $\vec{B}$, il faut déterminer sa valeur en au moins un point[※6]. Montrons que $\vec{B}$ est nul quand ρ tend vers l'infini. Le champ créé par la portion de solénoïde comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$ est

$$\vec{dB} = n\,\mathrm{d}z\,\frac{\mu_0\,I}{4\,\pi} \int_{\phi=0}^{2\,\pi} \frac{\vec{d\ell} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3}, \tag{VI.24}$$

avec $d\ell = R\,\mathrm{d}\phi$. Or

$$\left\| \frac{\vec{d\ell} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3} \right\| \leqslant d\ell \left\| \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \right\| = \frac{d\ell}{PM^2} \leqslant \frac{R\,\mathrm{d}\phi}{(\rho - R)^2 + z^2}. \tag{VI.25}$$

On a donc

$$\|\vec{dB}\| \leqslant \frac{\mu_0\,n\,I\,R}{2} \, \frac{\mathrm{d}z}{(\rho - R)^2 + z^2}. \tag{VI.26}$$

Comme

$$\|\vec{B}\| = \left\| \int_{z=-\infty}^{\infty} \vec{dB} \right\| \leqslant \int_{z=-\infty}^{\infty} \|\vec{dB}\|, \tag{VI.27}$$

on obtient, en faisant le changement de variable $u = z/(\rho - R)$,

$$\|\vec{B}\| \leqslant \frac{\mu_0\,n\,I\,R}{2\,(\rho - R)} \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = \frac{\mu_0\,n\,I\,R}{2\,(\rho - R)} \big[\arctan u\big]_{u=-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0\,n\,I\,R\,\pi}{2\,(\rho - R)}. \tag{VI.28}$$

Quand $\rho \to \infty$, $\|\vec{B}\| \to 0$, donc $\vec{B} \to \vec{0}$. On peut donc conclure que

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0\,n\,I\,\vec{u}_z & \text{à l'intérieur d'un solénoïde infini,} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur.} \end{cases} \tag{VI.29}$$

Ce calcul est en réalité indépendant de la forme des « spires » du moment qu'elles sont perpendiculaires à un même axe et que le solénoïde est invariant par translation selon cet axe.

E. Équations locales de la magnétostatique

1. Forme locale du théorème d'Ampère. Équation de Poisson

On connaît déjà l'équation $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

Le théorème d'Ampère fournit une autre équation locale. En effet, d'après le théorème de Stokes, pour toute courbe fermée $\mathcal{C}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} \cdot \vec{dS}, \tag{VI.30}$$

où $\mathcal{S}$ est une surface quelconque s'appuyant sur $\mathcal{C}$ et d'orientation cohérente avec celle de $\mathcal{C}$. Comme

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{\jmath} \cdot \vec{dS} \tag{VI.31}$$

d'après le théorème d'Ampère et que ces deux égalités sont vraies quelle que soit la surface $\mathcal{S}$, on obtient la

6. Pour des spires circulaires, on peut aussi montrer en utilisant la loi de Biot et Savart que le champ sur l'axe vaut $\vec{B} = \mu_0\,n\,I\,\vec{u}_z$.

forme locale du théorème d'Ampère :

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath}. \tag{VI.32}$$

Cette relation n'est rigoureusement valable qu'en magnétostatique. Elle peut également être utilisée dans l'ARQS. Remarquer qu'on a alors bien $\operatorname{div}\vec{\jmath} = 0$ puisque la divergence d'un rotationnel est nulle.

Pour toute fonction $\vec{f}$ de la position,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\operatorname{div}\vec{f}) - \Delta\vec{f}. \tag{VI.33}$$

Comme $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$, on obtient avec la jauge de Coulomb ($\operatorname{div}\vec{A} = 0$) que

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\,\vec{\jmath}. \tag{VI.34}$$

Cette relation est l'***équation de Poisson pour le champ magnétostatique***. En projetant sur chaque axe de la base cartésienne, on obtient la même équation que pour le potentiel électrostatique, avec A_x, etc., au lieu de V, j_x, etc., au lieu de ϱ, et μ_0 au lieu de $1/\varepsilon_0$. On retrouve immédiatement l'expression

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\iiint_P \frac{\vec{\jmath}(P)}{PM}\,\mathrm{d}\tau. \tag{VI.35}$$

2. Lignes de champ en électrostatique et magnétostatique

Le champ « électromagnétostatique » est entièrement déterminé par les quatre équations

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{VI.36}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}, \tag{VI.37}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{VI.38}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath} \tag{VI.39}$$

et par les conditions aux limites $\vec{E}(\infty) = \vec{B}(\infty) = \vec{0}$ pour une distribution de charges et de courants stationnaires dont la densité tend suffisamment vite vers 0 à l'infini. Les conséquences de ces équations sont les suivantes pour les lignes de champ :

- (VI.36) $\Rightarrow$ les lignes de champ électrique naissent (divergent) d'une charge ponctuelle positive et meurent en (convergent vers) une charge négative ;
- (VI.37) $\Rightarrow$ les lignes de champ électrostatique ne forment jamais de boucle fermée (puisque V décroît le long d'une ligne de champ) ;
- (VI.38) $\Rightarrow$ il n'existe pas de charges magnétiques (on parle de ***monopôles magnétiques***). On aurait sinon $\operatorname{div}\vec{B} \neq 0$ à l'endroit d'une telle charge. Les lignes de champ magnétique forment souvent[※7] des boucles fermées dans les problèmes simples considérés dans le cours, en raison des symétries des courants ;
- (VI.39) $\Rightarrow$ les lignes de champ magnétique s'enroulent autour des courants.

3. Traversée d'une nappe de courants

Considérons une nappe $\mathcal{N}$ de courant séparant une zone Z_1 d'une zone Z_2. Notons $\vec{J}$ la densité surfacique de courant en un point M de $\mathcal{N}$ et $\vec{n}_{1\to2}$ le vecteur normal à $\mathcal{N}$ en M dirigé de Z_1 vers Z_2. Comparons les champs magnétiques $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ dans Z_1 et Z_2 au voisinage de M.

a. Composante normale de $\vec{B}$

Pour cela, prenons un cylindre $\mathcal{S}$ d'axe $(M, \vec{n}_{1\to2})$, traversé par la nappe et fermé dans Z_1 et Z_2, respectivement, par des surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ perpendiculaires à $\vec{n}_{1\to2}$. L'aire S de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est infinitésimale. La longueur du cylindre selon $\vec{n}_{1\to2}$ est de $h/2$ dans Z_1 et de même dans Z_2. Notons $\mathcal{S}_3$ la surface parallèle à $\vec{n}_{1\to2}$. On a $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$, donc

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\mathcal{S}_3} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0. \tag{VI.40}$$

7. Mais pas nécessairement : cf. « Lines of force in electric and magnetic fields », par J. Slepian, *American Journal of Physics* (AJP) 19, 87 (1951) ; « Topology of steady current magnetic fields », K.L. McDonald, AJP 22, 586 (1954) ; « The magnetic field lines of a helical coil are not simple loops », M. Lieberherr, AJP 78, 1117 (2010).

Faisons tendre la hauteur du cylindre vers 0. On a $\lim_{h\to 0} \iint_{\mathcal{S}_3} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$, donc

$$\lim_{h\to 0}\left(\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right) = 0. \tag{VI.41}$$

Sur $\mathcal{S}_1$, $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,(-\vec{n}_{1\to 2})$, donc

$$\lim_{h\to 0}\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{B}_1\cdot \mathrm{d}S\,\vec{n}_{1\to 2} = -\iint_{\mathcal{S}_1} (\vec{B}_1^{\perp} + \vec{B}_1^{/\!/})\cdot \mathrm{d}S\,\vec{n}_{1\to 2} = -B_1^{\perp}\,S, \tag{VI.42}$$

où $B_1^{\perp} = \vec{B}_1\cdot\vec{n}_{1\to 2}$, $\vec{B}_1^{\perp} = B_1^{\perp}\,\vec{n}_{1\to 2}$ est perpendiculaire à la nappe $\mathcal{N}$ et $\vec{B}_1^{/\!/} = \vec{B}_1 - \vec{B}_1^{\perp}$ est parallèle à $\mathcal{N}$. De même, sur $\mathcal{S}_2$, $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,(+\vec{n}_{1\to 2})$, donc

$$\lim_{h\to 0}\iint_{\mathcal{S}_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = +B_2^{\perp}\,S. \tag{VI.43}$$

En divisant par S, on obtient finalement

$$B_2^{\perp} - B_1^{\perp} = 0. \tag{VI.44}$$

b. Composante tangentielle de $\vec{B}$

Pour établir la relation entre $\vec{B}_1^{/\!/}$ et $\vec{B}_2^{/\!/}$, considérons un rectangle orienté $\mathcal{C}$ de centre M, traversé par la nappe, et dont les côtés opposés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, de longueur infinitésimale ℓ, sont perpendiculaires à $\vec{n}_{1\to 2}$. La longueur des côtés parallèles à $\vec{n}_{1\to 2}$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, est de $h/2$ dans Z_1 et Z_2. On a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$, donc

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{\mathcal{C}_3} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{\mathcal{C}_4} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}. \tag{VI.45}$$

Faisons tendre h vers 0. On a $\lim_{h\to 0}\int_{\mathcal{C}_3} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \lim_{h\to 0}\int_{\mathcal{C}_4} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$, donc

$$\lim_{h\to 0}\left(\int_{\mathcal{C}_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}\right) = \mu_0\,I_{\mathrm{enl}}. \tag{VI.46}$$

Posons $\vec{t} = \vec{J}/J$ et notons $\vec{t}'$ le vecteur tel que la base $(\vec{t}, \vec{t}', \vec{n}_{1\to 2})$ soit orthonormée directe. (Les vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{t}'$ sont donc tangents à la nappe.)

Choisissons d'abord un rectangle orienté de telle sorte que le sens de $\mathcal{C}_1$ est selon $\vec{t}'$. Les éléments de la surface plane s'appuyant sur le contour d'Ampère sont alors selon $\vec{t}$, donc l'intensité enlacée par ce rectangle vaut $J\,\ell$. Par ailleurs, $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}\ell\,\vec{t}'$ sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathrm{d}\vec{\ell} = -\mathrm{d}\ell\,\vec{t}'$ sur $\mathcal{C}_2$, donc

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathcal{C}_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \ell\,\vec{B}_1\cdot\vec{t}' \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\int_{\mathcal{C}_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\ell\,\vec{B}_2\cdot\vec{t}', \tag{VI.47}$$

d'où $(\vec{B}_1 - \vec{B}_2)\cdot\vec{t}' = \mu_0\,J$.

Considérons maintenant un rectangle orienté de telle sorte que le sens de $\mathcal{C}_1$ est selon $\vec{t}$. L'intensité enlacée est alors nulle, donc $(\vec{B}_1 - \vec{B}_2)\cdot\vec{t} = 0$.

c. Expression synthétique

Combinons les résultats obtenus pour les composantes normale et tangentielle :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = ([\vec{B}_2 - \vec{B}_1]\cdot\vec{t})\,\vec{t} + ([\vec{B}_2 - \vec{B}_1]\cdot\vec{t}')\,\vec{t}' + ([\vec{B}_2 - \vec{B}_1]\cdot\vec{n}_{1\to 2})\,\vec{n}_{1\to 2} = -\mu_0\,J\,\vec{t}', \tag{VI.48}$$

soit

$$\boldsymbol{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\,\vec{J}\times\vec{n}_{1\to 2}}, \tag{VI.49}$$

où $\vec{J}$ est la densité surfacique de courant en un point M d'une nappe de charges, $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ sont les champs magnétiques au voisinage de M dans les zones Z_1 et Z_2 séparées par la nappe et $\vec{n}_{1\to 2}$ est un vecteur unitaire, normal à la nappe en M et orienté de Z_1 vers Z_2.

F. Champ et potentiel créés par un dipôle magnétique

1. Boucle fermée

Calculons d'abord le potentiel vecteur créé en un point M par une boucle fermée $\mathcal{C}$ parcourue par un courant I. On a

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\,\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}_r}{r} + \frac{OP^2}{r^2}\right)^{-1/2}, \tag{VI.50}$$

où P est un point quelconque de la boucle, O est un point voisin de celle-ci, $r = OM$ et $\vec{u}_r = \overrightarrow{OM}/r$. À grande distance de O,

$$\frac{1}{PM} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}_r}{r}\right), \tag{VI.51}$$

donc

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\oint_{P\in\mathcal{C}}\frac{I(P)\,\mathrm{đ}\vec{\ell}}{PM} \approx \frac{\mu_0}{4\,\pi\,r}\oint_{P\in\mathcal{C}} I(P)\,\mathrm{đ}\vec{\ell} + \frac{\mu_0}{4\,\pi\,r^2}\oint_{P\in\mathcal{C}} I(P)\,(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}_r)\,\mathrm{đ}\vec{\ell}. \tag{VI.52}$$

L'intensité étant constante le long d'une ligne de courant en régime stationnaire (donc sur la boucle),

$$\oint_{P\in\mathcal{C}} I(P)\,\mathrm{đ}\vec{\ell} = I\oint_{P\in\mathcal{C}}\mathrm{đ}\vec{\ell} = \vec{0}, \tag{VI.53}$$

puisque la courbe est fermée : le premier terme, « monopolaire », du développement est nul.

Calculons le terme suivant, « dipolaire », dans le cas particulier d'une spire circulaire de centre O et de rayon R. Pour simplifier le calcul, prenons $\vec{u}_z$ perpendiculaire à la spire, tel que celle-ci soit orientée selon $\vec{u}_\phi$, et $\vec{u}_x$ tel que M soit dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$. En notant ϕ la longitude de P et θ la colatitude de M, on a

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\phi\,\vec{u}_x + R\sin\phi\,\vec{u}_y, \tag{VI.54}$$

$$\vec{u}_r = \sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_z, \tag{VI.55}$$

$$\mathrm{đ}\vec{\ell} = R\,\mathrm{d}\phi\,\vec{u}_\phi, \qquad \text{avec } \vec{u}_\phi = -\sin\phi\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y, \tag{VI.56}$$

donc

$$\oint_{P\in\mathcal{C}}(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}_r)\,\mathrm{đ}\vec{\ell} = \int_{\phi=0}^{2\,\pi} R^2\cos\phi\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\vec{u}_\phi \tag{VI.57}$$

$$= R^2\sin\theta\left(-\vec{u}_x\underbrace{\int_{\phi=0}^{2\,\pi}\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi}_{=0} + \vec{u}_y\underbrace{\int_{\phi=0}^{2\,\pi}\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi}_{=\pi}\right) \tag{VI.58}$$

$$= \pi\,R^2\sin\theta\,\vec{u}_y = \pi\,R^2\,\vec{u}_z\times\vec{u}_r = \vec{S}\times\vec{u}_r, \tag{VI.59}$$

où $\vec{S}$ est le vecteur surface de la boucle. Loin de la boucle, on obtient donc

$$\boldsymbol{\vec{A}(M) \approx \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{u}_r}{r^2}}, \tag{VI.60}$$

où

$$\boldsymbol{\vec{m} := I\,\vec{S}} \tag{VI.61}$$

est le ***moment magnétique dipolaire*** de la boucle. Le terme dipolaire étant non nul, contrairement au terme monopolaire, la boucle constitue un dipôle magnétique. Son moment magnétique pointe du pôle « sud » du dipôle vers son pôle « nord ».

Nous admettrons que ce résultat reste valable pour une boucle fermée quelconque, avec le vecteur surface défini par

$$\boldsymbol{\vec{S} = \oint_{P\in\mathcal{C}}\mathrm{đ}\vec{S}}, \tag{VI.62}$$

où

$$\boldsymbol{\mathrm{đ}\vec{S} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OP}\times\mathrm{đ}\vec{\ell}} \tag{VI.63}$$

est le vecteur surface élémentaire du triangle constitué par O et par les extrémités de l'élément de longueur $\mathrm{đ}\vec{\ell}$ situé en P. En effet,

$$\frac{\|\overrightarrow{OP}\times\mathrm{đ}\vec{\ell}\|}{2} = \frac{\|\overrightarrow{OP}\|\times\|\mathrm{đ}\vec{\ell}\|\,|\sin\angle(\overrightarrow{OP},\mathrm{đ}\vec{\ell})|}{2} = \frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2} = \mathrm{đ}S. \tag{VI.64}$$

Le vecteur $đ\vec{S}$ est par ailleurs bien orthogonal au plan du triangle et son orientation est cohérente avec celle de la boucle.

Remarquer que le vecteur $\vec{S}$ est indépendant de O. En effet, par rapport à un autre point O',

$$\oint \overrightarrow{O'P} \times đ\vec{\ell} = \oint \overrightarrow{O'O} \times đ\vec{\ell} + \oint \overrightarrow{OP} \times đ\vec{\ell} = \overrightarrow{O'O} \times \oint đ\vec{\ell} + \oint \overrightarrow{OP} \times đ\vec{\ell} = \oint \overrightarrow{OP} \times đ\vec{\ell}, \tag{VI.65}$$

puisque $\oint đ\vec{\ell} = \vec{0}$. Le moment magnétique ne dépend donc pas de O ※8.

Le champ magnétique peut se calculer à partir de $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. À grande distance d'un dipôle magnétique, on retrouve une expression analogue à celle d'un dipôle électrique :

$$\boldsymbol{\vec{B}(M) \approx \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{3\,(\vec{m}\cdot\vec{u}_r)\,\vec{u}_r - \vec{m}}{r^3}}. \tag{VI.66}$$

2. Distribution volumique localisée de courant

Le calcul pour une distribution volumique de courant est assez laborieux. On a

$$\vec{A}(M) \approx \frac{\mu_0}{4\,\pi\,r} \iiint_{P\in\mathcal{V}} \vec{\jmath}(P)\,đ\tau + \frac{\mu_0}{4\,\pi\,r^2} \iiint_{P\in\mathcal{V}} \vec{\jmath}(P)\,(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}_r)\,đ\tau. \tag{VI.67}$$

Pour une distribution localisée (c.-à-d. telle que $\vec{\jmath} = \vec{0}$ au-delà d'une certaine distance), on peut montrer en régime stationnaire, à partir de $\operatorname{div}\vec{\jmath} = 0$, que

$$\iiint_{P\in\mathcal{V}} \vec{\jmath}(P)\,đ\tau = \vec{0}, \tag{VI.68}$$

donc le terme monopolaire est encore nul. Sous les mêmes conditions, les résultats (VI.60) et (VI.66) restent valables, avec

$$\boldsymbol{\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \overrightarrow{OP} \times \vec{\jmath}(P)\,đ\tau}. \tag{VI.69}$$

On peut retrouver cette expression en partant de l'expression pour une boucle,

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint \overrightarrow{OP} \times I(P)\,đ\vec{\ell}, \tag{VI.70}$$

et en faisant les substitutions $I(P)\,đ\vec{\ell} \to \vec{\jmath}(P)\,đ\tau$ et $\oint \to \iiint$ ※9. Une distribution localisée de courants de moment magnétique non nul est appelée un ***dipôle magnétique***.

3. Électro-aimants et aimants permanents

Les résultats ci-dessus ont été établis pour un ***électro-aimant***, c'est-à-dire pour un circuit fermé parcouru par un courant. Un électro-aimant n'a un moment magnétique non nul que tant que l'intensité du courant n'est pas nulle, donc qu'il est soumis à une "force" électromotrice (que celle-ci soit due à un générateur ou au phénomène d'induction électromagnétique).

Il existe aussi des ***aimants permanents*** ※10, dont le moment magnétique global provient de l'alignement des moments intrinsèques des particules élémentaires qu'ils contiennent ; leur aimantation ne requiert pas de force électromotrice pour persister ※11. Un aimant permanent étant équivalent à une distribution volumique localisée de courants microscopiques, les expressions (VI.60) et (VI.66) de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ en fonction du moment magnétique $\vec{m}$ sont également applicables loin de l'aimant. Hors de l'aimant, les lignes de champ magnétique vont de son pôle nord à son pôle sud (si l'aimant est la seule source de champ magnétique) ; dans l'aimant, elles vont du pôle sud au pôle nord.

---

8. Plus généralement, quelle que soit la surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur la courbe fermée $\mathcal{C}$ et orientée en accord avec celle-ci, on a $\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} đ^2\vec{S}$. Le moment magnétique est donc indépendant de la surface $\mathcal{S}$ particulière choisie pour le calcul.
9. Attention, il ne s'agit que d'un moyen mnémotechnique, pas d'une preuve. Contrairement à ce qu'affirment certains ouvrages, la relation $\operatorname{div}\vec{\jmath} = 0$ ne permet pas de conclure que, en régime stationnaire, une distribution localisée volumique de courants est décomposable en tubes élémentaires fermés de courant. Cf. note 7 de ce chapitre.
10. Leur étude relève de l'électromagnétisme des milieux continus et sort du cadre du présent cours.
11. Cette aimantation peut cependant avoir eu des courants macroscopiques pour origine. C'est notamment le cas des aimants naturels, dont le moment est aligné sur le champ magnétique terrestre lors de leur formation ; or ce champ est produit par des mouvements métalliques dans le noyau liquide. (Ces mouvements sont entretenus depuis des milliards d'années par le phénomène de dynamo.)